

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ АЭРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ ПРОФЕССОРА Н.Е. ЖУКОВСКОГО

УДК 532.526.3:533.6.011.55+519.63

На правах рукописи



Чувахов Павел Владимирович

**Зарождение турбулентности
в сверхзвуковых пограничных слоях**

Специальность 1.1.9 — Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН, проф.
Егоров Иван Владимирович

Оглавление

Введение	6
0.1 Пути к турбулентности в сверхзвуковых пограничных слоях	12
0.2 Степень разработанности темы исследования	15
0.3 Общая характеристика работы	25
Глава 1. Общая постановка задачи и методы её решения	36
1.1 Физическая постановка	36
1.1.1 Дифференциальные уравнения Навье — Стокса	37
1.1.2 Граничные и начальные условия	41
1.1.3 Элементарные возмущения в однородном потоке	43
1.2 Численный метод	46
1.2.1 Аппроксимация	47
1.2.2 Решение сеточных уравнений	50
1.2.3 Исследование возмущённых течений	52
1.3 Выводы по главе	59
Глава 2. Критерии применимости и достоверность численного метода .	61
2.1 Численная диссипация	62
2.1.1 Затухание акустических волн в однородном потоке	62
2.1.2 Невязкий случай	64
2.1.3 Сходимость по времени	67
2.1.4 Инвариантность численной диссипации	69
2.1.5 Общие замечания	70
2.2 Взаимодействие малых возмущений со скачком уплотнения	71
2.2.1 Постановка задачи	78
2.2.2 Вязкий профиль ударной волны	81
2.2.3 Критерий разрешённого скачка	83
2.2.4 Численная природа аномального эффекта	85
2.2.5 Размывание скачка	91
2.2.6 Косой скачок уплотнения	95
2.2.7 Замечание о роли наклона волновых фронтов	97
2.3 Волновой поезд первой моды	97

2.3.1	Постановка задачи	98
2.3.2	Возмущённое поле течения	100
2.3.3	Верификация на линейном режиме	102
2.3.4	Верификация на нелинейном режиме	103
2.3.5	Выводы	106
2.4	Замечание о заострённой кромке	109
2.5	Выводы по главе	110
Глава 3. Способ возбуждения реалистичных возмущений		111
3.1	Пространственная задача устойчивости	112
3.1.1	Асимптотика трёхмерного волнового пакета	113
3.1.2	Параболическая аппроксимация эйконала	114
3.1.3	Замечание о волновом пакете второй моды	115
3.1.4	Нестационарное асимптотическое граничное условие	116
3.2	Волновой пакет второй моды	117
3.2.1	Свойства асимптотической формы волнового пакета	118
3.2.2	Постановка задачи	120
3.2.3	Результаты	123
3.2.4	Выводы	131
3.3	Волновой пакет первой моды	132
3.3.1	Генератор возмущений	135
3.3.2	Уточнение параболической аппроксимации эйконала	137
3.3.3	Линейный режим	139
3.3.4	Нелинейный режим (турбулентное пятно)	141
3.3.5	Выводы	145
3.4	Выводы по главе	147
Глава 4. Спонтанное излучение акустических волн		148
4.1	Анализ устойчивости	149
4.2	Численное моделирование	154
4.2.1	Волновой поезд	157
4.2.2	Волновой пакет	161
4.3	Влияние спонтанного излучения на переход к турбулентности	168
4.4	Выводы по главе	169
Глава 5. Развитие возмущений над углом разрежения		170

5.1	Постановка задачи	174
5.1.1	Устойчивость автомодельного пограничного слоя	175
5.1.2	Генератор возмущений	177
5.1.3	Условия расчётов	179
5.2	Вторая мода	182
5.2.1	Невозмущённое течение	182
5.2.2	Анализ устойчивости	184
5.2.3	Линейный режим	186
5.2.4	Нелинейный режим (турбулентное пятно)	193
5.3	Первая мода	196
5.3.1	Невозмущённое течение	198
5.3.2	Развитие возмущений	200
5.4	Сравнение линейного и нелинейного режимов	205
5.5	Задержка турбулентного пятна	207
5.5.1	Теоретическая модель	207
5.5.2	Результаты численного моделирования	207
5.6	Выводы по главе	210
Глава 6. Переход на прямом крыле с тонким параболическим профилем		214
6.1	Невозмущённое течение	215
6.2	Максимально возможное усиление возмущений	220
6.3	Верификация	226
6.3.1	Развитие возмущений от генератора	228
6.3.2	Сравнение с теорией	230
6.3.3	Сеточная сходимость	233
6.4	Роль атмосферной турбулентности	234
6.4.1	Нестационарные граничные условия	236
6.4.2	Результаты	238
6.5	Роль акустического шума	242
6.5.1	Нестационарные граничные условия	244
6.5.2	Результаты	247
6.6	Перекрытое сравнение результатов	251
6.7	О роли микрочастиц	255
6.8	Выводы по главе	257

Глава 7. Восприимчивость к микрочастицам	260
7.1 Математическая модель частицы	263
7.2 Теоретическое решение	266
7.3 Выделение моды из численного решения	267
7.4 Численная модель частицы	268
7.4.1 Траектория	269
7.4.2 Точечный источник	270
7.4.3 Тестовая задача	271
7.4.4 Расчётная сетка	272
7.4.5 Верификация	274
7.5 Результаты	280
7.5.1 Эволюция волнового пакета	281
7.5.2 Модальный состав возмущения	286
7.5.3 О постановке эксперимента	288
7.6 Статистическая модель ЛТП	289
7.7 Выводы по главе	291
Заключение	294
Список сокращений и условных обозначений	298
Список литературы	302
Публикации автора по теме диссертации	329

Введение

Зарождение турбулентности — одна из ключевых проблем фундаментальной аэрогидродинамики и прикладной аэродинамики летательных аппаратов нового поколения, таких как высокоэкономичные и экологически чистые транспортные системы с естественной или искусственной ламинаризацией, сверхзвуковые самолёты с низким уровнем звукового удара [1]. Неугасающий интерес к проблеме перехода обусловлен как важностью её решения для фундаментальной науки, так и и большим прикладным значением этого решения. Дополнительное турбулентное перемешивание приводит к тому, что в разы возрастают вязкие потери импульса при формировании пограничного слоя, что приводит к возрастанию вязкого трения на поверхности. При больших сверхзвуковых скоростях на первый план выходит избыточный нагрев поверхности, который в турбулентном пограничном слое оказывается в 3 – 6 раз выше, чем в ламинарном [2]. Естественно, что разработчики летательных аппаратов хотят знать возможное положение ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП) при заданных условиях полёта, чтобы правильно рассчитать аэродинамические характеристики и оптимизировать систему теплозащиты. Современные инженерные методы предсказания положения перехода на сверхзвуковых летательных аппаратах основаны на полуэмпирических зависимостях и имеют погрешность более 100%. Из-за этого системы теплозащиты проектируются с большим запасом, исходя из полностью турбулентного режима течения на всей траектории полёта, а расчётная полезная нагрузка сокращается. Например, оценки, проведённые в [3] для экспериментального аэрокосмического самолёта Rockwell X-30, показывают, что увеличение протяжённости ламинарного участка с 20% до 80% длины аппарата позволило бы уменьшить взлётный вес аппарата как минимум вдвое.

Ламинаризация крыла сверхзвукового самолёта влечёт за собой ряд благоприятных последствий с точки зрения текущих требований к разрабатываемым летательным аппаратам (ЛА): снижение потребной мощности силовой установки и её габаритов; уменьшение шума струи силовой установки на режиме взлёта и посадки; снижение количества продуктов сгорания авиатоплива, выбрасываемых в атмосферу, и т.д. После завершения в 2003 г. эксплуатации сверхзвукового пассажирского самолёта (СПС) Конкорд назрела необходимость в разработке СПС нового поколения, удовлетворяющего жёстким ограничениям на уровень звуко-

вого удара [1]. Для удовлетворения этих ограничений, в частности, потребуется увеличить аэродинамическое качество самолёта¹, что можно достичь с помощью ламинаризации обтекания крыла и других элементов планера.

Несмотря на многолетние исследования научных лабораторий всего мира, физические механизмы зарождения и развития турбулентности в пограничных слоях до сих пор изучены слабо, особенно при сверхзвуковых скоростях потока.

Переход от хорошо предсказуемого структурированного ламинарного течения к хаотичному нестационарному турбулентному течению был впервые описан без малого два столетия назад немецким физиком-гидростроителем Готтхильфом Хагеном. Спустя ещё почти полвека Осборн Рейнольдс опубликовал [4] результаты систематических наблюдений этого явления, которые были получены в его известной экспериментальной установке, бережно хранимой сегодня в университете города Манчестера в Великобритании. Однако даже сегодня, за исключением небольшого числа частных случаев, мы не в состоянии *предсказать*, в каком месте пограничного слоя на фюзеляже или крыле самолёта при данных параметрах набегающего потока изначально ламинарное течение начнёт превращаться в турбулентное. И этому есть причина.

Подавляющее большинство пристенных течений сплошной среды, описываемых в рамках уравнений Навье — Стокса, неустойчиво. Сегодня известно, что именно неустойчивость пограничного слоя приводит к его турбулизации [5; 6]. Для описания начальной стадии развития неустойчивости (до тех пор, пока амплитуда мала и нелинейность несущественна) применяется математический аппарат *линейной теории устойчивости* (ЛТУ). В общем случае неустойчивость можно разделить на два типа: абсолютная или конвективная [7]. Математически было показано [8], что сверхзвуковой пограничный слой является *конвективно* неустойчивым, то есть возмущение должно распространяться вниз по потоку и затухать в любой точке пространства при достаточно большом времени наблюдения. Таким образом, наличия самой по себе конвективной неустойчивости *недостаточно*, чтобы течение стало турбулентным. Ключевую роль в зарождении турбулентности играет начальный фон возмущений, проникающих в пограничный слой. Бушнелл [9] обобщил возможные источники внешних возмущений. Среди них следует выделить атмосферную турбулентность вихревой природы, акустический шум, температурные флуктуации атмосферы, вибрацию поверхности вследствие работы

¹Предполагается опосредствованное влияние качества на звуковой удар: рост качества позволит увеличить высоту крейсерского полёта и уменьшить угол атаки.

силовой установки² или возникающих в полёте автоколебаний, неоднородность поверхности, атмосферные аэрозоли и даже кинетические (тепловые) флуктуации, которые в отличие от других источников возмущений доступны с одинаковой амплитудой в любой точке пограничного слоя³. Проникновение внешних возмущений внутрь пограничного слоя и возбуждение его собственных неустойчивостей — отдельная *задача восприимчивости*. Каков бы ни был механизм восприимчивости, в случае сверхзвуковых течений он значительно осложняется взаимодействием внешних возмущений с головной ударной волной перед тем, как они достигнут поверхности [12].

Фон внешних возмущений переменчив, поэтому даже наиболее детальное определение обтекаемой геометрии и условий полёта не позволит дать точный прогноз положения ЛТП вдоль всей траектории полёта. Тем не менее, можно пытаться давать среднестатистический прогноз на основе осреднённых характеристик атмосферных возмущений. Сбор информации о спектральном составе атмосферных возмущений является чрезвычайно трудоёмкой задачей. В последние годы Министерство обороны США выделяет значительные средства на программу MURI⁴, целью которой является подробное экспериментальное изучение атмосферных возмущений на высотах до 25–30 км [13]. Главные задачи этой программы — тщательно измерить атмосферные пульсации, научиться предсказывать их статистические характеристики при любых условиях предполагаемого полёта (время года, местоположение на Земле, погода на низких высотах, др.) и интегрировать разработанную методику в процесс моделирования восприимчивости и устойчивости пограничного слоя. Программа [13], по-видимому, является единственной комплексной работой такого рода. К сожалению, серьёзного продвижения в этом направлении пока не обнародовано. Вероятно, разработать универсальную модель атмосферных возмущений для широкого частотно-волнового спектра вряд ли возможно. Более реалистичный подход — выделить спектральные интервалы, характерные для восприимчивости и устойчивости сверхзвукового пограничного

²Именно она стала причиной раннего перехода в лётном эксперименте на конусах, проведённом в ЛИИ им. Громова в Жуковском. Во время испытаний работали жидкотопливные ракетные двигатели, в спектре пульсаций которых присутствовали «опасные» частоты из неустойчивой области пограничного слоя. На тот момент линейная теория устойчивости не была хорошо развита, и предвидеть такой исход событий было затруднительно [10].

³В этом случае теоретическое предсказание начала ЛТП удаётся сделать без дополнительных предположений [11].

⁴Multidisciplinary University Research Initiatives Program — Многодисциплинарная программа исследовательских инициатив университетов

слоя, а затем для этих интервалов разработать или применить известные модели внешних возмущений. Такой подход реализован в настоящей работе в главе 6.

Моделировать полётные условия в наземных аэродинамических установках также не представляется возможным: фон внешних возмущений, в котором преобладает акустический шум от турбулентного пограничного слоя на стенках сопла и рабочей части [14], уникален для каждой аэродинамической трубы (АДТ). Кроме этого, течение может быть загрязнено микрочастицами (грязь, сажа, ржавчина, старая краска и т.п.), что приводит к значительному разбросу результатов измерения ЛТП на экспериментальных моделях [15]. Поэтому исследование положения ЛТП в обычных аэродинамических трубах ограничено особенностями конкретной трубы и вряд ли может помочь предсказать ЛТП в полётных условиях. Тем не менее, важность экспериментального подхода к исследованию проблемы перехода подчёркивалась многократно. Например, в вольном переводе автора диссертации мнение известного учёного Кеннета Стетсона [16] по этому поводу звучит так:

— Чтобы сделать «хорошую» оценку положения перехода, имея скудную базу данных по ЛТП на близких геометриях, параметрах потока и спектрах внешних возмущений, необходимо понимать явление неустойчивости, а также применимость теории устойчивости и численных методов. Недостаточно просто наблюдать положение ЛТП в эксперименте, чтобы понять механизмы, стоящие за ним. Необходимо поставить эксперимент по изучению устойчивости пограничного слоя, а затем сравнить полученные результаты с предсказанием теории и численного моделирования.

Для исследования устойчивости пограничных слоёв используются *малошумные* аэродинамические трубы (АДТ), в которых приняты меры по ламинаризации течения на поверхности сопла и рабочей части (например, отсос пограничного слоя в горле сопла). Разработка таких установок для сверхзвуковых течений — очень трудоёмкий процесс. Поэтому малошумные трубы уникальны и исчисляются единицами. Их характеризуют величиной степени возмущённости потока в рабочей части (отношение амплитуды флуктуаций скорости к скорости течения), которая существенно меньше 1% [5]. Впервые малошумная труба была создана под руководством Хью Драйдена в национальном бюро стандартов США в начале 1940х годов. В ней классиками Галеном Шубауэром и Гарольдом Скрэмстэдом были получены основополагающие результаты, которые указали на практическую важ-

ность выводов линейной теории гидродинамической устойчивости [17]. В середине 1960х годов под руководством Владимира Васильевича Струминского в ИТПМ СО АН СССР⁵ были созданы малошумная аэродинамическая труба Т-324 для исследования проблемы перехода при малых дозвуковых скоростях и малошумная труба Т-325 для изучения этих же проблем при около- и сверхзвуковых скоростях потока. Эти трубы работают и сегодня. В частности, АДТ Т-325 под руководством Александра Дмитриевича Косинова позволяет исследовать устойчивость течений при числах Маха от 2 до 4. В 1970 году Филип Клебанофф создал дозвуковую малошумную АДТ KSWT⁶, в которой исследовались вопросы восприимчивости и устойчивости и которая впоследствии была перемещена в университет Аризоны (1984) и окончательно в Техасский университет (TAMU, 2005) под руководством Уильяма Сарика, где располагается по сей день [18]. В списке сверхзвуковых малошумных АДТ следует отметить китайскую трубу на число Маха 6 в NUDT⁷ [19], американскую трубу в университете Пердью на число Маха 6 (см., напр., [20]), а также недавнее сообщение университета Пердью о создании аналогичной установки на число Маха 8 [21]. Тихие трубы не моделируют возмущения в условиях натурного полёта. Однако они расширяют возможности для исследования механизмов ЛТП в контролируемых условиях.

Таким образом, внешние возмущения, запускающие процесс ламинарно-турбулентного перехода, не моделируются в аэродинамических трубах, в то время как лётные эксперименты затратны и малоинформативны. Поэтому важность теоретических и численных исследований переходных явлений возрастает.

Линейная стадия развития неустойчивостей пограничного слоя исследована наиболее подробно. В конечном итоге возбуждённые возмущения достигают амплитуд, достаточных для проявления эффектов нелинейного взаимодействия, которые и приводят к формированию сначала локализованных областей турбулентного течения (*турбулентных пятен*), а затем и развитого турбулентного пограничного слоя. Влияние восприимчивости на нелинейные механизмы, посредством которых формируются турбулентные пятна в естественных условиях сверхзвукового потока, исследовано слабо.

В рамках целостного подхода к моделированию ЛТП экспоненциальный рост возмущений на линейной стадии их развития описывается с помощью линейной

⁵Сегодня — Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук (ИТПМ СО РАН)

⁶Klebanoff — Saric wind tunnel

⁷National University of Defense Technology — Оборонный научно-технический университет

теории устойчивости; интегральное усиление возмущений характеризуется фактором N , предполагающим увеличение амплитуды возмущений в e^N раз, начиная с момента их возбуждения. Начало ЛТП предсказывается с помощью метода e^N — наиболее физически обоснованного *инженерного* подхода к предсказанию перехода [22; 23]. Недостатком метода e^N является предположение о том, что возмущения доступны всюду внутри пограничного слоя *с равными амплитудами в широком спектральном диапазоне*, и поэтому начинают нарастать от соответствующих им нейтральных точек. Это сильное предположение, однако метод позволяет достаточно надёжно предсказывать начало ЛТП, если есть априорная (главным образом, эмпирическая) информация о величине критического N -фактора, N_{cr} , в данной аэродинамической установке или для данных полётных условий. Таким образом, метод e^N учитывает действительный фон внешних возмущений *косвенно* через величину N_{cr} . Характерные значения критического N -фактора для волн Толлмина — Шлихтинга в обычных трубных условиях — $N_{cr} \approx 4...5$, а в полётных условиях — $N_{cr} \approx 10...11$. В случае, когда уровень внешних возмущений слишком низкий, переход может инициироваться кинетическими флуктуациями, которые идеально удовлетворяют предположениям метода e^N , так как они доступны всюду, а их амплитуда зависит только от температуры среды. В этом случае задача восприимчивости решается аналитически [11], что позволяет получить *оценку сверху* для величины критического N -фактора — $N_{cr} \approx 16...18$. В ряде случаев (в частности, для тех же кинетических флуктуаций) может применяться более обоснованный амплитудный метод [24–26], учитывающий восприимчивость пограничного слоя к внешним возмущениям и использующий асимптотический подход к построению поля возмущений вдали от места их возбуждения. Амплитудный метод не использует предположений e^N , но для его реализации необходимо знать спектральный состав внешних возмущений, который может меняться в зависимости от условий течения и, как правило, не доступен исследователям или инженерам.

Ниже по потоку от предсказанной точки начала ЛТП используют ту или иную эмпирическую модель для расчёта средних характеристик неравновесной (перемежающейся) турбулентности и с её помощью выходят на усреднённые по Рейнольдсу уравнения Навье — Стокса (см., например, [27]). Такие эмпирические модели базируются на ограниченной базе данных, в малой степени учитывают физические механизмы неравновесной турбулентности и работают в узких диапазонах определяющих параметров [28].

Таким образом, надёжное предсказание положения ламинарно-турбулентного перехода в сверхзвуковых пограничных слоях — исключительно сложная задача. Проще *управлять* положением перехода, влияя на свойства пограничного слоя различными способами, например, полируя и профилируя поверхность, изменяя её структуру путём перфорирования или организации микрорельефа, отсасывая пограничный слой над ней. Однако понимание того, какие рычаги управления следует задействовать, чтобы получить желаемый результат, должно быть основано на результатах исследования механизмов, лежащих в основе ламинарно-турбулентного перехода.

Темой исследования настоящей диссертационной работы является расчётно-теоретическое исследование механизмов, связанных с зарождением турбулентности в номинально двухмерных сверхзвуковых пограничных слоях. Работа направлена на получение новых знаний в этой области. В работе исследуются базовые механизмы возбуждения и развития возмущений, приводящих к турбулизации модельных течений над заострёнными телами — плоской пластиной, клином, углом разрежения, прямым крылом с тонким параболическим профилем. В этих течениях продольный градиент давления либо отсутствует, либо является благоприятным (отрицательным, разгоняющим поток) сосредоточенным или распределённым по поверхности.

0.1. Пути к турбулентности в сверхзвуковых пограничных слоях

Под термином «ламинарно-турбулентный переход» будем понимать весь процесс преобразования изначально ламинарного течения в развитое турбулентное течение. Как показал Осборн Рейнольдс [4], определяющим параметром подобия для проблемы ЛТП является число Рейнольдса Re . При достижении некоторого *конечного* значения Re течение теряет устойчивость по отношению к возмущениям с определённым частотно-волновым составом. Такие возмущения растут и достигают критических амплитуд, при которых начинает проявляться нелинейное взаимодействие возмущений между собой. За счёт нелинейности начинает искажаться среднее течение, изменяются характеристики его устойчивости: появляются вторичные неустойчивости и неустойчивости более высокого порядка, частотно-

волновой спектр возмущений быстро расширяется — течение турбулизуется. В работе Юрия Семёновича Качанова [29] этот процесс разделён на пять характерных стадий, описывающих малошумный сценарий развития турбулентности в пограничном слое.

На стадии I *восприимчивости* возмущения набегающего потока проникают в пограничный слой и возбуждают нормальные моды его собственных колебаний, определяя начальные условия их развития (амплитуды, частоты, фазы) [30–33]. На стадии II *линейной области ЛТП* возбуждённые волны растут практически экспоненциально. Рост описывается в рамках решения задачи на собственные значения для линеаризованных уравнений устойчивости. На стадии III *нелинейной области ЛТП* начинают проявляться нелинейные эффекты — спектр возмущений быстро расширяется. На стадии IV *области распада возмущений* возникают высокочастотные выбросы, на которых зарождаются локализованные области турбулентного течения — *турбулентные пятна*. На стадии V *слияние турбулентных пятен* приводит к установлению полностью развитого турбулентного режима течения. Стадии III – V, как правило, сменяются быстро по сравнению с протяжённой областью линейного роста II, а область восприимчивости сосредоточена вблизи передней кромки, где акустические возмущения, порождённые взаимодействием возмущений любой природы с головной ударной волной, синхронизируются с нормальными модами сверхзвукового пограничного слоя [34].

В зависимости от интенсивности внешних возмущений могут реализоваться и другие пути, по которым течение переходит в турбулентное состояние [12; 35; 36]. Они схематично показаны на рис. 1.

Сценарий (А) соответствует переходу в тихих условиях, и состоит из трёх основных этапов: восприимчивость (стадия I), линейное развитие неустойчивых мод пограничного слоя (стадия II) и нелинейный распад возмущений, завершающийся развитым турбулентным течением (стадии III, IV и V). Этот сценарий реализуется в случае гладких тел и низкого фона внешних возмущений, что, в частности, типично для крейсерских условий полёта сверхзвукового пассажирского самолёта. С увеличением уровня внешних возмущений становится возможен механизм *алгебраического роста* (transient growth), при котором возбуждённые *собственные возмущения* (моды) пограничного слоя могут взаимодействовать друг с другом за счёт неортогональности (сценарий (В)). При достаточно большом уровне внешних возмущений алгебраический рост может привести к амплитудам возмущений, достаточным для начала нелинейной стадии (сценарий (С) и (D));

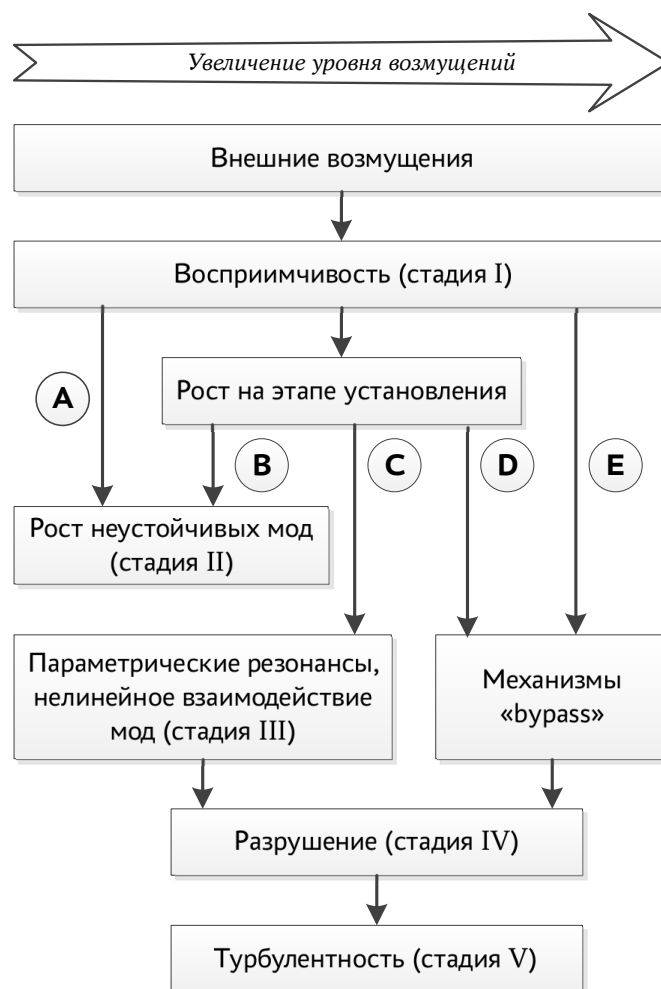


Рисунок 1 — Сценарии ламинарно-турбулентного перехода в зависимости от уровня внешних возмущений (рисунок взят из [37], его оригинальная версия опубликована в [12])

при этом стадия линейного роста отсутствует. Сценарии (B), (C), (D) характерны для шероховатых тел и низкого фона возмущений в потоке, либо для внутренних течений с высоким уровнем турбулентности. При очень большой интенсивности внешних возмущений переход протекает по сценарию (E) вне зависимости от шероховатости поверхности. Все упомянутые сценарии справедливы и в дозвуковых, и в сверхзвуковых пограничных слоях, отличие заключается в конкретных характеристиках каждой стадии.

Крейсерский полёт сверхзвуковых летательных аппаратов осуществляется на высотах порядка 20 км, где интенсивность внешних возмущений мала. Такие условия принято называть *тихими*. При разработке систем ламинаризации предполагается, что поверхность ЛА является аэродинамически гладкой и не вибрирует в неустойчивом частотном диапазоне. Исследования, проведённые в настоящей диссертационной работе, сосредоточены на малошумном сценарии (A).

0.2. Степень разработанности темы исследования

Исследования проблемы ламинарно-турбулентного перехода в сверхзвуковых пограничных слоях ведутся теоретическими, экспериментальными и численными путями с середины прошлого века. Несмотря на многолетние исследования научных лабораторий всего мира, физические механизмы зарождения и развития турбулентности в сверхзвуковых пограничных слоях изучены слабо.

Теоретические исследования. Исходное предположение о том, что зарождение турбулентности связано с потерей устойчивости ламинарного течения, сегодня является общепризнанным [5; 6]. Оно прослеживается в теоретических исследованиях Уильяма Орра [38] и последующих работах Арнольда Зоммерфельда [39] и Вернера Гейзенберга [40]. В конце 20-х годов XX века Уолтер Толлмин сформулировал асимптотическую теорию, на основании которой Герман Шлихтинг провёл первые расчёты устойчивости пограничного слоя для конечных чисел Рейнольдса (см., например, [41]). К настоящему времени проведено большое количество теоретических и экспериментальных исследований устойчивости дозвукового пограничного слоя. Предсказания теории устойчивости для *несжимаемого* течения хорошо совпадают с данными многочисленных экспериментов [5; 42; 43].

Первые теоретические исследования ЛТП *сверхзвукового* пограничного слоя на простых телах (пластина, конус) были сосредоточены на определении характера и свойств его собственных возмущений — нормальных мод. В классической работе [44] Лэстор Лиз и Чيو Чао Линь ввели обобщённый критерий перегибной неустойчивости — максимум величины $\rho \partial U / \partial y$, — а также классифицировали моды возмущений на дозвуковые и сверхзвуковые по отношению к местному невязкому течению. Все дозвуковые моды экспоненциально затухают вдали от поверхности. При относительно небольших сверхзвуковых числах Маха в пограничном слое присутствует единственная мода — *первая мода* по терминологии Мэка⁸ [45; 46]. Она имеет вязкую природу и является аналогом волн Толлмина — Шлихтинга в дозвуковых течениях. С ростом числа Маха (при $M_e \gtrsim 2.2$ на пластине с теплоизолированной поверхностью) появляется новый тип неустойчивостей — *высшие* (вторая и более высокого порядка) моды акустической природы. Их существование предсказано теоретически [45] и подтверждено экспериментально [47–49].

⁸Далее для сокращения будем называть их просто «мода».

Высшие дозвуковые моды Мэка являются пойманными в пограничном слое акустическими волнами и появляются, когда поверхность движется со сверхзвуковой скоростью по отношению к фазовой скорости возмущений ($c_r/a_w > 1$). В случае теплоизолированной пластины вторая мода теряет устойчивость при $M_e \gtrsim 4$, а моды более высокого порядка, как правило, остаются устойчивыми. Среди возмущений первой моды наиболее быстро нарастают волны с наклонными фронтами, а в случае второй моды — плоские волны [46]. Обе моды в сверхзвуковом пограничном слое сосуществуют одновременно, и при достижении достаточно высоких амплитуд начинается нелинейное взаимодействие между ними [50; 51]. Преобладание той или иной неустойчивой моды определяется локальными характеристиками пограничного слоя. Первая мода интенсивно растёт на прогретых поверхностях (температура поверхности сопоставима с температурой торможения невязкого течения) или при наличии неблагоприятного градиента давления (см., например, [42]). Вторая мода дестабилизируется с ростом числа Маха [52] и при охлаждении поверхности [53]. Поэтому на гладкой поверхности сверхзвуковых летательных аппаратов, температура которой может быть значительно ниже температуры торможения из-за радиационного охлаждения, неустойчивость первой моды подавляется естественным образом, а неустойчивость второй моды становится преобладающей и может приводить к ЛТП. Таким образом, установлено, что сверхзвуковой пограничный слой ведёт себя как *конвективно неустойчивый волновод* [8; 12], в котором, как правило, развиваются две неустойчивые моды — первая и вторая.

Изначально считалось, что *сверхзвуковые моды* ($c_r < 1 - 1/M_e$) не имеют отношения к модам дискретного спектра, так как естественные сверхзвуковые возмущения не затухают вдали от поверхности [44]. Мэк расчётным путём продемонстрировал их экспоненциальное затухание [45]. Однако, как было отмечено в [12], темпы роста сверхзвуковых мод оказались гораздо ниже, чем у дозвуковых мод, поэтому их роль в процессе перехода требует дополнительного исследования. Такое исследование проведено теоретическим и численным путём, а его результаты представлены в главе 4 настоящей работы.

Далее был сделан учёт слабой непараллельности невозмущённого сжимаемого течения. Теоретические исследования влияния растущего пограничного слоя на характеристики возмущений были начаты в работах Сарика [54], Гапонова [55], Тумина и Фёдорова [56]. Современные достижения в теории устойчивости с учётом сжимаемости и непараллельности течения во многом обусловлены вкладом российских учёных Сергея Александровича Гапонова, Владимира Николаевича

Жигулёва, Анатолия Максимовича Тумина, Александра Витальевича Фёдорова и других. Среди прочих следует отметить работу [57], в которой теоретически объяснён механизм возбуждения неустойчивостей через механизм межмодового обмена.

В пограничных слоях более сложной конфигурации могут возникать другие неустойчивые моды. Так, при наличии угла скольжения потока в развитом трёхмерном пограничном слое (например, на стреловидных крыльях или конусах под углом атаки) возникает неустойчивость поперечного течения, которая проявляется в виде стационарных или нестационарных продольных вихрей [58; 59], наблюдавшихся в многочисленных экспериментах (см., напр., [60]). На вогнутых поверхностях за счёт центробежной неустойчивости могут развиваться существенно трёхмерные стационарные вихревые структуры типа продольных вихрей Жину — Гёртлера [61], которые наблюдались экспериментально при обтекании поверхностей сжатия [62–65]. Источником возмущений, перерождающихся в продольные вихри, по-видимому, является шероховатость обтекаемой поверхности [25; 65].

Сравнительный анализ различных типов возмущений для сверхзвуковых режимов полёта выполнен в [36; 66]. Показано, что для ЛТП, обусловленного неустойчивостью второй моды Мэка, одним из наиболее вероятных источников внешних возмущений являются микрочастицы, проникающие в пограничный слой. Это стимулировало теоретические [67] и дальнейшие численные исследования, которым посвящена глава 7.

Экспериментальные исследования. Развитие теоретических моделей стимулирует проведение экспериментальных работ в области устойчивости сверхзвукового пограничного слоя. Такие эксперименты сопряжены со значительными трудностями. Например, в сверхзвуковых трубах высок уровень возмущений основного потока; приборы для измерений пульсаций должны обладать временным разрешением на порядок выше, чем аналогичная аппаратура для дозвуковых измерений. В большинстве экспериментальных работ, выполненных при больших сверхзвуковых скоростях, исследуется положение перехода в зависимости от влияния различных факторов (число Рейнольдса, температурный фактор, шероховатость поверхности, притупление передней кромки и др.) [42]. Изучение устойчивости сверхзвукового пограничного слоя было проведено, например, в работах Кеннета Стетсона [49] и Роджера Киммела [68], где исследовалось развитие естественных возмущений. Как отмечалось выше, недостаток подобных исследований заключается в том, что

их результаты сложно перенести на условия натурного полёта, так как характеристики возмущений в трубных и в полётных условиях принципиально различаются (примеры значительного влияния шума трубы при исследовании ЛТП представлены в обзоре [69]). Кроме того, в таких экспериментах невозможно измерить полное пространственное поле возмущений в пограничном слое. Такая информация может быть экспериментально получена только в *контролируемых* условиях с помощью искусственных возмущений, когда измерение синхронизировано с работой источника этих возмущений.

Первые эксперименты с использованием контролируемых возмущений были выполнены Джоном Лауфером и Томасом Вребаловичем [70] для сжимаемого пограничного слоя на плоской теплоизолированной пластине. В ИТПМ СО РАН Анатолий Александрович Маслов, Александр Дмитриевич Косинов, Николай Васильевич Семёнов и их коллеги разработали эффективный метод исследования волновых процессов в сверхзвуковых потоках. Он основан на *контролируемых волновых пакетах*, возбуждаемых локализованным электроразрядным источником с известным спектром и с хорошей повторяемостью от пуска к пуску [71–73]. Главное достоинство этого подхода — возможность получения фазовой информации об исследуемых возмущениях. Опубликованные результаты контролируемых экспериментов немногочисленны и принадлежат двум группам-лидерам в этом направлении: отмеченная выше группа учёных ИТПМ СО РАН; группа Стивена Шнайдера (США). Ниже цитируется большая часть этих экспериментов.

В работе [74; 75] выполнены термоанемометрические измерения волновых поездов, порождённых гармоническим точечным источником типа тлеющего разряда. Испытания проводились в пограничном слое на плоской пластине при числе Маха 2. В [51; 76] исследована устойчивость пограничного слоя на конусе при числе Маха ≈ 6 с помощью искусственных возмущений от электроразрядного источника. В [77] экспериментально исследована эволюция контролируемых возмущений от тлеющего разряда на конусе при числе Маха 4. В [78–80] исследована эволюция волновых пакетов и турбулентных пятен в пограничном слое на стенке сопла тихой аэродинамической трубы при числе Маха 6. В [81] измерены температурные возмущения, создаваемые мощным лазером. Измерения проводились в малошумной АДТ при числе Маха 6. В перечисленных экспериментах получаемые данные о поле возмущений заметно ограничены, что обусловлено техническими ограничениями при измерении высокочастотных пульсаций во множестве точек

сверхзвукового пограничного слоя. Тем не менее, результаты этих экспериментов так или иначе подтвердили выводы линейной теории устойчивости.

Следует подчеркнуть эксперименты [82; 83] на остром конусе в высокоэнтальпийной трубе и эксперименты [84; 85] на сигарообразном затупленном теле в ударной трубе, где ламинарно-турбулентный переход наблюдался не как единый непрерывный процесс, а скорее как среднестатистический эффект от множества независимых случайно появляющихся и сливающихся друг с другом турбулентных пятен. Такое поведение наблюдалось не только на гладкой поверхности, но и за изолированным элементом неровности определённой высоты, который размещался на обтекаемой поверхности [85]. Это обосновывает утверждение о том, что ЛТП в тихих условиях протекает через процесс зарождения, развития и последующего слияния турбулентных пятен. Исследованию эволюции волновых пакетов и турбулентных пятен в течениях с внезапным разрежением посвящена глава 5 настоящей диссертации.

Численное моделирование. В отличие от физических экспериментов, прямое численное моделирование (ПЧМ) даёт полную информацию о пространственно-временном поле возмущений, которая позволяет выявить и детально изучить различные механизмы ЛТП. ПЧМ позволяет проводить целостный расчёт всех стадий процесса ЛТП, что обеспечивается решением полных нестационарных уравнений Навье — Стокса без каких-либо допущений о свойствах базового среднего течения и амплитуде развивающихся в нём возмущений.

Численное моделирование восприимчивости сверхзвукового пограничного слоя к возмущениям набегающего потока проводилось, например: в работах [86; 87] для вихревых возмущений; в работах [86; 88] для энтропийных возмущений (температурная неоднородность потока); в работах [87; 89; 90] для акустических волн с различными наклонами фронтов по отношению к обтекаемой поверхности. В этих работах задача восприимчивости решается для *детерминированных* внешних возмущений, спектр которых не моделирует спектры естественных случайных возмущений, типичных для условий сверхзвукового полета. Стадия нелинейного распада и возникновения турбулентности в таких работах, как правило, не исследуется. До сих пор нет ответа на принципиально важные вопросы: 1) В какой степени возникновение турбулентности зависит от внешних возмущений? 2) Можно ли предсказать эту зависимость для типичных условий сверхзвукового полёта, чтобы

обеспечить приемлемую точность расчёта аэродинамических характеристик ЛА на переходных режимах обтекания?

В то же время работы, посвящённые нелинейному развитию неустойчивости, сосредоточены на подробном описании процессов, свойственных тому или иному механизму распада контролируемых возмущений (К-тип распада [91; 92], резонанс наклонных волн [93], др.). В них, как правило, также исследуется развитие детерминированных возмущений — ограниченного набора гармоник (обычно двух или трёх), возбуждаемых искусственным путём и нелинейно взаимодействующих между собой. Связь этих нелинейных механизмов с реалистичным спектральным составом атмосферных возмущений, проникающих в пограничный слой, не обсуждается.

Первые работы по прямому численному моделированию ЛТП в сверхзвуковом пограничном слое в полной пространственной постановке были выполнены в научных группах Маркуса Клокера (Университет Штутгарда, Германия) и Германа Фазела (Университет Аризоны, США) в начале 1990х годов [94]. Также одними из первых такие расчёты выполняли группы Леонарда Клайзера (Технический университет Цюриха, Швейцария) [95] и Нила Сэндхема (Стэнфордский университет, США). Эти группы продолжают интенсивно работать в настоящее время. Численное моделирование процессов, связанных с ламинарно-турбулентным переходом в сверхзвуковых пограничных слоях, бурно развивается в последние годы. Подробно исследуются турбулентные пятна [96; 97], изучается влияние на переход шероховатости обтекаемой поверхности [98]. В России работы в этом направлении ведутся, например, в группе Алексея Николаевича Кудрявцева [99] (ИТПМ СО РАН, Новосибирск) и в группе Ивана Владимировича Егорова (ЦАГИ⁹, МФТИ¹⁰, Жуковский) [37; 100], в которую входит автор настоящей диссертации.

Влияние восприимчивости на нелинейные механизмы, посредством которых формируются турбулентные пятна в *естественных* (стохастических, недетерминированных) условиях сверхзвукового потока, исследовано слабо. Автору диссертации известны только две работы на эту тему [101; 102]. В [101] выполнено прямое численное моделирование нелинейной стадии ЛТП в пограничном слое на конусе под действием случайных возмущений давления. Возмущения вводились в узлах сетки, лежащих на входной границе расчётной области вдоль линии симметрии по азимутальному направлению. Возбуждался широкий спектр возмущений, напоми-

⁹Центральный аэрогидродинамический институт им. профессора Н. Е. Жуковского

¹⁰Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

нающий белый шум. Выяснялось, в какой степени относительно простая модель внешних возмущений позволяет воспроизвести сценарий ЛТП, наблюдаемый на вогнутом конусе в малошумной аэродинамической трубе при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 6$ [103]. Показано, что в расчётах доминирует К-режим перехода (так называемый фундаментальный резонанс, «fundamental breakdown»), исследованный авторами [101] ранее в случае *детерминированных* внешних возмущений. Численное моделирование дало такую же первичную и следующую за ней вторичную структуру продольных полос повышенного теплового потока, как и в трубных экспериментах [103]. На основе этого результата можно предположить, что восприимчивость слабо влияет на нелинейные механизмы возникновения турбулентности в естественных условиях ЛТП. Таким образом, предполагается, что один и тот же механизм должен преобладать в широком диапазоне параметров атмосферных возмущений, типичных для сверхзвукового полёта. Здесь важно отметить, что в работе [101] имеется два принципиальных недостатка. Во-первых, вводимые возмущения *нефизичны*, а следовательно, нет гарантии их реализации в естественных условиях. При навязывании таких возмущений возможна нефизичная накачка мод пограничного слоя, которая аналогична эффекту классического демона Максвелла при тепловом разделении молекул газа без подвода энергии извне. Во-вторых, детерминированная структура появляющихся продольных полос противоречит случайному характеру внешнего воздействия. Эти вопросы не обсуждались в [101].

Следует отметить, что в численном моделировании нелинейных стадий ЛТП и развитой турбулентности в высокоскоростных пограничных слоях часто применяют искусственное порождение перехода в надежде, что развитие турбулентности слабо зависит от предыстории её формирования. Это позволяет не моделировать линейную стадию и тем самым сократить протяжённость переходной области и, как следствие, понизить требования к необходимым вычислительным ресурсам. Для этого внутри пограничного слоя вводятся возмущения специального вида и спектрального состава, которые сразу настроены на резонансы нужного типа (см., напр., [96; 99]). В настоящей работе развит подход, позволяющий исключить моделирование линейной стадии за счёт использования расширенной информации из линейной теории устойчивости (см. главу 3).

Для моделирования ЛТП обычно применяются специализированные численные методы, позволяющие сократить необходимые вычислительные ресурсы. На-

пример, в обзорах Германа Фазела [104] и Сяолиня Жонга [105] представлены ПЧМ развития контролируемых возмущений на простых конфигурациях — пластина и конус под нулевым углом атаки. В [105] рассматривается метод, основанный на конечно-разностной схеме сквозного счёта для расчёта стационарного обтекания передней кромки пластины с отошедшей ударной волной; ниже по потоку используется схема высокого порядка с выделением ударных волн для расчёта нестационарных возмущений. Когда возмущения достигают слишком высоких амплитуд и в течении появляются большие градиенты газодинамических переменных, могут проявляться вычислительные трудности. В [104] сначала применяется квазимонотонная схема для расчёта стационарного поля обтекания полной конфигурации, а затем из этого поля вырезается пристенная область, в которой моделируется распространение возмущений с помощью гибридного численного подхода с конечно-разностной схемой высокого порядка и спектральным методом в одном из направлений. Таким образом, специализированные численные методы применимы в ограниченном классе течений.

На практике удобнее использовать для ПЧМ один универсальный численный метод, с помощью которого будут рассчитываться и стационарное поле обтекания со всеми пространственными неоднородностями (ударные волны, отрывные области и др.), и нестационарные возмущения без ограничения на их амплитуду. В настоящей работе для этих целей используется полностью неявный метод сквозного счёта второго порядка аппроксимации по пространству и времени. Повышенная диссипативность квазимонотонной схемы, из-за чего амплитуды возмущений нефизично уменьшаются, может быть преодолена путём достаточного измельчения расчётной сетки и выполнения ресурсоёмких расчётов в параллельной постановке на супер-ЭВМ. Вопросы применимости такого подхода обсуждаются в главе 2.

ПЧМ поздних нелинейных стадий ЛТП при натуральных числах Рейнольдса требует применения подробных трёхмерных расчётных сеток. Характерный размер ячеек должен иметь порядок масштаба Тейлора $l_T \sim \sqrt{10} \text{Re}_\infty^{-1/2}$, а в идеальном случае быть близким к масштабу Колмогорова $l_K \sim \text{Re}_\infty^{-3/4}$. В последнем случае пространственно-временные затраты (с учётом временного шага $\Delta t \sim \text{Re}_\infty^{-1/2}$) на проведение одного расчёта имеют порядок $\text{Re}_\infty^{11/3}$, что представляется нереализуемым при текущем развитии вычислительных технологий. Последнее требование относится к прямому численному моделированию развитого турбулентного течения и является избыточным для численного анализа устойчивости и процесса зарождения молодой турбулентности (начальной стадии развития турбулентного

режима течения). Оказывается достаточно разрешить основные волны неустойчивости с двумя-тремя их кратными гармониками. Надёжность такого подхода подтверждается результатами главы 2, а также проверкой достоверности основных результатов диссертации по ходу их изложения. Поэтому используемые в настоящей работе сетки содержат сотни миллионов узлов, а не сотни миллиардов. Благодаря доступности современных многопроцессорных вычислительных систем и методов параллельных вычислений такое сеточное разрешение оказывается приемлемым с точки зрения необходимых вычислительных мощностей.

Практические приложения. Турбулизация сверхзвукового пограничного слоя ведёт к росту сопротивления и тепловых потоков к поверхности летательного аппарата. Поэтому управление положением ЛТП является важной задачей с практической точки зрения. Понимание физических механизмов, лежащих в основе ламинарно-турбулентного перехода, — ключ к созданию способов управления. Методы управления можно разделить на активные (с подводом вещества, импульса и энергии в пограничный слой) или пассивные (без такого подвода). Пассивные методы более просты в реализации, но теряют эффективность на нерасчётных режимах. Активные, напротив, — более гибкие в применении, но требуют технически более сложной реализации. Подробный обзор по управлению положением ЛТП на дозвуковых скоростях можно найти в работах [106; 107].

В сверхзвуковых пограничных слоях первая мода стабилизируется путём охлаждения поверхности, отсоса пограничного слоя и благоприятного градиента давления [42]. Как отмечалось выше, охлаждение дестабилизирует вторую моду, поэтому для высокоскоростных летательных аппаратов неустойчивость первой моды подавляется естественным образом, и усилия должны быть направлены на стабилизацию неустойчивости второй моды.

Возмущения второй моды являются высокочастотными и имеют акустическую природу. Из этих соображений в [108] была выдвинута и подтверждена теоретически [108; 109] гипотеза о том, что пассивные пористые покрытия, поглощающие ультразвук, могут эффективно подавлять вторую неустойчивую моду. Эффективный размер пор можно выбрать достаточно маленьким, чтобы шероховатость пористой поверхности не влияла на структуру пограничного слоя и на течение в целом. Выводы теории были подтверждены (в том числе, количественно) в экспериментах с регулярно распределёнными порами [110; 111] и с хаотично распределёнными порами в виде металлического фетра [112; 113]. Многочисленные расчётные иссле-

дования (напр., [37]) также подтвердили работоспособность выдвинутой гипотезы. Таким образом, пассивное пористое покрытие, поглощающее ультразвук, способно затягивать ЛТП, вызванный неустойчивостью второй моды. Позже также было показано, что пористое покрытие способно влиять и на нелинейную стадию развития возмущений [114].

Слои смещения должны оказывать стабилизирующее влияние на развитие второй моды. Исходя из этого в [115; 116] был предложен и подтверждён экспериментально новый пассивный способ управления ЛТП, основанный на подавлении пульсаций при помощи волнообразных покрытий. В настоящее время данная концепция развивается, но вместо волнообразной стенки используется периодическая неровность в форме ряда локальных выступов [117].

Наиболее известным активным способом стабилизации течения является отсасывание пограничного слоя. Влияние отсоса на развитие неустойчивостей первой [118] и второй [119] моды проявляется в уменьшении их максимальных темпов роста. При этом отмечено, что отсос приводит к смещению неустойчивой области в сторону больших частот. Это хорошо коррелирует с утончением пограничного слоя из-за отсоса. Также демонстрируется, что отсос более эффективен при стабилизации вязкой неустойчивости, к которой относится первая мода. Поэтому влияние отсоса ослабевает с ростом числа Маха. Уменьшение максимального инкремента не гарантирует полную стабилизацию течения: этого не достаточно, чтобы *интегральное* усиление возмущений убывало на некоторой конечной длине. Так, в работе [120] (число Маха 1.6) отмечается, что подавление возмущений локализовано вблизи участка отсасывания, а за этим участком наблюдается обратный дестабилизирующий эффект, хотя к концу расчётной области интегральный эффект стабилизации всё же сохраняется. Возможность дестабилизации течения за областью отсоса продемонстрирована и подробно изучена при больших числах Маха в работе [121]: за участком отсоса пограничный слой может оказаться менее устойчивым, чем в случае без отсоса.

Возможность полной ламинаризации сверхзвуковых крыльев с помощью отсоса демонстрировалась экспериментально. Одними из первых таких исследований на сверхзвуковых скоростях стали лётные испытания в ЛИИ им. Громова¹¹ на базе летающей лаборатории Су-7Б ($1.4 \leq M_\infty \leq 2$, высота полёта 11 – 15 км), проведённые в 1970х годах. Исследовалась модель прямого крыла с параболическим профилем, на котором было организовано многощелевое отсасывание пограничного слоя.

¹¹ Лётно-исследовательский институт им. М. М. Громова (Жуковский)

С помощью отсоса удалось ламинаризовать участок поверхности до середины хорды крыла. При этом сопротивление трения ламинаризованного участка поверхности с учётом затрат энергии на отсасывание было снижено более, чем вдвое. В лётных экспериментах [122], проведённых на экспериментальном самолёте F-16XL-2 при числах Маха порядка 2, изучалось влияние отсоса на ламинаризацию крыла большой стреловидности, на котором преобладает неустойчивость поперечного течения. Наилучшие результаты, достигнутые при оптимальном уровне отсасывания, соответствовали ламинаризации почти половины поверхности крыла вдоль хорды.

Следует отметить, что и сама параболическая форма профиля прямого крыла подразумевает стабилизацию первой и второй неустойчивых мод благодаря благоприятному градиенту давления над всей поверхностью крыла. Исследованию особенностей такой стабилизации посвящена глава 6.

* * *

Вряд ли хватило бы ширины переплёта, чтобы объять знания по проблеме ЛТП в сверхзвуковых пограничных слоях, накопленные за многие годы. Поэтому сделанное введение не претендует на полноту обзора. Его главная задача — охватить проблему в целом и акцентировать внимание на том, что могло бы пригодиться читателю, готовому ознакомиться с последующими главами научного исследования. Сжатость введения, как надеется автор, компенсируется расширенным вступлением к каждой такой главе.

0.3. Общая характеристика работы

Цель работы — с помощью теоретических и численных методов в рамках полных уравнений Навье — Стокса исследовать новые механизмы, свойственные процессу ламинарно-турбулентного перехода в сверхзвуковых пограничных слоях с благоприятным продольным градиентом давления и без него, а также предложить рациональные подходы к исследованию этих и аналогичных механизмов.

Для достижения поставленной цели решены следующие **задачи**:

1. На ряде модельных задач изучить свойства используемого неявного численного метода сквозного счёта и сформулировать критерии его применимости

- при расчёте возмущённых сверхзвуковых пограничных слоёв. Обосновать возможность моделирования развития различных стадий ЛТП (восприимчивость, устойчивость, развитие нелинейности) с помощью данного метода.
2. Использовать расширенную информацию из линейной теории устойчивости для исключения протяжённой линейной стадии развития возмущений в пограничном слое из численного моделирования.
 3. Исследовать физические эффекты, связанные с развитием *сверхзвуковых* неустойчивостей пограничного слоя. Оценить их влияние на процессы ЛТП.
 4. Исследовать роль *внезапного* разрежения потока в линейной и нелинейной стадии развития возмущений в сверхзвуковом пограничном слое над углом разрежения. Оценить возможность ламинаризации пограничного слоя в таких условиях.
 5. Выявить наиболее вероятный источник внешних возмущений, приводящих к ЛТП на прямом крыле сверхзвукового пассажирского самолёта (СПС), исследуя восприимчивость сверхзвукового пограничного слоя к реалистичным возмущениям и развитие возбуждённых волн неустойчивости над крылом вплоть до формирования турбулентных пятен. Предложить подходы к ламинаризации обтекания таких крыльев.
 6. Разработать подход к численному моделированию роли микрочастиц как источника ЛТП в сверхзвуковых пограничных слоях и обосновать его применимость. На базе этого подхода предложить статистическую модель ЛТП, вызванного взвешенными в атмосфере микрочастицами.

Научная новизна:

1. Разработано простое нестационарное граничное условие, которое позволяет исключить протяжённую линейную стадию развития возмущений из численного моделирования процесса ЛТП. Применимость этого условия подтверждена путём моделирования волновых пакетов первой и второй моды сверхзвукового пограничного слоя.
2. В рамках численного эксперимента впервые показано, что вторая мода сверхзвукового пограничного слоя над достаточно сильно охлаждённой поверхностью может излучать акустические волны во внешнее невязкое течение. Этот эффект, называемый *спонтанным излучением звука*, в главном приближении не влияет на процесс перехода к турбулентности.

3. Обнаружено, что характеристики устойчивости сверхзвукового пограничного слоя над угловыми конфигурациями масштабируются вместе с толщиной пограничного слоя. При этом внезапное разрежение потока приводит к подавлению малых возмущений и задержке развития существенно нелинейных образований (турбулентных пятен); последние полностью не подавляются.
4. Обнаружено, что возмущения, развивающиеся в сверхзвуковом пограничном слое на прямом крыле с тонким параболическим профилем, не могут нарастать выше определённого уровня.
5. Показано, что наиболее вероятным источником перехода на прямом крыле СПС является акустический шум, излучаемый турбулентным пограничным слоем с передней части фюзеляжа. Предложены подходы к ламинаризации прямого крыла, основанные на уменьшении интенсивности акустического шума.
6. Разработан вычислительный подход для численного моделирования восприимчивости сверхзвуковых пограничных слоёв к твёрдым сферическим микрочастицам. С его помощью показано, что восприимчивость к микрочастицам сосредоточена внутри пограничного слоя в малой окрестности точки столкновения и не зависит от того, падает ли частица на поверхность или удаляется от неё. Это открывает возможность для постановки контролируемого эксперимента по восприимчивости сверхзвуковых пограничных слоёв к микрочастицам.

Теоретическая значимость работы заключается в том, что получены новые фундаментальные знания о механизмах зарождения турбулентности в сверхзвуковых пограничных слоях в малошумных условиях. Разработаны удобные расчётные модели и подходы для исследования ЛТП в таких течениях. Полученные знания обеспечивают основу для разработки и верификации физически обоснованных целостных моделей ламинарно-турбулентного перехода вплоть до формирования развитого турбулентного течения.

Практическая значимость работы заключается в том, что путём расчётно-теоретического анализа получены важные выводы о стабилизации и ламинаризации сверхзвуковых пограничных слоёв в течениях разрежения. На их основе предложены и могут быть впоследствии реализованы системы затягивания ЛТП на крыльях современных сверхзвуковых пассажирских самолётов. Результаты работы могут быть применены для оптимизации поверхностей элементов сверхзвуковых летательных аппаратов, таких как профиль крыла или отклоняемые органы

управления. Результаты численного моделирования возмущений от искусственного источника будут полезны при подготовке и интерпретации результатов контролируемых экспериментов по устойчивости в сверхзвуковых аэродинамических трубах. Наконец, полученные данные численного моделирования дают *полную* информацию о трёхмерном нестационарном течении, из которой исследователи могут извлекать любые характеристики, необходимые для валидации и интерпретации результатов своих исследований.

Методология и методы исследования базируются на опыте научной группы в ЦАГИ и МФТИ, к которой принадлежит автор, и воплощаются в проведении теоретических и расчётных исследований с помощью методов вычислительной аэродинамики, а также в последующей взаимной интерпретации полученных результатов с применением аналитических подходов.

На защиту выносятся следующие основные положения.

- Предложенное на основе расширенных данных линейной теории устойчивости асимптотическое граничное условие *пригодно* для порождения развитых волновых пакетов неустойчивых мод в сверхзвуковых пограничных слоях.
- Неустойчивость второй моды сверхзвукового пограничного слоя над достаточно сильно охлаждённой поверхностью *способна* излучать акустические возмущения из пограничного слоя (спонтанное излучение звука).
- Внезапное разрежение течения в сверхзвуковых пограничных слоях приводит к стабилизации волновых пакетов и задержке развития турбулентных пятен.
- В условиях распределённого благоприятного продольного градиента давления, типичного для сверхзвукового пограничного слоя на прямом крыле СПС, интегральное усиление возмущений *ограничено сверху*.
- Акустический шум, излучаемый турбулентным пограничным слоем с передней части фюзеляжа, является *наиболее вероятным источником* перехода на прямом крыле СПС.
- Разработанная численная модель влияния микрочастиц на течение *пригодна* для моделирования восприимчивости сильно непараллельного сверхзвукового пограничного слоя к микрочастицам. Совместно с амплитудным критерием и статистической моделью ЛТП, расчётная модель позволяет полностью реализовать амплитудный метод предсказания перехода без использования дополнительных предположений.

Соответствие паспорту специальности. Содержание диссертации полностью соответствует формуле специальности 1.1.9¹² «Механика жидкости, газа и плазмы» и связано со следующими областями исследований, установленными в паспорте специальности: 3 (ламинарные и турбулентные течения), 4 (течения сжимаемых сред и ударные волны), 11 (пограничный слой), 13 (гидродинамическая устойчивость), 14 (линейные и нелинейные волны в жидкостях и газах), 18 (аналитические, асимптотические и численные методы исследования континуальных моделей однородных и многофазных сред) — все главы; 6 (течение многофазных сред) — глава 7. В работе применяется математическая модель уравнений Навье — Стокса, а также разрабатываются и применяются новые теоретические и численные модели (модель акустического шума из главы 6, модель микрочастицы из главы 7, др.). Дается интерпретация и проводится анализ полученных теоретических и расчётных результатов с целью прогнозирования явления ЛТП, обсуждаются возможные способы затягивания ЛТП. Материалы диссертации частично относятся к смежной и родственной специальности 1.2.2¹³ «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Настоящая диссертация соответствует научно-квалификационной работе, в которой разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как **научное достижение**.

Достоверность полученных результатов представляется высокой по следующим причинам. В работе используется известный многократно апробированный численный метод. Путём проведения дополнительных методических исследований получены критерии применимости численного метода при моделировании нестационарных возмущённых сверхзвуковых течений с ударными волнами. На протяжении всей диссертации проводится сопоставление расчётных и теоретических результатов. При возможности, полученные результаты также сопоставляются с теоретическими, численными и экспериментальными результатами других авторов. Основные результаты работы физически непротиворечивы, качественно согласуются с имеющимися представлениями о природе перехода к турбулентности, а также прошли широкую апробацию.

Апробация работы выполнялась путём обсуждения на международных и российских конференциях и семинарах (в том числе на Видеосеминаре по аэро-

¹²Ранее — специальность 01.02.05

¹³Ранее — специальность 05.13.18

механике ЦАГИ — ИТПМ СО РАН — СПбГПУ — НИИМ МГУ), а также на еженедельных рабочих семинарах научной группы, в которую входит автор.

Наиболее значимые конференции: Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019); IUTAM Laminar-Turbulent Transition Symposium (Лондон, Великобритания, 2019); International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR) (Новосибирск, 2018, 2020, 2022); AIAA Flow Control Conference (Вашингтон, США, 2016); AIAA Fluid Dynamics Conference (Денвер, США, 2017); Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences (ICAS) (Белу-Оризонти, Бразилия, 2018; Шанхай, Китай, 2020); European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS) (Мадрид, Испания, 2019).

Автор высоко ценит работу и время, проведённое на молодёжных конференциях: Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» (Новосибирск, пос. Шерегеш, 2020, 2021, 2022); Международная конференция «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» (НеЗаТеГиУс) (Звенигород, 2018, 2020); Всероссийская научная конференция МФТИ (Жуковский, 2017, 2018, 2020).

Личный вклад автора заключается в

- постановке всех научных и расчётных задач, рассмотренных в диссертации;
- разработке новых теоретических моделей, предложенных в диссертации;
- реализации предложенных моделей в виде модулей для авторского пакета прикладных программ;
- выполнении прямого численного моделирования процессов ламинарно-турбулентного перехода в сверхзвуковых пограничных слоях для большей части задач диссертации;
- анализе и интерпретации результатов моделирования, включая результаты линейной теории устойчивости.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 64 работах, из которых 34 — в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, 43 — в сборниках трудов конференций.

Объём и структура работы. Полный объём диссертации составляет 337 страниц, включая 147 рисунков и 24 таблицы. Список литературы содержит 267 наименований.

Диссертация состоит из введения, семи глав с выводами по каждой главе, заключения, списка обозначений и списка процитированной литературы.

В главе 1 описывается постановка задачи. Приводятся уравнения Навье — Стокса в консервативной безразмерной форме, формулируются граничные условия. Далее кратко описывается численный метод — аппроксимация дифференциальных уравнений и способ решения получаемых алгебраических сеточных уравнений. Указывается методология получения и обработки рассчитываемых нестационарных полей течения.

В главе 2 путём перекрёстного сравнения результатов ЛТУ и ПЧМ исследуется достоверность используемого численного метода. На задаче моделирования ЛТП по механизму нелинейного распада наклонных волн (раздел 2.3) демонстрируется хорошее согласие с результатами, полученными другими авторами с использованием низкодиссипативного численного метода. Отдельно рассматриваются две модельные задачи, что позволяет выработать критерии применимости используемого численного метода. Первая задача посвящена затуханию монохроматической акустической волны в однородном потоке и позволяет *количественно* оценить эффект численной диссипации в зависимости от пространственно-временного разрешения нестационарного возмущения (раздел 2.1). Вторая задача посвящена взаимодействию малых возмущений со скачком уплотнения и позволяет сформулировать условия, при которых поле возмущений за скачком будет физически корректным, а также способы достижения этих условий (раздел 2.2).

В главе 3 излагается теоретический базис и выводится асимптотическая форма волнового пакета, который формируется в сверхзвуковом пограничном слое вдали от места его возбуждения. На основе этой формы предлагается нестационарное граничное условие, позволяющее породить волновой пакет при численном моделировании без необходимости рассчитывать линейную стадию его роста от места возбуждения пакета. Путём перекрёстного сравнения результатов ЛТУ и ПЧМ исследуется применимость предложенного асимптотического граничного условия, когда преобладают возмущения первой или второй неустойчивой моды сверхзвукового пограничного слоя.

В главе 4 в двухмерной постановке исследуется развитие неустойчивости второй моды пограничного слоя над заострённой пластиной с достаточно сильно охлаждённой поверхностью. Демонстрируется, что пограничный слой может излучать акустические волны во внешнее невязкое течение. Анализ этого эффекта, называемого спонтанным излучением звука, проведён в рамках ЛТУ и ПЧМ: иссле-

дуются волновые поезда и волновые пакеты, обсуждается необычное поведение возмущений при их развитии. Демонстрируется хорошее согласование численных и теоретических результатов. В завершение главы обсуждается роль эффекта спонтанного излучения в процессе ЛТП.

В главе 5 на примере течения в угле разрежения исследуется влияние *внезапного* разрежения на устойчивость пограничного слоя и на развитие нелинейной стадии роста возмущений. Результаты линейной теории сопоставляются с результатами трёхмерного численного моделирования эволюции волновых пакетов и турбулентных пятен. Иллюстрируется и обсуждается эффект стабилизации низкоамплитудных волновых пакетов. Эти исследования проводятся как для случая первой (раздел 5.3) так и второй неустойчивой моды (раздел 5.2). В разделе 5.4 проводится обобщение полученных результатов. В разделе 5.5 анализируется запыление развития турбулентного пятна при переходе через угол разрежения.

В главе 6 исследуются процессы ЛТП в пограничном слое над прямым крылом с тонким параболическим профилем, которое может применяться на современных СПС. В этом случае продольный градиент давления оказывается *распределён* над поверхностью, а не сосредоточен вблизи некоторой точки (такой как угол разрежения в главе 5). В разделах 6.1 и 6.2 анализируются особенности устойчивости таких течений и демонстрируется, что максимально возможное интегральное усиление возмущений над поверхностью крыла *ограничено сверху*. В разделе 6.3 путём ввода искусственных возмущений с поверхности крыла проводится проверка сеточной сходимости и определяется достаточное для дальнейших расчётов сеточное разрешение. Далее исследуется важность различных источников внешних возмущений для ЛТП на крыле. В разделе 6.4 строится численная модель атмосферной турбулентности и исследуется восприимчивость пограничного слоя к ней. Аналогичное исследование проводится в разделе 6.5 для акустического шума от турбулентного пограничного слоя на фюзеляже гипотетического СПС. Расчёты ведутся вплоть до формирования турбулентных пятен. Перекрёстное сравнение результатов проводится в разделе 6.6. В разделе 6.7 обсуждается роль микрочастиц, взвешенных в атмосфере.

В главе 7 исследуется возможность численного моделирования *динамического* взаимодействия течения с движущейся в нём микрочастицей. В разделах 7.1 – 7.4 приводятся математическая и предлагается численная модель частицы, обсуждается теоретическое решение задачи восприимчивости сверхзвукового пограничного слоя на клине к микрочастице, сталкивающейся с поверхностью клина. В разделе

7.5 численно исследуется развитие волнового пакета, порождённого микрочастицей, анализируется его модальный состав, а также обосновывается возможность постановки эксперимента по восприимчивости к микрочастицам. В завершение главы (раздел 7.6) предлагается статистическая модель ЛТП, вызванного микрочастицами, хаотично взвешенными в атмосфере.

В заключении излагаются общие выводы работы и отмечаются перспективы применения основных результатов.

Благодарности

Автор благодарен всем, кто так или иначе имел отношение к настоящему диссертационному исследованию и помог ему увидеть свет. Расчёты линейной устойчивости течений, обсуждаемые в диссертации, выполнены доцентом кафедры Общей физики МФТИ А.В. Фёдоровым для автомодельных и локально автомодельных пограничных слоёв (пластина, клин, тонкий параболический профиль) и старшим научным сотрудником ЦАГИ А.О. Образом для пограничных слоёв, рассчитанных на основе полных уравнений Навье — Стокса (угол разрежения, тонкий параболический профиль). В проведении методических расчётов раздела 2.1 приняли участие студент 5 курса МФТИ К. В. Шубин и аспирант МФТИ второго года обучения И. О. Погорелов. Погорелов также внёс существенный вклад в программную реализацию нестационарного граничного условия для моделирования атмосферной турбулентности, провёл соответствующее численное моделирование восприимчивости сверхзвукового пограничного слоя на прямом крыле с тонким параболическим профилем и подготовил некоторые иллюстрации раздела 6.4. Аспирант МФТИ второго года обучения И. М. Илюхин провёл верификационные расчёты для того же крылового профиля, но с введением модельных возмущений на поверхности, а также проанализировал расчётные данные и предложил использовать простую степенную модель сеточной сходимости для анализа верификационных расчётов; большая часть иллюстраций раздела 6.3 подготовлена им же. Аспирант Нгуен Ньи Кан провёл расчёты и построил большую часть иллюстраций раздела 2.3. Описание общей постановки физической задачи и численного метода частично заимствовано из текста диссертации доктора физико-математических

наук А. В. Новикова, который является основным разработчиком используемого пакета расчётных программ.

Большая часть исследований в рамках настоящей диссертационной работы была выполнена в Московском физико-техническом институте (МФТИ) при поддержке Российского научного фонда (проекты №14-19-00821 и №19-79-10132) и в Центральном аэрогидродинамическом институте им. профессора Н. Е. Жуковского при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-38-20091). Расчёты проводились с использованием оборудования центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт», <http://ckp.nrcki.ru/>, а также лаборатории Математического моделирования нелинейных процессов в газовых средах МФТИ, <http://flowmodellium.ru/>, и лаборатории Аэрофизических исследований МФТИ, <https://aerophys.ru/>.

Несмотря на общепринятые правила написания научных текстов автор, в виде исключения и с молчаливого согласия читателя, завершит введение от первого лица.

Благодарю безмерно своих наставников — моего научного руководителя во времена студенчества в МФТИ, а теперь и моего научного консультанта Ивана Владимировича Егорова и моего теневого научного консультанта Александра Витальевича Фёдорова — за безусловную научную поддержку и верное слово в нужный момент. Считаю, что мне очень повезло с учителями.

Благодарю моего коллегу и друга Андрея Новикова, с которым бок о бок прошёл путь от студента-четверокурсника до соискателя докторских степеней. Часть своей аккуратности и скрупулёзности в проведении научных исследований и оформлении результатов Андрей, похоже, передал мне. Вы когда-нибудь тратили на подготовку одной иллюстрации полдня? Я тратил, и, кажется, не раз... Благодаря Андрею я здорово продвинулся в программировании, что сыграло ключевую роль при обработке терабайтов расчётных данных. Да и в конце концов, кто разберётся в дебрях авторского кода лучше, чем сам автор?!

Благодарю моего бывшего коллегу Сергея Александрова за отличный порт библиотеки CGNS¹⁴ на Python и последующую обёртку этой библиотеки, которая сэкономила кучу времени и сил при анализе расчётных полей, а также за трёх-

¹⁴CFD General Notation System — международный стандарт формата файлов для хранения результатов вычислительной аэродинамики [123], который используется в авторском пакете программ.

мерный интерполятор, который верой и правдой служит многие годы. Благодарю Сергея и Женю Александровых за спокойное и весёлое время и за совместную работу. Жаль, давно с ними не виделись.

Благодарю всех моих коллег, которые так или иначе были рядом и помогали двигаться вперёд. Благодарю серьёзного специалиста по расчётам линейной теории устойчивости Антона Образа, который всегда не согласен и на любые мои аргументы имеет разумные контраргументы. Благодарю бескорыстного и доброго Ивана Ежова, который всегда согласен и готов оправдать даже самую безумную гипотезу. Благодарю моего аспиранта Илью Погорелова и его одноклассника аспиранта Ивана Илюхина, которые знают, что нужно делать и умеют это делать. Не останавливайтесь, ребята!

Благодарю Александра Витальевича Фёдорова и Максима Владимировича Устинова за ценные критические замечания по содержанию настоящей работы.

Благодарю мою супругу Леночку, которая считает автора диссертации очень умным. Но, как заметил внимательный читатель, это положение не было вынесено на защиту.

* * *

Работа посвящается моим маленьким племянникам Святославу, Злате и Милане в надежде на то, что они будут учиться прилежнее, чем когда-то учился автор.

Глава 1. Общая постановка задачи и методы её решения

Все результаты диссертации получены в рамках единой математической модели, которая опирается на законы сохранения газодинамики. В данной главе приводится общая математическая постановка задачи и излагается общий подход к её численному решению, реализованный в авторском пакете расчётных программ. Описываются используемые в работе методы анализа расчётно-теоретических результатов.

1.1. Физическая постановка

В рамках механики сплошной среды движение газа описывается дифференциальными уравнениями Навье — Стокса в трёхмерной нестационарной постановке. Эти уравнения выражают законы сохранения массы, импульса и энергии при движении вязкого сжимаемого газа. Газ предполагается совершенным, что упрощает постановку широкого класса задач, связанных с возникновением и развитием возмущений в сверхзвуковых пограничных слоях. Под совершенным будем понимать вязкий сжимаемый химически нейтральный газ, находящийся в состоянии термодинамического равновесия, у которого неизменны удельные теплоёмкости при постоянном давлении и объёме, а внутренняя энергия и статическая энтальпия являются функциями только температуры. Состояние газа описывается уравнением Менделеева — Клапейрона.

В настоящей работе исследуются *модельные* течения совершенного двухатомного газа — воздуха — для характерных условий аэродинамического эксперимента при сверхзвуковых скоростях, а также для характерных полётных условий сверхзвукового пассажирского самолёта. Поэтому предположение о совершенстве воздуха ограничено реальными свойствами газа с одной стороны и высокотемпературными эффектами с другой.

Реальные свойства, такие как конденсация, проявляются при достаточно низких температурах и высоких давлениях. В ударных аэродинамических трубах при числе Маха $M \lesssim 6$ и невысокой температуре торможения $T_0 \sim 400...700\text{K}$ поток на выходе из сопла трубы может охлаждаться до довольно низких температур

$T_{\infty}^* \approx 50\text{K}$. Однако при пониженном давлении в рабочей части трубы конденсации не происходит [124; 125].

Высокотемпературные эффекты проявляются при сильном нагреве сверхзвукового потока в ударной волне или из-за вязкой диссипации в пограничном слое. Принято, что свойства воздуха начинают отклоняться от свойств совершенного газа при $T^* \gtrsim 800\text{K}$, когда начинают возбуждаться уровни колебательной энергии молекул, а теплоёмкость начинает зависеть от температуры. Дальнейший рост температуры приводит к диссоциации и излучению; свойства такой газовой смеси существенно отличаются от свойств совершенного воздуха [126]. Роль высокотемпературных эффектов на заданном режиме течения можно оценить, опираясь на температуру адиабатически заторможенного потока как предельно возможную температуру совершенного газа с показателем адиабаты γ

$$T_0^* \simeq T_{\infty}^* \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2 \right). \quad (1.1)$$

Режимы течения, рассматриваемые в настоящей работе, характерны для ударных аэродинамических труб или для условий полёта сверхзвукового пассажирского самолёта: $T_{\infty}^* > 50\text{K}$, $T_0^* < 800\text{K}$. Таким образом, дальнейшее применение модели совершенного газа является обоснованным.

1.1.1. Дифференциальные уравнения Навье — Стокса

Уравнения Навье–Стокса в произвольной криволинейной системе координат ξ, η, ζ , где $x = x(\xi, \eta, \zeta)$, $y = y(\xi, \eta, \zeta)$, $z = z(\xi, \eta, \zeta)$ — декартовы координаты, в дивергентной форме имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \zeta} = \mathbf{S}, \quad (1.2)$$

где \mathbf{Q} — вектор консервативных зависимых переменных, \mathbf{E} , \mathbf{G} , \mathbf{F} — векторы потоков в криволинейной системе координат, \mathbf{S} — вектор источников. Векторы \mathbf{Q} , \mathbf{E} , \mathbf{G} , \mathbf{F} и \mathbf{S} связаны с соответствующими векторами \mathbf{Q}_c , \mathbf{E}_c , \mathbf{G}_c , \mathbf{F}_c и \mathbf{S}_c в декартовой

системе координат формулами

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= J\mathbf{Q}_c, \quad \mathbf{S} = J\mathbf{S}_c, \quad \mathbf{E} = J \left(\mathbf{E}_c \frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathbf{G}_c \frac{\partial \xi}{\partial y} + \mathbf{F}_c \frac{\partial \xi}{\partial z} \right), \\ \mathbf{G} &= J \left(\mathbf{E}_c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mathbf{G}_c \frac{\partial \eta}{\partial y} + \mathbf{F}_c \frac{\partial \eta}{\partial z} \right), \quad \mathbf{F} = J \left(\mathbf{E}_c \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \mathbf{G}_c \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \mathbf{F}_c \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right),\end{aligned}\quad (1.3)$$

где $J = \det[\partial(x, y, z) / \partial(\xi, \eta, \zeta)]$ — якобиан преобразования координат. Криволинейная система координат (ξ, η, ζ) применяется в настоящем методе для построения дискретизации с равномерным шагом. Для этого заданная расчётная сетка в декартовой системе координат отображается на равномерную сетку в криволинейной системе.

Задача рассматривается в безразмерном виде. Применяется стандартная процедура приведения уравнений к безразмерному виду, в которой

- декартовы координаты $x = x^*/L^*$, $y = y^*/L^*$, $z = z^*/L^*$ отнесены к характерному линейному размеру задачи L^* ,
- компоненты вектора скорости \mathbf{V} — $u = u^*/V_\infty^*$, $v = v^*/V_\infty^*$, $w = w^*/V_\infty^*$ вдоль осей x , y и z — к характерной скорости, соответствующей величине модуля вектора скорости набегающего потока V_∞^* ,
- время $t = t^*/(L/V_\infty^*)$ — к характерному газодинамическому времени L^*/V_∞^* , за которое набегающий поток преодолевает расстояние L^* ,
- давление $p = p^*/(\rho_\infty^* V_\infty^{*2})$ — к удвоенному скоростному напору набегающего потока,
- остальные газодинамические переменные относятся к их значениям в набегающем потоке:
 - температура $T = T^*/T_\infty^*$,
 - плотность газа $\rho = \rho^*/\rho_\infty^*$,
 - динамический коэффициент молекулярной вязкости $\mu = \mu^*/\mu_\infty^*$.

Здесь и далее верхний индекс «*» означает, что данная переменная является размерной; символ « ∞ » обозначает значение переменной в невозмущённом набегающем потоке.

В рамках используемой модели совершенного газа удельные теплоёмкости при постоянном давлении c_p^* и постоянном объёме c_v^* постоянны. В этом случае обезразмеривание приводит к четырём определяющим параметрам подобия:

- $\gamma = c_p^*/c_v^* \equiv \gamma_\infty$ — показатель адиабаты,
- $\text{Pr}_\infty = \mu_\infty^* c_p^*/\lambda_\infty^*$ — число Прандтля,
- $\text{M}_\infty = V_\infty^*/a_\infty^*$ — число Маха (a — скорость звука),

– $\text{Re}_{\infty,L} = (\rho_{\infty}^* V_{\infty}^* L^*) / \mu_{\infty}^*$ — число Рейнольдса.

Векторы \mathbf{Q}_c , \mathbf{E}_c , \mathbf{G}_c и \mathbf{F}_c выражаются следующим образом:

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_c = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}_c = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u + p - \tau_{xx}/\text{Re}_{\infty} \\ \rho u v - \tau_{xy}/\text{Re}_{\infty} \\ \rho u w - \tau_{xz}/\text{Re}_{\infty} \\ \rho u H + I_x/\text{Re}_{\infty} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v u - \tau_{yx}/\text{Re}_{\infty} \\ \rho v v + p - \tau_{yy}/\text{Re}_{\infty} \\ \rho v w - \tau_{yz}/\text{Re}_{\infty} \\ \rho v H + I_y/\text{Re}_{\infty} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w u - \tau_{zx}/\text{Re}_{\infty} \\ \rho w v - \tau_{zy}/\text{Re}_{\infty} \\ \rho w w + p - \tau_{zz}/\text{Re}_{\infty} \\ \rho w H + I_z/\text{Re}_{\infty} \end{bmatrix},$$

где

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2), \quad H = \frac{T}{(\gamma - 1) M_{\infty}^2} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)$$

— полная энергия на единицу объёма и полная энтальпия на единицу объёма, соответственно;

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{\tau} = \mu \, 2\mathbf{s} - \frac{2}{3} \mu \text{div} \mathbf{V} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

— симметричный тензор вязких напряжений для нулевой объёмной вязкости (гипотеза Стокса), который линейно связан с тензором скоростей деформации

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} (\text{grad} \mathbf{V} + (\text{grad} \mathbf{V})^T) \quad (1.4)$$

и имеет компоненты

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right); \end{aligned}$$

$\mathbf{I} = -\lambda \text{grad } T - \boldsymbol{\tau} \mathbf{V}$ — вектор теплового потока с компонентами

$$\begin{aligned}I_x &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - (u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}), \quad I_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} - (u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz}), \\ I_z &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} - (u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz}). \end{aligned}$$

Система (1.2) замыкается уравнением состояния

$$p = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \rho T, \quad (1.5)$$

а динамический коэффициент молекулярной вязкости принимается зависящим только от температуры по закону Сазерленда

$$\mu = \frac{1 + T_\mu}{T + T_\mu} T_\mu^{\frac{3}{2}}, \quad (1.6)$$

где $T_\mu = T_\mu^*/T_\infty^*$. Коэффициент теплопроводности линейно связан с динамической вязкостью

$$\lambda = \frac{\mu}{\text{Pr} (\gamma - 1) M_\infty^2}.$$

Для воздуха как совершенного двухатомного газа $\gamma = 1.4$, $T_\mu^* = 110.4$ К, а число Прандтля полагается постоянным: $\text{Pr} \equiv \text{Pr}_\infty = 0.72$.

1.1.2. Граничные и начальные условия

На неконсервативные («примитивные») зависимые переменные искомого решения накладываются *базовые* или *возмущённые граничные условия*. Базовые условия используются для получения невозмущённого поля течения — стационарного решения системы 1.2 — и включают следующие основные типы:

- изотермическая стенка, или поверхность модели в ударной трубе — прилипание и постоянство температуры (за короткое время эксперимента температура поверхности изменяется слабо):

$$(u, v, w) = \mathbf{0}, \quad T \equiv T_w = \text{const};$$

- адиабатически прогретая поверхность, или поверхность летательного аппарата — прилипание и отсутствие теплообмена с потоком (учёт радиационного охлаждения в задачах диссертации не требуется):

$$(u, v, w) = \mathbf{0}, \quad \partial T / \partial \mathbf{n} \equiv 0,$$

где \mathbf{n} — вектор внешней нормали к поверхности;

- невозмущённый поток — условие первого рода, фиксирующее поток в некотором состоянии «0»:

$$(u, v, w) = (u_0, v_0, w_0), \quad T = T_0;$$

частным случаем является набегающий вдоль оси x поток:

$$(u, v, w) = (V_\infty, 0, 0) = (1, 0, 0), \quad T = T_\infty = 1;$$

- линейная экстраполяция зависимых переменных на границу изнутри области; для границы $\xi = \text{const}$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = 0,$$

используется для моделирования выхода потока из расчётной области; обеспечивает неотражение возмущений от границы при сверхзвуковом истечении, и вызывает малые локализованные ошибки вблизи границы при дозвуковом истечении, которыми можно пренебречь;

- симметрия; для границы $\zeta = const$, совпадающей с $z = 0$, имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \zeta} = 0; \quad (1.7)$$

- периодичность; поля течения на двух границах, которые могут быть совмещены параллельным переносом, идентичны:

$$(u_1, v_1, w_1) = (u_2, v_2, w_2), \quad p_1 = p_2, \quad T_1 = T_2.$$

Возмущённые граничные условия являются нестационарной или стационарной модификацией базовых граничных условий, которая позволяет внести возмущения в базовое решение. Эти условия разнообразны и обсуждаются индивидуально в месте их определения.

В случае, когда в невозмущённом течении моделируется адиабатически прогретая стенка ($\partial T / \partial \mathbf{n} \equiv 0$), при моделировании возмущений невозмущённое распределение температуры стенки фиксируется, что гарантирует отсутствие пульсаций температуры на стенке: $T'_w \equiv 0$.

Следует отметить, что граничное условие симметрии использовалось в старой версии пакета авторских программ и могло приводить к избыточной численной диссипации возмущений вблизи границы при их недостаточном сеточном разрешении, как это отмечается в главе 7. В современной версии пакета программ граница симметрии или периодическая граница рассматриваются как *внутренние* точки расчётной области. Для этого расчётная сетка наращивается вовне сеточными плоскостями на полуширину шаблона численной схемы — создаётся добавочная расчётная область, состоящая из *теневого* узлов. В случае симметрии поле течения в теневых узлах подменяется зеркальным отражением соответствующей области нетеневого течения, а в случае периодической границы — копией поля течения из окрестности второй периодической границы.

Начальное приближение. Если не указано иначе, при получении стационарного решения в двухмерном случае в качестве начального приближения используется однородный набегающий поток. В процессе решения нестационарной задачи он развивается в ламинарное стационарное течение, удовлетворяющее заданным граничным условиям. Геометрия рассматриваемых в диссертации задач номинально двухмерная. Поэтому стационарное решение в трёхмерном случае есть соответствующее двухмерное стационарное решение, «вытянутое» в третьем направлении. Следует отметить, что полученное таким образом поле течения не

только математически корректно, но и согласовано с численным методом: оно является сошедшимся *численным* решением.

При решении нестационарной задачи развития возмущений в качестве начального приближения задавалось предварительно рассчитанное стационарное поле течения.

1.1.3. Элементарные возмущения в однородном потоке

Известно [127–129], что в движущейся сжимаемой среде могут распространяться элементарные возмущения акустической, вихревой и энтропийной природы. Акустические волны движутся со скоростью звука относительно потока. Неакустические волны сносятся со скоростью потока. Если однородный поток движется со скоростью $\mathbf{U} = (u, v, w)$ при температуре T и плотности ρ (число Маха $M = U_{M\infty}/\sqrt{T}$, $U = |\mathbf{U}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$), то элементарные возмущения с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} имеют вид

$$(u', v', w', p', T') = (\delta u, \delta v, \delta w, \delta p, \delta T) \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \varphi), \quad (1.8)$$

где φ — произвольная фаза волны.

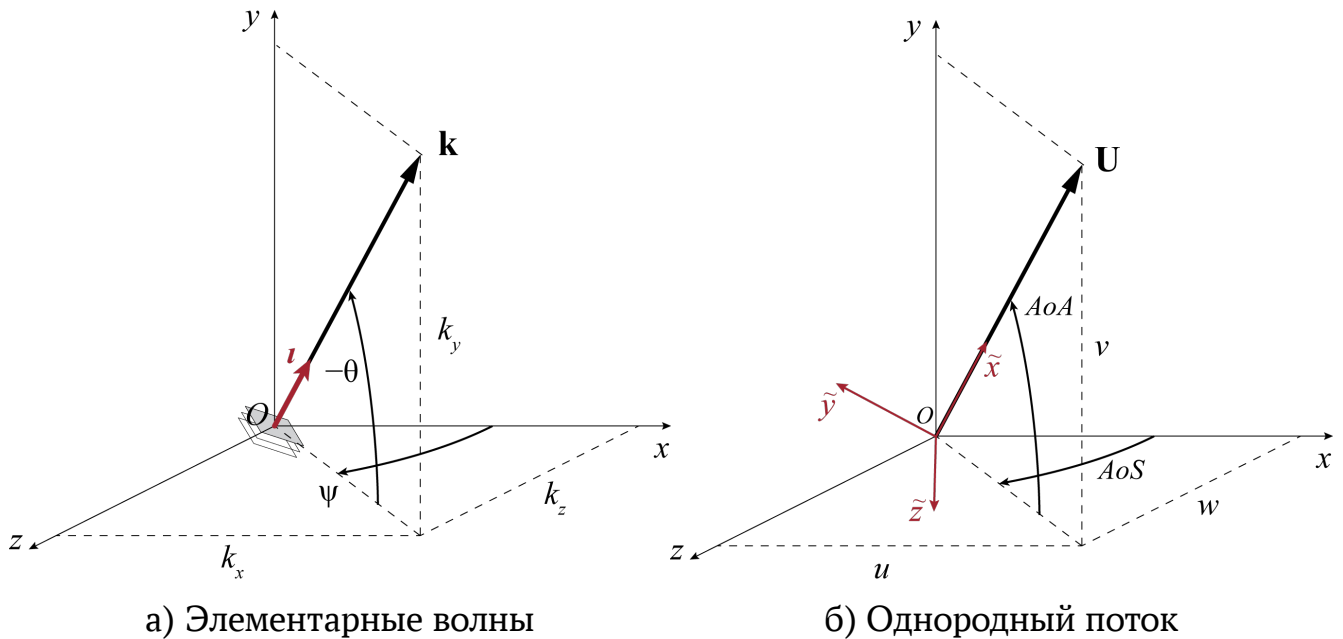


Рисунок 1.1 — Сферическая система координат

Волновой вектор $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = k_\infty \boldsymbol{\iota}$ в декартовой системе координат задаётся амплитудой k_∞ и направлением $\boldsymbol{\iota} = (\cos \theta \cos \psi, -\sin \theta, \cos \theta \sin \psi)$, которое определяет наклон волновых фронтов и в свою очередь задаётся двумя углами θ и ψ в сферической системе координат (рис. 1.1а). Обычно пограничный слой располагается вблизи плоскости xOz , и при $\theta > 0$ волновой вектор направлен к пограничному слою, как принято в других работах (например, в [130]).

Величину k_∞ и амплитуды возмущения $\delta(\cdot)$ удобно записать в системе отсчёта, у которой ось \widetilde{Ox} сонаправлена с вектором скорости \mathbf{U} . Для этого исходную декартову систему $Oxyz$ следует повернуть на угол атаки AoA и угол скольжения AoS , определяемые направлением вектора \mathbf{U} в декартовой системе координат (рис. 1.1б). В скоростной системе $\widetilde{\mathbf{U}} = (U, 0, 0)$, скалярное произведение сохраняется $\widetilde{\mathbf{U}} \cdot \widetilde{\mathbf{k}} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{k} = U \widetilde{k}_x = \text{const}$; волновой вектор $\widetilde{\mathbf{k}} = k_\infty \widetilde{\boldsymbol{\iota}}$ имеет направление $\widetilde{\boldsymbol{\iota}} = (\widetilde{\iota}_x, \widetilde{\iota}_y, \widetilde{\iota}_z) = (\cos \widetilde{\theta} \cos \widetilde{\psi}, -\sin \widetilde{\theta}, \cos \widetilde{\theta} \sin \widetilde{\psi})$, $\widetilde{\theta} = \theta + AoA$, $\widetilde{\psi} = \psi - AoS$. Характеристики возмущений приведены в таблице 1.1; параметр ϵ контролирует амплитуду волны. Верхний знак для акустических возмущений соответствует быстрым волнам, нижний — медленным. Величина $k_\infty = \omega/c$, где c — фазовая скорость волны в направлении волнового вектора

$$c = \begin{cases} U \widetilde{\iota}_x, & \text{вихревые и энтропийные волны;} \\ U (\widetilde{\iota}_x \pm 1/M), & \text{акустические волны.} \end{cases}$$

Процедуру построения элементарного возмущения завершает обратный переход из скоростной в декартову систему координат для векторов $\widetilde{\delta \mathbf{u}}$ и $\widetilde{\mathbf{k}}$:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos AoA \cos AoS & -\sin AoA \cos AoS & -\sin AoS \\ \sin AoA & \cos AoA & 0 \\ \cos AoA \sin AoS & -\sin AoA \sin AoS & \cos AoS \end{pmatrix} \widetilde{\mathbf{q}}.$$

Двухмерный случай получается при $w = 0$, $\widetilde{\psi} = 0$: $\widetilde{\iota}_{2D} = (\iota_x, \iota_y) = (\cos \widetilde{\theta}, -\sin \widetilde{\theta})$ и для вихревого возмущения $\widetilde{\delta \mathbf{u}} = \epsilon \cdot (-\iota_y, \iota_x)$.

Возмущения плотности получаются дифференцированием уравнения состояния

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta T}{T}. \quad (1.9)$$

Таблица 1.1 — Характеристики элементарных волн в трёхмерном однородном потоке

Тип возмущения	Дисперсионное соотношение	δp	$\widetilde{\delta \mathbf{u}} \equiv \left(\widetilde{\delta u}, \widetilde{\delta v}, \widetilde{\delta w} \right)$	δT
акустическое	$\omega - \mathbf{U} \cdot \mathbf{k} = \pm (\sqrt{T}/M_\infty) \cdot k$	ϵ	$\pm \epsilon / (\rho U) \cdot M \cdot \widetilde{t}$	$\epsilon / \rho \cdot (\gamma - 1) M^2$
вихревое	$\omega - \mathbf{U} \cdot \mathbf{k} = 0$	0	$-\epsilon \cdot \left(\sin \widetilde{\theta} \cos \widetilde{\psi}; \cos \widetilde{\theta}; \sin \widetilde{\theta} \sin \widetilde{\psi} \right)$	0
энтропийное	$\omega - \mathbf{U} \cdot \mathbf{k} = 0$	0	0	ϵ

1.2. Численный метод

Сформулированная начально-краевая задача решается численно на основе полностью неявного интегро-интерполяционного метода (метода конечного объема) второго порядка точности по пространству и времени. При аппроксимации конвективных потоковых величин используется приближенный метод Роу решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва, а реконструкция зависимых переменных на гранях ячейки проводится с применением схемы WENO-3 для большей части проведенных расчетов. Аппроксимация диффузионных потоковых величин проводится с помощью центральноразностной схемы второго порядка. На границах расчетной области порядок аппроксимации понижается до первого. Полученная при аппроксимации алгебраическая система нелинейных уравнений решается модифицированным методом Ньютона — Рафсона; на каждой итерации по нелинейности линеаризованная система уравнений решается с помощью метода GMRes.

Расчеты проводятся на высокопроизводительных суперЭВМ кластерного типа с использованием параллельной версии пакета расчетных программ и многоблочных структурированных расчетных сеток. Обмен информацией между процессами-вычислителями организуется с помощью технологии MPI¹, а распараллеливание рутинных процедур — с помощью открытой библиотеки для научных вычислений PETSc².

В основу численного метода положена его оригинальная однопроцессорная реализация [100]. Ряд численных подходов реализован автором [130]. Современное состояние и параллельная реализация метода детально изложены в [37]. Ниже для полноты изложения приводится расширенное описание численного метода, частично заимствованное из [37].

¹Message Passing Interface — интерфейс передачи сообщений

²Portable Extensible Toolkit for Scientific Computation — портативный расширяемый набор инструментов для научных вычислений

1.2.1. Аппроксимация

Применение метода конечного объёма к уравнениям Навье — Стокса (1.2) даёт разностные аналоги законов сохранения:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i,j,k}^{[n+1]} \equiv & \frac{3\mathbf{Q}_{i,j,k}^{[n+1]} - 4\mathbf{Q}_{i,j,k}^{[n]} + \mathbf{Q}_{i,j,k}^{[n-1]}}{2\Delta t} - \mathbf{S}_{i,j,k}^{[n+1]} + \\ & + \frac{\mathbf{E}_{i+\frac{1}{2},j,k}^{[n+1]} - \mathbf{E}_{i-\frac{1}{2},j,k}^{[n+1]}}{h_\xi} + \frac{\mathbf{G}_{i,j+\frac{1}{2},k}^{[n+1]} - \mathbf{G}_{i,j-\frac{1}{2},k}^{[n+1]}}{h_\eta} + \frac{\mathbf{F}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{[n+1]} - \mathbf{F}_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{[n+1]}}{h_\zeta} = \mathbf{0} \quad (1.10) \end{aligned}$$

где \mathbf{R} — оператор дискретизации; n — номер временного слоя; Δt — величина шага по времени; i, j, k и h_ξ, h_η, h_ζ — номера узлов и шаги сетки по координатам ξ, η, ζ соответственно; $i \pm 1/2, j \pm 1/2, k \pm 1/2$ — полуцелые узлы, соответствующие граням ячейки (элементарного конечного объёма).

Для построения схемы сквозного счёта (без явного выделения разрывов) вычисление потоков на гранях ячеек (в полуцелых узлах) осуществляется на основе решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва, который обусловлен различиями дискретных значений неизвестных по обе стороны грани. Одним из приближённых методов решения этой задачи является метод её расщепления по обобщённым координатам с последующей линеаризацией расщеплённой задачи путём представления матрицы Якоби \mathbf{A} (например, $\mathbf{A} = \partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{Q}$ для направления ξ) в некотором осреднённом состоянии, обозначаемом нижним индексом LR : $\mathbf{A}_{LR} = [\partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{Q}]_{LR}$. Линеаризованная задача легко решается с помощью диагонального разложения оператора \mathbf{A}

$$\mathbf{A}_{LR} = \mathbf{B}_{LR} \mathbf{\Lambda}(\lambda_{LR}) \mathbf{B}_{LR}^{-1},$$

где столбцы матрицы \mathbf{B} есть собственные векторы оператора \mathbf{A} , а диагональная матрица $\mathbf{\Lambda}$ состоит из его соответствующих собственных значений λ .

При аппроксимации конвективной составляющей векторов потоков $\mathbf{E}, \mathbf{G}, \mathbf{F}$ в полуцелых узлах использована монотонная схема типа Годунова [131] и приближенный метод Роу [132] решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. При этом расчётные формулы для векторов $\mathbf{E}, \mathbf{G}, \mathbf{F}$ аналогичны, поэтому ниже речь будет идти о векторе \mathbf{E} . На грани ячейки (в полуцелом узле) имеем:

$$\mathbf{E}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{E}(\mathbf{Q}_L) + \mathbf{E}(\mathbf{Q}_R) - \mathbf{B}_{LR} \mathbf{\Lambda}(\varphi(\lambda_{LR})) \mathbf{B}_{LR}^{-1} (\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L) \right].$$

Здесь индексами L и R отмечены величины, которые рассчитаны по значениям в соседних ячейках, соприкасающихся по рассматриваемой грани. Например, для грани $i + 1/2$ индекс L соответствует ячейке i (слева), а индекс R — ячейке $i + 1$ (справа). Функция $\varphi(\lambda)$ обеспечивает неубывание энтропии при численном решении линеаризованной задачи. В настоящей работе использована следующая функция:

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|, & \text{если } |\lambda| > \varepsilon \\ \frac{\lambda^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}, & \text{если } |\lambda| \leq \varepsilon \end{cases}$$

где ε — параметр, отвечающий за диссипативные свойства разностной схемы ($\varepsilon = 0.01$, если не указано иначе).

Осреднённое состояние оператора \mathbf{A}_{LR} рассчитывается согласно [132] по особо осреднённым зависимым переменным задачи

$$u_{LR} = \frac{u_L \sqrt{\rho_L} + u_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, v_{LR} = \frac{v_L \sqrt{\rho_L} + v_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, w_{LR} = \frac{w_L \sqrt{\rho_L} + w_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}},$$

$$H_{LR} = \frac{H_L \sqrt{\rho_L} + H_R \sqrt{\rho_R}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, a_{LR}^2 = (\gamma - 1) \left(H_{LR} - \frac{1}{2} (u_{LR}^2 + v_{LR}^2 + w_{LR}^2) \right)$$

где a — местная скорость звука.

Для повышения порядка аппроксимации (до третьего и пятого) при реконструкции (интерполяции) зависимых переменных на грань элементарной ячейки используется принцип WENO³ [133]. В рамках рассматриваемого численного метода подход WENO-3 был реализован в [134] и сводится к выражениям:

$$\mathbf{Q}_R = \omega_{0R} \mathbf{Q}_{0R} + \omega_{1R} \mathbf{Q}_{1R}, \quad \mathbf{Q}_{0R} = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_{i+1} + \mathbf{Q}_i), \quad \mathbf{Q}_{1R} = -\frac{1}{2} \mathbf{Q}_{i+2} + \frac{3}{2} \mathbf{Q}_{i+1};$$

$$\mathbf{Q}_L = \omega_{0L} \mathbf{Q}_{0L} + \omega_{1L} \mathbf{Q}_{1L}, \quad \mathbf{Q}_{0L} = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_{i+1}), \quad \mathbf{Q}_{1L} = -\frac{1}{2} \mathbf{Q}_{i-1} + \frac{3}{2} \mathbf{Q}_i;$$

$$\omega_{0R} = \frac{\alpha_{0R}}{\alpha_{0R} + \alpha_{1R}}, \quad \omega_{1R} = \frac{\alpha_{1R}}{\alpha_{0R} + \alpha_{1R}}; \quad \alpha_{0R} = \frac{d_0}{(\varepsilon + \beta_{0R})^2}, \quad \alpha_{1R} = \frac{d_1}{(\varepsilon + \beta_{1R})^2};$$

$$\omega_{0L} = \frac{\alpha_{0L}}{\alpha_{0L} + \alpha_{1L}}, \quad \omega_{1L} = \frac{\alpha_{1L}}{\alpha_{0L} + \alpha_{1L}}; \quad \alpha_{0L} = \frac{d_0}{(\varepsilon + \beta_{0L})^2}, \quad \alpha_{1L} = \frac{d_1}{(\varepsilon + \beta_{1L})^2};$$

$$\beta_{0R} = (\mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_i)^2, \quad \beta_{1R} = (\mathbf{Q}_{i+2} - \mathbf{Q}_{i+1})^2;$$

$$\beta_{0L} = (\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i+1})^2, \quad \beta_{1L} = (\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1})^2;$$

³Weighted Essentially Non-Oscillatory — взвешенная существенно не осциллирующая схема

$$d_0 = \frac{2}{3}, d_1 = \frac{1}{3}, \varepsilon = 10^{-4}.$$

Данная численная схема не удовлетворяет условию монотонности, в том числе в смысле невозрастания полной вариации⁴. Поэтому вблизи сильных ударных волн решение может содержать нефизичные осцилляции. Свойства принципа WENO гарантируют, что подобные осцилляции локализованы и в целом не существенны, поэтому схема относится к классу схем сквозного счёта. Тем не менее, такие осцилляции могут приводить к аномальному поведению возмущений, взаимодействующих с ударной волной, что обсуждается в разделе 2.2. На гладких же решениях схема WENO достигает целевого порядка аппроксимации и корректно воспроизводит развитие малых возмущений (например акустических волн в однородном потоке) без появления паразитных осцилляций, что также будет продемонстрировано в 2.2.

Также реализован и применён в нескольких расчётах метод WENO-5. Процедура реконструкции применяется к примитивным переменным или к инвариантным переменным, из которых далее вновь восстанавливаются примитивные переменные. Соответствующее описание опущено для краткости.

Для аппроксимации диффузионной составляющей векторов потоков **E**, **G** и **F** на грани элементарной ячейки применена разностная схема типа центральных разностей второго порядка точности, в рамках которой производные вычисляются как

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial q}{\partial \xi} \right|_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \frac{1}{h_\xi} (q_{i+1,j,k} - q_{i,j,k}), \\ \left. \frac{\partial q}{\partial \eta} \right|_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \frac{1}{4h_\eta} (q_{i+1,j+1,k} + q_{i,j+1,k} - q_{i+1,j-1,k} - q_{i,j-1,k}), \\ \left. \frac{\partial q}{\partial \varsigma} \right|_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \frac{1}{4h_\varsigma} (q_{i+1,j,k+1} + q_{i,j,k+1} - q_{i+1,j,k-1} - q_{i,j,k-1}) \end{aligned}$$

Здесь q — любая из неконсервативных («примитивных») зависимых переменных задачи u, v, w, p или T .

Граничные условия рассматриваются как часть оператора дискретизации **R** (1.10) и непосредственно определяют его компоненты в узлах сетки, лежащих на границах расчётной области. В дискретном виде основные граничные условия (раздел 1.1.2) имеют вид:

⁴Подход TVD — Total Variation Diminishing

- условие на стенке при $j = 1$ (граница $\eta = const$)

$$\mathbf{R}_{i,1,k}^{[n+1]} \equiv \left(u_{i,1,k}^{[n+1]}, v_{i,1,k}^{[n+1]}, w_{i,1,k}^{[n+1]}, -3p_{i,1,k}^{[n+1]} + 4p_{i,2,k}^{[n+1]} - p_{i,3,k}^{[n+1]}, T_{i,1,k}^{[n+1]} - T_w \right)^T = \mathbf{0},$$

где условие на давление соответствует экстраполяции вдоль нормали к стенке с постоянной производной $\partial p / \partial \eta = 0$;

- условие набегающего потока

$$\mathbf{R}_{i,j,k}^{[n+1]} \equiv \left(u_{i,j,k}^{[n+1]} - 1, v_{i,j,k}^{[n+1]}, w_{i,j,k}^{[n+1]}, p_{i,j,k}^{[n+1]} - \frac{1}{\gamma M^2}, T_{i,j,k}^{[n+1]} - 1 \right)^T = \mathbf{0},$$

где условие на давление $p = 1/\gamma M^2$ соответствует точному решению уравнений Навье — Стокса для однородного потока;

линейная экстраполяция при $i = n_x$ (границы $\xi = const$)

$$\mathbf{R}_{n_x,j,k}^{[n+1]} \equiv \mathbf{q}_{n_x,j,k}^{[n+1]} - 2\mathbf{q}_{n_x-1,j,k}^{[n+1]} + \mathbf{q}_{n_x-2,j,k}^{[n+1]} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q} = (u, v, w, p, T)^T.$$

В последних версиях авторского кода граничные условия симметрии и периодичности не аппроксимируются. Вместо этого расчётная сетка расширяется на полуширину шаблона, и на соответствующих границах задача решается как и для внутренних точек расчётной области. Такой подход используется в настоящей работе, если явно не указано иное.

1.2.2. Решение сеточных уравнений

Описанная процедура аппроксимации сводит интегрирование системы дифференциальных уравнений (1.2) и граничных условий к решению системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \tag{1.11}$$

где \mathbf{R} — оператор дискретизации, вычисляющий вектор невязки согласно (1.10), \mathbf{U} — вектор искоемых неконсервативных переменных (u, v, w, p, T) во всех N узлах расчётной сетки (итого $5N$ для трёхмерной постановки задачи и $4N$ для двухмерной). Система сеточных уравнений (1.11) решается с помощью модифицированного метода Ньютона — Рафсона

$$\mathbf{U}^{[k+1]} = \mathbf{U}^{[k]} - \tau^{[k]} \left(\mathbf{J}^{[k_0]} \right)^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{U}^{[k]})$$

где k, k_0 — номера итераций по нелинейности, $k_0 \leq k$, $\mathbf{J}^{[k_0]} = (\partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{U})^{[k_0]}$ — матрица Якоби системы нелинейных уравнений, $\mathbf{R}(\mathbf{U}^{[k]})$ — вектор невязки, τ — параметр регуляризации. Произведение $(\mathbf{J}^{[k_0]})^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{U}^{[k]}) \equiv \mathbf{Y}^{[k]}$ является решением линейной системы уравнений

$$\mathbf{J}^{[k_0]} \mathbf{Y}^{[k]} = \mathbf{R}(\mathbf{U}^{[k]}). \quad (1.12)$$

Параметр регуляризации ограничивает изменение решения на итерации метода Ньютона, опираясь на эволюцию решений линейной системы на предыдущих итерациях [135]

$$\tau^{[k]} = \max[0.01, -\tau^{[k-1]} \frac{(\mathbf{Y}^{[k]} - \mathbf{Y}^{[k-1]}) \cdot \mathbf{Y}^{[k]}}{(\mathbf{Y}^{[k]} - \mathbf{Y}^{[k-1]})^2}].$$

По мере сходимости итерационного процесса $\tau^{[k]} \rightarrow 1$, а скорость сходимости теоретически стремится к квадратичной.

Матрица Якоби $\mathbf{J}^{[k_0]} = (\partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{U})^{[k_0]}$ формируется численно на итерации по нелинейности k_0 с помощью универсальной процедуры конечных приращений вектора невязки \mathbf{R} по вектору искомых переменных \mathbf{U} , которая применима к произвольной системе сеточных уравнений [37].

Формирование матрицы Якоби — очень трудоёмкий процесс [37]. Её уточнение на каждой итерации по нелинейности как правило улучшает сходимость метода Ньютона, однако не влияет на сошедшееся решение. Поэтому повторное использование матрицы Якоби при $k > k_0$ позволяет ускорить процесс расчёта. Если сходимость метода Ньютона остаётся удовлетворительной, матрицу Якоби достаточно вычислить лишь на начальной итерации по нелинейности ($k_0 = 0$) и использовать её без пересчёта в течение всего шага по времени. Более того, если среднее поле течения не меняется в процессе расчёта, а развивающиеся в потоке возмущения малы (линейный режим), матрицу Якоби достаточно вычислить лишь *на первом шаге по времени* и далее её не пересчитывать. Применимость такого подхода проверена в расчётах подраздела 3.2.

Сходимость метода Ньютона контролируется с помощью невязки по норме ℓ_∞ ($\|\mathbf{R}\|_\infty = \max_n |\mathbf{R}_n|$ — максимальный по абсолютной величине элемент вектора).

Для рассматриваемых задач размерность системы (1.12) линейных алгебраических уравнений, получаемой на итерации по нелинейности, достигает 10^9 . Такие системы возможно решить только с помощью итерационных методов, наиболее

эффективными из которых являются сжимающие методы подпространства Крылова и, в частности, метод обобщённых минимальных невязок GMRes (generalized minimal residual) [136]. В результате тестовых расчётов [37] выбран оптимальный метод решения линейных систем DGMRes(k) [137] с предобуславливателем ILU (incomplete Low-Upper factorization — неполное разложение на нижнюю и верхнюю треугольные матрицы), реализованный в библиотеке подпрограмм PETSc.

1.2.3. Исследование возмущённых течений

Исследование возмущённых течений разбивается на два основных этапа. На первом этапе с высокой точностью вычисляется невозмущённое поле течения — стационарное поле ламинарного обтекания исследуемой конфигурации. На втором этапе путём активации возмущённого граничного условия (см. подраздел 1.1.2) — стационарного или нестационарного — в невозмущённое поле течения вносятся искусственные возмущения и рассчитывается серия полей в последовательные моменты времени.

Всякое рассматриваемое в работе невозмущённое течение номинально двухмерное. Направление Oz , для которого все сечения $z = \text{const}$ невозмущённого течения эквивалентны, будем называть *боковым*. Направление движения набегающего потока (как правило, $+Ox$) будем называть *основным*; нормальное к основному и боковому направлениям — *поперечным* (как правило, $+Oy$). Орты направлений Ox, Oy, Oz — \mathbf{i}, \mathbf{j} и \mathbf{k} , соответственно, — всегда образуют правую тройку.

1.2.3.1. Получение полей течения

Невозмущённое течение вычисляется методом установления: задаётся начальное течение (см. подраздел 1.1.2) и численно решается нестационарная задача его развития до момента установления, когда поле перестаёт изменяться со временем в пределах заданной точности. Если не указано иное, процесс установления завершается при достижении целевого значения невязки метода Ньютона 10^{-11} на начальной итерации по нелинейности. Для рассматриваемых задач это значит,

что за единицу расчётного времени зависимые переменные задачи изменяются в пределах 10^{-11} . По опыту расчётов, эти изменения сосредоточены в пограничном слое вблизи выходной границы. Учитывая, что наименьший уровень обсуждаемых в работе возмущений составляет 10^{-8} , а времена нестационарных расчётов не превышают десяти, выбранная точность установления невозмущённого течения является источником погрешности нестационарных результатов не более 1%. В действительности, уровень возмущений оказывается на несколько порядков выше, и выбранная точность невозмущённого течения избыточна. Сам процесс установления невозмущённого течения не представляет интерес, и достижение точности установления на каждом шаге по времени не требуется. Поэтому для ускорения и стабилизации вычислений процесс решения сеточных уравнений на каждом шаге по времени принудительно останавливается после одной-двух итераций по нелинейности, в общем случае без достижения фиксированной точности. По мере установления невязка на временном шаге уменьшается, достигая в конечном итоге целевого значения.

При получении невозмущённых полей течения используется шаг по времени Δt , постоянный во всей расчётной области, но постепенно увеличивающийся по мере установления поля. Теоретически максимальная величина Δt не ограничена сверху в силу устойчивости применяемой неявной численной схемы, но практически в настоящей работе отношение $\Delta t/h_{min}$, $h_{min} = \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, не превышало 10.

Нестационарное возмущённое течение моделируется путём численного решения нестационарной задачи с фиксированной точностью на каждом шаге по времени. В качестве начального приближения используется соответствующее невозмущённое поле течения $\mathbf{U}(t = 0)$. Размер шага по времени фиксируется из соображений достаточного временного разрешения характерных колебательных процессов (как минимум 25 точек на период). На каждом шаге по времени вычисляется мгновенное квазистационарное поле $\mathbf{U}(t)$ с заранее заданной точностью, которая по крайней мере на порядок меньше амплитуды исследуемых возмущений. Для этого итерационный процесс решения системы сеточных уравнений (1.11) на каждом временном шаге продолжается до тех пор, пока нужная точность не будет достигнута (обычно до двадцати итераций в зависимости от амплитуды развивающихся возмущений). Последовательность таких квазистационарных решений $\mathbf{U}(t)$ на каждом шаге по времени, очевидно, моделирует физический процесс развития возмущений во времени. Для экономии места на файловом хранилище полные

трёхмерные поля $U(t)$ сохраняются в файлы через временной интервал, соответствующий нескольким шагам Δt интегрирования по времени. Чаше сохраняются данные о течении на двухмерных сеточных поверхностях (например, поле давления на стенке) для последующего изучения спектральных и статистических характеристик возмущений.

Если постановка задачи позволяет, возмущённое течение моделируется *в подобласти* исходной расчётной области. Размеры подобласти выбираются так, чтобы развивающиеся в процессе расчёта возмущения покидали расчётную область через выходную границу и не взаимодействовали с новыми входными границами, где в качестве новых граничных условий фиксируются параметры исходного невозмущённого течения в полной области. На новых входных границах производные рассчитываются по односторонним разностным формулам, а не как для внутренних точек расчётной области. Поэтому невозмущённое течение в подобласти требует дополнительного установления. Процесс установления идёт монотонно с экспоненциальной скоростью сходимости; полученное невозмущённое течение в подобласти стационарно и соответствует исходному невозмущённому течению с погрешностью не более 0.01%, что практически не влияет эволюцию возмущений. Далее возмущения вводятся непосредственно в подобласти. Применимость данной процедуры будет неоднократно подтверждена результатами настоящей работы.

Описанный подход можно использовать для переноса возмущений из исходной области (или подобласти) в подобласть-преемник, когда вычислительных ресурсов недостаточно для проведения моделирования в единой расчётной области. При этом к невозмущённому течению в подобласти-преемнике добавляется поле возмущений из исходной области. Перенос поля возмущений не приводит к появлению существенных паразитных возмущений даже тогда, когда сетки (исходная и преемник) не перекрываются узел в узел, а перенос возмущений осуществляется путём пространственной линейной интерполяции. Этот подход позволяет моделировать зарождение возмущений с высоким пространственным разрешением, и понижать разрешение впоследствии для экономии ресурсов. Подход, в частности, применён при моделировании развития волновых пакетов и турбулентных пятен над углом разрежения в главе 5.

1.2.3.2. Анализ возмущённых полей

Для анализа возмущённого решения удобно использовать *мгновенные поля возмущений* $\mathbf{U}'(t)$, которые получаются путём вычитания невозмущённого решения из возмущённого в каждый конкретный момент времени t : $\mathbf{U}'(t) = \mathbf{U}(t) - \mathbf{U}(t = 0)$. Например, поле возмущений давления вычисляется так: $p' = p(t, x, y, z) - p(0, x, y, z)$.

Развитие возмущений по времени для некоторой газодинамической переменной q (например, давления p) удобно представлять с помощью осциллограмм $q'(t, x_{fix}, y_{fix}, z_{fix})$ в некоторых фиксированных точках пространства. Такое представление соответствует результатам экспериментальных исследований, когда временной сигнал измеряется с помощью точечных датчиков. Для построения осциллограммы на основе результатов численного моделирования обрабатывается последовательность рассчитанных полей возмущений $\mathbf{U}'(t_m)$ (полных трёхмерных полей или двухмерных сеточных сечений), где t_m , $m = 0, \dots, \tilde{n}_t - 1$ — равноудалённые моменты времени, в которые поле было сохранено. Из каждого мгновенного поля извлекаются значения q' в точке с заданными координатами $x_{fix}, y_{fix}, z_{fix}$; $\tilde{\Delta t} = t_m - t_{m-1} = const$ — шаг дискретизации осциллограммы.

Спектральный анализ осциллограмм выполняется с помощью одномерного дискретного преобразования Фурье, реализованного в библиотеке `numpy` языка программирования Python [138] с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье. Получаемые комплексные амплитуды \hat{A}_m нормируются обычным образом: на единицу для прямого преобразования и на \tilde{n}_t для обратного. Спектр одномерного дискретного вещественнозначного сигнала эрмитово-симметричен по частоте, то есть гармоники с отрицательными частотами не несут дополнительной информации. Поэтому анализируются только гармоники с частотами из отрезка $\omega \in [0, \omega_{cut}]$, где $\omega_{cut} = 2\pi/\tilde{\Delta t}$ — круговая частота отсечки:

$$\omega_m = \frac{m}{\tilde{n}_t} \omega_{cut}, \quad m = 0, \dots, \tilde{n}_t/2 - 1; \quad (1.13)$$

символ $//$ обозначает деление нацело.

Распространение трёхмерных волн исследуется с помощью двухмерных пространственно-временных спектров. Они строятся путём двухмерного дискретного преобразования Фурье [138] от осциллограммы вдоль всей сеточной линии в

боковом направлении: $q'(t_m, x_{fix}, y_{fix}, z_l)$, где $m = 0, \dots, \tilde{n}_t - 1$ — номер сохранённого мгновенного поля, $l = 0, \dots, n_z - 1$ — номер узла сеточной линии. Комплексные амплитуды двухмерного спектра $\hat{A}_{m,l}$ нормируются аналогично: на единицу для прямого преобразования и на $\tilde{n}_t \cdot n_z$ для обратного. Спектр двухмерного дискретного вещественнозначного сигнала симметричен в одном из Фурье-направлений. В настоящей работе он строится симметричным по частоте, поэтому анализируются только гармоники с частотами (1.13). Для каждой частоты ω_m гармоники во всём доступном диапазоне волновых чисел $\beta \in [-\beta_{cut}, \beta_{cut}]$ соответствуют волнам разных наклонов в физической области и поэтому анализируются без сокращения:

$$\beta_l = \frac{l}{n_z} \beta_{cut}, \quad l = -n_z/2, \dots, n_z/2 - 1, \quad (1.14)$$

где $\beta_{cut} = 2\pi/\Delta z$ — волновое число отсечки, а Δz — расстояние между точками, в которых снимаются осциллограммы; Δz равен шагу сетки в боковом направлении, если он постоянный, иначе осциллограммы интерполируются на равномерную сетку с шагом Δz , и затем выполняется дискретное преобразование Фурье.

Для локализованных во времени возмущений, таких как волновые пакеты и турбулентные пятна, дискретное преобразование Фурье позволяет определить суммарную энергию возмущения, которая пропорциональна квадрату амплитуды Фурье $|\hat{A}|^2$. При сравнительном анализе спектров сигналов, полученных при различных условиях расчёта (сетки, временной интервал, временной шаг), амплитуды Фурье нормируются на количество точек в сигнале: \tilde{n}_t для одномерного спектра и $\tilde{n}_t n_z$ для двухмерного. Если условия расчётов идентичны, допускается сравнение модулей комплексных амплитуд $|\hat{A}|$. Исследование спектрального состава не локализованных во времени сигналов (например, стохастических возмущений в главе 6) проводится с помощью *спектральной плотности мощности* сигнала psd , которая не зависит от выбора расчётной сетки, интервала времени и временного шага

$$psd(\omega, \beta) = \left| \frac{\hat{A}(\omega, \beta)}{\tilde{n}_t n_z} \right|^2 \cdot (t_{max} - t_{min})(z_{max} - z_{min}) \quad (1.15)$$

Для визуализации пространственных вихревых структур используются изоповерхности Q -критерия [139].

$$Q = \frac{1}{2} \left(\|\Omega\|^2 - \|\mathbf{s}\|^2 \right), \quad \Omega = \frac{1}{2} \left(\text{grad} \mathbf{V} - (\text{grad} \mathbf{V})^T \right), \quad \mathbf{s} = \frac{1}{2} \left(\text{grad} \mathbf{V} + (\text{grad} \mathbf{V})^T \right)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма ℓ_2 тензора, т. е. $\|A\| = \sqrt{\text{tr } AA^T} = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$; тензор завихренности Ω и тензор скоростей деформации \mathbf{s} (1.4) представляют собой асимметричную и симметричную части тензора градиента скорости $\text{grad} \mathbf{V}$, соответственно. Таким образом, Q — это второй инвариант тензора $\text{grad} \mathbf{V}$. В декартовой системе координат скалярный инвариант Q записывается как

$$Q = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.16)$$

Согласно Q -критерию, вихрь — это область пространства, где $Q > 0$, т. е. завихренность преобладает над скоростью деформации. Для трёхмерной визуализации вихря строится поверхность постоянного уровня $Q = \text{const} > 0$. Величина константы подбирается в каждом конкретном расчётном случае из соображений информативности визуализации.

1.2.3.3. Свойства пограничного слоя

Состояние пограничного слоя характеризуется безразмерными коэффициентами, отражающими локальные свойства давления, трения и теплового потока.

Коэффициент давления вычисляется в виде:

$$c_p = 2 \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* V_\infty^*} = 2 \left(p - \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \right). \quad (1.17)$$

Коэффициент вязкого трения на поверхности вычисляется в виде:

$$c_f = \frac{\left[\tau_{\parallel}^* \right]_w}{\frac{1}{2} \rho_\infty^* V_\infty^*} = \frac{2}{\text{Re}_\infty} \left[\mu \frac{\partial u_{\parallel}}{\partial \mathbf{n}} \right]_w, \quad (1.18)$$

где \mathbf{n} — единичная нормаль к поверхности, направленная внутрь расчётной области, а символ \parallel обозначает проекцию вектора на поверхность. Отрыв и присоединение номинально двухмерного пограничного слоя характеризуются изменением знака коэффициента трения, что соответствует появлению возвратного течения в отрывной области. Распределение коэффициента трения по поверхности отражает состояние пограничного слоя — ламинарный, переходный или турбулентный.

Аналогично состояние пограничного слоя можно характеризовать безразмерным коэффициентом теплового потока к поверхности — числом Стантона, —

который для совершенного газа вычисляется в виде:

$$St_{\text{теор}} = \frac{q_w^*}{\rho_e^* u_e^* c_p^* (T_r^* - T_w^*)}, \quad (1.19)$$

где q_w^* — плотность теплового потока к поверхности, который значительно проще измерять в аэродинамическом эксперименте по сравнению с поверхностным трением τ_{\parallel}^* . В общем случае экспериментальное измерение параметров на границе пограничного слоя $(\cdot)_e$ и температуры восстановления T_r^* затруднительно, поэтому под числом Стантона подразумевается иная величина, опирающаяся на известные параметры набегающего потока

$$St = \frac{q_w^*}{\rho_{\infty}^* u_{\infty}^* c_p^* (T_0^* - T_w^*)} = \frac{\mu_w}{\text{Re}_{\infty} \text{Pr}} \frac{1}{T_0 - T_w} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right)_w = St_{\text{теор}} \cdot \frac{\rho_e^* u_e^*}{\rho_{\infty}^* u_{\infty}^*} \frac{T_r^* - T_w^*}{T_0^* - T_w^*} \quad (1.20)$$

где температура торможения T_0 вычисляется по формуле (1.1). Чтобы обеспечить единство определения коэффициента теплового потока при верификации расчётно-экспериментальных результатов по известным корреляциям, необходимо оценить величины ρ_e^*, u_e^* ; температура восстановления оценивается по формуле

$$T_r^* = T_e^* \left(1 + \text{Pr}^n \cdot \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right), \quad (1.21)$$

где $n = 1/2$ выбирается для ламинарного состояния пограничного слоя и $n = 1/3$ для турбулентного. Параметры на границе пограничного слоя, отмеченные нижним индексом «e», определяются на высоте y_e , которая определяется по критерию $\partial u(y)/\partial \mathbf{n} = 0.01 \cdot (\partial u/\partial \mathbf{n})_w$, если не указано иное.

Нагрев поверхности при сверхзвуковом обтекании вызван вязкой диссипацией энергии, поэтому коэффициенты c_f и $St_{\text{теор}}$ тесно связаны⁵, а их распределения по поверхности качественно повторяют друг друга. Поэтому распределение St по поверхности также позволяет судить о состоянии пограничного слоя.

Для описания характеристик возмущённого пограничного слоя на переходном режиме течения, когда степень стохастизации велика, используется осреднение поля течения $q(t, x, y, z)$ по времени и/или в боковом направлении z

$$\langle q \rangle_t(x, y, z) = \frac{\sum_{m=m_1}^{m_2} q(t_m, x, y, z)}{m_2 - m_1}, \quad (1.22)$$

⁵ для простых безградиентных течений (например, над заострённой пластиной или конусом) связь линейная через коэффициент аналогии Рейнольдса

$$\langle q \rangle_z(t, x, y) = \frac{\sum_{l=l_1}^{l_2} q(t, x, y, z_l)}{l_2 - l_1}. \quad (1.23)$$

Здесь m_1, m_2, l_1, l_2 — индексы диапазонов осреднения; $m \in [1; \tilde{n}_t]$ — номер мгновенного поля, сохранённого в процессе расчёта; $l \in [1; n_z]$ — номер узла *равномерной* расчётной сетки в z -направлении (неравномерное распределение узлов сетки по направлению z переводится в близкое равномерное путём билинейной интерполяции). В некоторых случаях боковое осреднение имеет смысл проводить не по всему размаху расчётной области ($l_1 = 1, l_2 = n_z$), а в пределах, где располагается ядро возмущённого потока (например, раскрывающийся по x турбулентный клин при $z_{l_1}(x) < z < z_{l_2}(x)$; зависимости $z_{l_i}(x)$ линейные и подбираются параллельно границам клина).

Не локализованные по времени возмущения (детерминированные волновые поезда или стохастическое внешнее воздействие) периодичны в настоящей работе. Поэтому интервал осреднения $t_{m_2} - t_{m_1}$ кратен их периоду \mathcal{T} . Момент времени t_{m_1} выбирается произвольно после завершения всех переходных процессов, связанных с внезапным включением возмущений в изначально невозмущённом течении. Такой режим течения далее называется *квазипериодическим*, или *квазистационарным* в том смысле, что средние характеристики течения перестают меняться во времени. Критерий достижения квазистационарного режима: $\|q(t + \mathcal{T}) - q(t)\|_{\ell_\infty} < 10^{-4}$.

1.3. Выводы по главе

Авторский пакет расчётных программ для целостного моделирования трёхмерных нестационарных вязких течений при сверхзвуковых скоростях на основе численного решения уравнений Навье — Стокса на высокопроизводительных многопроцессорных суперЭВМ расширен и адаптирован для задач настоящей диссертации.

Предложен подход к переносу поля возмущений между расчётными сетками с целью сокращения расчётной области и управления размерностью сетки для оптимизации требуемых расчётных мощностей, в том числе с использованием трёхмерной интерполяции, когда сетки в пересекающейся части расчётных областей не совпадают узел в узел. Подход применён в расчётах глав 5 и 7.

Разработаны различные процедуры для обработки, анализа и визуализации результатов численного моделирования. Предложенные подходы и разработанные процедуры внедрены в авторский пакет программ; продемонстрирована их применимость. Развитие пакета программ, выполненное в рамках настоящей работы, а также применимость предложенных вычислительных подходов обсуждаются в последующих главах.

Глава 2. Критерии применимости и достоверность численного метода

Верификация и валидация современной версии авторского пакета расчётных программ выполнены основным разработчиком А.В. Новиковым и обобщены в его диссертации [37]. Большой вклад в разработку и проверку достоверности однопроцессорной версии кода внёс В.Г. Судаков [130]. Понятие *верификации* подразумевает установление соответствия между расчётной моделью и исходными дифференциальными уравнениями Навье — Стокса (математической моделью). Оно включает проверку корректности работы численных алгоритмов и сходимости численного решения по мере уменьшения шага расчётной сетки (сходимость по сеткам, сеточная сходимость). Понятие *валидации* подразумевает определение степени соответствия расчётной модели реальным физическим явлениям, происходящим в исследуемых течениях. Для проведения валидации результаты моделирования сопоставлялись либо с данными других расчётов (в предположении, что те в свою очередь достаточно валидированы), либо с данными эксперимента в аэродинамической трубе, либо с аналитическими результатами линейной теории устойчивости. В [37] отмечается, что проверка сеточной сходимости требует значительных вычислительных ресурсов и зачастую опускается, когда размерность расчётных сеток исчисляется сотнями миллионов узлов.

Для всех задач настоящей работы выполняется проверка достоверности полученных результатов, что значительно расширяет объём верификационных и валидационных исследований, проведённых в [37].

В данной главе рассматриваются две модельных задачи, которые позволяют сформулировать универсальные критерии к численному моделированию сверхзвуковых возмущённых течений: распространение акустических волн в однородном потоке (раздел 2.1) и взаимодействие малых возмущений со скачком уплотнения (раздел 2.2). Далее численный метод валидируется на задаче о нелинейном распаде наклонных волн первой моды сверхзвукового пограничного слоя на пластине вплоть до зарождения турбулентного течения (раздел 2.3).

2.1. Численная диссипация

Численный метод неизбежно привносит в нестационарное решение дополнительную диссипацию, обусловленную аппроксимацией исходного непрерывного решения на дискретной пространственно-временной сетке. Численная диссипация — или схемная вязкость, или численная вязкость, или диссипативные свойства численного метода и т. д. — зависит от используемого численного метода и обязана уменьшаться по мере уменьшения шага сетки (свойство сходимости численного решения). В задачах настоящей работы численная диссипация проявляется в виде избыточного затухания возмущений, развивающихся в расчётной области.

Оценим диссипативные свойства используемого численного метода. Для этого проведём методические исследования простейшего процесса — затухания монохроматической акустической волны в однородном набегающем потоке. Предполагается, что такая оценка будет справедлива для широкого класса задач.

Для выбранной задачи можно получить точное теоретическое решение.

2.1.1. Затухание акустических волн в однородном потоке

Для простоты рассмотрим задачу в одномерной постановке. После простых алгебраических преобразований уравнения Навье — Стокса (1.2) сводятся к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{4}{3Re_{\infty,L}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \rho T}{\partial t} + \frac{\partial \rho u T}{\partial x} - (\gamma - 1) M_{\infty}^2 u \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re_{\infty,L} Pr} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{4\mu}{3Re_{\infty,L}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \cdot (\gamma - 1) M_{\infty}^2.$$

$$\gamma M_{\infty}^2 p = \rho T$$

Линейное приближение этой системы относительно набегающего потока — $(u, \rho, p, T) = (1, 1, 1/\gamma M_{\infty}^2, 1) + (u', \rho', p', T')$ — имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{4}{3Re_{\infty,L}} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} &= 0, \\
M_\infty^2 \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{1}{Re_{\infty,L} Pr} \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} &= 0, \\
\gamma M_\infty^2 p' &= \rho' + T'.
\end{aligned}$$

Будем искать решение в виде бегущей волны $(u', \rho', p', T') = (\hat{u}, \hat{\rho}, \hat{p}, \hat{T}) \exp(i\alpha x - i\omega t)$, где ω — действительная частота, а α — комплексное волновое число. Тогда система дифференциальных уравнений сводится к системе алгебраических уравнений с малым параметром $\epsilon = 1/Re_{\infty,L} \ll 1$

$$\begin{pmatrix} i\alpha & \gamma M_\infty^2(i\alpha - i\omega) & -i\alpha + i\omega \\ i\alpha - i\omega + \frac{4\alpha^2}{3}\epsilon & i\alpha & 0 \\ i\alpha & M_\infty^2(i\alpha - i\omega) & \frac{\alpha^2}{Pr}\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{p} \\ \hat{T} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{p} \\ \hat{T} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

В главном приближении по ϵ (при $\epsilon = 0$) условие разрешимости $\det \mathbf{A} = 0$ даёт известные дисперсионные соотношения для энтропийной и акустической волн, которые обобщены в подразделе 1.1.3: $\alpha_0 = \omega$ для энтропийной волны; $\alpha_0(1 \pm 1/M_\infty) = \omega$ для акустических волн (верхний знак соответствует быстрой волне, нижний — медленной). Учёт первого приближения проведём, раскладывая искомое собственное значение α по формуле Тейлора до $o(\epsilon)$ при $\epsilon \rightarrow 0$

$$\alpha(\omega) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 + o(\epsilon) = \alpha_0 + \left(\frac{d\alpha}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} \epsilon + o(\epsilon).$$

Производную $(d\alpha/d\epsilon)_{\epsilon=0}$ найдём, дифференцируя систему по параметру ϵ :

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{p} \\ \hat{T} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

После ряда алгебраических манипуляций получим:

$$\left(\frac{d\alpha}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = i \cdot \frac{\alpha_0^2}{Pr} \frac{M_\infty^2(\alpha - \omega)^2(4Pr + 3\gamma) - 3\alpha_0^2}{9M_\infty^2(\alpha - \omega)^2 + \omega^2 - (3\alpha_0 - \omega)^2}.$$

Так как $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, элементарные волны не затухают в отсутствие вязкости. В линейном приближении вязкость приводит *исключительно* к демпфированию колебаний. Декремент вязкого затухания для энтропийной волны ($\alpha_0 = \omega$) есть

$$\alpha_{1,i} = \frac{\omega^2}{Re_{\infty,L} Pr},$$

а для акустической волны ($\alpha_0 c \equiv \alpha_0(1 \pm 1/M_\infty) = \omega$)

$$\alpha_{1,i} = \frac{2}{3} \frac{\omega^2}{c^3 Re_{\infty,L}} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\gamma - 1}{Pr} \right). \quad (2.1)$$

В классической книге [140] с помощью общих энергетических соображений получен аналогичный результат, который в случае нулевой объёмной вязкости (гипотеза Стокса) согласуется с формулой (2.1).

Из полученного следует, что в предельном случае $Re_{\infty,L} \rightarrow \infty$ вязкое затухание отсутствует и любое наблюдаемое затухание есть проявление диссипативных свойств численного метода. Исследуем этот случай численно.

2.1.2. Невязкий случай

Расчёты, воспроизводящие невязкий случай $Re_{\infty,L} \rightarrow \infty$, выполнены в рамках полных уравнений Навье — Стокса при числе Рейнольдса $Re_{\infty,L} = 10^{16}$ в квази-одномерной постановке: плоская монохроматическая волна распространяется в однородном потоке в направлении x . Направление y моделируется формально на ширину шаблона в 5 сеточных узлов. В базовом случае рассматривается медленная акустическая волна с частотой $\omega = 131$ и амплитудой давления $\delta p = 10^{-5} p_\infty$, число Маха $M_\infty = 6$. Эта общая постановка характерна для задач настоящей диссертации.

Расчётная сетка размерностью $N_x \times 5$ построена в прямоугольной области $x \in [0, 2] \times [0, 0.4] \ni y$; по направлению y накладывается условие симметрии; при x_{max} — граничное условие экстраполяции; на входной границе x_{min} задаётся набегающий поток и монохроматическое возмущение. Для исследования пространственно-временной сходимости результатов рассматривается поле возмущения давления p' (или температуры T' в случае энтропийной волны) в момент времени $t_0 \approx 3$. Базовый случай покрыт сеткой расчётов с различным количеством сеточных узлов вдоль x — $N_x \in [501, 595, 707, 841, 1001, 1190, 1415, 1501, 1683, 2001, 2380, 2501, 2830, 3001, 3366, 4003, 4501, 4760, 5661, 6001, 6732, 7501, 9001, 9520, 11322, 13464, 16012, 18001, 19041, 22644, 36001]$ — и различным суммарным количеством временных шагов — $N_t \in [938, 1115, 1326, 1577,$

1875, 2230, 2652, 3153, 3750, 4460, 5303, 6307, 7500, 8919, 10607, 12613, 15000, 17838, 21213, 25227, 30000, 35676, 42426, 50454, 60000, 71352, 84853, 100908, 120000]. Такое покрытие представляет собой прямоугольную сетку из 31×29 расчётов. Эта сетка содержит равномерную сетку в логарифмических координатах $\log_2(N_x) \times \log_2(N_t)$ с равномерным шагом $1/4$. Количество узлов на длину волны составляет $N_\lambda = N_x \omega (x_{max} - x_{min}) / (2\pi c) = N_x \omega / (\pi c)$, где c — фазовая скорость ($1 - 1/M_\infty$ для медленной акустической волны или 1 для энтропийной волны). Количество временных шагов на период возмущения составляет $N_\tau = N_t t_0 \omega / (2\pi) = 1.5 N_t \omega / \pi$. Финальный момент времени t_0 может незначительно отличаться из-за равномерности шага по времени в течение всего расчёта.

Точным аналитическим решением данной задачи является незатухающая монохроматическая волна, занимающая всю расчётную область: $p'_{\text{теор}}(t, x) = \varepsilon \sin(\omega(x/c - t))$.

Квинтэссенцией проведённого многопараметрического исследования является рис. 2.1, на котором изображено поле логарифмического декремента затухания акустической волны в базовом случае для всей сетки расчётов. Сходимость к точному решению $\alpha_{i, \text{числ}} = 0$ наблюдается при одновременном увеличении и пространственного, и временного разрешения. При увеличении одного из них величина численной диссипации выходит на некоторый постоянный уровень и более не изменяется. Этот факт отражает теоретическую точность разностных схем, которая математически выражается в виде остаточного члена $o(\Delta x^m + \Delta t^p)$ при представлении схемы формулой Тейлора вблизи некоторой точки (t_0, x_0) .

Таким образом, при $N_{\lambda, max}$ можно оценить порядок сходимости численной диссипации возмущений по времени, а при $N_{\tau, max}$ — по пространству. Результаты такого анализа представлены на рис. 2.2: в обоих случаях достигается практически *третий* порядок сходимости: порядок по пространству 2.98; порядок по времени 2.97. При расчёте последнего несколько точек, отмеченных крестиками, отклоняются от прямолинейной зависимости и исключены из рассмотрения. Отклонение объясняется недостаточным пространственным разрешением N_λ .

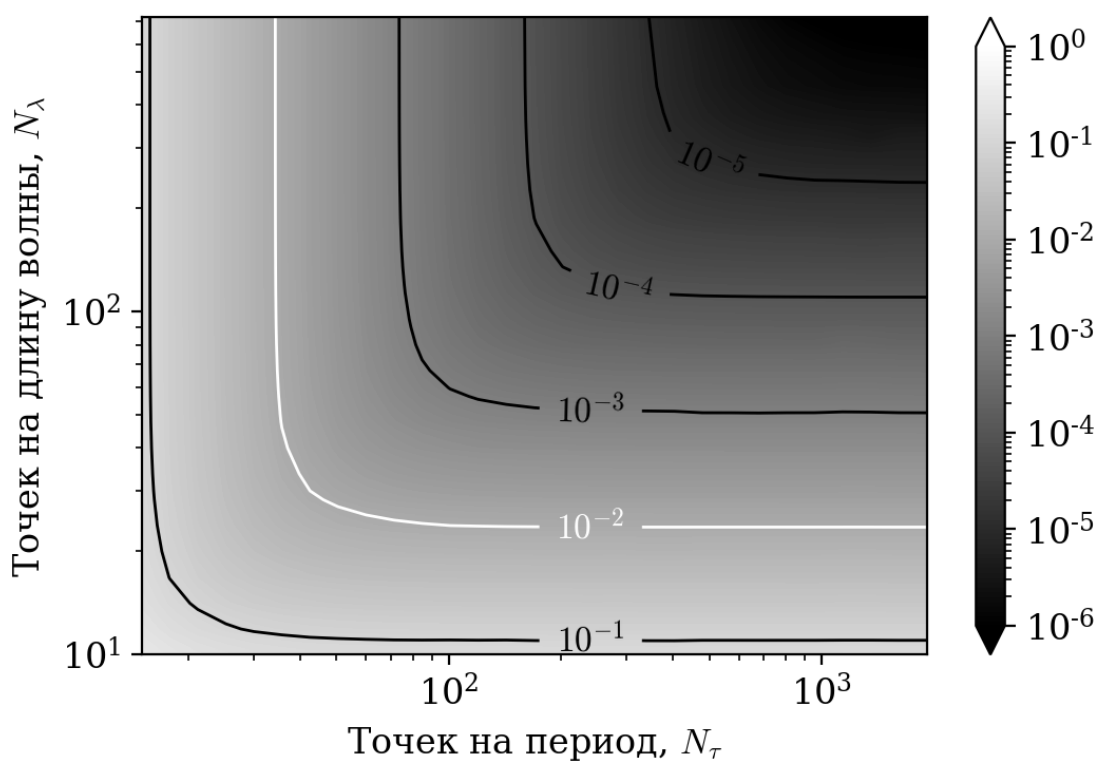
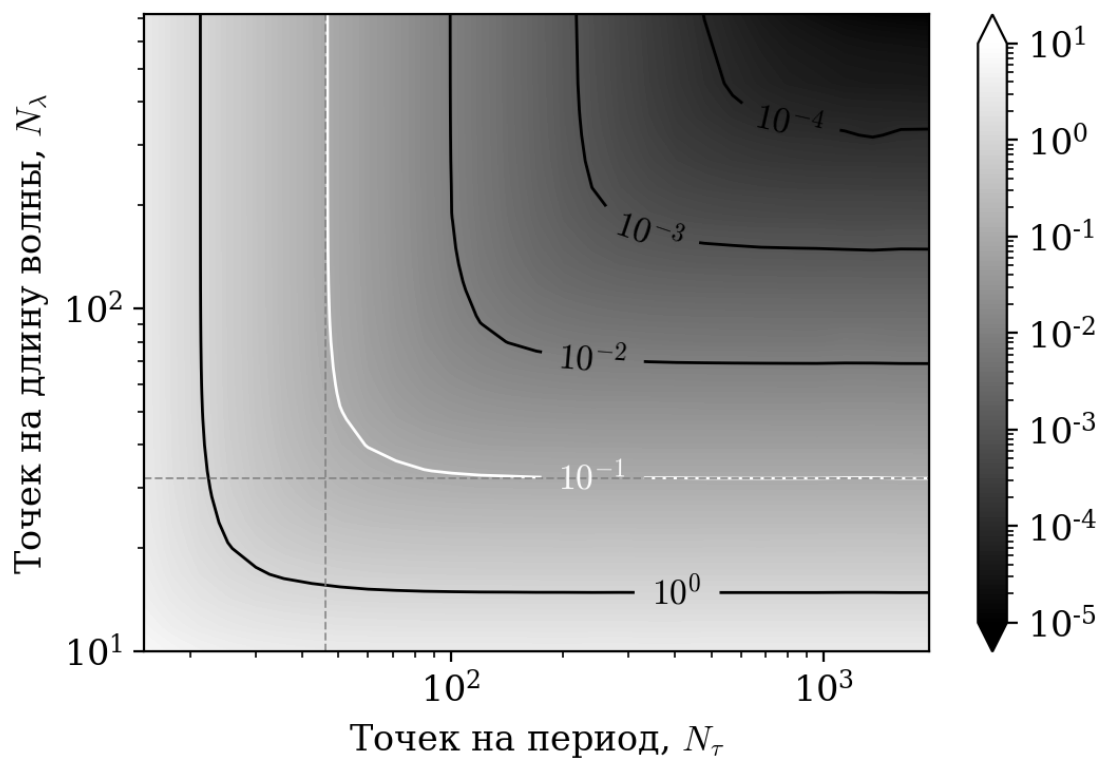


Рисунок 2.1 — Численная диссипация в зависимости от пространственно-временного разрешения

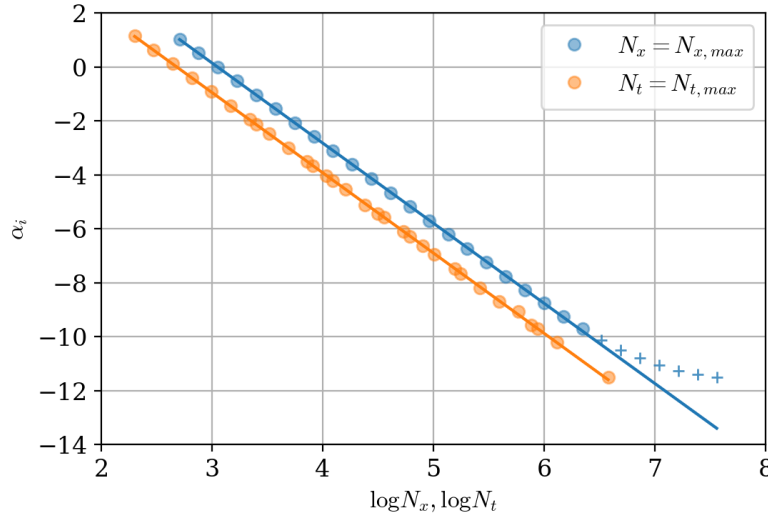


Рисунок 2.2 — Сходимость $\alpha_{i,\text{числ}}$ к нулю по пространству и по времени. Крестиками отмечены точки, не участвующие в линейной регрессии

2.1.3. Сходимость по времени

Используемый численный метод основан на аппроксимации временных производных со *вторым* порядком точности, а пространственных производных конвективных потоковых величин — с *третьим* (см. раздел 1.2.1). Однако полученный третий порядок временной сходимости для декремента затухания $\alpha_{i,\text{числ}}$ не противоречит следствию теоремы Филиппова — Рябенского, в соответствии с которым порядок аппроксимации должен совпадать с порядком сходимости, если схема устойчива.

Рассмотрим одностороннюю аппроксимацию временной производной (1.10) на временном шаге $n + 1$. Представим числитель формулой Тейлора в окрестности $t^{[n+1]}$ с учётом обозначений $Q^{[n]} \equiv Q(t^{[n+1]} - \Delta t)$ и $Q^{[n-1]} \equiv Q(t^{[n+1]} - 2\Delta t)$:

$$\frac{3Q^{[n-1]} - 4Q^{[n]} + Q^{[n+1]}}{2\Delta t} = \frac{\partial Q^{[n+1]}}{\partial t} - \frac{\Delta t^2}{3} \frac{\partial^3 Q^{[n+1]}}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^3}{4} \frac{\partial^4 Q^{[n+1]}}{\partial t^4} + o(\Delta t^3), \quad \Delta t \rightarrow 0.$$

Очевидно, что в общем случае достигается второй порядок аппроксимации. Однако в рассматриваемом случае слабо затухающей монохроматической волны в однородном потоке все нечётные производные поля течения обращаются в ноль в экстремумах гармонического возмущения — вблизи огибающей возмущения порядок аппроксимации повышается до третьего. Поэтому численный декремент затухания, который получен из аппроксимации этой огибающей, сходится к теоретическому значению также с третьим порядком точности по времени ($p = 3$):

$$\max_x |\alpha_i - \alpha_{i,\text{теор}}| \equiv \|\alpha_i - \alpha_{i,\text{теор}}\|_\infty \leq C \cdot \Delta t^p. \quad (2.2)$$

Рассмотрим сходимость численного решения в классическом определении:

$$\|q - q_{\text{теор}}\|_\infty = \max_x |q - q_{\text{теор}}| \leq C \cdot \Delta t^p. \quad (2.3)$$

На рис. 2.3 представлены примеры распределения возмущений в зависимости от пространственного (рис. 2.3а) и от временного (рис. 2.3б) сеточного разрешения. В первом случае фиксировано наиболее подробное временное разрешение $N_\tau = \text{const}$. Численное решение развивается практически синфазно с точным решением, а амплитуда стремится к амплитуде точного решения с ростом N_λ . Во втором случае фиксировано наиболее подробное пространственное разрешение $N_\lambda = \text{const}$. Поведение амплитуды волны не изменяется, однако недостаточное временное разрешение порождает фазовую разбежку вычисленного и точного возмущений в некоторый момент времени. Эта разбежка стремится к нулю с ростом N_τ .

Фазовая разбежка обусловлена тем, что фазовая скорость акустической волны при численном моделировании отличается от истинной на величину $(\omega \Delta t)^2/3 \sim N_\tau^{-2}$. Это следует из теоретического анализа линеаризованных уравнений Эйлера с учётом аппроксимации временной производной и хорошо согласуется с проведёнными методическими расчётами¹. Подробности опущены для краткости.

Из-за фазовой разбежки абсолютная погрешность численного решения нарастает вниз по потоку и при разбежке π достигает максимума (рис. 2.4 слева) —

¹ Данный теоретический результат получен аспирантом 2го года МФТИ И.О. Погореловым.

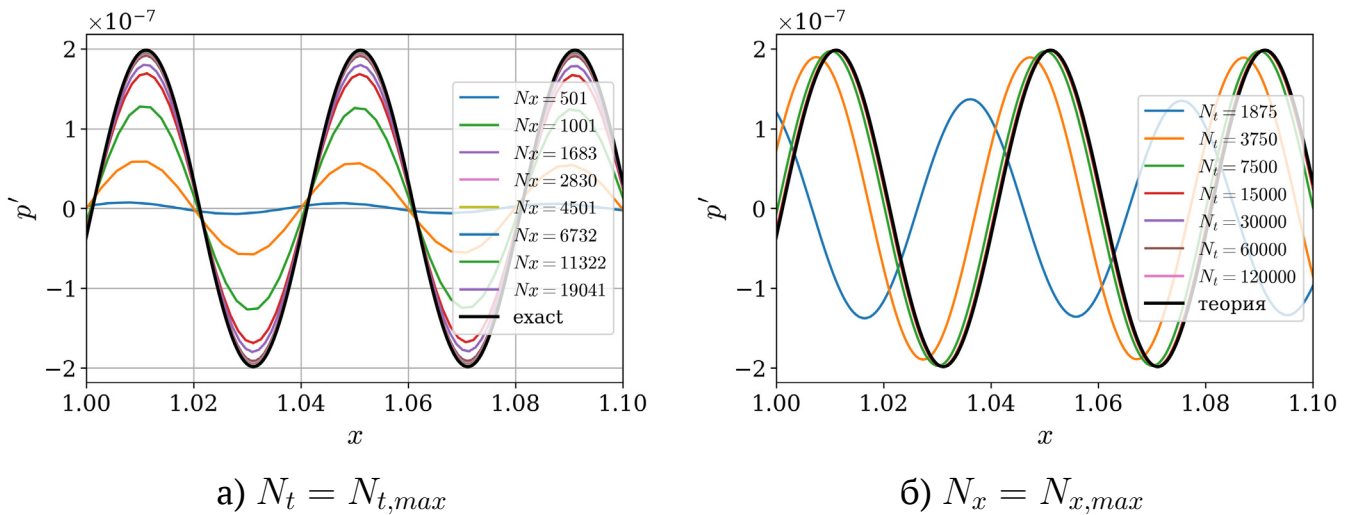


Рисунок 2.3 — Распределение возмущения давления в медленной акустической волне при разных пространственных и временных разрешениях, $t = 3$

истинный максимум гармонического возмущения становится минимумом при некотором x . Такая ситуация наблюдается только при достаточно грубом временном разрешении, которое далеко от практики. В остальных случаях наибольшая погрешность достигается вблизи правой границы расчётной области. Используя классическое определение сходимости (2.3), можно вновь оценить порядок сходимости численного решения к точному по времени. Он очень близок к двум (рис. 2.4 справа). Следует отметить, что из линейной регрессии исключены расчёты, в которых временная разбежка превышала π (крестик на рис. 2.4 справа).

Таким образом, амплитуда возмущений сходится по времени с третьим порядком точности, хотя глобально достигается лишь второй порядок, что обусловлено фазовой разбежкой между численным и точным решениями.

2.1.4. Инвариантность численной диссипации

Аналогичные расчёты проведены при числе $Re_{\infty,L} = 10^6$, для которого монокроматическая волна медленно затухает из-за вязкости и теплопроводности. Оказалось, что полученные выше результаты с высокой точностью повторяются для величины $\alpha_{i,\text{числ}} = \alpha_i - \alpha_{i,\text{теор}}$, где теоретическое значение вычисляется по формуле (2.1). Все иллюстрации, в частности, рис. 2.1, визуально не изменяются и поэтому не приводятся повторно. Таким образом, численная диссипация является *добавочным* эффектом, который отделяется от физической картины явления.

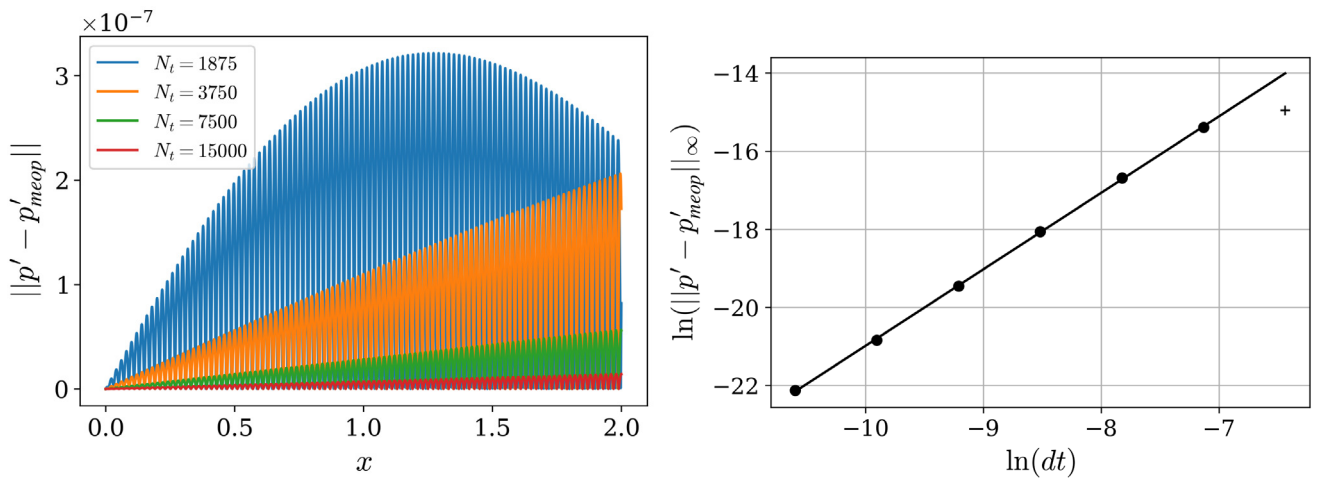


Рисунок 2.4 — Распределение абсолютной погрешности численного решения $|p' - p'_{\text{теор}}|$ при $N_x = N_{x,\text{max}}$ и анализ временной сходимости

Аналогичное методическое исследование проведено при различных числах Маха $M_\infty = 3, 4.5, 7.5, 9$ как для акустических, так и для энтропийных возмущений с различными частотами $\omega = 65.5, 131, 232$ и амплитудами $\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-3}$. Установлено, что численное затухание возмущений на масштабе длины волны, $\alpha_{i,\text{числ.}} \cdot \lambda$, зависит *только* от количества точек на длину волны N_λ и количества временных шагов на период возмущения N_τ . Используя эту инвариантность (независимость величины $\alpha_{i,\text{числ.}} \cdot \lambda$ от физических параметров задачи), можно оценивать численную диссипацию, масштабируя рис. 2.1 на случай произвольных параметров набегающего потока и элементарного возмущения.

2.1.5. Общие замечания

Предложенная и рассмотренная задача представляется универсальным способом оценки диссипативных свойств любого численного метода. Она также позволяет валидировать численный метод: численное решение должно сходиться к теоретическому при уменьшении шага по пространству и по времени. Таким образом, в настоящем разделе проведена валидация используемого численного метода, изложенного в главе 1.

Базовый расчётный случай ($M_\infty = 6$, $Re_{\infty,L} = 10^6$, $\omega = 131$) является характерным для задач, которые будут рассмотрены далее. Численный декремент $\alpha_{i,\text{числ.}} = 0.1$ подразумевает, что амплитуда элементарного возмущения уменьшится примерно на 10% на единице длины расчётной области, или на 0.4% на масштабе длины волны базового возмущения. То есть, численная вязкость привносит в физическую задачу отрицательное интегральное усиление возмущений с фактором $N \approx -0.1$. В рассматриваемых задачах N -факторы достигают характерных значений $N \gtrsim 5$ на тех же масштабах длины. Таким образом, численная диссипация приводит к *ограниченной* погрешности расчётов в пределах нескольких процентов, что не может существенно повлиять на основные выводы, сделанные в диссертации.

В полной пространственной постановке численная диссипация зависит от сеточного разрешения во всех трёх направлениях. По предыдущему опыту расчётов, она проявляется в каждом направлении *индивидуально*, то есть практически не зависит от сеточного разрешения в других направлениях. Поэтому анализ численной

диссипации, проведённый выше на одномерной задаче, годится и в многомерном случае.

Вопрос сходимости исследован для большинства результатов настоящей диссертации. Эти исследования так или иначе подтверждают, что выводы настоящего раздела можно *количественно* применять при моделировании развития возмущений в сверхзвуковых пограничных слоях — численная диссипация возмущений слабо зависит от особенностей течения и в большей мере определяется пространственно-временным разрешением конкретного возмущения. Тем не менее, по мнению автора диссертации, аккуратное исследование сходимости должно проводиться в каждом расчётном исследовании, а полученные в данном разделе базовые знания о схемной диссипации численного метода можно рассматривать как надёжную отправную точку для прогнозирования эффекта численной диссипации и общей постановки расчётных задач.

2.2. Взаимодействие малых возмущений со скачком уплотнения

Амплитудный метод предсказания ламинарно-турбулентного перехода [24] опирается на начальные амплитуды возмущений, возбуждённых в пограничном слое. При численном моделировании переходных сверхзвуковых пограничных слоёв такие амплитуды определяются внешними возмущениями за ударной волной. Поэтому необходимо надёжно моделировать взаимодействие возмущений среды с ударными волнами (скачками).

Мотивацией данного раздела стало исследование сеточной сходимости следующей модельной задачи. Опуская несущественные детали, рассмотрим двухмерное невозмущённое сверхзвуковое течение около тела с плоским торцом. Предположим, что в течение одного периода по гармоническому закону с торца в невозмущённый поток вносится возмущение с помощью вдува – отсоса газа по нормали к поверхности (при $x = 0$ на рис. 2.5). Возмущение распространяется к скачку по дозвуковой части ударного слоя и затем отражается от скачка. Рассмотрим мгновенное поле возмущения в некоторый момент времени после отражения: на исходной сетке (рис. 2.5а) и на сетке, которая однородно деформирована в направлении скачка так, чтобы скачок оказался сдвинут на *пол-ячейки* (рис. 2.5б). Условия расчёта идентичны в обоих случаях за исключением этого минимального различия в сетках. Тем

не менее фаза отражённой волны отличается на π , а амплитуда волны на исходной сетке в несколько раз выше! Очевидно, что эта аномалия связана с численным методом.

Уравнения Эйлера допускают существование разрывных решений — ударных волн, или скачков. Учёт вязкости и теплопроводности (уравнения Навье — Стокса) устраняет разрывы: скачок приобретает гладкий профиль [141] с толщиной порядка длины свободного пробега молекул газа. Далее будем называть эту толщину *вязкой* толщиной скачка. Таким образом, уравнения Навье — Стокса формально не применимы внутри скачка. Методы сквозного счёта для уравнений Эйлера и Навье — Стокса способны воспроизводить скачки на расчётных сетках вне зависимости, являются ли они физическими разрывами или нет. Обычно вязкая структура скачка не разрешена на расчётной сетке и зависит как от этой сетки, так и от используемого численного метода. Профиль такого скачка занимает несколько сеточных ячеек; их общая ширина далее называется *численной* толщиной скачка, а сам скачок — *пойманным* на сетке. Когда ударная волна достаточно разрешена, её численная толщина прекращает зависеть от расчётной сетки и должна приближаться к вязкой толщине. Такой скачок будем называть *разрешённым*. Консервативные свойства методов сквозного счёта гарантируют, что на скачке выполняются законы сохранения, но они могут нарушаться внутри скачка [142; 143]. Таким образом, для невозмущённого поля течения сходимость численного решения может быть достигнута без адаптации сетки к скачку. Это утверждение неверно для нестационарных течений по следующей причине.

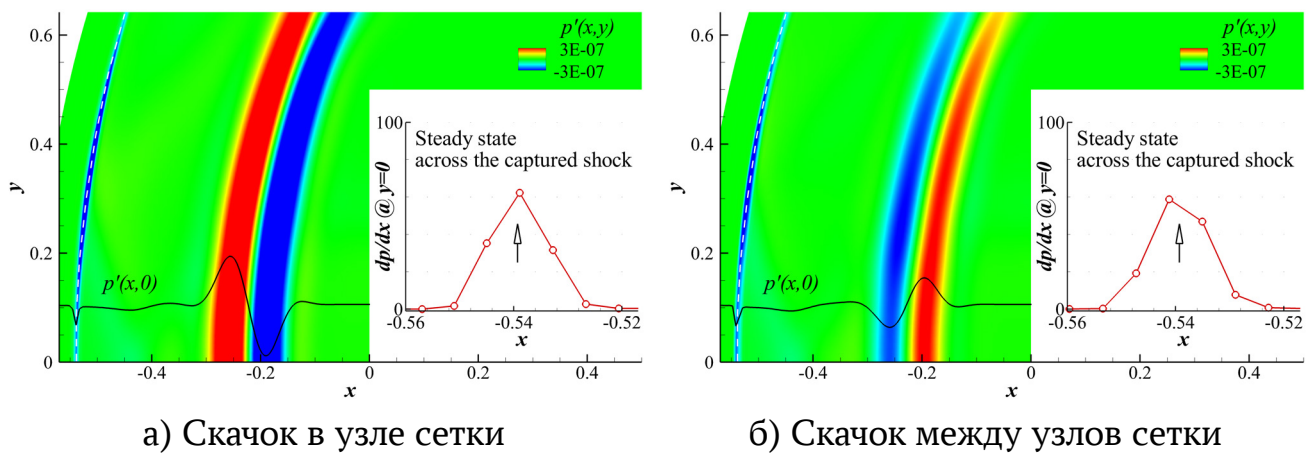


Рисунок 2.5 — Аномальный переворот фазы при отражении пакета акустических волн от скачка. Скачок отмечен белым пунктиром. На врезке показано распределение сеточных узлов поперёк скачка, положение которого указано стрелкой

Рассмотрим простой расчётный случай, когда численная схема первого порядка аппроксимации применяется к одномерным уравнениям Эйлера, и используется точное решение задачи Римана о распаде разрыва [143]. Численная структура пойманного скачка имеет единственное промежуточное состояние, которое является следствием применения конечнообъёмного метода и решения задачи Римана для потоковых величин на гранях ячейки. Промежуточное состояние *неединственно!* Это степень свободы численного метода, которая порождает собственные моды промежуточного состояния. При достижении некоторого критического значения числа Маха (для двухатомного газа примерно 6), промежуточное состояние теряет устойчивость вблизи переднего фронта скачка [143]. Данный теоретический результат исследован в одномерной и двухмерной постановках [144]. Опробовано множество решателей задачи Римана; положение скачка внутри ячейки сетки варьировалось с помощью начальных условий. Авторы [144] предложили увеличивать численную диссипацию $\Delta \mathbf{F}$ поперёк скачка, чтобы устранить неустойчивость в нормальном к скачку направлении. Здесь используется стандартное выражение для вектора потоковых величин, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_m - \Delta \mathbf{F}$: \mathbf{F}_m — некоторое осреднённое состояние на грани ячейки; $\Delta \mathbf{F}$ — контролируемый диссипативный член. Однако авторы [144] предупредили, что это может привести к продольной неустойчивости скачка. В аналогичном исследовании [145] было показано, что выполнение закона сохранения массы поперёк прямой ударной волны является достаточным условием устойчивого счёта в случае сильных скачков. Результаты численных экспериментов и анализа линеаризованной задачи также подтвердили, что источник неустойчивости скрыт в численной нефизичной структуре скачка. Обсуждаемая выше фундаментальная неустойчивость схем сквозного счёта связана с известными численными аномалиями, такими как карбункулы и нефизичные возмущения за медленно движущимися скачками. Но как возмущения в потоке будут взаимодействовать с пойманным скачком, и какова окажется чувствительность такого взаимодействия к расчётной сетке?

Ответ нетривиален и должен зависеть от того, движется ли скачок или покоится относительно расчётной сетки (это можно изменить путём выбора системы отсчёта при описании физической задачи). Например, паразитные возмущения за медленно движущимся скачком [146] становятся слабее с ростом скорости скачка [147]. Поэтому можно рассмотреть задачу в системе отсчёта, где скачок движется быстрее по отношению к расчётной сетке. В этом смысле представляет интерес классическая невязкая задача [148] о движении пойманного скачка через покоящийся

ся газ с периодически возмущённым полем плотности. В соответствии с линейным анализом [127–129] такой скачок порождает за собой акустические волны. Далее этот эффект будет воспроизведён в рамках уравнений Навье — Стокса. Однако, если скачок неподвижен относительно расчётной сетки, то порождаемое им поле возмущений начинает зависеть от положения скачка внутри сеточной ячейки (как, например, показано на рис. 2.5). Настоящий раздел посвящён рассмотрению этого аномального эффекта.

Литературу по вопросу взаимодействия стационарного скачка с возмущениями можно разделить на две большие ветви:

- взаимодействие скачка с турбулентностью (направление 1, [149–156]);
- взаимодействие малых элементарных возмущений со скачком (направление 2, [67; 86; 87; 157–164]).

В работах [149–151] рассматривается взаимодействие турбулентности с прямым скачком при числах Маха $M < 3$. Результаты для пойманного скачка приближаются к результатам прямого численного моделирования (ПЧМ) с разрешённым скачком по мере измельчения сетки. Сообщалось, что результаты ПЧМ воспроизводились на недоразрешённом скачке при условии, что шаг сетки был $\Delta x_1 / \delta_{s,v}^{weak} \leq 7/3$ [150], где $\delta_{s,v}^{weak} = 8M_\infty / (3Re_{\infty,L}(M_\infty - 1))$ — оценка безразмерной толщины слабого скачка. Такое разрешение в семь раз грубее, чем соответствующее разрешение скачка в ПЧМ [149]. Сделанная оценка, по-видимому, осталась в силе позднее [152]. К сожалению, теоретический масштаб $\delta_{s,v}^{weak}$ не проверялся напрямую на результатах ПЧМ, как и не было показано положение скачка на расчётной сетке.

Важность сеточного разрешения скачка подчёркнута в [153]. Авторы провели расчёты с разрешённым скачком при числах Маха 1.2 и 1.5 и подтвердили универсальность диссипативных численных схем второго порядка аппроксимации по пространству и времени. Указано лишь общее количество точек поперёк скачка, при этом толщина скачка не определена в тексте. Работа [153] подтверждает результаты [154] (число Маха $M \leq 8$, равномерные сетки), где разрешение скачка не обсуждается, хотя сетка измельчается до такой степени, что уровень паразитных возмущений за скачком [147; 148] становится приемлемым.

В работе [155] рассматривается взаимодействие турбулентности с прямым пойманным скачком при числе Маха 2. Продемонстрировано, что турбулентная статистика за скачком монотонно сходится к некоторой предельной статистике при измельчении сетки. Следует отметить, что скачок не являлся стационарным и осциллировал в пределах нескольких сеточных ячеек. Средняя амплитуда этих

осцилляций была значительно больше, чем мгновенная толщина скачка δ_s . В качестве определяющего параметра для сеточной сходимости рассматривалось не разрешение скачка, а разделение масштабов: толщины пойманного скачка $\delta_{s,c}$ и колмогоровского масштаба η_k . Для выбранного численного метода величина $\delta_{s,c}$ пропорциональна шагу сетки, что позволяет управлять отношением $\delta_{s,c}/\eta_k$, изменяя сетку [155]. Сам параметр $\delta_{s,c}/\eta_k$ был предложен в [156]. Также в [155] сообщалось, что результаты ПЧМ приближаются к результатам линейного приближения по мере уменьшения параметра $\delta_{s,c}/\eta_k$. Но это скорее относится к применимости линейного приближения, а не к аномальным численным эффектам. Следует отметить, что последние не наблюдались за скачком, который двигался через газ с возмущённым полем плотности [148]. Возможно, по той же причине они не наблюдались и в [155], где скачок осциллировал по ячейкам: паразитные осцилляции могли оказаться малыми или вовсе усреднялись по времени в процессе расчёта, что в итоге не повлияло на статистику возмущений за скачком.

При моделировании процессов восприимчивости в сверхзвуковых пограничных слоях (направление 2) вопросу сеточной сходимости нестационарных результатов практически не уделяют внимания. В [87; 157; 158] рассматривалось взаимодействие акустических и вихревых возмущений (число Маха невозмущённого течения 6) с притупленным конусом. Грубые оценки показывают, что скачок разрешён вблизи притупления. Однако невозможно понять, остаётся ли разрешённым конический скачок ниже по потоку от притупления. Аналогичная конфигурация рассмотрена в [159] (число Маха 8). Результаты работы верифицированы путём сравнения другими работами, но вопрос сеточной сходимости в области скачка не затронут. Стоит обратить внимание на то, что размер притупления мал по сравнению с длиной волны возмущения или с характерным размером конуса. Поэтому прямой скачок быстро распадается в наклонный конический скачок с малой интенсивностью.

В серии работ [67; 86; 160–162] рассмотрено взаимодействие всех типов элементарных возмущений набегающего потока (число Маха 6) с пограничным слоем над плоской пластиной. Скачок от передней кромки пластины не был разрешён²; результаты сеточной сходимости для скачка не представлены. Лишь в [162] показано успешное сравнение с результатами линейного анализа [127–129]. В работах [67; 86; 160–162] подчёркивается, что взаимодействие возмущений со скачком оказывает определяющее влияние на восприимчивость, причём первостепенное значение

²Источник: личная беседа с авторами работ [67; 86; 160–162]

имеет порождаемое скачком акустическое поле. Таким образом, воспроизведение корректных значений коэффициентов прохождения и порождения принципиально важно при моделировании задач восприимчивости.

В работах [67; 86; 87; 157–162] не сообщалось о численных аномалиях, связанных со скачком, и не приводилось каких-либо свидетельств появления численного шума, связанного со скачком, который мог бы повлиять на физическое возмущённое решение внутри пограничного слоя. В этом отношении следует выделить работу [163] (числа Маха от 3 до 7.3), в которой рассматривается акустическая волна, проходящая через скачок на 20-градусном притупленном конусе. Такой скачок имеет большую интенсивность, чем скачок на пластине под нулевым углом атаки, который обусловлен вязко-невязким взаимодействием. В работе продемонстрированы две численных особенности. Во-первых, выравнивание сеточной линии вдоль скачка устраняет стационарные паразитные возмущения от мест, где скачок перепрыгивал с одной сеточной линии на другую. Во-вторых, выравнивание совместно с выделением скачка на сетке (измельчением сетки поперёк скачка) позволяет значительно уменьшить уровень паразитных возмущений, рождаемых при взаимодействии акустических волн со скачком. Аналогичные наблюдения сообщались в [165]. Несмотря на подробное обсуждение вопросов выделения скачка и успешную верификацию расчётных данных с результатами других авторов, сеточное разрешение вязкой структуры скачка в [163] не обсуждается. Однако сопоставление результатов на клине [163] с результатами на пластинах и тонких конусах под нулевым углом атаки и [67; 86; 87; 157–162] неявно указывают на то, что паразитные эффекты из-за численной природы пойманного скачка становятся тем сильнее, чем больше интенсивность скачка.

Взаимодействие прямого стационарного скачка с монохроматической акустической волной моделировалось в рамках уравнений Навье — Стокса в [164]. Сеточное разрешение вязкой структуры скачка было избыточным, а результаты моделирования идеально совпали с предсказаниями линейной теории [127–129]. К сожалению, сеточная сходимость вблизи скачка не обсуждалась.

Наверное, наиболее подробное *методическое* исследование взаимодействия элементарных акустических волн со скачком опубликовано в работе [166]. В вязкой постановке использовалась сетка с избыточным сеточным разрешением, для которой число Рейнольдса по сеточному шагу составляло $Re_{\infty, \Delta x} = 0.12$, а на профиль ударной волны приходилось около 20 сеточных узлов. Поддерживая такое сеточное разрешение, авторы [166] показали быструю сходимость численных результатов

к теоретическим по мере увеличения отношения длины волны к вязкой толщине скачка. Однако в невязкой постановке, когда скачок теоретически вырождается в газодинамический разрыв (его толщина равна нулю), было обнаружено, что коэффициенты прохождения акустической волны через скачок и сопутствующие коэффициенты порождения энтропийной волны могут в разы отличаться от теоретических значений. Было показано, что отклонение от теории возрастает с ростом числа Маха и зависит от используемого численного метода. Было также отмечено, что более диссипативный численный метод, размазывающий скачок на большее количество сеточных узлов, приводит к *меньшему* отклонению от теоретических значений. Такое поведение авторы [166] связали с тем, что профиль «размазанного» скачка менее подвижен относительно расчётной сетки при взаимодействии с акустической волной, поэтому амплитуда возникающих нефизичных возмущений уменьшается. Однако в расчётах настоящего раздела амплитуда возмущений достаточно мала, чтобы скачок оставался практически неподвижен при любом сеточном разрешении; при этом коэффициенты прохождения и порождения ведут себя аномально и непредсказуемо, что обсуждается далее.

Следует также отметить, что имеется класс численных методов с предварительным выделением ударной волны³. Хотя они сложнее в применении по сравнению с методами сквозного счёта, результаты, полученные с их помощью для задач о взаимодействии малых возмущений со скачками, хорошо согласуются с результатами ПЧМ и линейного анализа [167]. Этот класс методов менее универсален, но, по-видимому, свободен от численных аномалий, обсуждаемых выше.

В свете сделанного обзора работ следует подчеркнуть призыв, прозвучавший в [149] четверть века назад:

— Если сеточное разрешение вязкой структуры скачка недостижимо на практике, точное предсказание взаимодействия турбулентности с ударной волной может быть получено только после тщательного тестирования сеточной сходимости.

Тем не менее, критерий сеточной сходимости для стационарного скачка остаётся неясным. Такой критерий предложен ниже, указаны пути его достижения. Также рассматриваются все типы элементарных возмущений, анализируется роль различных параметров возмущений, исследуется влияние интенсивности скачка.

³В англоязычной литературе: shock-fitting methods

2.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим особенности постановки задачи для двухмерного случая. Поле течения схематично показано на рис. 2.6. Стационарный скачок расположен при $x = 0$, нормаль к фронту скачка смотрит вдоль Ox . Поток движется под углом β к нормали скачка. Если не указано иное, набегающий поток в состоянии 1 используется для обезразмеривания: $U_\infty^* = \sqrt{u_1^{*2} + v_1^{*2}}$. Нижний индекс « n » обозначает составляющую вектора вдоль нормали скачка, например, $M_{1n} = M_1 \cos \beta_1$.

Расчётная область — прямоугольник $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$. Расчётная сетка равномерна по x всюду, кроме окрестности скачка, где она сгущается или разрежается для достижения целевой величины шага dx , который остаётся постоянным на всей ширине скачка. Для квазиодномерных расчётов с периодическим граничным условием по y расчётная сетка имеет три или пять⁴ сеточных линий по всему размаху вдоль y , $y_{\max} - y_{\min} = 0.1$. Для двухмерных возмущений шаг по y фиксируется таким образом, что вдали от скачка сеточные ячейки оказываются квадратными.

Для моделирования покоящегося скачка внутри расчётной области накладываются соответствующие начальные и граничные условия. Начальное условие учитывает скачкообразное изменение параметров течения на скачке:

$$\begin{aligned} (u, v, p, T) &= \left(\cos \beta_1, \sin \beta_1, \frac{1}{\gamma M_1^2}, 1 \right) \\ \frac{p_2}{p_1} &= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_{1n}^2 - 1), \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{(\gamma+1)M_{1n}^2}{(\gamma-1)M_{1n}^2+2}, \\ \frac{T_2}{T_1} &= \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}, \\ \frac{u_2}{u_1} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}, \\ v_2 &= v_1. \end{aligned}$$

Чтобы контролировать положение скачка внутри сеточной ячейки, используется линейная интерполяция между начальными состояниями перед скачком и за ним на протяжении двух сеточных шагов в направлении x (рис. 2.7). Похожий подход использовался в [144; 145], где плотность нарастала линейно, а остальные параметры течения менялись в соответствии с ударной адиабатой. Центр начального скачка x_{*0} в ячейке $[x_{j*}, x_{j*+1}]$ можно контролировать с помощью параметра α :

⁴при использовании реконструкции WENO-5

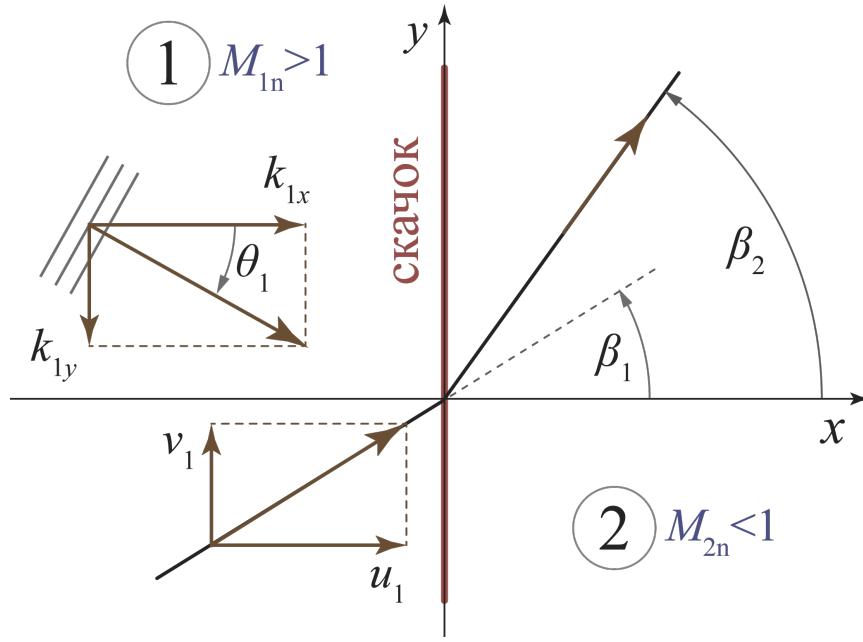


Рисунок 2.6 — Схема течения. Нижний индекс 1 соответствует состоянию течения перед скачком, 2 — после

$$x_* = (1 - \alpha)x_{j*} + \alpha x_{j*+1}; x_{j*} = 0. \quad (2.4)$$

Течение считается периодическим по направлению y . Входные и выходные граничные условия соответствуют однородному потоку в состоянии «до скачка» 1 и «за скачком» 2, соответственно. После установления невозмущённого решения положение скачка внутри ячейки сетки несколько отличается от величины α_0 , устанавливаемой в начальном приближении. Окончательное положение α нетрудно восстановить по решению, принимая в качестве x_* в (2.4) положение максимума градиента давления $|\partial p / \partial x|_{\max}$ по оси x .

Чтобы изучить взаимодействие малых возмущений со скачком, на невозмущённое течение накладываются элементарные возмущения, описанные в подразделе 1.1.3. Для исследования коэффициентов прохождения возмущений через скачок на входной границе можно инициировать волны любого типа. Для случая возмущённой выходной границы имеет смысл рассмотреть случай отражения медленной акустической волны от скачка, когда течение за скачком дозвуковое (как, например, за прямой ударной волной). Периодическое граничное условие по y удовлетворяется при этом путём подбора волнового числа \mathbf{k} таким образом, что $k_y(y_{\max} - y_{\min}) = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Следует заметить, что проекция k_y сохраняется при переходе через скачок.

Невязкая линейная теория предполагает, что элементарные волны сосуществуют независимо друг от друга в однородном потоке. Любая неоднородность, такая

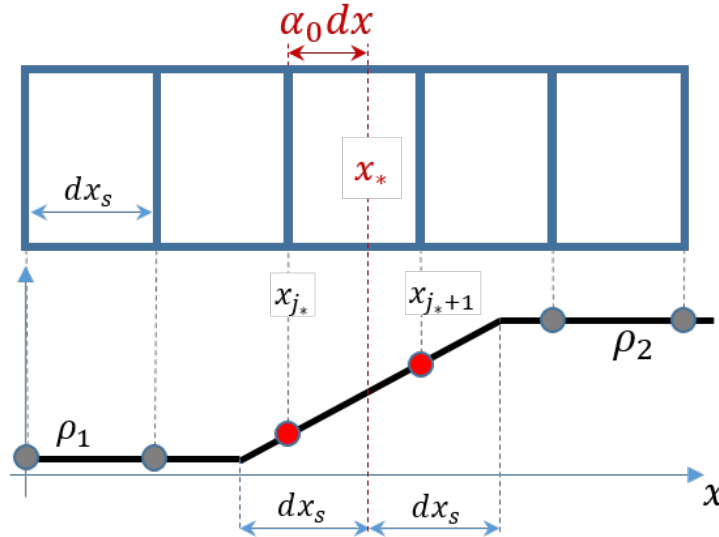
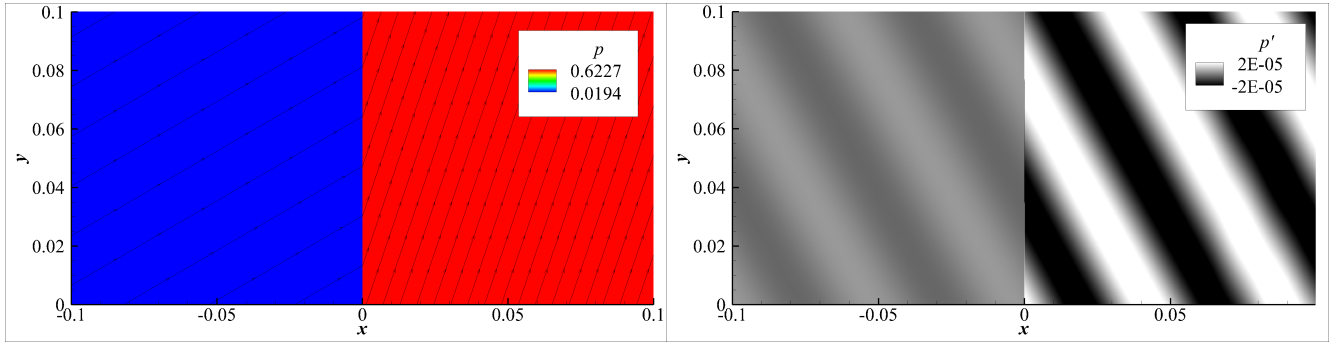


Рисунок 2.7 — Схема расположения скачка на сетке в начальном приближении

как скачки уплотнения, порождает связь между ними. Поэтому элементарная волна не только проходит через скачок, но также порождает все остальные типы элементарных волн, взаимодействуя со скачком. Теоретическое исследование этой проблемы дало коэффициенты прохождения, отражения и порождения, которые связывают поле возмущений до и после скачка [127–129]. Чтобы получить эти коэффициенты из возмущённого численного поля течения, абсолютная величина экстремумов возмущения вдоль оси x экстраполируется на положение скачка с помощью экспоненциального приближения $f(x) = Ae^{-k_i(x-x_0)}$, где A, k_i и x_0 — определяются по методу наименьших квадратов. Таким образом, находятся амплитуды возмущений до взаимодействия со скачком и после взаимодействия, при этом естественным образом учитывается вязкая диссипация возмущений. За скачком обнаруживается как минимум 10 экстремумов. Однако до скачка их может быть три при рассмотрении набегающих возмущений с увеличенной длиной волны, что является слабым источником ошибки метода при количественном измерении эффекта вязкой диссипации.

Параметры базового течения следующие: $M_{1,b} = 6, Re_{1,L,b} = 11295.2, T_{1,b}^* = 226.5$ К, $\beta_1 = 0$; частота возмущения $\omega_b = 125$; амплитуда возмущения $\delta q_b \equiv \epsilon_b = 2 \cdot 10^{-4}$, где $\delta q = \delta p$ для акустических волн, $\delta q = \delta u$ — для вихревых, а $\delta q = \delta T$ — для энтропийных. Пример рассчитываемых полей показан на рис. 2.8.



а) Установившееся поле давления

б) Поле возмущения давления для $\theta_1 = -30^\circ$ Рисунок 2.8 — Пример расчёта при $\beta_1 = 30^\circ$

2.2.2. Вязкий профиль ударной волны

Рассмотрим теоретические результаты одномерного скачка уплотнения, полученные в рамках уравнений Навье — Стокса для совершенного газа с числом Прандтля $Pr = 3/4$ и степенным коэффициентом вязкости $\mu = T^n$. В этом случае уравнения Навье — Стокса сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению [141], которое в результате численного взятия интегралов приводит к вязкому профилю скачка. Толщину этого профиля можно оценить теоретически как

$$\frac{\delta_{s,t}}{l_1} = B(M_1, n, \gamma), \quad (2.5)$$

$$l_1 = \frac{251}{200} \sqrt{\gamma} \frac{M_1}{Re_{1,L}} \quad (2.6)$$

где l_1 — длина свободного пробега молекул газа перед скачком.

Теоретические результаты представлены на рис. 2.9. На рис. 2.9а показан ряд кривых $B(M_1)$ при $\gamma = 1.4$ в зависимости от n как от параметра. Следует отметить горизонтальную асимптоту $B \rightarrow 0.61$ при $M_1 \rightarrow \infty$ и $n = 0.5$. Асимптотическое значение вдвое меньше, чем указано в [141]; причина этого расхождения не установлена. При $n > 0.5$ по мере роста числа M_1 или приближения его к единице скачок утолщается по отношению к l_1 , с асимптотическим поведением $\delta_{s,t} \sim (M_1 - 1)^{-1}$ при $M \rightarrow 1 + 0$.

На рис. 2.9б теоретические результаты сопоставляются с результатами численного моделирования базового течения. Оба подхода хорошо согласуются при $n \approx 2/3$, а небольшое расхождение можно объяснить разными законами вязкости

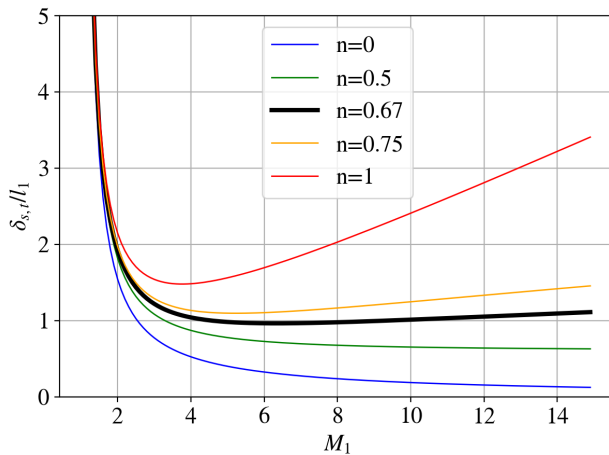
и числами Прандтля. Такое же согласие наблюдается и для других численных результатов, представленных ниже в данном подразделе, но для случая косых скачков следует вместо M_1 подставить M_{1n} в (2.5) и (2.6). В табл. 2.1 приведены значения B для всех рассматриваемых ниже значений M_{1n} .

Определим вязкую толщину скачка как утроенное теоретическое значение, $\delta_{s,v} = 3\delta_{s,t}$. Тогда для нормальной ударной волны при $M_1 = M_{1n} = 6$, $\gamma = 1.4$ можно сделать оценку

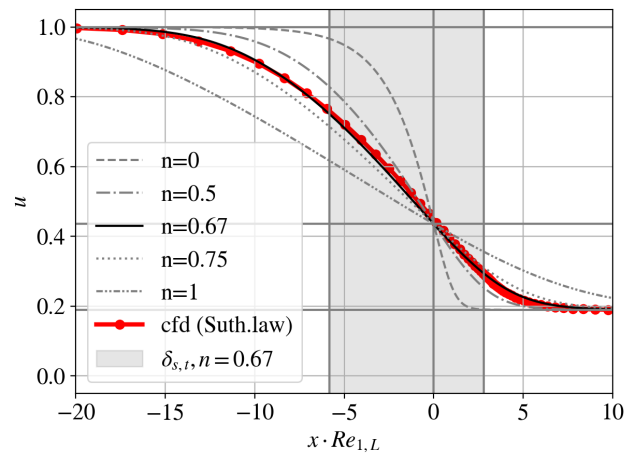
$$\delta_{s,v} \approx 4.3M_1/Re_{1,L}, \quad (2.7)$$

которая остаётся верной для больших чисел Маха благодаря медленному росту $B(M_1)$ (см. рис. 2.9а). Для параметров базового течения $\delta_{s,v} \approx 2.3 \cdot 10^{-3}$.

Ниже будем различать *пойманный* скачок, толщина которого имеет численную природу и определяется местным шагом расчётной сетки, и *разрешённый* скачок, у которого численно разрешена вязкая структура и который, таким образом, не зависит от расчётной сетки (численная и вязкая толщины совпадают).



а) $B(M_1)$



б) Профили ударной волны

Рисунок 2.9 — Результаты одномерной теории

Таблица 2.1 — Значение величины B при различных M_{1n} ; величина β_1 указана для случая M_1

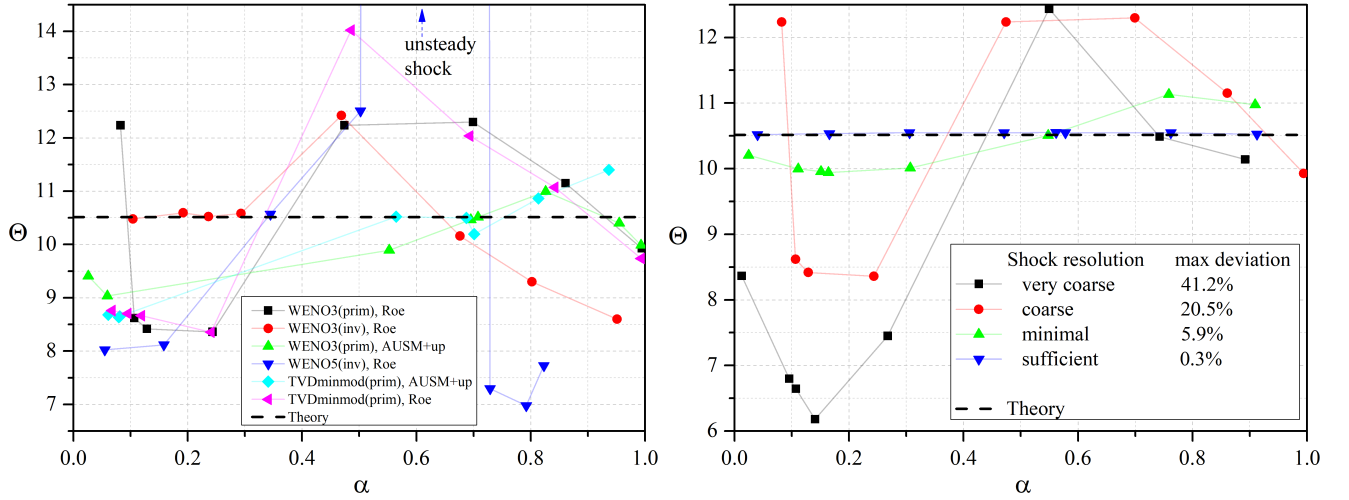
β_1 при $M_1 = 6$	80°	75°	68°	60°	45°	30°	0°	—
M_{1n}	1.042	1.553	2.248	3	4.243	5.196	6	12
$B(M_{1n}, 0.67, 1.4)$	17.276	2.977	1.58	1.22	1.017	0.977	0.966	1.053

2.2.3. Критерий разрешённого скачка

Рассмотрим прохождение медленной акустической волны через прямой пойма́нный скачок. На рис. 2.10а показан коэффициент прохождения $\Theta = \delta p_2 / \delta p_1$, полученный с использованием различных решателей для задачи Римана (метод Роу, метод AUSM+up), процедур реконструкции (TVD-minmod, WENO-3, WENO-5) для примитивных («prim») и характеристических («inv») переменных. Естественно ожидать, что Θ не должна меняться с изменением α . Однако вне зависимости от используемого метода величина Θ изменяется значительно, что можно назвать аномальным поведением $\Theta(\alpha)$. При приближении α к некоторому значению величина Θ скачкообразно возрастает. Следует заметить, что использование характеристических переменных значительно улучшает скорость сходимости невозмущённого течения, но не устраняет наблюдаемое аномальное поведение.

Решатель Роу всегда приводит к хорошо установившемуся невозмущённому решению, но решатель AUSM+up может вызывать малые колебания скачка даже в квазиодномерной постановке. В общем случае, амплитуда таких колебаний весьма мала и возникает вблизи $\alpha \approx 0.61$. Именно при этом значении наблюдался аномальный скачкообразный рост на рис. 2.10а. Таким образом, малое изменение величины α привело к значительному изменению в характере прохождения возмущения через скачок. При этом в возмущённом течении скачок устойчиво оставался неподвижным. Наблюдаемое поведение можно отнести к механизму внутренней неустойчивости схем сквозного счёта [143], которое требует дополнительного анализа. Следует также отметить, что в случае «WENO3(inv), Roe» кривая $\Theta(\alpha)$ стелется вблизи теоретического решения, что может быть ошибочно принято за сеточную сходимость.

Дальнейшее рассмотрение сосредоточено на случае решателя Роу совместно с реконструкцией WENO-3 для примитивных переменных. Будем использовать названия *very coarse* (очень грубая), *coarse* (грубая), *minimal* (минимальная) и *sufficient* (достаточная) для расчётных сеток, которые соответствуют последовательно уменьшающемуся каждый раз вдвое шагу сетки поперёк скачка: $dx_s = \{2, 1, 0.5, 0.25\} \cdot 10^{-3}$. Вдали от скачка $dx = 10^{-3}$ у всех четырёх сеток. Имена подобраны визуально исходя из количества сеточных узлов, приходящихся на вязкую толщину скачка $\delta_{s,v}$: 7 для минимальной сетки и 13–14 для достаточной.



а) Влияние численного метода

б) Влияние сеточного разрешения вблизи скачка, WENO3(prim) + метод Roe

Рисунок 2.10 — Зависимость коэффициента прохождения Θ от α для медленной акустической волны; нормальный пойманный скачок $M_1 = 6$

Рисунок 2.10б демонстрирует, что наблюдаемая аномалия исчезает по мере разрешения скачка. Рассчитанное значение Θ последовательно стремится к своему теоретическому значению. При некотором сеточном разрешении скачок становится недоразрешённым, то есть его численная толщина перестаёт уменьшаться по мере измельчения сетки. Физически скачок может установиться при произвольном значении α при рассматриваемых граничных условиях. Это и наблюдается для разрешённого скачка в численном моделировании (перевёрнутые синие треугольники на рис. 2.10б). Размер ячейки становится существенно меньше, чем δ_s , и профиль ударной волны остаётся практически неподвижным, хотя могут достигаться различные значения α в зависимости от начального приближения α_0 .

Критерий независимости коэффициента прохождения от расчётной сетки — критерий разрешённого скачка — удалось подобрать численно, дополнив проведённые расчёты случаями $M_1 = 3$ и $M_1 = 12$. В первом случае толщина скачка примерно вдвое меньше по сравнению со случаем $M_1 = 6$; во втором — вдвое больше. Обнаружено, что для всех случаев достигается характерное значение модифицированного сеточного числа Рейнольдса

$$\widetilde{Re}_h = \frac{\rho |\Delta_h u| dx_s}{\mu} \approx \frac{\rho |\partial u / \partial x| dx_s^2}{\mu} \approx 0.3, \quad (2.8)$$

где $\Delta_h u$ — изменение продольной компоненты вектора скорости на одной сеточной ячейке. Для равномерной сетки \widetilde{Re}_h близко к приращению сеточного числа Рейнольдса $(\rho u dx / \mu)_x^{x+dx}$ на ячейке. При $\widetilde{Re}_h < 0.3$ отклонение коэффициента про-

хождения от теоретического значения составляет менее 0.5%, что остаётся верным во всех остальных рассмотренных случаях с различными типами элементарных возмущений, углами наклона волновых фронтов и скачка.

2.2.4. Численная природа аномального эффекта

Вызвана ли наблюдаемая аномалия лишь численной природой пойманного стационарного скачка? Для всестороннего ответа на этот вопрос рассмотрим ряд примеров: влияние толщины скачка по отношению к длине волны возмущения δ_s/λ ; другие типы элементарных возмущений; волна, падающая на скачок сзади; скачок, движущийся через газ.

2.2.4.1. Эффект δ_s/λ

Как отмечалось выше, взаимодействие скачка с малыми возмущениями является невязким процессом и описывается уравнениями Эйлера. Учёт вязкости добавляет затухание при распространении возмущения. Толщина скачка, как правило, мала по сравнению с длиной волны возмущения λ , и на малом масштабе скачка вязкое затухание мало. В соответствии с [127–129], длина волны возмущения не влияет на коэффициент прохождения Θ через прямой скачок. Поэтому сами по себе число Рейнольдса $Re_{1,L}$ и длины волны λ не должны вызывать аномального поведения Θ . Однако неясно, влияет ли соотношение характерных размеров скачка и возмущения δ_s/λ на появление аномального эффекта — неясно, может ли кажущийся численным эффект отчасти иметь физическую природу. Варьирование δ_s и λ путём изменения числа Рейнольдса $Re_{1,L}$ (2.7) и частоты возмущения ω показывает, что такое влияние отсутствует.

Это утверждение проиллюстрировано на рис. 2.11, где представлен результат прохождения медленной акустической волны через скачок. В базовом случае с $\delta_s \approx 2.3 \cdot 10^{-3}$ и $\lambda = 2\pi(1 - 1/M_1)/\omega \approx 41.9 \cdot 10^{-3}$, что даёт $\delta_s/\lambda \approx 5.5\%$. Рисунок 2.11а демонстрирует подобные кривые при различных δ_s/λ , полученные на грубой сетке, но сходимости $\Theta(\alpha)$ по этому параметру к теоретическому значению нет.

Толщина пойманного скачка уменьшается лишь при измельчении сетки, поэтому на грубой сетке эффект числа Рейнольдса на $\Theta(\alpha)$ оказывается мал, как и влияние λ .

Более важную роль играет степень разрешения скачка. При его достаточном разрешении согласие с теорией становится очевидным (рис. 2.11б). Тем не менее, сеточное разрешение всё ещё неидеально, и между расчётом и теорией остаются незначительные отклонения в пределах 0.5%. Кривые вновь развиваются подобно друг другу с ростом α . Таким образом, только сеточное разрешение вязкой структуры ударной волны определяет появление аномалии при взаимодействии скачка с акустическими волнами.

Следует вновь отметить всплеск на рис. 2.11а при наибольшем рассмотренном числе Рейнольдса. Он расположен близко по α к аналогичному всплеску на рис. 2.10а и напоминает поведение неустойчивой численной схемы вблизи некоторых положений скачка внутри ячейки [143].

2.2.4.2. Отражение от скачка

Рассмотрим отражение медленной акустической волны, которая набегаёт на скачок из области дозвукового течения за скачком (рис. 2.12). Поведение коэффици-

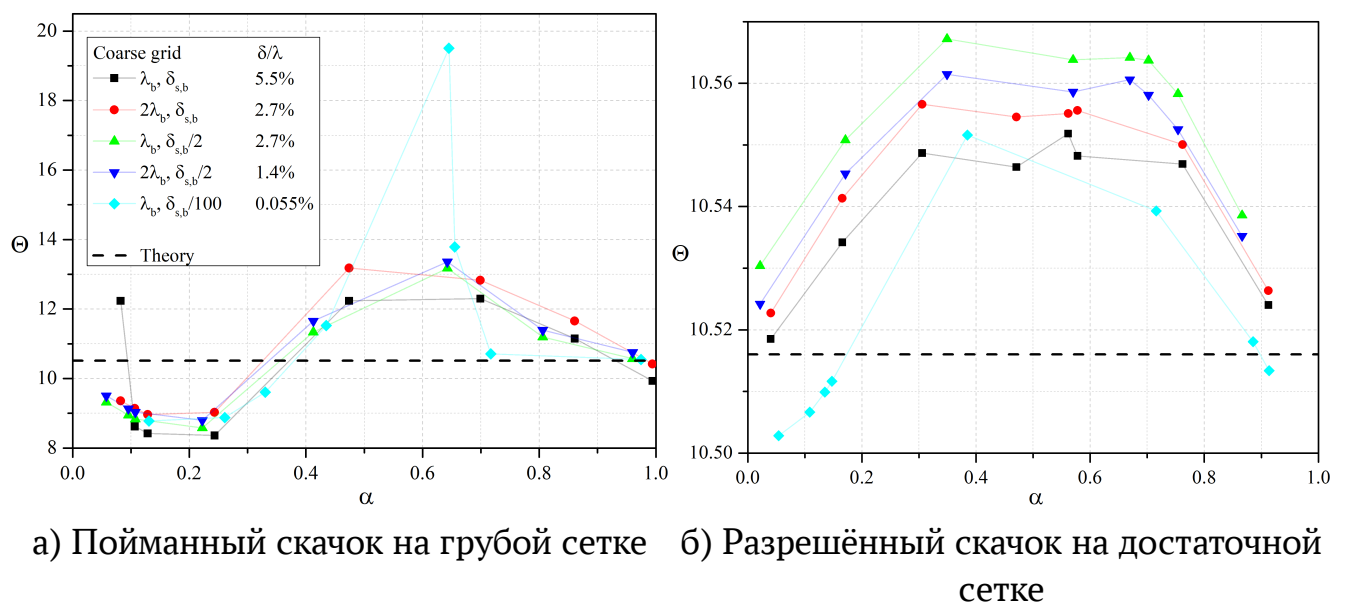


Рисунок 2.11 — Влияние δ_s и λ на величину Θ в случае медленной акустической волны

ента отражения $R = \delta p_2^{\text{пад}} / \delta p_2$ вновь является аномальным, если скачок пойман на сетке. Сходимость к результатам линейного анализа немонотонна по мере измельчения сетки. Следует вновь отметить значительный всплеск вблизи $\alpha \approx 0.63$ на грубой сетке, который примерно втрое выше аналогичного всплеска на рис. 2.10а. В остальных расчётах скачок не попадал в окрестность $\alpha \approx 0.63$, и очевидного всплеска не наблюдалось. Это может указывать на неустойчивость используемой численной схемы вблизи данного значения α . При некотором начальном положении скачка в ячейке сетки α_0 невозмущённое решение в нескольких случаях вовсе не устанавливалось, а в других случаях, наоборот, устанавливалось с высокой точностью, но к совершенно другому значению $\alpha \neq \alpha_0$. Причина потери численной устойчивости остаётся неясной, так как не удалось получить скачок $\alpha = 0.63$ ни в одном из хорошо установившихся невозмущённых течений. Тем не менее, если скачок разрешён на сетке, численные результаты приближаются к результатам линейного анализа равномерно по α , как показано на рис. 2.12.

При малых α отражение акустической волны от пойманного скачка может приводить к изменению фазы отражённой волны на π . Это явление проще наблюдать на примере пакета волн (рис. 2.13): максимум возмущения при $x \approx 0.3$ на грубой сетке (рис. 2.13а) превращается в минимум на подробной сетке (рис. 2.13б). Аналогичная неоднозначность может проявляться и в случаях, представляющих практический интерес, как например, в двухмерных расчётах, показанных на рис. 2.5, которые стали мотивацией данного методического исследования.

Результаты, полученные при отражении и прохождении акустических волн через скачок коррелируют друг с другом: амплитуда отражённой волны непредсказуема, пока скачок не разрешён на сетке.

2.2.4.3. Движущийся скачок

До сих пор аномальное взаимодействие возмущений с пойманным скачком наблюдалось в связанной с ним системе отсчёта, где скачок имел стационарное положение. Чтобы оценить важность этого условия, рассмотрим классическую задачу движения скачка в покоящейся газе с периодическим изменением плотности — с покоящейся в нём энтропийной волной. Рассмотрение проводится в двух системах отсчёта: первая связана со скачком (скачок покоится); вторая связана с

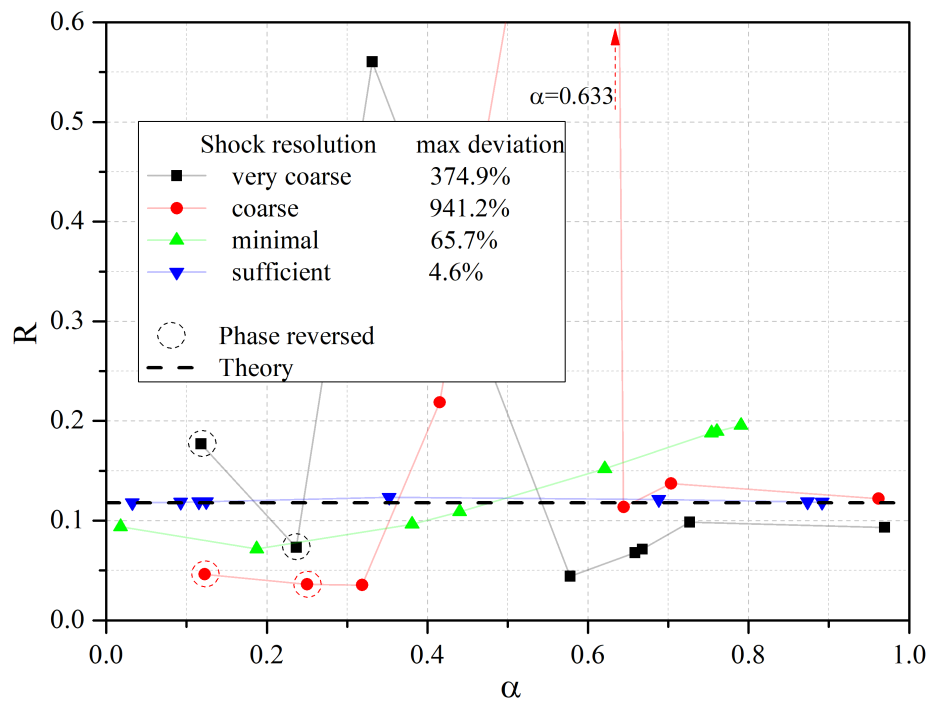
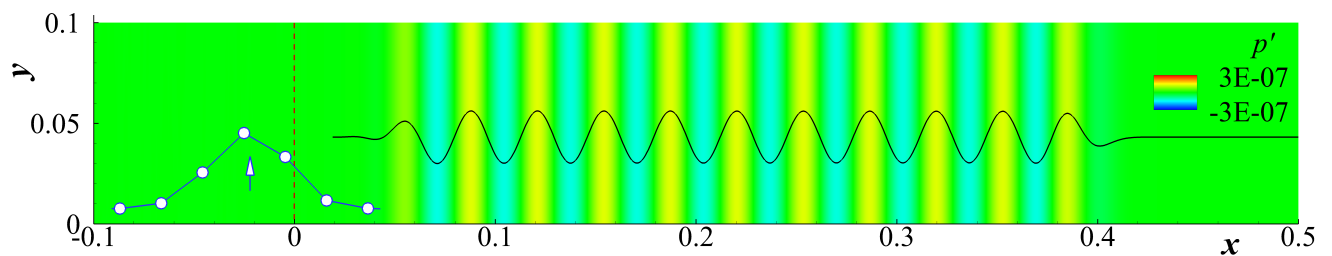
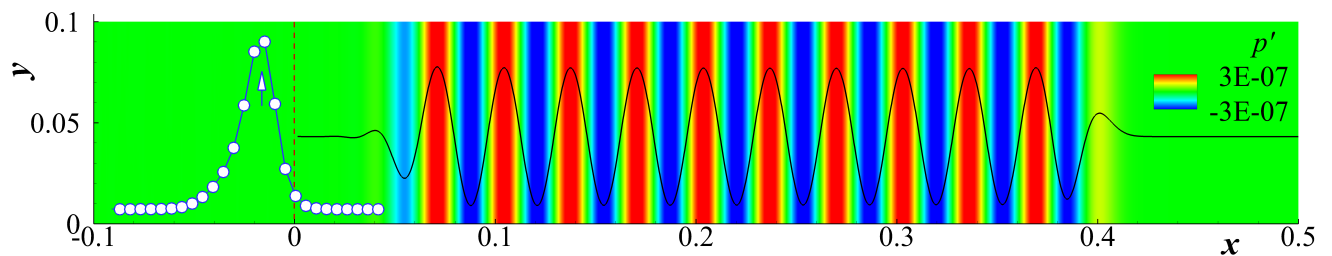


Рисунок 2.12 — Коэффициент отражения медленной акустической волны от скачка



а) Грубая сетка



б) Достаточная сетка

Рисунок 2.13 — Пакет медленных акустических волн после отражения от скачка в фиксированный момент времени. Скачок отмечен пунктиром. Слева показана структура узлов расчётной сетки на распределении $dp(x)/dx$ (не в масштабе с осью x); стрелкой отмечено положение скачка

газом (газ покоится, а скачок движется через газ). Постановка задачи дана в [148] и кратко повторяется далее. Исходная амплитуда $\delta\rho = 0.1$ уменьшена до $2 \cdot 10^{-4}$, чтобы соответствовать базовому случаю $\delta T = 2 \cdot 10^{-4}$ (следует из (1.9) при $\delta p = 0$, $T = 1$, $\rho = 1$) и гарантировать линейную эволюцию волн в однородном потоке.

Рассмотрим прямой скачок, который движется при числе Маха $M_\infty = 3$ слева направо, оставляя за собой область течения, которая движется с числом Маха $M'_\infty \approx 0.4758$. Таким образом, область справа от скачка соответствует состоянию 1 перед скачком, а область слева — состоянию 2 за скачком. Изначально скачок располагается при $x = 0$ ($\alpha_0 = 0$). Область 1 (справа от скачка) покоится, а поле плотности в ней возмущено периодически на протяжении семи периодов

$$\rho_1(t = 0, x) = 1 + \delta\rho_1 \cdot \sin(k_x x), \quad x \in [0 + dx, 0.4375], \quad k_x = 100.5310, \quad \delta\rho_1 = 2 \cdot 10^{-4}.$$

Соответствующее возмущение температуры находится из (1.5) как $T_1 = \gamma M_\infty^2 p_1 / \rho_1 = 1 / \rho_1$. Невозмущённое поле течения перед и за скачком есть

$$(u, v, p, T)_{1,b} = (0, 0, 1 / (\gamma M_\infty^2), 1),$$

$$(u, v, p, T)_{2,b} = (0, 740741, 0, 10.333333 / (\gamma M_\infty^2), 2.679012).$$

В такой постановке скачок движется со скоростью $u_s = 1$ сквозь энтропийную волну, оставляя за собой акустическое поле в области 2. Это явление можно количественно измерить через коэффициент порождения G — отношение амплитуды давления δp_2 акустической волны к масштабированной амплитуде энтропийной волны δs_1 в момент времени $t = 0.3$, когда скачок достигнет положения $x_s = 0.3$. Теоретическое значение безразмерного коэффициента порождения имеет вид

$$|G_t| = \frac{\gamma M_\infty^2}{T_{1,b}} \cdot \frac{\delta p_2}{\delta \rho_1} = \frac{2\gamma M_\infty^2 (M_\infty^2 - 1)}{(\gamma + 1)(1 + M_\infty^2(1 + 2M_\infty'^2))} \approx 4.525.$$

Чтобы найти величину G по результатам численного моделирования, следует учесть изменение амплитуды покоящегося возмущения во времени за счёт теплопроводности. Для этого три максимума $|\rho'|$ в области за скачком и четыре максимума $|\rho'|$ в области перед скачком по очереди аппроксимировались экспоненциальной кривой (см. раздел 2.1) и далее экстраполировались на положение скачка $x_s = 0.3$ вдоль этой кривой. Численное моделирование движущегося скачка

дало значение $G = 4.53$ на *очень грубой* сетке⁵, что иллюстрирует слабое влияние расчётной сетки на порождаемое акустическое поле.

При рассмотрении той же физической задачи для пойманного стационарного скачка и набегающей на него энтропийной волны положение скачка α становится важным — проявляется численная аномалия (рис. (2.14)). Вновь наблюдается равномерная сходимость $G(\alpha)$ к результатам линейной теории при улучшении сеточного разрешения скачка. В случае движущегося скачка аномалия пропадает. Это может означать, что возникающие численные ошибки компенсируют друг друга по мере того, как скачок проходит *всю* сеточную ячейку (как отмечается в [142; 145] в контексте поведения консервативных переменных поперёк скачка в невозмущённом течении), что в результате приводит к корректному среднему значению порождения акустической волны. Это направление представляет интерес для теоретического анализа численных схем.

⁵Очень грубая сетка при $M_1 = 3$ превращается в грубую при $M_1 = 6$ из-за утолщения скачка

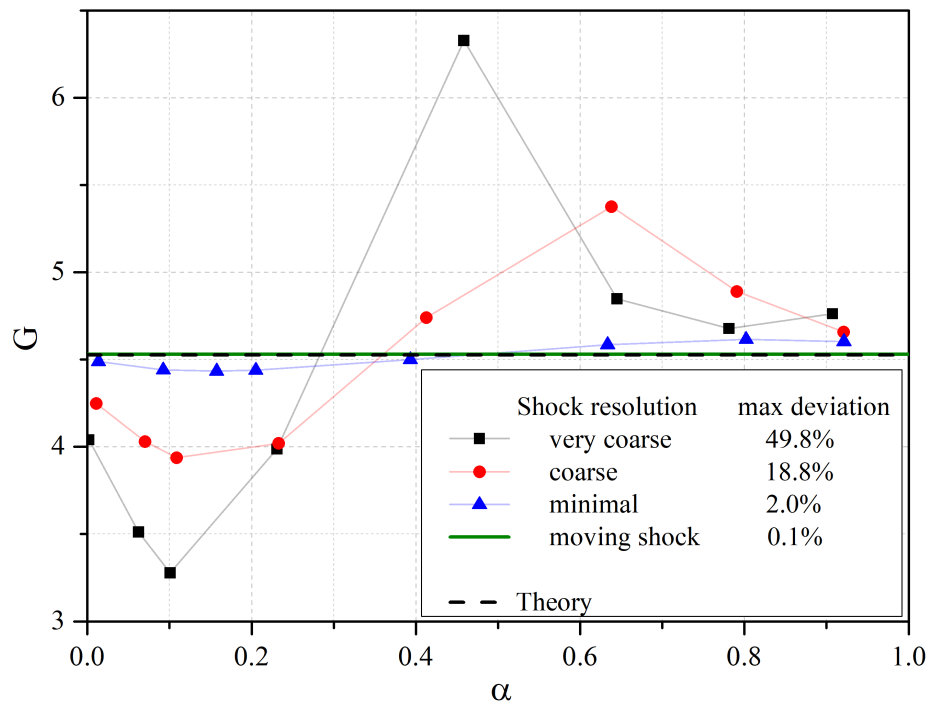


Рисунок 2.14 — Коэффициент порождения акустической волны при взаимодействии стационарного скачка с энтропийной волной

2.2.5. Размывание скачка

Помимо измельчения сетки есть иной способ улучшить пространственное разрешение скачка — уменьшить число Рейнольдса, что в соответствии с (2.7) приведёт к увеличению толщины скачка и локальному усилению вязкого затухания возмущений. Изменять число Рейнольдса разумно, влияя на коэффициент вязкости μ .

Чтобы абстрагироваться от избыточного вязкого затухания, рассмотрим случай большого числа Рейнольдса $Re_{1,L} = 100Re_{1,L,b}$. Влияние размывания скачка на его взаимодействие с возмущениями проверим на примере исходно грубой сетки, которую превратим в грубую, минимальную и достаточную, кратно увеличивая коэффициент вязкости поперёк скачка по сравнению с исходным невозмущённым течением, соответственно, в $m = 2$, в 4 и в 8 раз:

$$\frac{\mu}{\mu_*} = \begin{cases} m, & |x - x_s| \leq \Delta_s, \\ 1 + \frac{m-1}{2} \left(1 + \cos \left(\pi \frac{|x-x_s|-\Delta_s}{\Delta_s} \right) \right), & \Delta_s < |x - x_s| \leq 2\Delta_s, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Здесь $x_s = 0$, ширина размытия $\Delta_s = 10^{-4}$, а длина $2\Delta_s$ полностью покрывает размываемый скачок. Суммарная длина $4\Delta_s$, на которой изменяется распределение исходного коэффициента вязкости, не превосходит 1% от длины волны возмущения. Поэтому, как будет показано ниже, вязкое затухание возмущения на масштабе этой области мало.

Результаты обобщены на рис. 2.15. Изначально пойманный скачок, размываясь, превращается в разрешённый, и зависимость $\Theta(\alpha)$ становится всё слабее по мере размытия, как будто улучшается сеточное разрешение скачка. Результаты, полученные на минимальной сетке как в случае измельчения сетки, так и при размытии скачка, демонстрируют очень близкие зависимости $\Theta(\alpha)$. Эти зависимости остаются близки и на грубой сетке, за исключением окрестности $\alpha = 0.6$, где избыточная вязкость подавляет внезапный аномальный рост коэффициента порождения, обсуждаемый выше. Таким образом, введение избыточной вязкости поперёк скачка хорошо коррелирует с измельчением расчётной сетки. Однако дополнительную вязкость существенно проще реализовать в общем виде, опираясь на критерий разрешённого скачка (2.8). Решения на достаточных сетках, использованные на рис. 2.15, очевидно, удовлетворяет этому критерию.

Слишком большая искусственная вязкость может привести к заметному затуханию возмущения на длине $4\Delta_s$, где она добавляется. Нетрудно оценить добавочный декремент k_i , используя линеаризованное уравнение импульса в одномерном приближении⁶

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u_B \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_B} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{4\mu_B}{3\rho_B} \cdot \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}, \quad (2.10)$$

где для нормировки используется некоторое опорное состояние потока. Для этого рассмотрим возмущения u' и p' в виде простой волны $q' = \hat{q} \exp(i\omega t - ikx)$, где q обозначает u или p , а также используем связь амплитуд в медленной акустической волне $\hat{u} = \hat{p}M / (\rho_B u_B)$. Предположим, что затухание происходит медленно: $|k_i| \ll |k_r|$, где $k = k_r + ik_i \in \mathbb{C}$ — волновое число. Также предположим однородное базовое течение $u_B = \text{const}$, $p_B = \text{const}$, $\mu_B = \text{const}$, в котором сохраняется единичный массовый расход $\rho u = \rho_B u_B = 1$. Используя (2.7), из уравнения (2.10) можно получить

$$k_i \approx \frac{4\mu_B}{3\rho_B} \cdot \frac{k_r^2}{Re \cdot c} = \frac{4\mu_B}{3\rho_B} \frac{(2\pi)^2}{M_1 C(M_1) c \cdot \delta_s} \cdot \left(\frac{\delta_s}{\lambda}\right)^2 \approx \frac{2.45 \mu_B}{\delta_s \rho_B} \cdot \left(\frac{\delta_s}{\lambda}\right)^2, \quad (2.11)$$

где $C(M_1)$ — слабая функция от M_1 , как показано в подразделе 2.2.2, а c — фазовая скорость малого возмущения.

Так как невозмущённое течение содержит скачок и не является однородным, волна непрерывно меняется (усиливается или порождается) на протяжении области неоднородности из-за появления межволнового обмена. Это существенно невязкий механизм, который описывается уравнениями Эйлера (их одномерная характеристическая форма приведена, например, в [168]). Даже если удастся отделить этот механизм от вязкого механизма, предложить простую модель вязкого затухания волны на протяжении всей области представляется нетривиальной задачей. Вместо этого оценим суммарный эффект вязкого затухания, предполагая, что межволновой обмен сосредоточен вблизи начала x_L области неоднородности течения. В результате обмена формируется волна с некоторой амплитудой, которая

⁶Корректная постановка задачи о затухании элементарного возмущения опирается на все уравнения Навье — Стокса и изложена в подразделе 2.1.1. Здесь же делается упрощённая (качественная) оценка, основанная только на уравнении импульса. Она учитывает затухание волны за счёт вязкости, но не теплопроводности. Так как число Прандтля принято постоянным, то вклад теплопроводности в затухание волны должен быть пропорционален вкладу вязкости. Поэтому оценка (2.11) отличается от точного теоретического решения постоянным множителем, в чём можно убедиться, сопоставив её с выражением (2.1) при $(u_B, \rho_B, \mu_B) = (1, 1, 1)$.

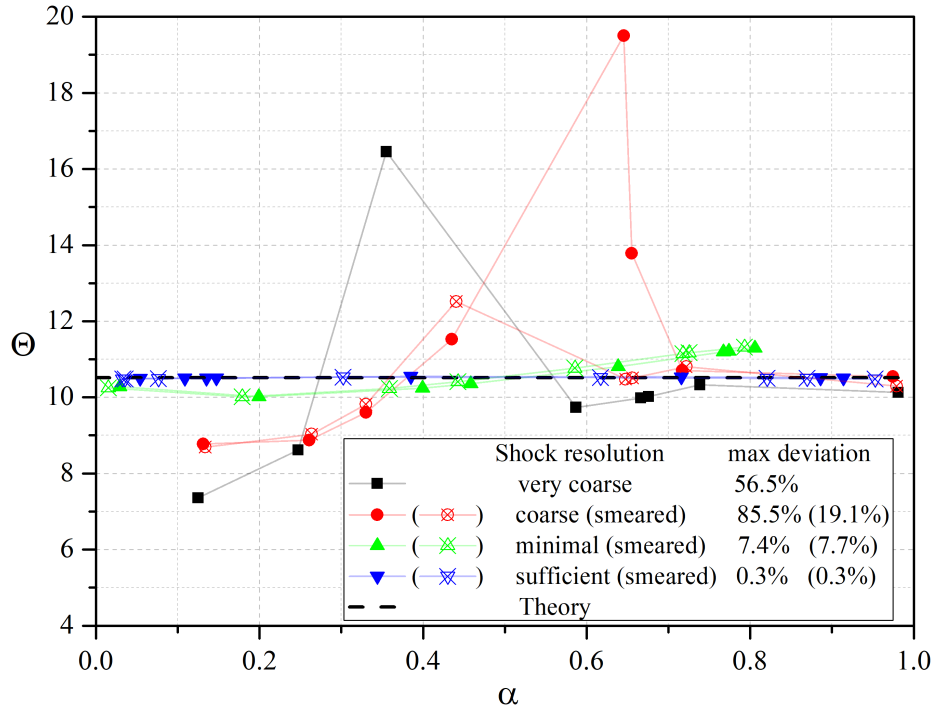


Рисунок 2.15 — Эффект размывания скачка на прохождение медленной акустической волны через него, $Re_{1,L} = 100Re_{1,L,b}$

впоследствии выпадает из анализа. Далее волна развивается при $x_L < x < x_R$, испытывая лишь вязкое затухание. В этом случае имеем оценку суммарного вязкого ослабления волны

$$\ln \left(\frac{\delta p_2}{\delta p_2^o} \right) \approx - \int_{x_L}^{x_R} (k_i - k_i^o) dx \approx - \frac{x_R - x_L}{2} \left((k_{i,L} - k_{i,L}^o) + (k_{i,R} - k_{i,R}^o) \right), \quad (2.12)$$

где верхний индекс «o» обозначает случай без дополнительной вязкости.

Рассмотрим случай, когда исходный коэффициент вязкости увеличивается на отрезке $[x_L, x_R]$ равномерно в m раз и не изменяется вне этого отрезка (упрощение зависимости (2.9)). Связь между $k_{i,L}^0$ и $k_{i,R}^0$ оказывается простой в случае, когда состояние L соответствует состоянию до скачка для медленной акустической волны, а состояние R — после скачка для быстрой акустической волны (медленная волна отсутствует в дозвуковом потоке за прямым скачком). Положим $[x_L, x_R] = [-10^{-2}, 10^{-2}]$. Если воспользоваться формулой (2.11), состоянием перед скачком $u_1 = 1, \rho_1 = 1, \mu_1 = 1$ и сохранением массового расхода $\rho u = 1$ поперёк скачка, то в данной постановке уравнение (2.12) сведётся к виду

$$\ln \left(\frac{\delta p_2}{\delta p_2^o} \right) \approx - \frac{x_R - x_L}{2} (m - 1) \left(1 + \frac{\mu_2}{u_2^2} \left(\frac{1 - 1/M_1}{1 + 1/M_2} \right)^3 \right) \cdot k_{i,1}^o \approx -0.06 (m - 1). \quad (2.13)$$

Таким образом простая модель указывает, что дополнительная вязкость приводит только к вязкому затуханию, которое усиливается экспоненциально с ростом коэффициента усиления вязкости m . Следует отметить, что в модели не сделано предположений о возможном влиянии дополнительной вязкости на взаимодействие скачка с возмущениями. Для численной валидации модели рассмотрим случаи с параметром $m \in \{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$. При $m = 10$ скачок занимает практически весь отрезок $[x_L, x_R]$. На рис. 2.16 показаны результаты валидации, подтверждающие, что дополнительная вязкость не влияет на взаимодействие скачка с возмущениями, но может приводить к подавлению возмущений в случае, когда её величина оказывается слишком большой. Наклон аппроксимирующей прямой не равен единице, что, вероятно, обусловлено приближённым характером предложенной модели.

Важно подчеркнуть, что используя критерий (2.8), можно добавлять вязкость только на толщине размытого скачка, то есть $x_R - x_L \approx \delta_s$. В этом случае из выражения (2.13) после подстановки $k_{i,1}^o$ в соответствии с (2.11), получается

$$\ln \left(\frac{\delta p_2}{\delta p_2^o} \right) \approx k_i \delta_s \sim \left(\frac{\delta_s}{\lambda} \right)^2.$$

Как правило, отношение δ_s/λ мало, и вязкое затухание физического решения незначительно. Однако оно становится порядка единицы, когда рассматриваются возмущения вблизи слабо притупленных кромок или на колмогоровском масштабе длины в задачах взаимодействия турбулентности потока со скачком. В этом случае следует использовать подход размытия скачка с осторожностью.

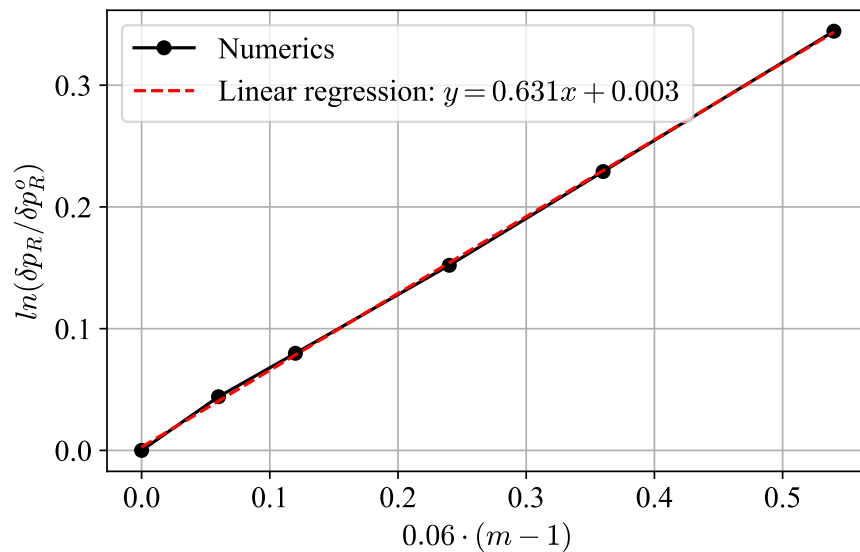


Рисунок 2.16 — Влияние размытия скачка на численное затухание возмущений

Численное моделирование при $M_1 = 6$ с размытием скачка показывает, что коэффициент прохождения Θ уменьшается лишь на 0.2% от его величины в исходной постановке задачи, даже если $\delta_s/\lambda < 0.1$. Такое мягкое ограничение привлекательно для приложений: допустимо локальное увеличение вязкости на один-два порядка величины. Следует также отметить, что затухание возмущений из-за введения дополнительной вязкости рассмотрено само по себе и поэтому не зависит от сеточного разрешения.

2.2.6. Косой скачок уплотнения

При анализе роли наклона скачка β_1 (см. схему на рис. 2.6) важно помнить, что толщина скачка увеличивается при уменьшении числа Маха ниже значения ~ 3 , как показано на рис. 2.9а. Рассмотрим очень грубую сетку, на которой скачок оказывается пойманным во всех расчётных случаях этого подраздела. Также для удобства сосредоточимся на случае быстрых акустических волн, фронты которых параллельны фронту скачка ($\theta = 0$). Таким образом, чем больше наклон скачка, тем короче длина волны в направлении x .

Интенсивность скачка определяется нормальной составляющей числа Маха M_{1n} . Чтобы продемонстрировать, что численные аномалии постепенно исчезают по мере ослабления скачка, рассмотрим случай $M_1 = 6$ при различных наклоне скачка $\beta_1 \in \{0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 68^\circ, 75^\circ, 80^\circ\}$. Соответствующие значения $M_{1n} = M_1 \cos \beta_1$ приведены в табл. 2.1 и покрывают диапазон от 1 до 6. Результаты обобщены на рис. 2.17 в виде максимального по α относительного отклонения коэффициента прохождения Θ от своего теоретического значения Θ_t [129] — то есть, разные точки в общем случае соответствуют разным значениям положения скачка α внутри сеточной ячейки. Также на рис. 2.17 помещены результаты расчётов с прямым скачком, интенсивность которого соответствует анализируемым интенсивностям косого скачка ($M_1(\beta = 0) = M_{1n}(M_1 = 6)$). Обе кривые расположены близко друг к другу.

Три расчётных случая с определёнными значениями α были исключены из рассмотрения (помечены кружком с крестиком), так как при них не было получено хорошо сошедшегося невозмущённого течения. Это значит, что либо скачок не оставался параллельным сеточной линии $x = \text{const}$ (как, например, в [144]), либо

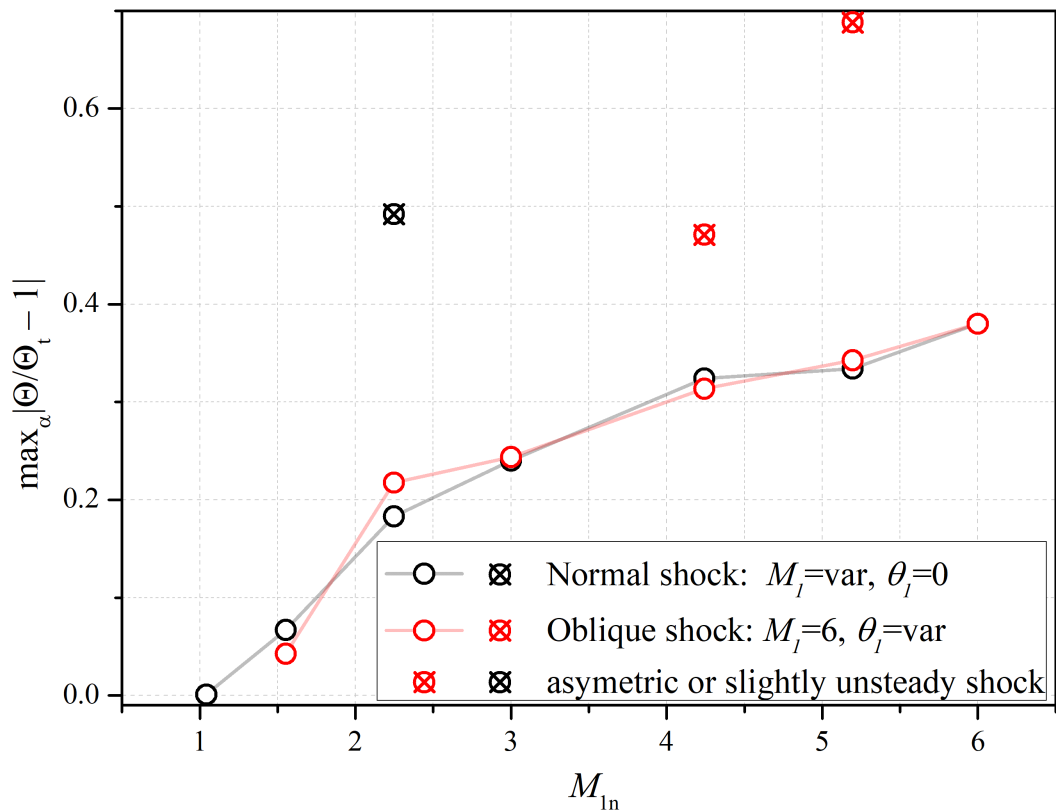


Рисунок 2.17 — Влияние интенсивности косоого скачка на аномальное поведение быстрой акустической волны при прохождении через скачок

сам по себе проявлял малые нестационарные осцилляции в отсутствие внешних возмущений.

Общее наблюдение можно сформулировать так: если пойманный скачок не возмущён на расчётной сетке, аномальный эффект численного метода проявляется при взаимодействии малых возмущений с наклонным скачком тем сильнее, чем выше интенсивность скачка. Если же невозмущённое течение имеет признаки искажения или вовсе не устанавливается (даже минимальные осцилляции скачка имеют значение), аномальный эффект проявляется значительно сильнее. При этом тяжело установить его связь с интенсивностью скачка из-за недостатка расчётных данных. Тем не менее, все невозмущённые течения при $M_{1n} < 2$ хорошо сошлись для всех значений α .

2.2.7. Замечание о роли наклона волновых фронтов

Эффект взаимодействия элементарных возмущений со скачком продолжает проявляться для волн с наклонными фронтами, $\theta_1 \neq 0$, если вязкая структура скачка не разрешена на расчётной сетке. Однако отклонение от теоретического значения остаётся близким для всех углов θ_1 , если сеточное разрешение не изменяется. Теоретическое значение достигается по мере разрешения скачка на сетке.

Единственным особым случаем, при котором пойманный скачок не приводит к аномальному эффекту, является случай вихревого возмущения при $\theta_1 = 0^\circ$, для которого возмущена *только* составляющая вектора скорости, параллельная скачку. В соответствии с [127–129], в этом случае за скачком не порождаются акустические или энтропийные волны, и прямой расчёт подтверждает это. Однако в случае наклонной волны завихренности, $\theta_1 \neq 0$, за скачком возникают возмущения всех типов, и проявляется их аномальное поведение, которое ослабевает при $\theta_1 \rightarrow 0^\circ$.

2.3. Волновой поезд первой моды

Монотонные схемы сквозного счёта диссипативны. Это позволяет устойчиво рассчитывать течения с ударными волнами, отрывными областями, пограничными слоями и другими особенностями с учётом их взаимодействия. Избыточная диссипация приводит к численному затуханию малых возмущений. Однако при правильном выборе расчётной сетки темпы роста возмущений в неустойчивых пограничных слоях заметно превосходят эффекты, связанные с численной диссипацией. В данном разделе демонстрируется применимость численного метода, описанного в разделе 1.2, для моделирования ламинарно-турбулентного перехода сверхзвукового пограничного слоя на заострённой плоской пластине при числе Маха $M_\infty = 3$. Результаты моделирования верифицируются на результатах расчётов [93; 169; 170] (преимущественно [169]), проведённых с помощью значительно менее диссипативного метода. Этот метод основан на схеме четвёртого порядка аппроксимации по продольному и нормальному к поверхности направлениям; в боковом направлении применяется спектральный метод; интегрирование по времени проводится по методу Рунге–Кутты четвёртого порядка аппроксимации.

Изложенные ниже результаты являются развитием работы [171]. Расчёты и анализ результатов настоящего раздела выполнены совместно с аспирантом МФТИ Нгуен Ньи Кан. Ниже представлены основные результаты верификации, а более детальное сравнение можно найти в работе [172].

2.3.1. Постановка задачи

Постановка задачи соответствует постановке в работах [93; 169; 170]. Рассматривается номинально двухмерное течение над заострённой адиабатически прогретой плоской пластиной при $M_\infty = 3$, $T_\infty^* = 103.6$ К, $Re_{\infty,1} = 2.181 \cdot 10^6$ м⁻¹, $L = 0.7239$ м, $Pr = 0.71$. На обеих границах по z накладываются условия симметрии.

Возмущения вводятся с помощью генератора — нормального к поверхности вдува – отсоса газа, организованного при $x^* \in [x_1^*; x_2^*] = [0.394; 0.452]$ м. Математически генератор выражается нестационарным граничным условием, расширяющим условие стенки:

$$v'(x, t) = \varepsilon \cdot v'_p(x_p) \cos(\beta_0 z) \cos(\omega_0 t);$$

$$v'_p = \begin{cases} 1.5^4 (1 + x_p)^3 (3(1 + x_p)^2 - 7(1 + x_p) + 4), & -1 \leq x_p < 0; \\ -1.5^4 (1 - x_p)^3 (3(1 - x_p)^2 - 7(1 - x_p) + 4), & 0 \leq x_p \leq 1; \end{cases}$$

$$x_p = \frac{2x - (x_2 + x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Здесь $\varepsilon = 0.00573$ — целевая амплитуда, которая плавно достигается спустя один период фундаментальной гармоники с частотой $\omega_0^*/2\pi = 6.36$ кГц и боковым волновым числом $\beta_0^* = 211.52$ м⁻¹. Плавное наращивание амплитуды помогает значительно ослабить интенсивную головную часть порождаемого волнового поезда и быстрее достичь квазипериодического режима, на котором статистические характеристики возмущённого течения постоянны и не зависят от начального этапа расчёта. Форма генератора вдоль направления x — $v'_p(x_p)$ — представлена на рис. 2.18.

Результаты проведённых расчётов качественно и количественно согласуются с результатами [169]. Однако амплитуда возмущений ε в настоящей работе установлена практически вдвое выше, чем в [169]. Это сделано для совпадения положения

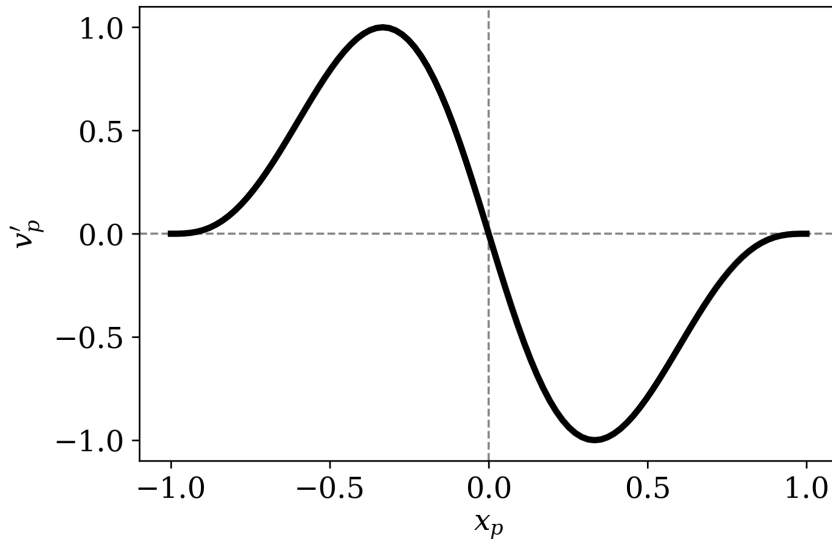


Рисунок 2.18 — Форма генератора возмущений вдоль потока, $v'_p(x_p)$

начала ЛТП в обеих работах. Ниже на примере распределений $c_f(x)$ будет показано, что положение ЛТП практически не зависит от рассматриваемых расчётных сеток — численная диссипация незначительна. Так как имеется общее хорошее согласие полученных результатов с результатами [169], вероятно, что амплитуда возмущений указана в [169] неверно.

Расчёт эволюции возмущений проводится в прямоугольной подобласти (см. подраздел 1.2.3.1). Вдоль подобласти укладывается 14 длин фундаментальной волны $\lambda_{0,x}^* = 2\pi/\alpha_{0,r}^*$, а в боковом направлении — ровно одна длина волны $\lambda_{0,z}^* = 2\pi/\beta_0^* \approx 0.03$. Высота подобласти составляет не менее пяти толщин пограничного слоя на выходной границе. Начало подобласти расположено перед генератором возмущений ($x^* = 0.258$ м от передней кромки) и не подвержено его влиянию.

Расчёты выполнены на *грубой* и *подробной* сетках, описанных в [172]. Подробная сетка содержит около 80 млн узлов (соответствует [169]) и имеет избыточное разрешение на длину волны: до 320 точек на $\lambda_{0,x}$ и равномерно $201 = N_z$ точка на $\lambda_{0,z}$. Поперёк пограничного слоя приходится около 100 узлов. Грубая сетка имеет вдвое меньшее количество узлов в направлениях x и z . При таком сеточном разрешении эффект численной диссипации представляется незначительным.

2.3.2. Возмущённое поле течения

Анализ нестационарных полей начинается с момента времени $t \approx 2.25$, когда течение выходит на квазипериодический режим — в каждой точке расчётной области изменение газодинамических переменных периодически по времени и размаху z . Развитое возмущённое течение изображено на рис. 2.19. Генератор возмущений порождает стоячую по z волну, состоящую из пары наклонных волн $(\omega_0, \pm\beta_0)$, которые эволюционируют вниз по потоку. Сначала наблюдается линейная стадия усиления, далее проявляются признаки нелинейности в виде измельчения вихревых структур в направлении z , после чего происходит быстрый распад возмущений в мелкомасштабные структуры с развитием молодого турбулентного течения.

Периодичность течения в нелинейной области (см. рис. 2.20а) обусловлена периодичностью вводимых возмущений (их частота фиксирована). Наиболее сильной оказывается механизм квадратичной нелинейности, который приводит к порождению гармоник с кратными частотами и волновыми числами по отношению к фундаментальной волне (ω_0, β_0) — развивается детерминированная турбулентность⁷. Это проиллюстрировано на рис. 2.20б, где изображены амплитуды Фурье⁸ нелинейного сигнала: кратные гармоники возникают в шахматном порядке. Например, для стационарного возмущения $\omega = 0$ и других чётных частот ($h = 0, 2, 4, \dots, \omega = h \cdot \omega_0$) наблюдаются только максимумы на чётных волновых числах $k = 0, 2, 4, 6, \dots$ ($\beta = k \cdot \beta_0$), а для нечётных частот ($h = 1, 3, 5, \dots$) — на нечётных волновых числах $k = 1, 3, 5, \dots$. Такая картина свойственна механизму наклонного распада, когда нелинейно (квадратично) взаимодействуют две гармоники с одинаковыми частотами, но противоположными по знаку волновыми числами: частота удваивается, а волновое число обнуляется: $[1, 1] + [1, -1] \rightarrow [2, 0]$. Чем ближе гармоника расположена к фундаментальной, тем выше её амплитуда. Это связано с тем, что нелинейный распад продвигается в высокочастотную область постепенно, а также с численной диссипацией коротковолновых гармоник.

⁷Причинно обусловленная (нестохастическая) турбулентность, у которой *мгновенная* структура, например, поля $u(x, y, z, t)$ может быть воспроизведена многократно при воспроизведении всей предыстории начальных условий. Термин «детерминированная турбулентность» вводится в обширном экспериментальном исследовании нелинейной стадии ЛТП в дозвуковых пограничных слоях [173] наряду с термином «стохастическая турбулентность», у которой воспроизводятся *среднестатистические* характеристики, а мгновенные — нет.

⁸Амплитуды нормированы на $N_t \times N_z / 4$, где N_t и N_z — количество точек в сигнале по времени и по координате z , соответственно

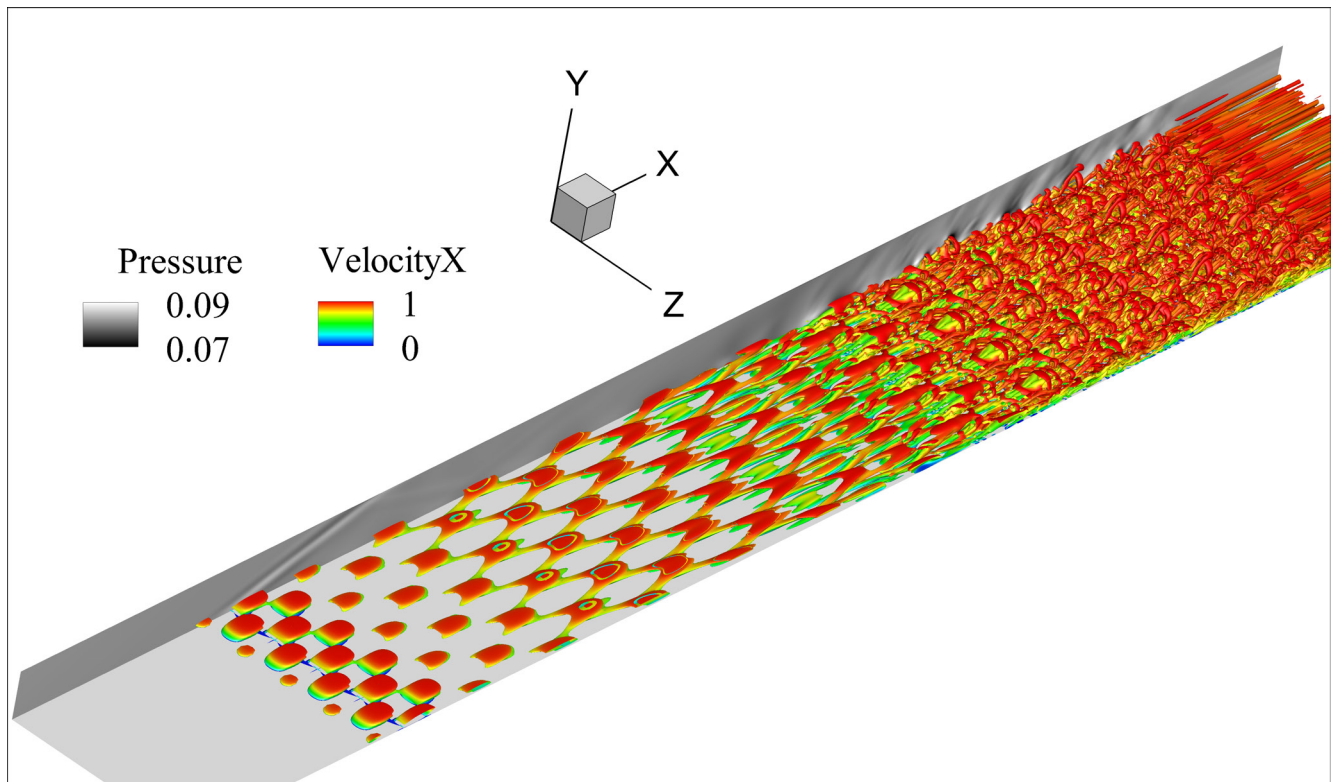
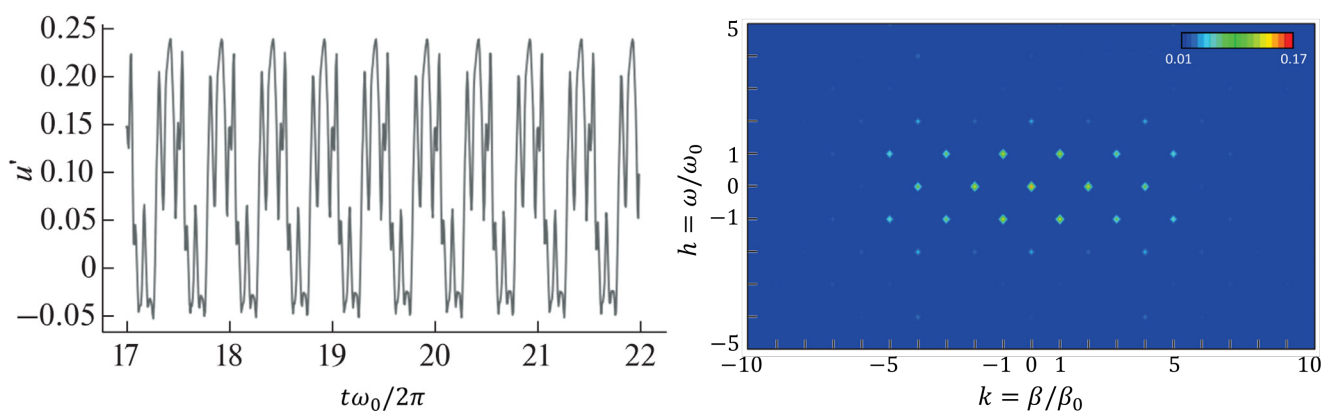


Рисунок 2.19 — Возмущённое течение на подробной сетке при $t = 5.2$. Изоповерхность $Q = 10$ раскрашена в соответствии с величиной продольной компоненты скорости u . В сечении $z = z_{min}$ показано поле давления p . Изображение включает часть буферной зоны



а) Пример возмущённого сигнала
 $u'(t, x_0 y_0, z_0), z_0^* = -0.0076$

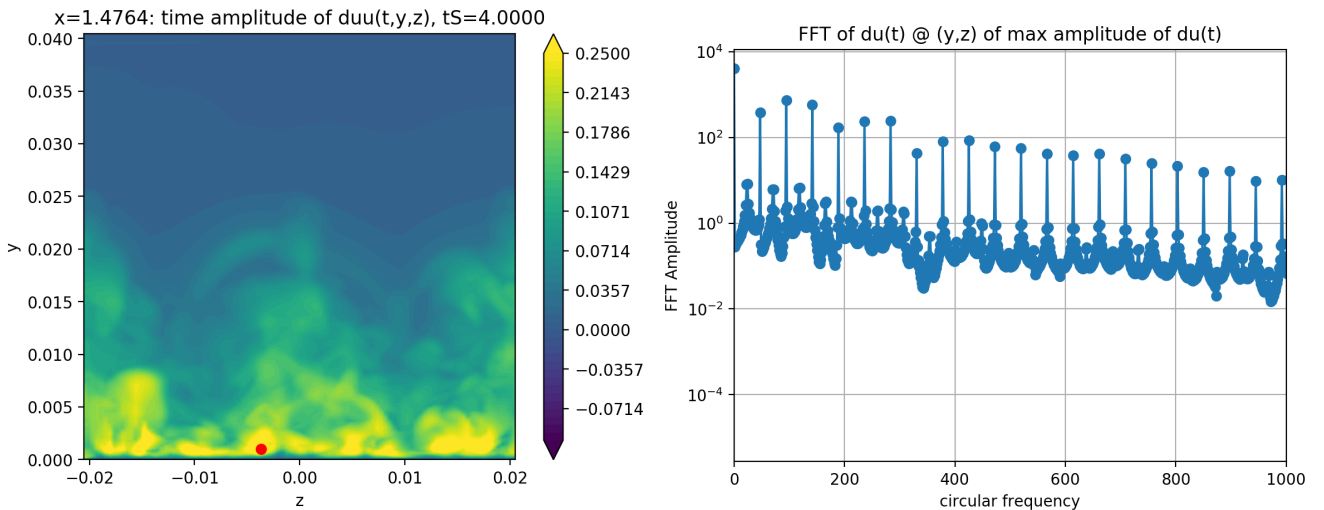
б) Амплитуды Фурье для $u'(t, x_0 y_0, z_0)$

Рисунок 2.20 — Возмущение u' внутри пограничного слоя при $y_0^* = 0.0035$ в области развитого нелинейного течения $x_0^* = 0.9201$

Несмотря на детерминированность турбулентности и граничные условия симметрии в боковом направлении, возмущённое течение развивается несимметрично по z к концу расчётной области (см. рис. 2.21а). В спектральном составе возмущений 2.21б проявляется субгармоника $\omega_0/2$. Несмотря на малую амплитуду субгармоника участвует в квадратичном взаимодействии, что приводит к появлению промежуточных спектральных пиков по частоте. Следует отметить, что начальная стадия нелинейного взаимодействия по механизму *субгармонического резонанса* реализуется в эксперименте и исследовалась на дозвуковых и сверхзвуковых скоростях (см., напр., [29; 174]).

2.3.3. Верификация на линейном режиме

Линейный режим развития возмущений наблюдается при $0.4 \lesssim x \lesssim 0.6$. Амплитудные (собственные) функции для фундаментального возмущения $[h, k] = [1, 1]$ в сечении $x^* = 0.5$ хорошо согласуются с результатами работы [169], как показано рис. 2.22. Для каждой из амплитудных функций можно выделить линию $y = y_{max}$, где она достигает максимума. Для пульсаций u' и T' эта линия располагается в критическом слое пограничного слоя, $y_{max}/\delta \approx 0.65$. Развитие такого максимума



а) Поле амплитуды пульсаций $\max_t (u'(t, x_0, y, z))$; красным кружком помечена точка (y_{max}, z_{max}) с наибольшей амплитудой

б) Амплитуды Фурье для сигнала $u'(t, x_0, y_{max}, z_{max})$

Рисунок 2.21 — Результаты расчёта перед входом в буферную зону ($x_0^* \approx 1.069$ м)

вниз по потоку также хорошо согласуется с результатами [169] на линейном режиме даже на грубой сетке, хотя на нелинейном режиме появляются небольшие отклонения (рис. 2.23а).

Инкремент пространственного роста возмущений чувствителен к численной диссипации, зависит от структуры невозмущённого течения и поэтому представляет интерес для верификации. Распределение инкремента, рассчитанного для возмущения продольной составляющей возмущения скорости, $-\alpha_i(x) = d(\ln u'_{[1,1],max}(x))/dx$, приведено на рис. 2.23б. Наблюдается хорошее согласование результатов численного моделирования. Результаты соответствуют предсказанию линейной теории устойчивости при $x \lesssim 0.7$. Далее расчётные инкременты сильно отклоняются от теоретических, что соответствует началу нелинейной стадии развития возмущений.

2.3.4. Верификация на нелинейном режиме

Нелинейная стадия проявляется на картинах Q -критерия в виде появления и заметного усиления подковообразных вихрей (см. рис. 2.19). Процесс нелинейного распада можно визуализировать с помощью развития максимальных по y амплитуд различных гармоник. Резонанс наклонных волн протекает последова-

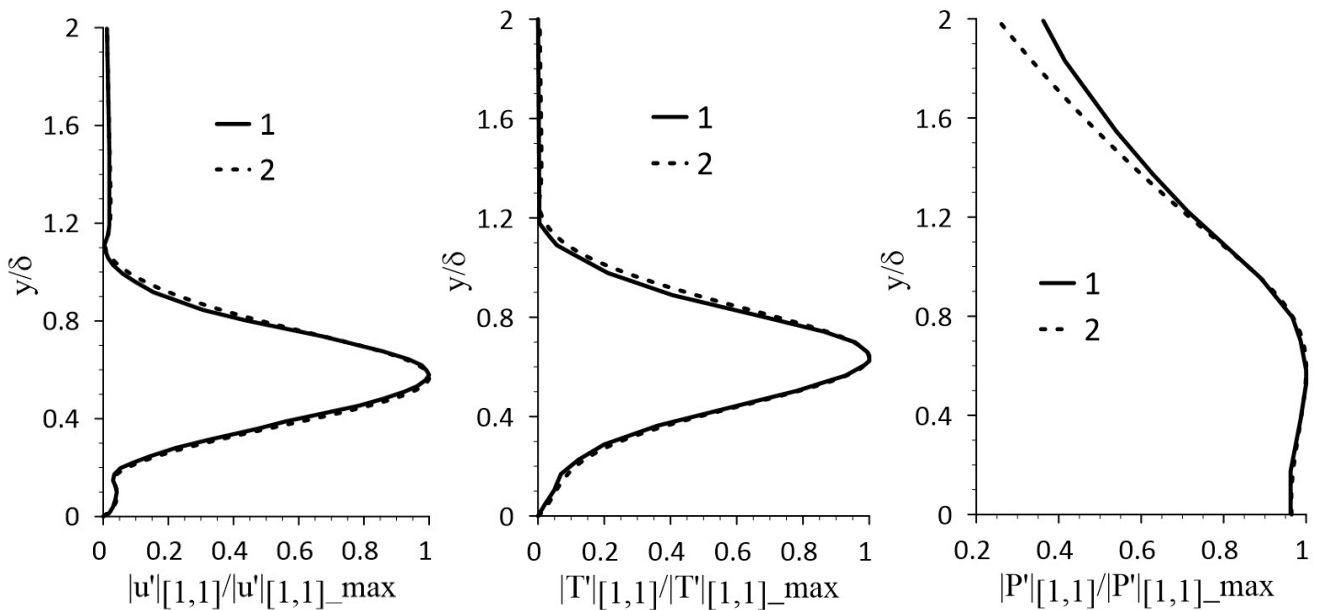


Рисунок 2.22 — Амплитудные функции фундаментального возмущения (ω_0, β_0) в сечении $x^* = 0.5$ м: 1 — [169]; 2 — текущие расчёты

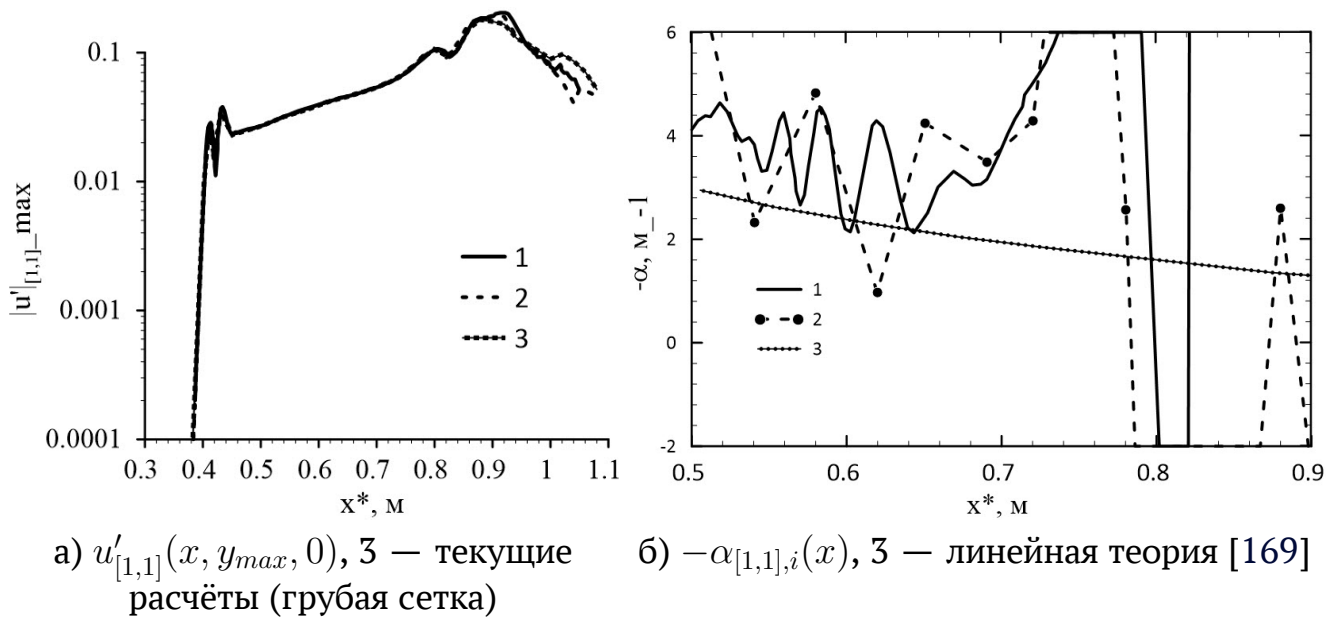


Рисунок 2.23 — Поверхностное распределение максимума амплитудной функции и инкремента роста фундаментального возмущения (ω_0, β_0) : 1 — [169]; 2 — текущие расчёты (подробная сетка)

тельно. Сначала нарастает преобладающая фундаментальная волна $[1, \pm 1]$. При достижении некоторой критической амплитуды нелинейное взаимодействие этой волны с собой же порождает и далее подпитывает до достаточно высоких амплитуд кратные гармоники ($h = 0$ и $h = 2$, $k = 0$ и $k = 2$). Далее кратные гармоники начинают нелинейно взаимодействовать друг с другом и с фундаментальными гармониками, порождая кратные гармоники более высокого порядка. Такой процесс и его временная последовательность прослеживаются на рис. 2.24 и 2.25, иллюстрирующих эволюцию амплитуд разных гармоник. Описанный механизм объясняет шахматную структуру спектра на рис. 2.20б.

Следует отметить хорошее совпадение в эволюции гармоник [169] в областях линейного и слабонелинейного развития возмущений. В области молодой турбулентности согласие сохраняется для основных энергосодержащих гармоник ($h = 0$ и 1 , $k = 0$ и 1), рассчитанных на подробной сетке, но с ростом h и k появляется небольшое рассогласование. Результаты, полученные на грубой сетке, заметно отличаются от результатов на подробной сетке во всей области молодой турбулентности. При этом во всех случаях амплитуды гармоник остаются на одном уровне, что может быть следствием накопления ошибки диссипативного метода.

На рис. 2.26 показано сопоставление эволюции полей завихренности с расчётами [93], проведёнными в той же постановке, что и в работе [169], но на ещё более подробной сетке в 211 млн узлов. Вихрь вблизи $x^* \approx 0.84$ м (рис. 2.26а)

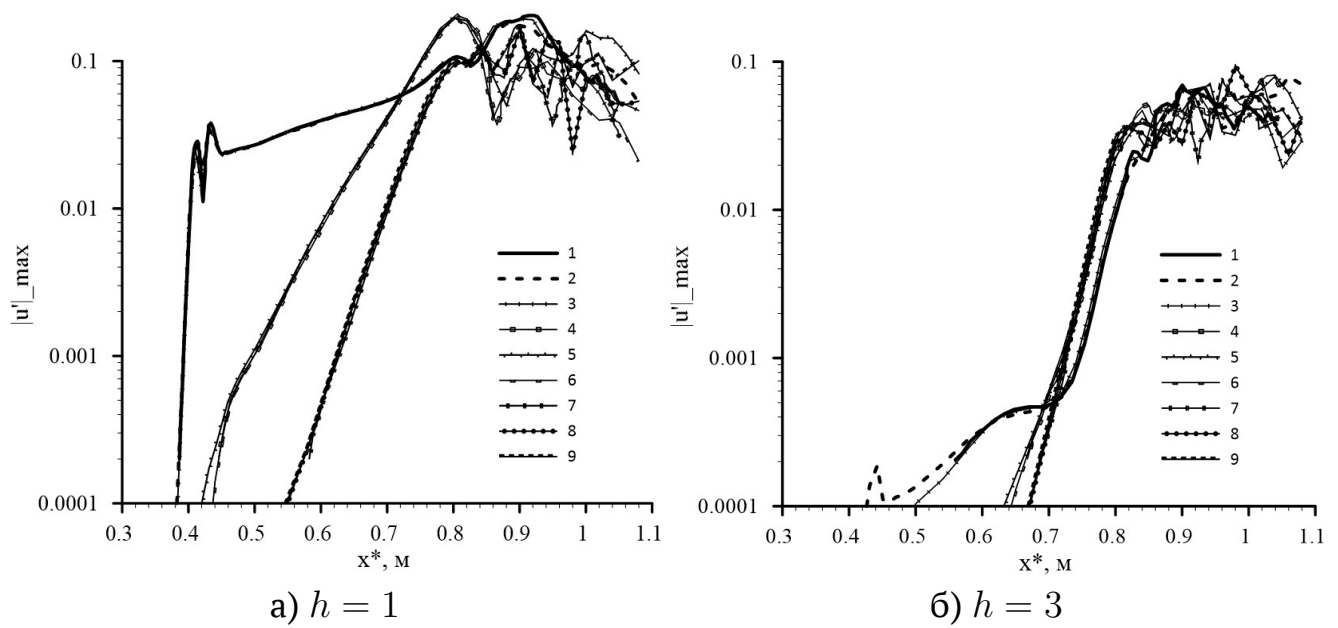


Рисунок 2.24 — Распределение $|u'_{[h,k]}(x, y_{\max}, 0)|$: 1, 4, 7 — [169]; 2, 5, 8 — текущие расчёты (подробная сетка); 3, 6, 9 — текущие расчёты (грубая сетка); 1–3 — $k = 1$; 4–6 — $k = 3$; 7–9 — $k = 5$

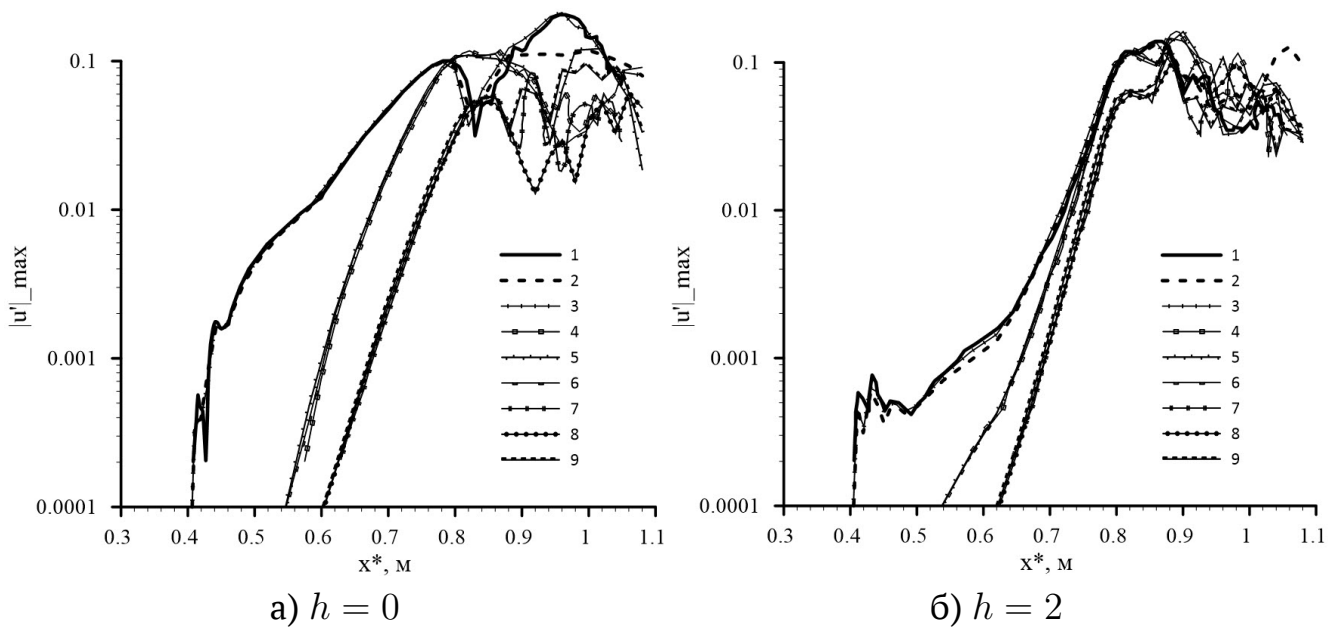


Рисунок 2.25 — То же, что и на рис. (2.24), но для чётных частот: 1, 2, 3 — $k = 2$; 4, 5, 6 — $k = 4$; 7, 8, 9 — $k = 6$

сносится через точку $x^* \approx 0.87$ м (рис. 2.26б) к положению $x^* \approx 0.90$ м (рис. 2.26в), где начинает активно распадаться на мелкие вихри, которые сносятся потоком до $x^* \approx 0.92$ м (рис. 2.26г). К этому моменту к сечению $x^* \approx 0.84$ подходит новый вихрь, и процесс повторяется (квазипериодический режим). Период повторения равен периоду фундаментального возмущения $2\pi/\omega_0$, так как субгармонические возмущения слишком слабы и не проявляются визуально.

Поведение основных крупномасштабных структур хорошо согласуется. В обоих случаях можно сделать вывод, что крупные вихри распространяются со скоростью невязкого потока U_∞^* . Мелкомасштабные вихри также воспроизводятся в проведённых расчётах, но недостаточно детально по сравнению с результатами [93].

Рисунок 2.27 сопоставляет структуры течения в нескольких сечениях $x = \text{const}$ в переходной области, подтверждая сделанные ранее выводы о согласовании полей течения.

В завершение рассмотрим распределение локального коэффициента трения $c_f(x)$, осреднённое на квазипериодическом режиме течения по интервалу времени $10 \cdot 2\pi/\omega_0$ и по всему размаху расчётной области (на длине волны фундаментального возмущения $\lambda_{0,z}$). Рисунок 2.28 показывает, что начиная с $x^* \approx 0.72$ м, величина c_f отклоняется от ламинарной ветви распределения. При $x^* \lesssim 0.86$ результаты используемой диссипативной схемы совпадают с результатами [169] даже на грубой сетке. Ниже по потоку распределение $c_f(x)$, полученное на грубой сетке, оказывается ниже остальных кривых. Результаты, полученные на подробной сетке, продолжают демонстрировать хорошее совпадение и в области молодой турбулентности при $x^* \gtrsim 0.9$ м, достигая турбулентного уровня при $x \approx 0.95$.

2.3.5. Выводы

Диссипативные численные схемы пригодны для моделирования процесса ламинарно-турбулентного перехода и надежного воспроизведения локальных и интегральных характеристик течения при правильном выборе параметров расчётной сетки. Это подтверждено путем верификации используемого численного метода на модельной задаче ламинарно-турбулентного перехода на пластине по механизму наклонного распада волн (косого резонанса) — настоящие результаты

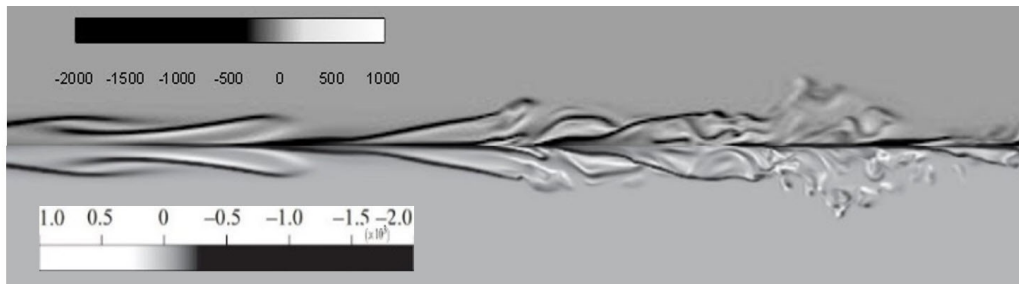
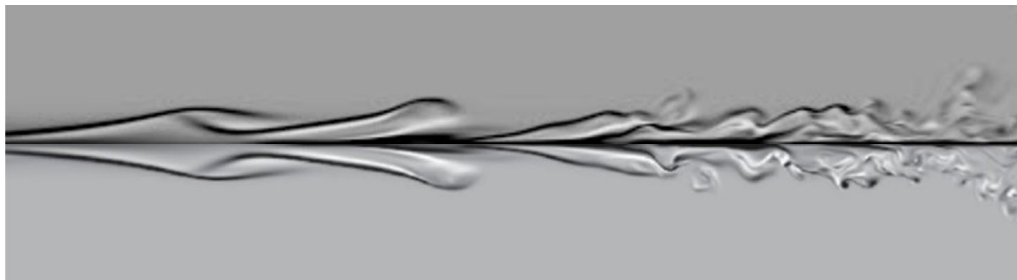
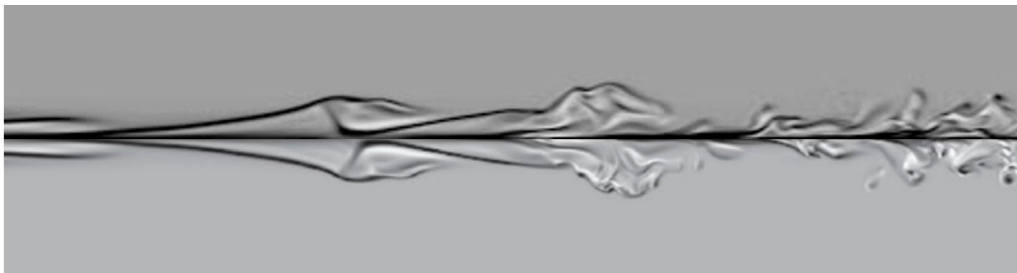
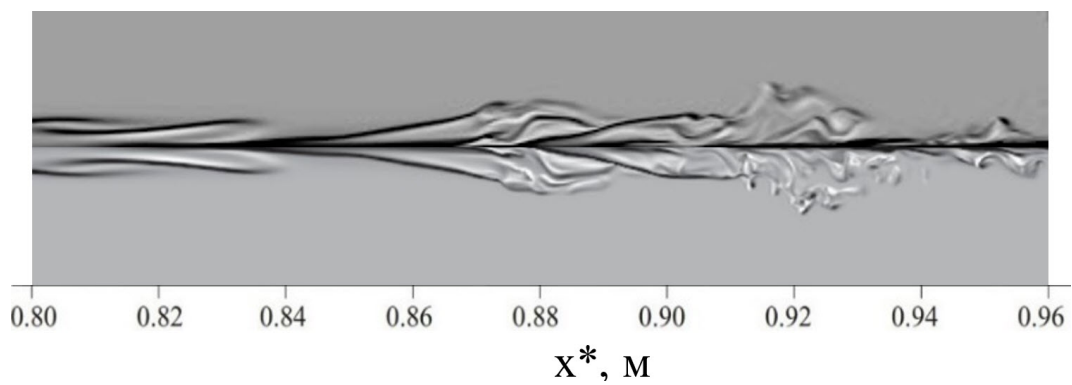
а) $t = t_0$ б) $t = t_0 + 0.3 \cdot 2\pi/\omega_0$ в) $t = t_0 + 0.6 \cdot 2\pi/\omega_0$ г) $t = t_0 + 0.9 \cdot 2\pi/\omega_0$

Рисунок 2.26 — Мгновенное поле z -компоненты вектора завихренности в сечении $z^* = -0.0087$ м в различные моменты времени. Верхняя половина — текущие расчёты; нижняя половина — [93] после отражения (сетка 211 млн. узлов)

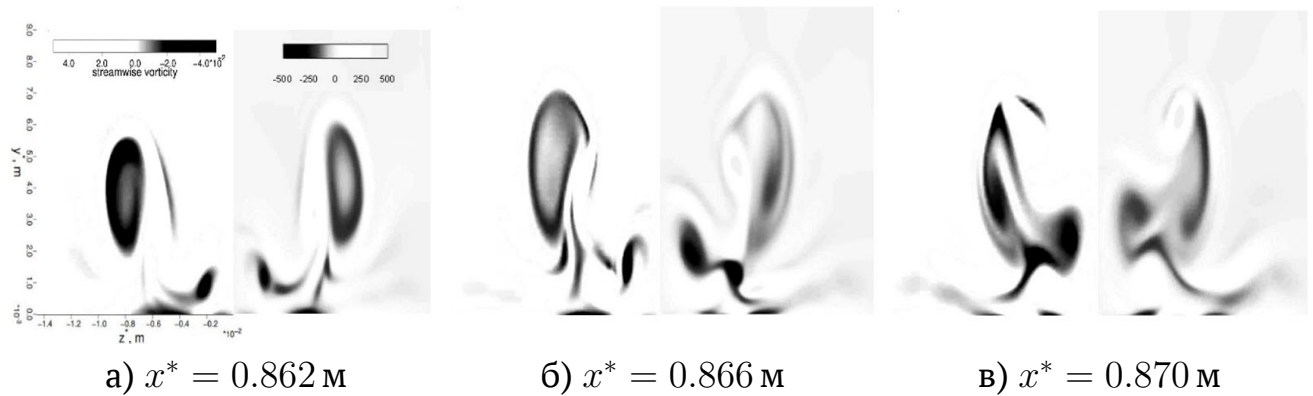


Рисунок 2.27 — Мгновенное поле x -компоненты вектора завихренности в некоторый момент времени в различных сечениях $x = const$. Левая половина — [169]; правая половина — настоящие расчёты

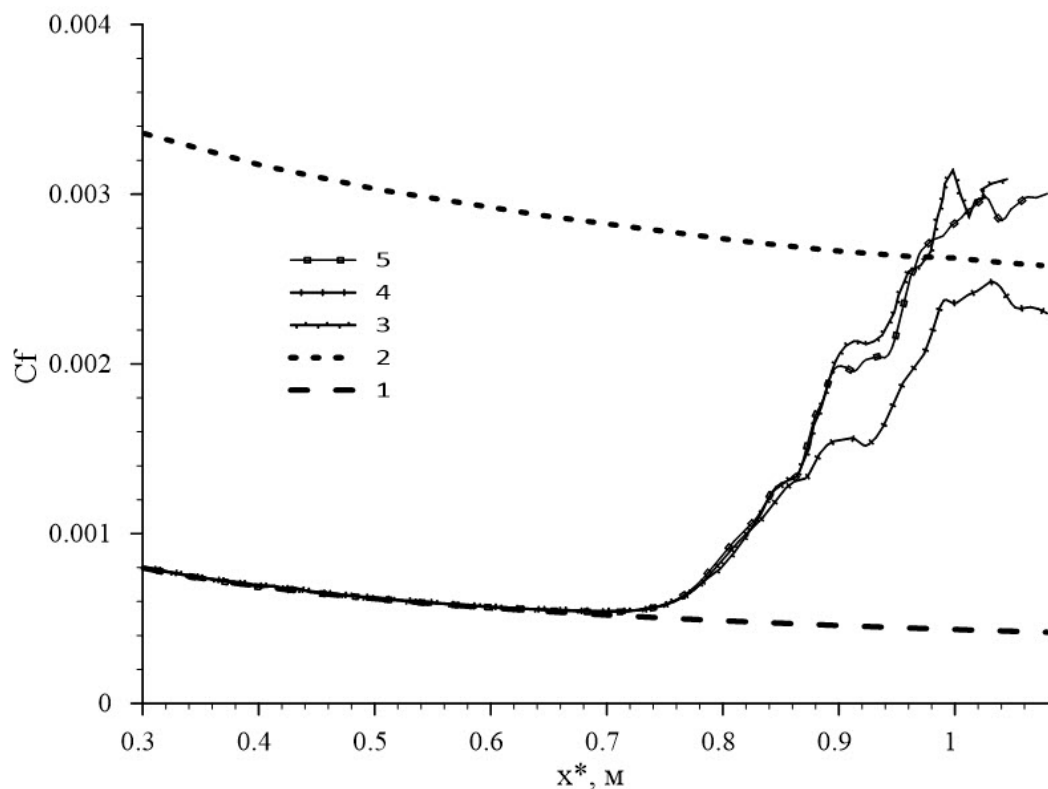


Рисунок 2.28 — Поверхностное распределение коэффициента трения c_f , осреднённого по t и z : 1 — ламинарная ветвь (настоящая работа); 2 — теоретическая турбулентная ветвь [175]; 3 — работа [169]; 4 — грубая сетка; 5 — подробная сетка

сопоставлены с результатами, полученными с применением низкодиссипативных схем [93; 169; 170].

Положение точки начала перехода практически не зависит от количества узлов сетки и порядка аппроксимации схемы, если основная фундаментальная гармоника и ее ближайшие кратные гармоники достаточно хорошо разрешены. При этом сеточное разрешение гармоник более высокого порядка, по-видимому, играет второстепенную роль при моделировании начала ЛТП и интегральных характеристик течения.

Более детальное сопоставление расчётных результатов можно найти в статье автора [172].

2.4. Замечание о заострённой кромке

Во всех расчётах настоящей диссертации рассматривается приближение острой передней кромки, которая обычно располагается вблизи пересечения входной границы расчётной области (набегающий поток при $x = 0$) и границы стенки (условие стенки при $y = 0$). Теоретически на острой передней кромке возникает особенность течения. Для корректного обхода этой особенности требуется учитывать реальное малое притупление кромки, что значительно усложняет расчётную сетку и процесс численного моделирования в целом. Если взаимодействие с передней кромкой не исследуется, а реальное притупление кромки достаточно *мало*⁹ (кромка является заострённой), приближение острой кромки представляется допустимым. При этом теоретическая особенность снимается численно благодаря диссипативным свойствам применяемого численного метода, а неучёт реального притупления кромки практически не влияет на течение за ней.

Также следует отметить, что характерная длина волны возмущений, попадающих в пограничный слой из набегающего потока (акустические, вихревые и энтропийные волны), на два порядка больше радиуса притупления реалистичной заострённой передней кромки (~ 10 мкм для экспериментальных моделей). Поэтому приближение острой кромки в задачах настоящей диссертации представляется разумным и обоснованным.

⁹Расстояние от кромки до точки поглощения энтропийного слоя пограничным слоем много меньше характерного линейного масштаба задачи L^* .

Приближение острой кромки получило широкое распространение при проведении расчётных исследований (см., напр., [37]).

2.5. Выводы по главе

Исследована применимость численного метода к моделированию нестационарного развития возмущений. Показано, что при пространственном сеточном разрешении в 30 точек на длину элементарной волны численное затухание достаточно мало и не должно влиять на результаты, обсуждаемые в последующих главах. Исследовано появление численных аномалий, связанных с недостаточным разрешением профиля ударной волны на расчётной сетке при моделировании взаимодействия малых возмущений с ней. Получен критерий сеточного разрешения скачка с целью подавления аномальных эффектов; указаны способы его достижения. Показано, что по мере уменьшения интенсивности скачка численные аномалии монотонно ослабляются и исчезают в отсутствие скачка. Это, в частности, оправдывает отсутствие проверки сеточной сходимости для скачка при исследовании нестационарных течений около тонких тел под нулевым углом атаки, таких как пластина и конус.

Продемонстрирована применимость используемого диссипативного численного метода для моделирования ламинарно-турбулентного перехода путём сопоставления результатов настоящей работы с результатами, полученными с помощью низкодиссипативного метода другими авторами.

Глава 3. Способ возбуждения реалистичных возмущений

Для моделирования турбулентных пятен, развивающихся из детерминированных волновых пакетов, требуются большие вычислительные мощности, что связано с длительной стадией линейного роста волновых пакетов от момента их возбуждения. Однако можно использовать расширенные данные из анализа линейной устойчивости пограничного слоя и на их основе построить процедуру введения сформировавшихся волновых пакетов в расчётную область с помощью специального нестационарного граничного условия. Данный раздел посвящён теоретическому построению такого условия.

Чтобы описать развитие волновых пакетов, возникших в пограничном слое на пластине в ответ на слабое внешнее воздействие, требуется решить две задачи: определить начальные амплитуды каждой моды пограничного слоя (восприимчивость) и рассчитать развитие этих мод вниз по потоку от места их возбуждения. В силу малости амплитуд обе задачи можно рассматривать в рамках линеаризованных уравнений Навье — Стокса в локально-параллельном приближении, когда $Re_{\infty,L} \gg 1$ и невозмущённое течение зависит от x как от параметра. В этом случае решение представимо в виде разложения по собственным функциям линейного оператора — по модам его дискретного и непрерывного спектра. В случае локализованного воздействия в приближении параллельного пограничного слоя задача восприимчивости формулировалась как начальная [33; 176] или начально-краевая [177; 178] в зависимости от характера источника возмущений. В обоих случаях решение представимо в виде разложения по временным или пространственным модам пограничного слоя — в виде модового разложения. В дальнем поле от источника возмущений (пространственная задача устойчивости) в волновом пакете остаются лишь неустойчивые моды, а остальные экспоненциально затухают или нейтральны. Учёт слабого роста толщины пограничного слоя на пластине приводит к тому, что частота преобладающей моды понижается вниз по течению.

3.1. Пространственная задача устойчивости

В рамках коротковолнового приближения пространственной задачи устойчивости для пограничного слоя на плоской пластине вектор возмущения

$$\mathbf{Q}(t, x, y, z) = \left(u', \frac{\partial u'}{\partial y}, v', p', T', \frac{\partial T'}{\partial y}, w', \frac{\partial w'}{\partial y} \right)^T \quad (3.1)$$

представляется в виде

$$\mathbf{Q}(t, x, y, z) = \Re \left[\hat{\mathbf{q}}(\omega, \beta, Y, x) \cdot e^{iS + i\beta z - i\omega t} \right],$$

где \Re обозначает действительную часть комплексной величины; частота возмущения ω и боковое волновое число β действительны; продольное волновое число $\alpha(\omega, \beta)$ — комплексное собственное значение; $Y = Re^{1/2}y$; $S(x, \omega, \beta) = \int_{x_0}^x \alpha(\tilde{x}, \omega, \beta) d\tilde{x}$ — эйконал возмущения; x_0 — точка потери устойчивости. В главном приближении по малому параметру $Re^{-1/2}$ амплитудная функция $\hat{\mathbf{q}}$ удовлетворяет системе уравнений устойчивости

$$\frac{d\hat{\mathbf{q}}}{dY} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{q}}. \quad (3.2)$$

Матрица \mathbf{H} имеет размерность 8×8 , а её явный вид известен [67; 179]. Возмущения дискретного спектра удовлетворяют однородным граничным условиям: прилипание на стенке с отсутствием пульсаций температуры, затухание вне пограничного слоя

$$\begin{aligned} Y = 0 : \quad \hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = \hat{T} = 0, \\ Y \rightarrow \infty : \quad (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Спектр задачи $\alpha(\omega, \beta) = \alpha_r + i\alpha_i$ исследовался ранее [42; 180–182]. Следует отметить, что $\alpha_i < 0$ соответствуют неустойчивым модам, растущим вниз по потоку, а $\alpha_i > 0$ — устойчивым затухающим. В рамках данного раздела система (3.2) – (3.3) интегрировалась численно Фёдоровым А. В. (подробности даны в [183]).

3.1.1. Асимптотика трёхмерного волнового пакета

Будем считать, что в дальнем поле преобладает единственная мода с номером m . Если волновой пакет моды m возбуждается локально (в окрестности некоторой точки x_0), развитие волновых компонент рассчитывается вниз по потоку от этой точки. Если возбуждение равномерно распределено по x , волновые компоненты рассчитываются от их точек потери устойчивости $x_0(\omega, \beta)$. В точке наблюдения (x, y, z) , расположенной в дальнем поле, волновой пакет имеет вид

$$\Psi_m(t, x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \left[D_m(\omega, \beta, x) \cdot \hat{\mathbf{q}}_m(\omega, \beta, x, y) \cdot e^{iS(x, \omega, \beta) + i\beta z - i\omega t} \right] \quad (3.4)$$

Величина интегрального усиления $N(\omega, \beta, x) = -S_i(\omega, \beta, x)$ — N -фактор — достигает больших значений в дальнем поле: $N \gg 1$. Поэтому разумно предположить, что коэффициент восприимчивости $D_m(\omega, \beta)$ и собственные функции $\hat{\mathbf{q}}_m(\omega, \beta, x, y)$ слабо зависят от ω и β по сравнению с экспоненциальным множителем $e^{iS(\omega, \beta)}$. Заметим также, что вектор Ψ_m вещественнозначный. Это подразумевает симметрию задачи, в частности: $(\omega, \beta) \rightarrow (-\omega, -\beta) \Rightarrow \alpha \rightarrow -\bar{\alpha}$, где верхняя черта обозначает комплексное сопряжение. Тогда из определения эйконала следует, что $S(-\omega, -\beta) = \bar{S}(\omega, \beta)$. Также имеется симметрия двумерного течения по β : $S(\omega, -\beta) = S(\omega, \beta)$. Ввиду этого ограничим анализ трёхмерного ($\beta \neq 0$) волнового пакета в области $\beta > 0, \omega > 0$ и перепишем (3.4) в виде

$$\begin{aligned} \Psi_m(t, x, y, z) &= \Re[I_+] + \Re[I_-], \\ I_{\pm} &= \frac{1}{2\pi^2} \iint_0^{\infty} K(\omega, \pm\beta) d\omega d\beta, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $K(\omega, \beta)$ — ядро подынтегрального выражения в (3.4).

Предполагая $N \gg 1$, оценим интеграл I_+ с помощью метод перевала [184] (I_- оценивается аналогично). Основной вклад в интеграл даёт окрестность перевальной точки $(\omega_s, \beta_s) \in \mathbb{C}$, которая определяется из соотношений

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \omega} (S + \beta z_s - \omega t_s) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (S + \beta z_s - \omega t_s) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

В общем случае, эйконал $S(\omega, \beta)$ является аналитической комплекснозначной функцией, производная которой не зависит от выбранного направления на комплексной плоскости, а решение для действительных t_s и z_s соответствует физическому пространству (t, z) [179]. Поэтому условие (3.6) удобно разделить для действительной и для мнимой осей:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_r}{\partial \omega} - t_s = 0, \\ \frac{\partial S_r}{\partial \beta} + z_s = 0, \\ \frac{\partial S_i}{\partial \omega} = 0, \\ \frac{\partial S_i}{\partial \beta} = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

В соответствии с двумя первыми условиями, максимум (горб) волнового пакета будет наблюдаться при фиксированной продольной координате x в момент времени t_s и при боковой координате z_s . Два последних условия в (3.7) определяют седловую точку (ω_s, β_s) — параметры возмущения, преобладающего в сечении наблюдения x . Седловая точка определяется численно в итерационной процедуре.

Введём краткие обозначения: $\Delta\omega = \omega - \omega_s$, $\Delta\beta = \beta - \beta_s$, $S_s = S(\omega_s, \beta_s)$, $S_\omega = \partial S(\omega_s, \beta_s)/\partial\omega = t_s$, $S_\beta = \partial S(\omega_s, \beta_s)/\partial\beta \equiv -z_s$; $S_{\omega\omega} = \partial^2 S(\omega_s, \beta_s)/\partial\omega^2$; $S_{\omega\beta} = \partial^2 S(\omega_s, \beta_s)/\partial\omega\partial\beta$; $S_{\beta\beta} = \partial^2 S(\omega_s, \beta_s)/\partial\beta^2$, $D_{m,s} = D_m(\omega_s, \beta_s)$, $\hat{\mathbf{q}}_{m,s} = \hat{\mathbf{q}}_m(\omega_s, x, y, \beta_s)$. Тогда

$$I_+ \approx \frac{D_{m,s} \hat{\mathbf{q}}_{m,s}}{i\pi \sqrt{S_{\omega\omega} S_{\beta\beta} - S_{\omega\beta}^2}} \cdot \exp(iS(x, \omega_s, \beta_s) + i\beta_s z - i\omega_s t). \quad (3.8)$$

Следует отметить, что выбор регулярной ветви корневой функции определяет лишь фазу результата и не влияет на его абсолютную величину¹.

3.1.2. Параболическая аппроксимация эйконала

Вблизи седловой точки показатель экспоненты в (3.4) имеет форму, близкую к параболической. Представим эйконал по формуле Тейлора около (ω_s, β_s) с точностью до второго порядка малости по $\sqrt{\Delta\omega^2 + \Delta\beta^2}$ при $\Delta\omega \rightarrow 0$, $\Delta\beta \rightarrow 0$:

¹В конечном итоге, речь идёт о фазе и огибающей асимптотики исходного волнового пакета Ψ_m в соответствии с (3.5).

$$S \approx S_s + S_\omega \Delta\omega + S_\beta \Delta\beta + \frac{1}{2} S_{\omega\omega} \Delta\omega^2 + S_{\omega\beta} \Delta\omega \Delta\beta + \frac{1}{2} S_{\beta\beta} \Delta\beta^2 \quad (3.9)$$

Тогда I_+ запишется как

$$I_+ \approx \frac{1}{2\pi^2} D_{m,s} \cdot \hat{\mathbf{q}}_{m,s} \cdot e^{iS_s} \cdot e^{i\beta_s z - i\omega_s t} \cdot I, \quad (3.10)$$

$$I = \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty d\beta \times \left[\exp \left(\frac{i}{2} S_{\omega\omega} \Delta\omega^2 + i S_{\omega\beta} \Delta\omega \Delta\beta + \frac{i}{2} S_{\beta\beta} \Delta\beta^2 + i \Delta\beta (z - z_s) - i \Delta\omega (t - t_s) \right) \right]$$

Аналогичный интеграл взят в [185] аналитически с помощью замены переменных, предложенной в [186; 187]. В настоящей работе тот же аналитический результат получен путём приведения квадратичной формы относительно $\Delta\omega$ и $\Delta\beta$ в показателе экспоненты к диагональному виду. Результат удаётся значительно упростить и привести к виду:

$$I = \frac{2\pi}{i\sqrt{S_{\beta\beta}S_{\omega\omega} - S_{\omega\beta}^2}} \cdot \exp \left[\frac{1}{2i} \left(\frac{S_{\beta\beta}(t - t_s)^2 + 2S_{\omega\beta}(t - t_s)(z - z_s) + S_{\omega\omega}(z - z_s)^2}{S_{\omega\omega}S_{\beta\beta} - S_{\omega\beta}^2} \right) \right] \quad (3.11)$$

В силу симметрии, интеграл I_- получается из интеграла I_+ подстановкой $\beta \rightarrow -\beta$, $z_s \rightarrow -z_s$.

Как будет продемонстрировано далее, в некоторых случаях выбранную параболическую аппроксимацию следует уточнить, исходя из физических соображений.

3.1.3. Замечание о волновом пакете второй моды

В соответствии с (3.5), трёхмерный волновой пакет первой моды пограничного слоя, возбуждённый на линии $z = 0$, состоит из двух цугов волн, симметричных относительно плоскости $z = 0$. В волновом пакете второй моды пограничного слоя преобладают плоские волны, у которых $\beta_s = 0$ и $S_{\omega\beta} = 0$. При этом седловая точка вырождается по β , а вместе с ней в (3.5) два интеграла вырождаются в один: $\Psi_m(t, x, y, z) = \Re[I_+]$. В этом случае максимум возмущения распространяется вдоль линии $z_s = 0$ и седловая точка $\omega_s > 0$ определяется единственным условием

$\partial S/\partial\omega = t_s$. Простая подстановка указанных значений в (3.8) позволяет выписать решение метода перевала для волнового пакета второй моды

$$I_+ \approx \frac{D_{m,s} \hat{\mathbf{q}}_{m,s} \cdot \exp(iS(x, \omega_s, 0) - i\omega_s t)}{i\pi \sqrt{|S_{\omega\omega} S_{\beta\beta}|} \cdot \exp(i \arg(\sqrt{S_{\omega\omega} S_{\beta\beta}}))}, \quad (3.12)$$

где регулярная ветвь корневой функции выбрана явным образом [188]. Параболическая аппроксимация даст

$$I_+ \approx \frac{D_{m,s} \hat{\mathbf{q}}_{m,s} e^{iS_s - i\omega_s t}}{i\pi \sqrt{|S_{\omega\omega} S_{\beta\beta}|} \cdot \exp(i \arg(\sqrt{S_{\omega\omega} S_{\beta\beta}}))} \cdot \exp \left[\frac{1}{2i} \left(\frac{(t - t_s)^2}{S_{\omega\omega}} + \frac{z^2}{S_{\beta\beta}} \right) \right] \quad (3.13)$$

3.1.4. Нестационарное асимптотическое граничное условие

Приближённые условия (3.10), (3.11), (3.13) описывают асимптотическое поведение волнового пакета Ψ_m в дальнем поле. С их помощью легко сформулировать нестационарное граничное условие для прямого численного моделирования, с помощью которого станет возможно порождать волновые пакеты в заданном сечении $x = \text{const}$, используя расширенную информацию из анализа в рамках линейной теории устойчивости — величины $S_{\omega\omega}$, $S_{\beta\beta}$, $S_{\omega\beta}$, ω_s , β_s , $\hat{\mathbf{q}}_{m,s}$. Для этого будем игнорировать общий аргумент комплекснозначных интегралов, который задаёт лишь общий сдвиг фазы возмущений в пакете. Также выделим скалярный параметр ε , который будет задавать амплитуду порождаемого волнового пакета, а собственные функции нормируем на возмущение давления на стенке:

$$\hat{\mathbf{A}}_s = \frac{\hat{\mathbf{q}}_{m,s}}{|\hat{p}_{m,s}|_{Y=0}}.$$

Тогда в случае возбуждения волнового пакета при $t = t_s$, $z = 0$ граничное условие будет иметь вид

$$\Psi^{2D}(t, x_{in}, y, z) = \varepsilon \cdot \Re \left[\hat{\mathbf{A}}_s \exp \left(\frac{1}{2i} \left(\frac{\Delta t^2}{S_{\omega\omega}} + \frac{z^2}{S_{\beta\beta}} \right) - i\omega_s t \right) \right], \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} & \Psi_{\pm}^{3D}(t, x_{in}, y, z) = \\ & = \varepsilon \cdot \Re \left[\hat{\mathbf{A}}_s \exp \left(\frac{1}{2i} \left(\frac{S_{\beta\beta} \Delta t^2 + 2S_{\omega\beta} \Delta t \Delta z_{\mp} + S_{\omega\omega} \Delta z_{\mp}^2}{S_{\omega\omega} S_{\beta\beta} - S_{\omega\beta}^2} \right) \pm i\beta_s z - i\omega_s t \right) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $\Delta t = t - t_s$, $\Delta z_{\mp} = z \mp z_s$.

Условия можно использовать для порождения волновых поездов, полагая $S_{\omega\omega} \rightarrow \infty$.

3.2. Волновой пакет второй моды

В данном разделе обсуждается применимость предложенного нестационарного граничного условия на базе линейной теории устойчивости (теоретическая часть дана в разделе 3), а также проводится верификация численного метода на примере развития волнового пакета и турбулентного пятна в пограничном слое на плоской пластине. Параметры невозмущённого набегающего потока даны в табл. 3.1.

Анализ устойчивости проведён для автомодельного решения уравнений сжимаемого безградиентного пограничного слоя. Профили пограничного слоя имеют вид $U(\eta)$, $T(\eta)$, где $\eta = y(Re_{e,L}/x)^{0.5}$, представленный на рис. 3.1. Автомодельное решение хорошо согласуется с профилями, полученными путём решения полных уравнений Навье — Стокса. Это решение также показывает, что параметры течения на внешней границе пограничного слоя близки к соответствующим величинам в набегающем потоке: $Re_{e,L}(x) - Re_{\infty,L} < 0.0076 Re_{\infty,L}$, $T_e(x) < 1.0085$ при $x > 1$.

Будем рассматривать волновые пакеты второй неустойчивой моды в двух сечениях $x = x_{in}$, соответствующих небольшому (случай LN) и умеренным (случай HN) значениям N -фактора. Результаты расчёта по линейной теории устойчивости для этих сечений даны в табл. 3.2. В случае LN величина N -фактора мала, поэтому надёжность асимптотической оценки интеграла (3.4) вызывает сомнения.

Таблица 3.1 — Параметры набегающего потока

M_{∞}	$Re_{\infty,L}$	T_{∞}^*	T_w/T_{∞}	T_w/T_0
6	10^6	300 K	1	≈ 0.12

Таблица 3.2 — Параметры возмущения

Аббр.	x_{in}	$N_s = -S_{s,i}$	ω_s	β_s	$S_{\omega\omega} \times 10^3$	$S_{\beta\beta} \times 10^3$
LN	1.11	2.36	229.77	0	$11.836 + 6.541i$	$-0.762 + 9.876i$
HN	3.57	5.02	129.87	0	$81.546 + 36.815i$	$-9.565 + 54.317i$

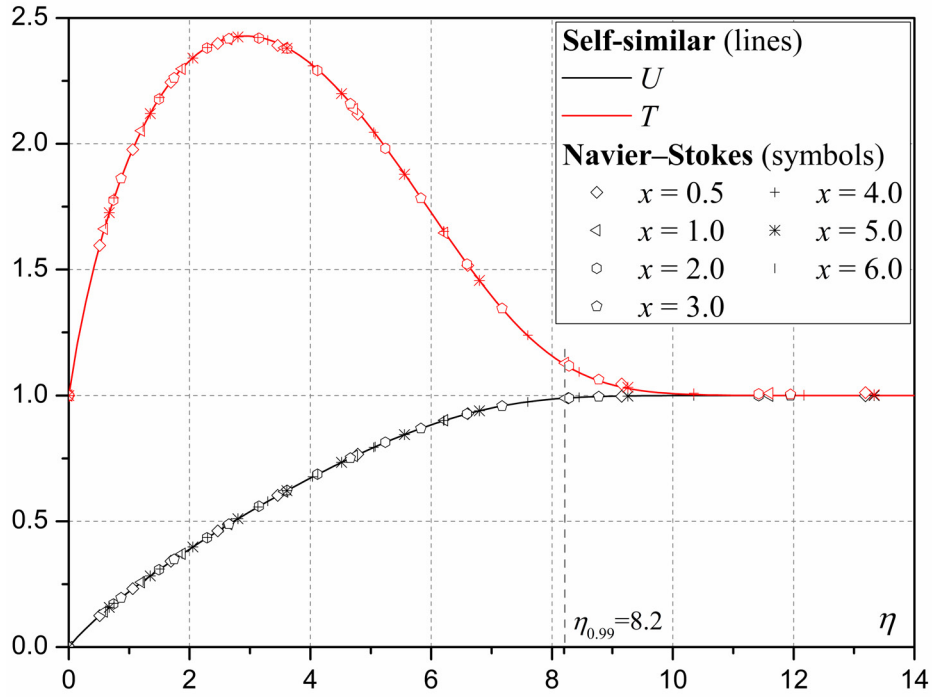


Рисунок 3.1 — Пограничный слой на плоской пластине в автомодельных переменных $U(\eta)$, $T(\eta)$. Self-similar — автомодельное решение; Navier — Stokes — ПЧМ

3.2.1. Свойства асимптотической формы волнового пакета

Из асимптотической формы волнового пакета (3.14) следует, что пакет имеет несущую частоту ω_s и гауссову форму по времени и по z . По мере продвижения вниз по потоку дисперсионные множители $S_{\omega\omega}$ и $S_{\beta\beta}$ растут, а пакет сужается в частотно-волновом пространстве (ω, β) и расширяется в физическом пространстве (t, z) .

Наличие действительной части у $S_{\omega\omega}$ приводит к небольшой частотной разбежке между передним и задним временными фронтами пакета. Эту разбежку можно оценить, если переписать временную часть показателя экспоненты (3.14) в виде

$$-\frac{(t - t_s)^2}{2|S_{\omega\omega}|^2/S_{\omega\omega,i}} - i(t - t_s) \cdot (\omega_s + \Delta\omega(t)),$$

$$\Delta\omega(t) = \frac{t - t_s}{2|S_{\omega\omega}|^2/S_{\omega\omega,r}}.$$

Амплитуда колебаний пакета уменьшается в $e^{-2} \approx 7.3$ раза при $t = t_s \pm 2|S_{\omega\omega}|/\sqrt{S_{\omega\omega,i}}$. Принимая такие времена за условные границы пакета, получим

приращение частоты по мере прохождения пакета через сечение $x = x_{in}$:

$$\Delta\omega_{res} = \Delta\omega \left(t_s + 2 \frac{|S_{\omega\omega}|}{\sqrt{S_{\omega\omega,i}}} \right) - \Delta\omega \left(t_s - 2 \frac{|S_{\omega\omega}|}{\sqrt{S_{\omega\omega,i}}} \right) = 2 \frac{S_{\omega\omega,r}}{|S_{\omega\omega}| \sqrt{S_{\omega\omega,i}}}.$$

В обоих рассматриваемых случаях частота незначительно увеличивается: $\Delta\omega_{res,LN} \approx 0.7$, $\Delta\omega_{res,HN} \approx 0.3$. Если принять фазовую скорость волн $c = \omega/\alpha_r$ слабо зависящей от частоты, то увеличение частоты будет соответствовать увеличению волнового числа (уменьшению длины несущей волны). Поэтому передний фронт пакета в дальнем поле формируется длинноволновой частью спектра, а его задний фронт — коротковолновой. Такая временная форма волнового пакета качественно представлена на рис. 3.2.

Рассмотрим вид действительных и мнимых частей нормированных² собственных функций $\hat{\mathbf{A}}_s(x_{in}, y)$ волнового пакета HN (рис. 3.3). Вектор $\hat{\mathbf{A}}_s$ определяется с точностью до сдвига фазы, и в силу двумерности волнового пакета $w'(t) \equiv 0$. Форма собственных функций характерна для второй неустойчивой моды. Пульсации продольной u' и нормальной v' компонент вектора скорости достигают максимума глубоко внутри пограничного слоя (при $y \approx 0.0025$) и далее затухают по мере приближения к его границе или к стенке. Пульсации температуры T' заметно осциллируют в области критического слоя, который располагается вблизи верхней границы пограничного слоя. Возле стенки формируется слой Стокса, толщина которого имеет порядок $\delta_s^* \sim (\nu_w^*/\omega^*)^{0.5}$, или в безразмерной форме $\delta_s \sim (\omega Re_{\infty,L})^{-0.5}$,

²Нормировка проводится на величину $|\hat{p}_w| \equiv |\hat{p}(0)|$, так что $(\hat{\mathbf{A}}_s)_{\hat{p}} = 1$ при $y = 0$.

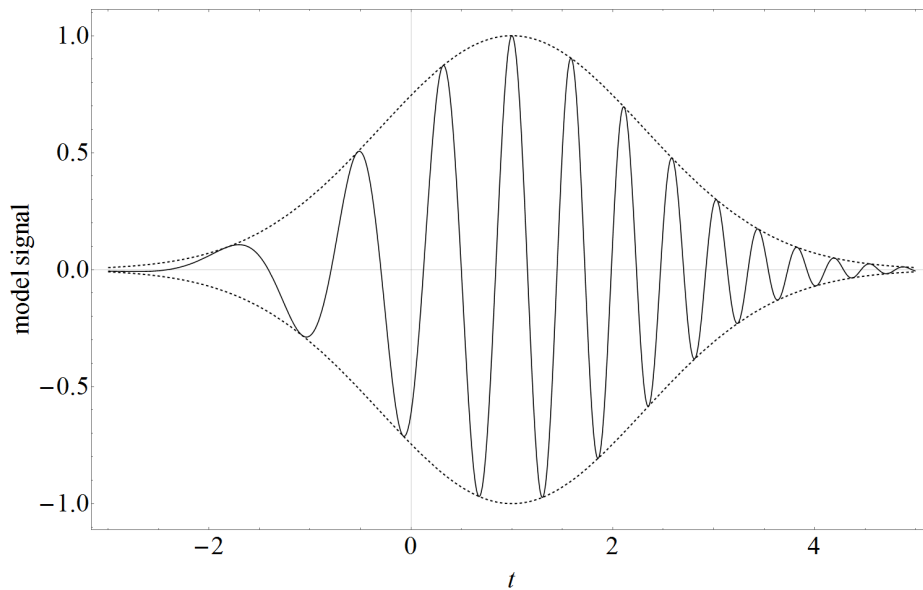


Рисунок 3.2 — Временная форма волнового пакета и её огибающая для модельных параметров: $\omega_s = 10$, $S_{\omega\omega} = 0.4 + 0.1i$, $t_s = 1$

и во многих случаях оказывается сравнимой с толщиной слоя Кнудсена. Как показано в [189], слой Стокса практически не влияет на собственные значения второй моды, поэтому в прямом численном моделировании не требуется подробно разрешать его на сетке. Результаты предварительных расчётов, не обсуждаемые здесь, подтверждают это. Пульсация давления p' ведёт себя наиболее плавно среди всех компонентов вектор-функции $\hat{\mathbf{A}}_s$. По следу p' на обтекаемой поверхности можно судить о форме волнового пакета, его затухании или усилении.

3.2.2. Постановка задачи

Невозмущённое поле давления, показанное на рис. 3.4, характерно для обтекания плоской пластины под нулевым углом атаки: вблизи поверхности пластины $y = 0$ давление постоянно, а вблизи носика при $x = 0$ формируется головной скачок уплотнения. По мере продвижения вниз по потоку он вырождается в волну Маха.

Параметры численного моделирования возмущённых течений в подобласти резюмированы в табл. 3.3. При $x > L_x$ имеется буферная зона с расширяющимися ячейками. Расчёт возмущённого течения проводится в прямоугольной подобласти (белая линия на рис. 3.4), начало которой совпадает с сечением ввода возмущений $x = x_{in}$, а высота $y = y_{mx}$ при $x < L_x$. Трёхмерная сетка получается вытягиванием двумерной сетки в направлении z в отрезке $z \in [-z_{mx}, z_{mx}]$ с равномерным шагом dz . На границах $z = \pm z_{mx}$ ставится условие симметрии, а предположение о симметрии течения относительно $z = 0$ не используется — волновой пакет и его распад в турбулентное пятно моделируется полностью. Расчётные сетки размерности $N_x \times N_y \times N_z$ сгущены к поверхности таким образом, что на входной границе x_{in} поперёк пограничного слоя оказывается $N_\delta(x_{in})$ сеточных плоскостей.

На границе x_{in} накладывается нестационарное граничное условие (3.14). Нестационарный расчёт ведётся с постоянным шагом по времени dt до тех пор, пока максимум возмущения не достигнет передней границы буферной зоны $x = L_x$. В этот момент волновой пакет уже отошёл от сечения $x = x_{in}$ на некоторое расстояние, достаточное для анализа спектральных характеристик сигнала.

Продольное сеточное разрешение возмущений можно оценить, приняв фазовую скорость волн второй моды равной $c \approx 0.9$: $N_{x,\lambda} = c \cdot 2\pi/(\omega_s dx)$. Исходя из

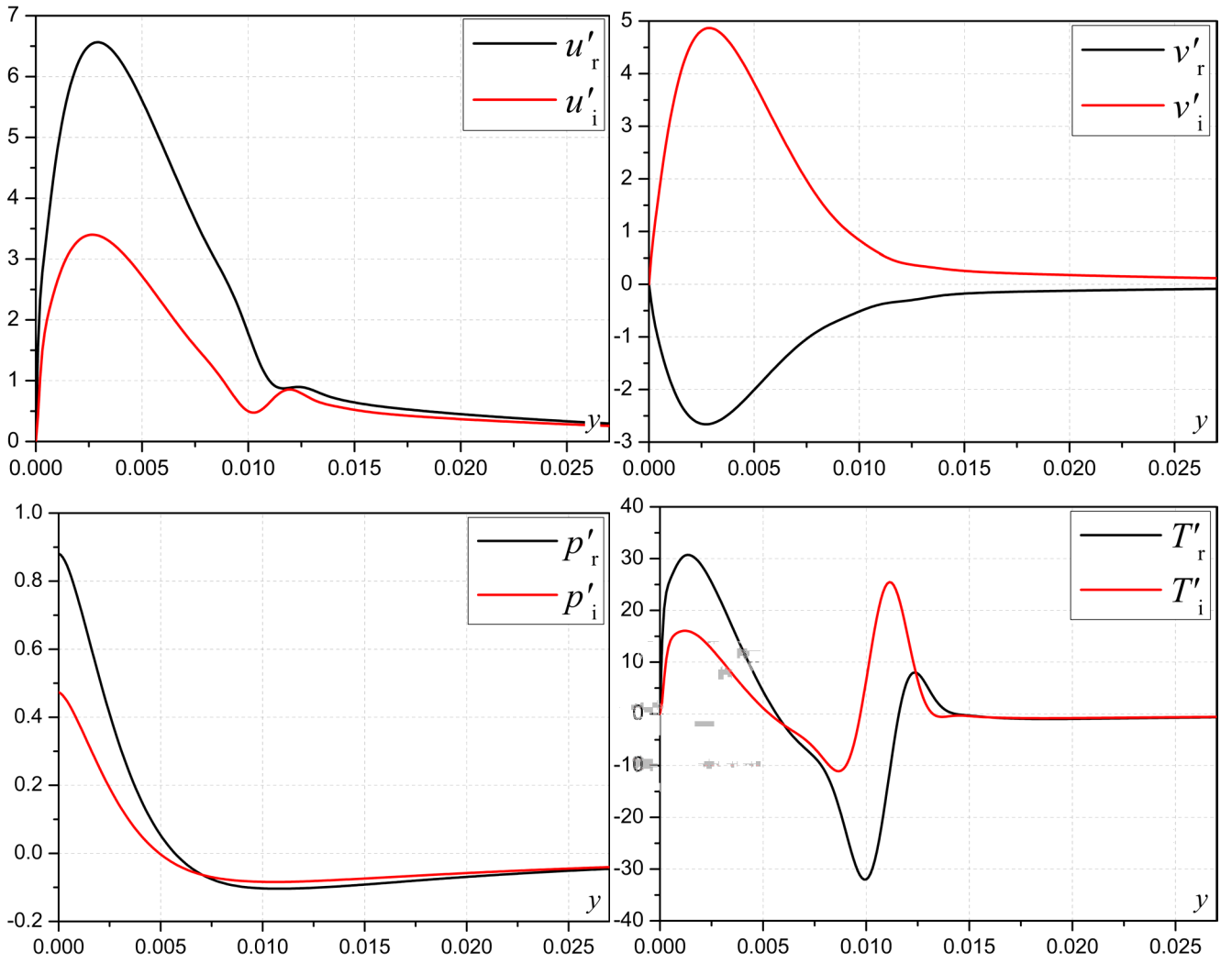


Рисунок 3.3 — Поведение собственных функций $\hat{\mathbf{A}}_s$ внутри пограничного слоя для случая NN

результатов раздела 2.1, $N_{x,\lambda} = 22$ соответствует уменьшению амплитуды монохроматической акустической волны менее 1% на длине волны; а для $N_{x,\lambda} = 48$ — менее 0.26%, что близко к естественной скорости вязкого затухания $\sim 0.11\%$. Временное разрешение возмущения $N_{t,\lambda} = 2\pi/(\omega_s dt)$ достаточно подробное, и связанная с ним численная диссипация мала (см. раздел 2.1).

На исследуемых режимах течения неустойчивость пограничного слоя начинает излучать акустические волны во внешнее течение — наблюдается явление спонтанного излучения звука, которому посвящена глава 4. Чтобы подавить звуковые волны на подходе к верхней границе расчётной подобласти и избежать их переотражения, сетка разрежена по y вблизи этой границы.

Численное моделирование выполнено для двух входных сечений (случаи LN и NN) и трёх амплитуд p'_w горба волнового пакета ε , которые соответствуют 10%, 50% и 100% от p_∞ . Далее детально будут рассмотрены только крайние случаи

Таблица 3.3 — Параметры пространственно-временного разрешения

Аббр.	x_{in}	y_{mx}	z_{mx}	L_x	$\delta_{0.999}(x_{in})$	$N_x \times N_y \times N_z$	$N_\delta(x_{in})$	dx	$N_{x,\lambda}$	dz	dt	$N_{t,\lambda}$	t_s
LN	1.11	0.13	0.075	3.0	0.0104	$1749 \times 185 \times 139$	97	$1.1 \cdot 10^{-3}$	22	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$	68	0.5
HN	3.57	0.15	0.2	6.0	0.0182	$2476 \times 202 \times 200$	130	$1.0 \cdot 10^{-3}$	43	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$	121	1.75

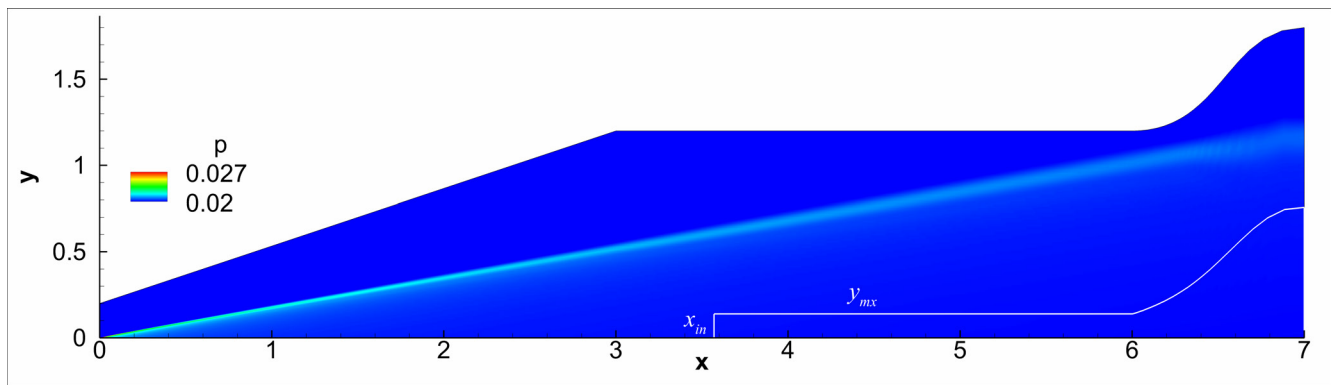


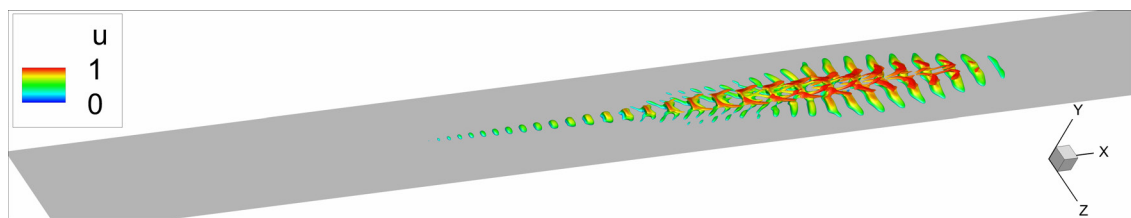
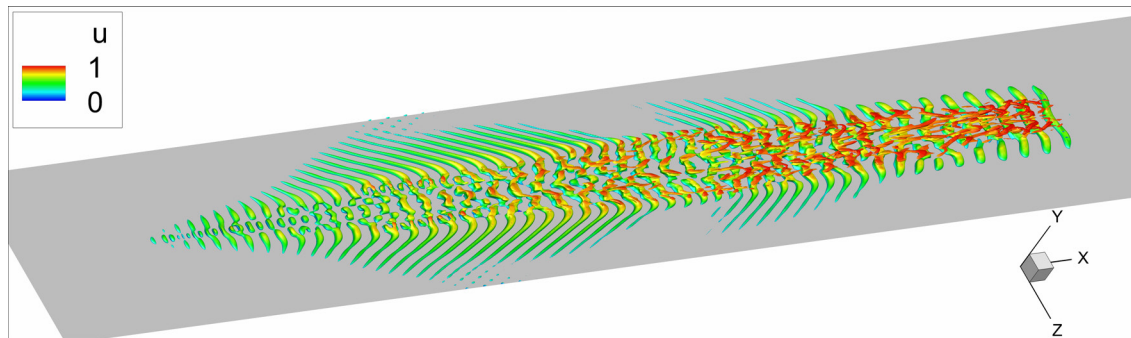
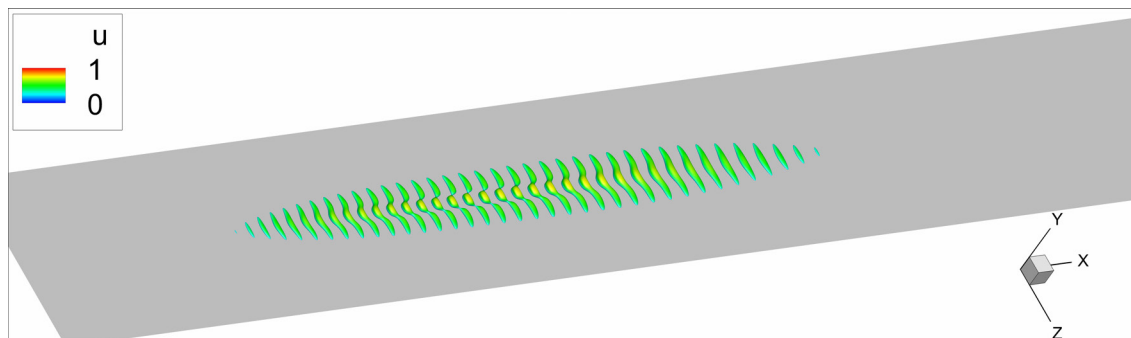
Рисунок 3.4 — Невозмущённое поле течения и структура подобласти для расчёта возмущений в случае HN

10% и 100%, именуемые *слабым* и *сильным* волновыми пакетами, соответственно. Результаты при $\varepsilon = 0.5p_\infty$ аналогичны результатам при $\varepsilon = p_\infty$, и поэтому далее не рассматриваются.

3.2.3. Результаты

Общее представление о структурах, формирующихся из волнового пакета, дают изоповерхности Q -критерия, изображённые на рис. 3.5. Изоповерхности окрашены в соответствии с величиной продольной компоненты скорости, что позволяет оценить их положение внутри пограничного слоя. Пакет LN значительно короче по x и t по сравнению с пакетом HN, что отражается на размере формирующегося турбулентного пятна (рис. 3.5а и 3.5б). Несмотря на распад волнового пакета, его исходная структура, по-видимому, сохраняется на дне пограничного слоя и у краёв, о чём свидетельствует присутствие плоских волн $\beta = 0$, характерных для второй моды. В следствие нелинейного распада волнового пакета появляются наклонные волны, расходящиеся в боковые стороны от ядра возмущения. Слабый волновой пакет (рис. 3.5в) практически не искажается в пределах расчётной области.

Порождаемые волновые пакеты имеют свойственный им вид, а паразитные возмущения от входной границы подобласти не наблюдаются. Однако граничное условие на базе асимптотической формы пакета (3.14) является приближенным, и следует ожидать появления переходной области течения, в которой возмущение подстраивается под течение. Визуализация полей течения не помогает отследить данную область, но спектральный анализ величины p'_w вблизи входной границы

а) Сильный LN пакет при $t = 2.4$, $Q = 30$ б) Сильный HN пакет при $t = 4.0$, $Q = 10$ в) Слабый HN пакет при $t = 4.0$, $Q = 10$ Рисунок 3.5 — Визуализация изоповерхностей Q -критерия в изометрии

показывает, что протяжённость переходной зоны для волновых пакетов малой амплитуды не превосходит двух – трех сеточных ячеек, что значительно меньше длины несущей волны возмущения. В случае сильных возмущений не представляется возможным выделить переходную область, так как поле течения сразу оказывается сильно возмущённым. Тем не менее, при визуализации исходный пакет волн остается невозмущенным даже при больших ε . Данный факт проиллюстрирован на рис. 3.6, где на начальном этапе отчётливо видна двухмерная структура волнового пакета (рис. 3.6а).

При движении вниз по потоку сначала искажается центральная часть пакета (рис. 3.6б), и далее на ней зарождаются мелкомасштабные структуры (рис. 3.6в). В результате, вокруг горба пакета формируется молодое турбулентное пятно, которое всплывает над стенкой и увлекается средним течением по направлению к головной части пакета (рис. 3.6г, д).

Так как применяется численный метод низкого порядка аппроксимации, расчёты ведутся на достаточно подробных сетках. Структура турбулентного пятна качественно согласуется с результатами расчетов [96], где использовался метод высокого порядка (можно сравнить рис. 14 из работы [96], приведённый на рис. 3.7, и рис. 3.6г, д).

Следует отметить, поля течений остаются симметричными относительно плоскости $z = 0$, хотя сечение $z = 0$ является внутренним для расчётной области (при $z = 0$ не накладывается условие симметрии). Поэтому далее визуализация течения будет проводиться только для половины стенки $z \geq 0$ или $z \leq 0$.

3.2.3.1. Волновой пакет LN (случай малого N -фактора)

Несмотря на то, что величина N -фактора для волнового пакета LN невелика (преобладающее возмущение усиливается слабо, в $e^N \approx 11$ раз) и предположения асимптотического анализа нарушаются, асимптотическое граничное условие (3.14) всё же позволяет сформировать неискажённый волновой пакет в пограничном слое. Как показано на рис. 3.8, слабый пакет ($\varepsilon = 0.1p_\infty$) практически не проявляет признаков нелинейного взаимодействия гармоник. Он движется вниз по течению и быстро затухает, сохраняя исходную форму. В пределах расчётной области его поведение качественно не меняется.

Сильный пакет ($\varepsilon = p_\infty$) развивается принципиально иначе. Пока горб пакета не вышел из входного сечения $x = x_{in}$, пакет эволюционирует линейно. Затем (рис. 3.8а) на линии симметрии возникают продольные искажения (перетяжки) из-за того, что движение в плоскости симметрии пакета тормозится по отношению к его периферии. Далее горб пакета распадается на мелкомасштабные структуры, и появляются следы от наклонных волн (рис. 3.8б). Однако эти возмущения быстро затухают, и формируется новый горб, узкий по z (рис. 3.8в), который нарастает вниз по потоку (рис. 3.8в, г) и на котором образуется молодое турбулентное пятно (рис. 3.5а). Для сравнения на рис. 3.7 приведена иллюстрация турбулентного пятна, полученного в расчётах [96], где также наблюдаются отмеченные особенности при формировании пятна.

Рассмотрим результаты спектрального анализа для сильного волнового пакета LN, представленные на рис. 3.9 в сечениях $x \geq 1.3$, сквозь которые возмущение

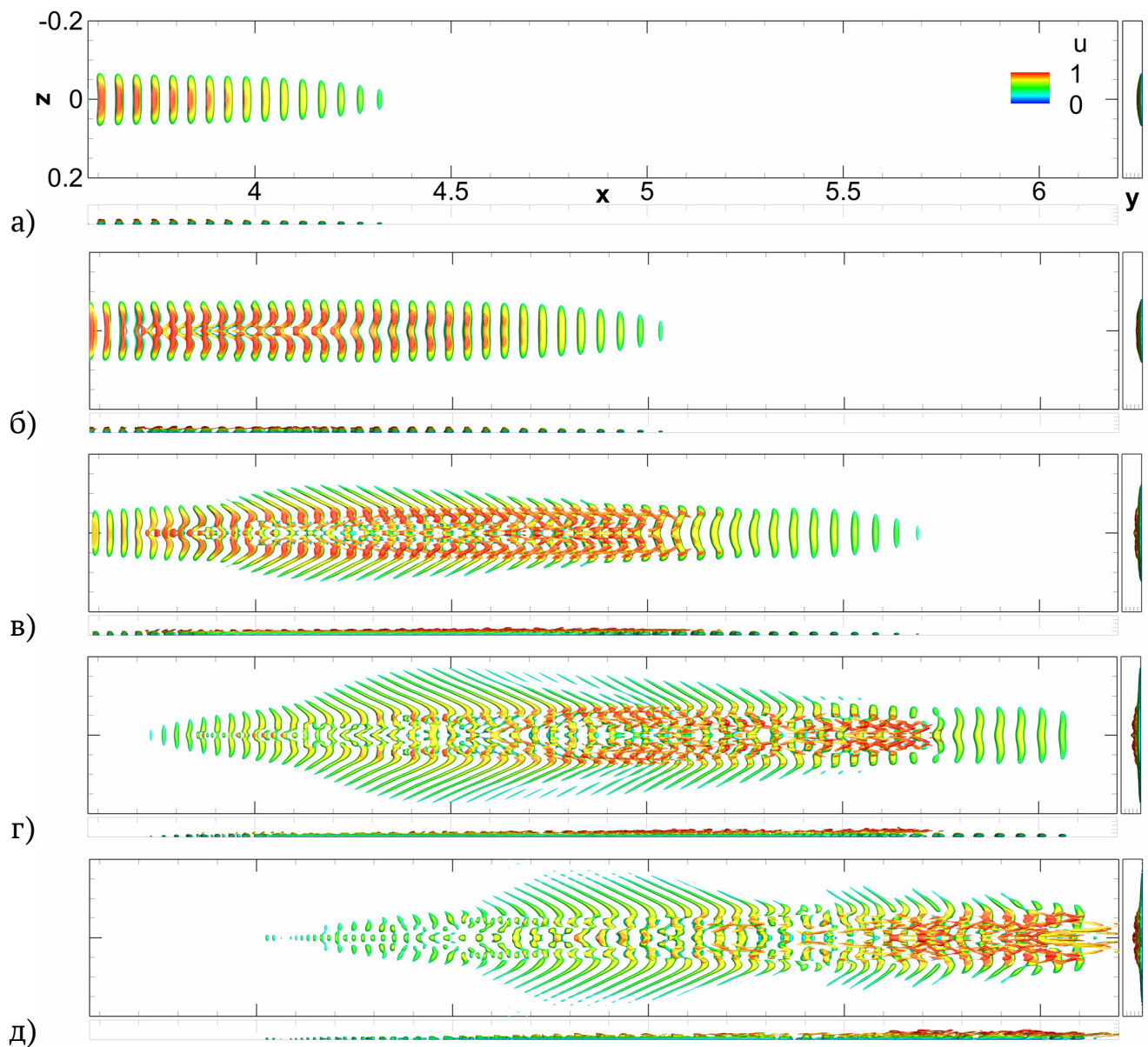


Рисунок 3.6 — Вид сверху, сбоку и спереди на изоповерхности Q -критерия в последовательные моменты времени: а-д — $t = 1.2; 2.0; 2.8; 3.6; 4.4$

прошло полностью и в которых нелинейное искажение исходного возмущения уже является значительным. Данные спектры качественно согласуются с результатами расчетов [190] обтекания острого кругового конуса при $M_e = 5.32$, где рассматривалось возмущение со схожими значениями N -фактора. Из рис. 3.10 видно, что в обоих случаях присутствуют спектральные пики на центральной частоте возмущения в широком диапазоне волновых чисел β , и относительно слабые пики на кратных частотах и нулевой частоте. Это может свидетельствовать о том, что сценарии фундаментального (К-тип) и наклонного резонанса могут быть основными механизмами нелинейного распада [190].

Следует отметить, что в работе [191] проведено ПЧМ ламинарно-турбулентного перехода в пограничных слоях на плоской пластине и остром конусе с полууглом

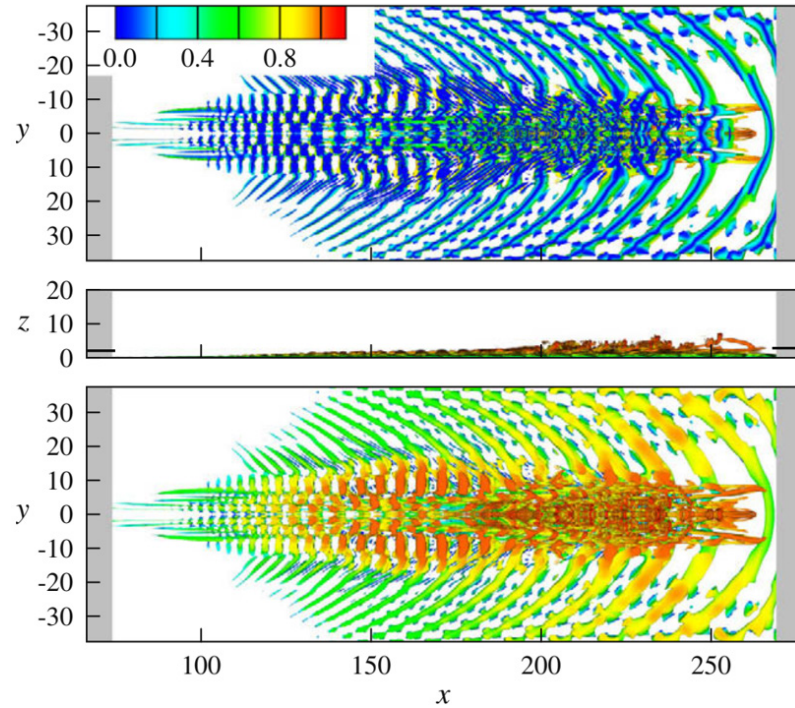


Рисунок 3.7 — Молодое турбулентное пятно на охлаждаемой поверхности, $T_w = T_\infty$, приведённое на рис. 14 в работе [96]

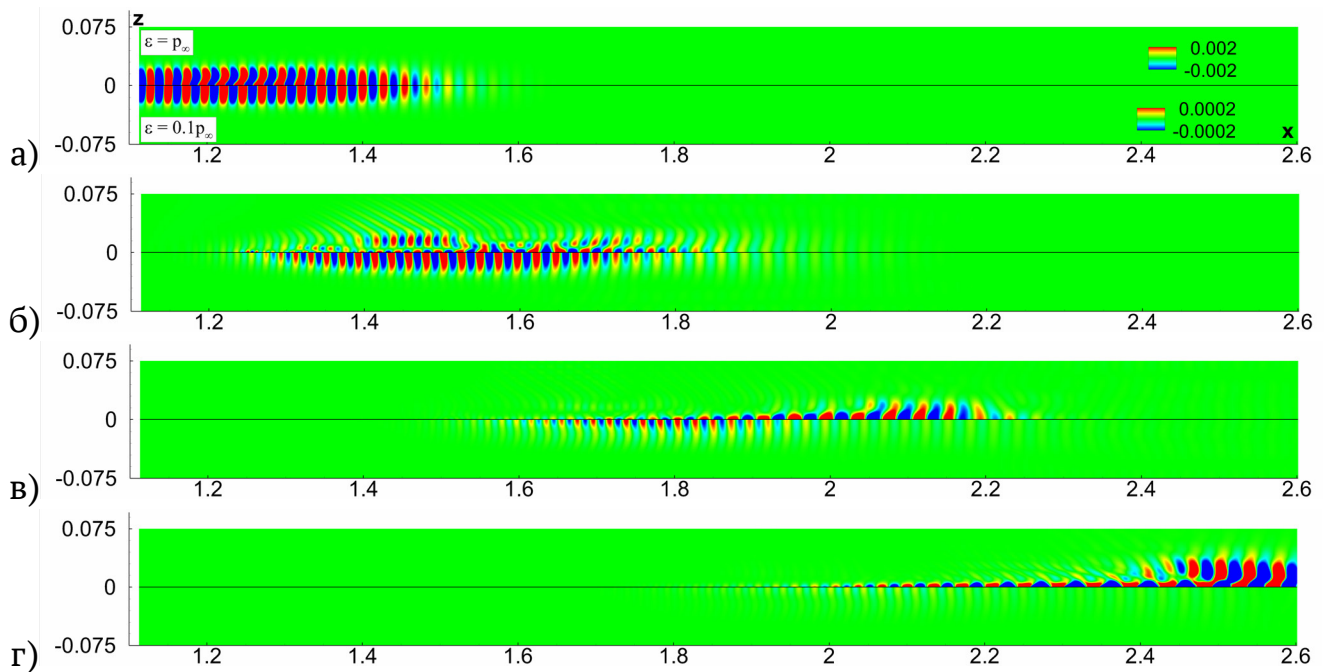


Рисунок 3.8 — Распределение пульсаций давления на стенке, p'_w для слабого (снизу) и сильного (сверху) волнового пакета LN в различные моменты времени: а – г — $t = 0.6; 1.2; 1.8; 2.4$

раскрытия 7° при числе Маха набегающего потока 6.8. Было показано, что механизмы фундаментального и наклонного распадов работают в обоих случаях. Однако, первый более выражен на конусе, а второй — на пластине. Эти результаты относятся к переходу за источником контролируемого вдува-отсоса из щели на поверхности: возмущение периодически во времени и по размаху щели, щель расположена поперёк потока. Хотя в проведённых расчётах рассматриваются волновые пакеты, разумно предположить, что механизм наклонного резонанса также может преобладать при их распаде.

Из рис. 3.9б–г видно, что на нелинейном режиме при продвижении вниз по течению растут низкочастотные компоненты $\omega < \omega_s$. Аналогичная картина наблюдается при линейном развитии волновых пакетов над холодной пластиной на режиме спонтанного излучения акустических волн (см. главу 4), а также слабо-нелинейных пакетов над холодным конусом [190] на режиме, близком к режиму спонтанного излучения. В результате, вдали от входной границы начинает нарастать возмущение с частотой $\omega \approx 145$ и в широком диапазоне волновых чисел β (рис. 3.9г). Именно на нём к концу расчётной области формируется молодое турбулентное пятно (рис. 3.5а).

Таким образом, асимптотическое граничное условие (3.14) позволяет ввести волновой пакет в расчетную область даже в случае относительно малых значений N -фактора ($N \approx 2.5$) на входной границе. При достаточно больших начальных амплитудах волновой пакет быстро эволюционирует в молодое турбулентное пятно совместно через механизм фундаментального резонанса и механизм наклонного распада.

3.2.3.2. Волновой пакет HN (случай большого N -фактора)

В случае HN пакета возмущение, вводимое в расчётную область, соответствует большим значениям N -фактора: на стадии линейного роста в соответствии с теорией устойчивости усиление составило $e^{5.02} \approx 151$. Аналогично случаю LN, слабый волновой пакет HN ($\varepsilon = 0.1p_\infty$) эволюционирует, проявляя минимальные признаки нелинейного взаимодействия (рис. 3.11), которые обнаруживают себя вдали от входной границы (рис. 3.11г). По мере эволюции пакет медленно затухает, сохраняя свою форму.

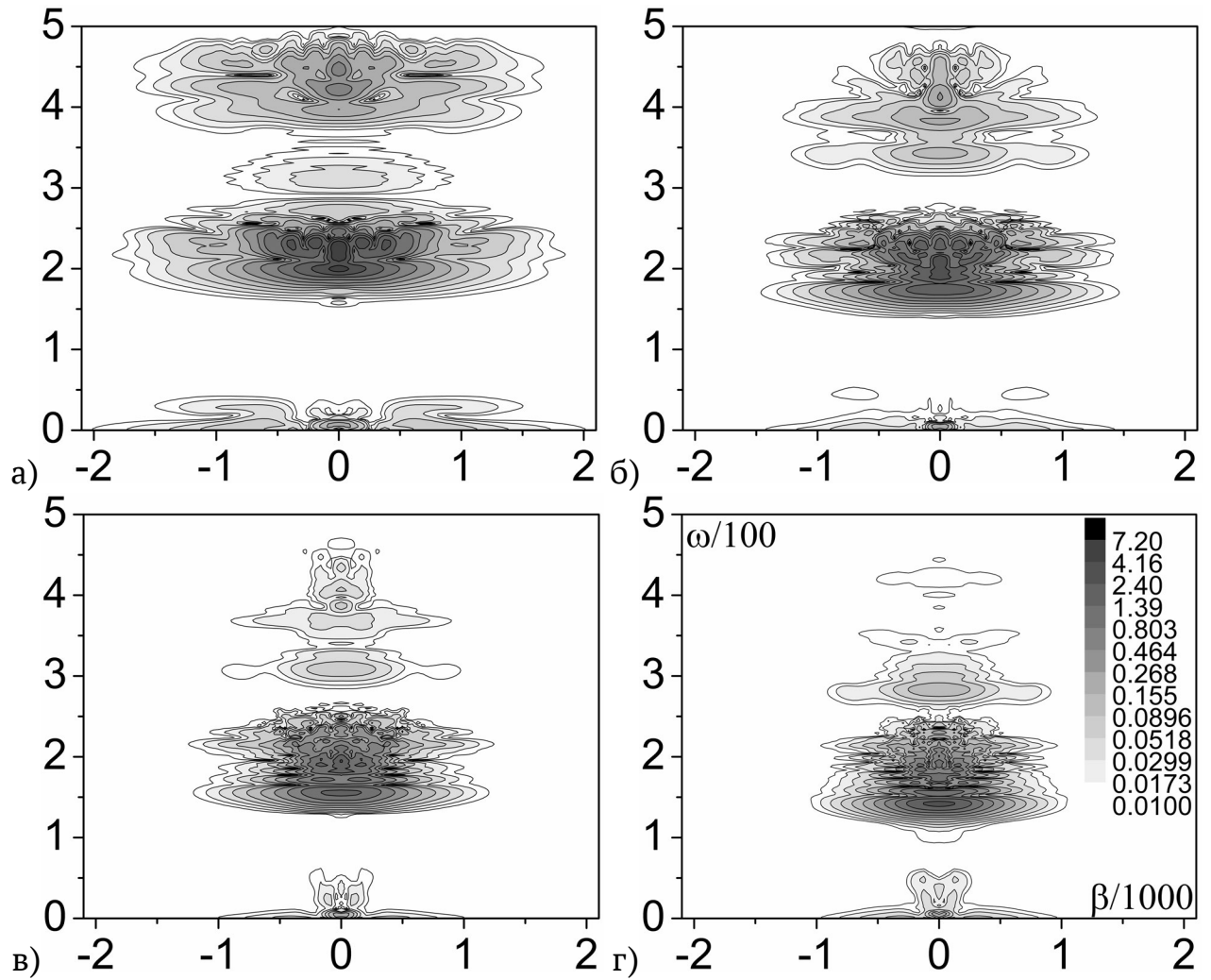


Рисунок 3.9 — Амплитуды двумерного преобразования Фурье от $p'_w(t, z)$ для сильного волнового пакета LN в различных сечениях $x = \text{const}$: а – г — $t = 1.3; 1.5; 1.7; 1.9$

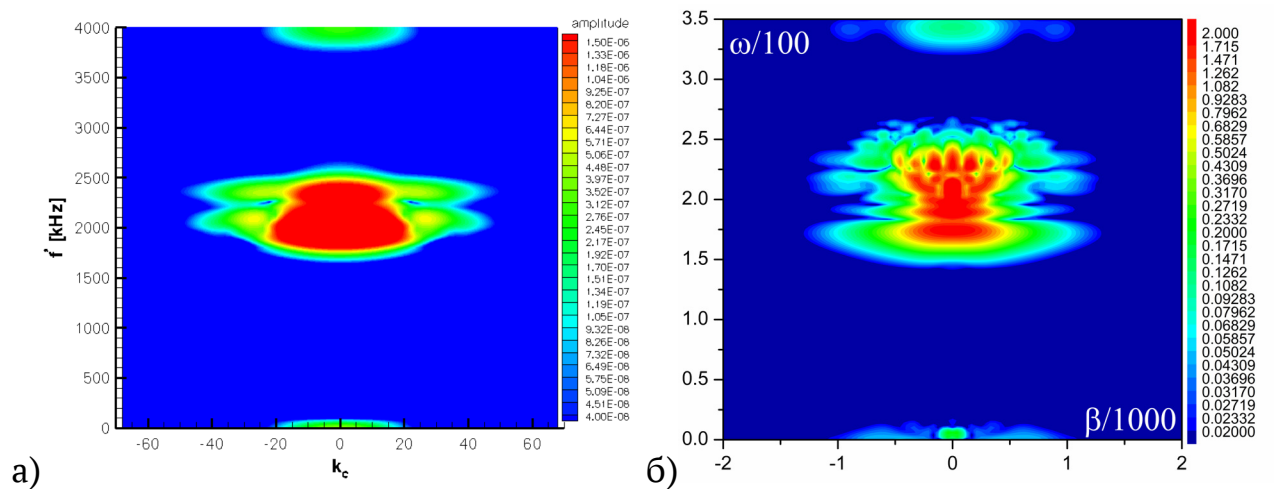


Рисунок 3.10 — Качественное сопоставление амплитудных спектров Фурье: а — нелинейный волновой пакет с усилением $N \approx 2$ (рис. 20 из [190]); б — настоящая работа

Сильный волновой пакет HN ($\varepsilon = p_\infty$) начинает искажаться ещё до выхода его горба через сечение $x = x_{in}$ (рис. 3.11а) — возмущения в плоскости симметрии начинают отставать от тех, что на периферии. Далее следует быстрый распад плоских волн преобладающего возмущения, и выделяются наклонные волны (рис. 3.11б–г). При этом максимум амплитуды возмущения давления на стенке формируется вне плоскости симметрии исходного волнового пакета.

Исходный волновой пакет HN практически втрое шире по t и z , чем пакет LN. Это следствие более узкого спектрального состава, предсказанного линейной теорией устойчивости. Но поведение пакетов HN и LN схоже. Аналогично случаю LN, на рис. 3.12 представлены амплитуды двухмерного преобразования Фурье для $p'_w(t, z)$ для сильного волнового пакета HN. В ранних сечениях $x = const$ пакет демонстрирует линейное поведение с появлением кратных гармоник по частоте (рис. 3.12а). Однако быстро появляются признаки нелинейного взаимодействия (рис. 3.12б), и пакет распадается вниз по потоку, превращаясь в турбулентное пятно (рис. 3.12в, г). Вновь фундаментальный резонанс и наклонный резонанс, по-видимому, являются основными нелинейными механизмами распада для возмущений второй моды. По мере движения вниз по потоку, спектр быстро уширяется по волновому числу β и смещается в область низких частот $\omega < \omega_s$.

Эволюция спектральных характеристик волновых пакетов качественно напоминает результаты [192], где изучен К-режим нелинейного распада на остром конусе при $M_e \approx 5.35$, $T_w/T_e \approx 4.7 \sim T_r/T_e \approx 5.9$ и местном числе Рейнольдса $Re_{e,L}$, которое близко к случаю HN. Поведение возмущений на поверхности (рис. 3.12) также схожа с результатами [192] для волновых пакетов на нелинейном режиме развития. Однако в настоящей работе нарастание стационарных возмущений $\omega = 0$ и заполнение низкочастотной спектральной области происходит заметно слабее, чем в [192]. Это, по-видимому, обусловлено значительной разницей в величине температуры поверхности T_w/T_e .

Таким образом, при умеренных значениях N -фактора асимптотическое условие (3.14) позволяет без каких-либо физических искажений ввести в расчётную область детерминированный пакет неустойчивых волн второй моды на входной границе. При достаточной начальной интенсивности возмущений такой пакет быстро распадается в турбулентное пятно по сценарию К-режима и наклонного распада.

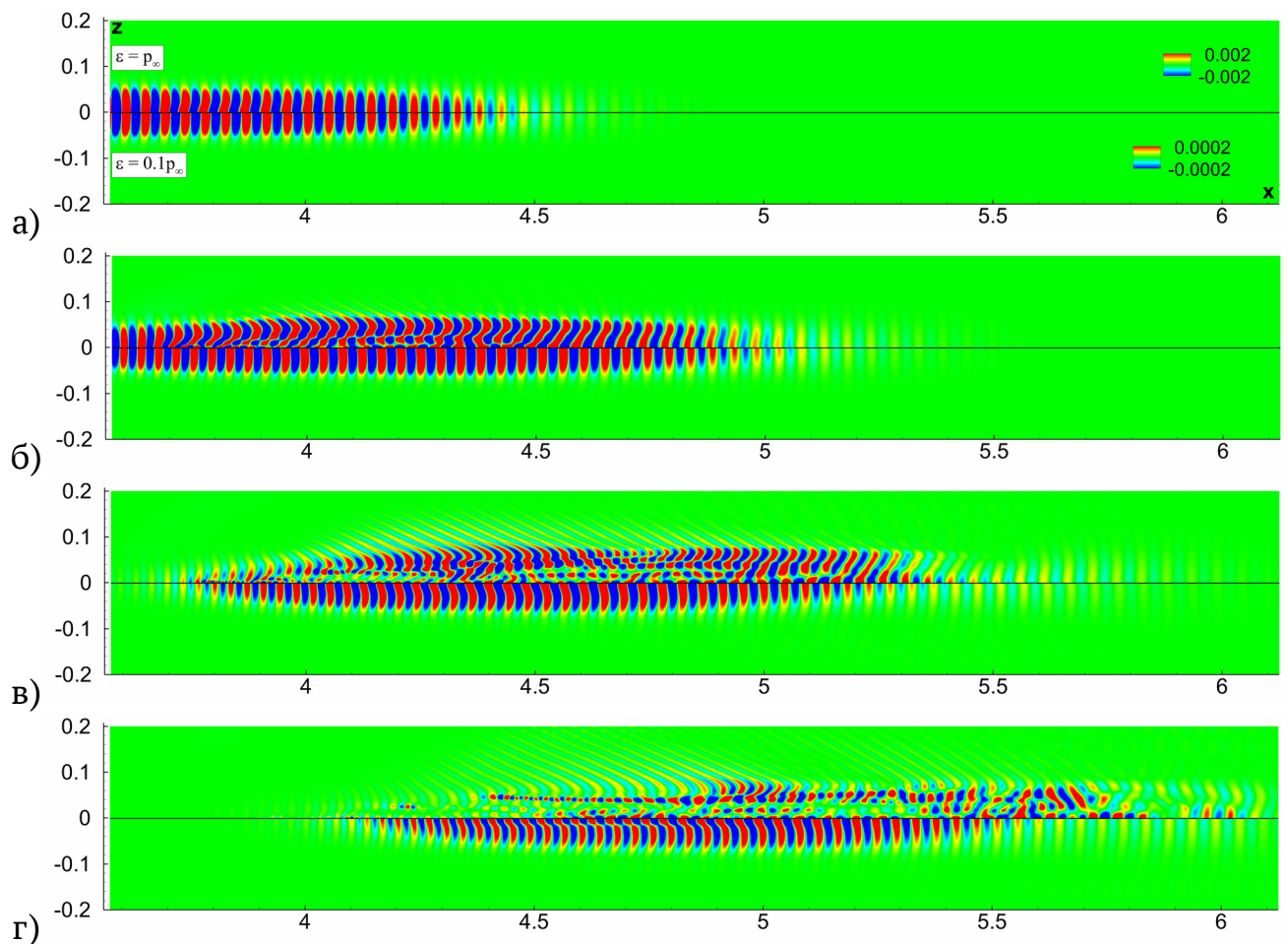


Рисунок 3.11 — Распределение пульсаций давления на стенке, p'_w для слабого (снизу) и сильного (сверху) волнового пакета LN в различные моменты времени: а – г — $t = 0.6; 1.2; 1.8; 2.4$

3.2.4. Выводы

Прямое численное моделирование с использованием предложенных граничных условий подтвердило их применимость и согласованность с полными уравнениями Навье–Стокса в случае преобладания плоских волн второй моды неустойчивости:

- пакет второй моды сохраняет асимптотическую структуру при выходе из левой границы расчетной области;
- при малых амплитудах горба пакета (порядка 10% по возмущению давления на стенке) наблюдается постепенное затухание пакета со слабым проявлением признаков нелинейности;
- при больших амплитудах горба пакета (более 50% по возмущению давления на стенке) пакет быстро распадается по сценарию К-режима или наклонного распада.

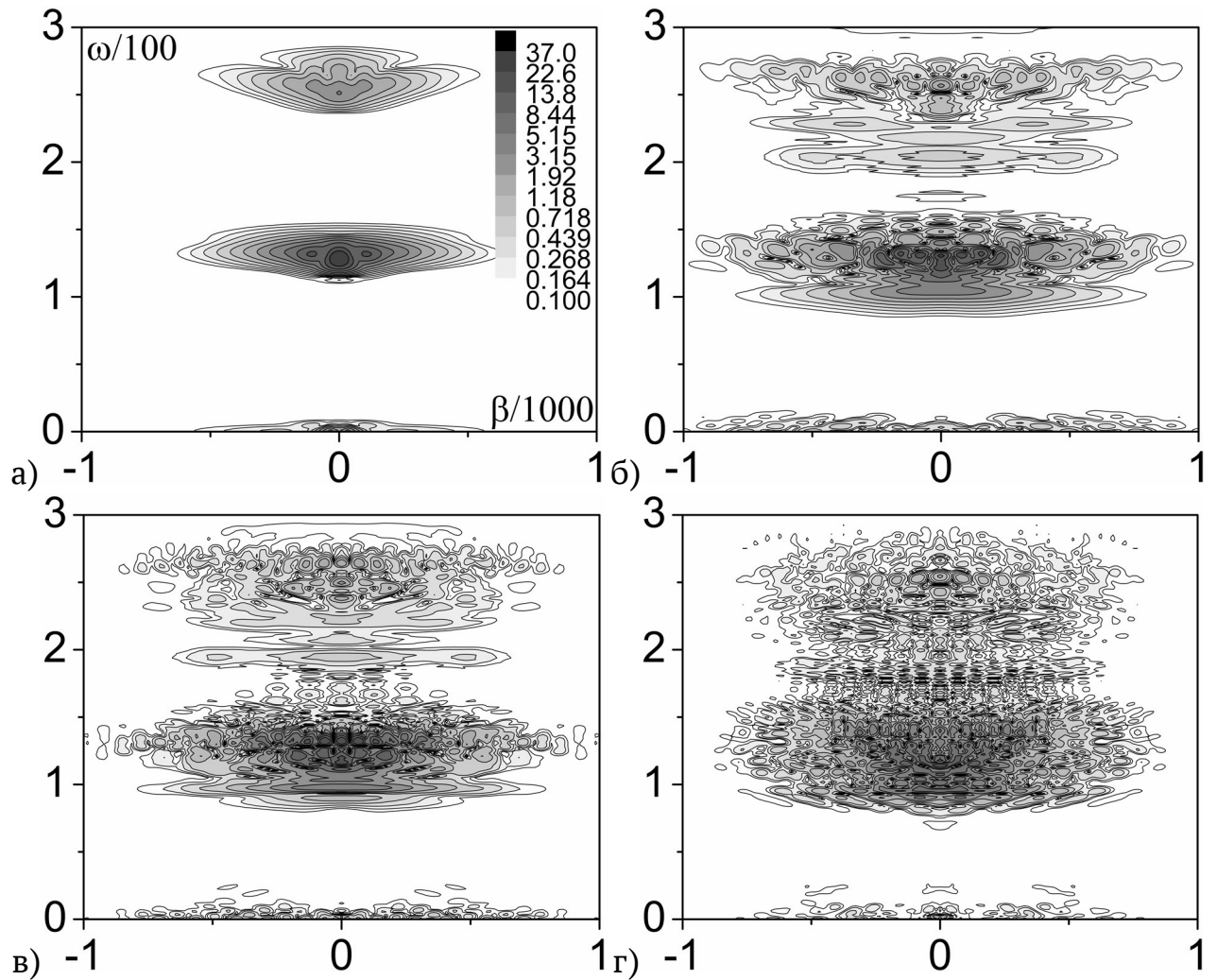


Рисунок 3.12 — Амплитуды двухмерного преобразования Фурье от $p'_w(t, z)$ для сильного волнового пакета LN в различных сечениях $x = \text{const}$: а – г — $t = 1.3; 1.5; 1.7; 1.9$

3.3. Волновой пакет первой моды

Как предсказывает линейная теория устойчивости, в отличие от пакета волн второй моды, волновой пакет первой моды состоит из наклонных волн, которые разбегаются от плоскости симметрии пакета по мере его развития. Таким образом, в дальнем поле от места возбуждения пакета следует ожидать, что он расщепится на два не взаимодействующих друг с другом пакета, каждый с выделенным наклоном волновых фронтов. Основной механизм нелинейного распада возмущений первой моды — резонанс наклонных волн, в котором участвует пара наклонных волн $(\omega_*, \pm\beta_*)$, достигшая критических амплитуд. Но в разбежавшихся изолированных «полупакетах» преобладает лишь одна из двух необходимых гармоник. Возникает

вопрос: будет ли наблюдаться нелинейный распад изолированной группы волн, и если да, то по какому механизму?

Для ответа на поставленные вопросы удобно использовать предложенное нестационарное граничное условие на базе линейной теории устойчивости (3.15). Исследуем его применимость. Для этого рассмотрим сверхзвуковой пограничный слой на плоской пластине при числе Маха 2, в котором преобладает первая неустойчивая мода. Параметры набегающего потока даны в табл. 3.4.

Невозмущённое поле течения получено с помощью схемы WENO-3 для реконструкции конвективных потоковых величин. Возмущения моделируются в подобласти с использованием схемы WENO-5, что позволяет уменьшить требуемое пространственное разрешение и сокращает суммарное время расчётов примерно в 1.4 раза.

Расчёты выполнены в подобласти $x \in [x_{in}, 2.15] \times [0, 0.2] \ni z$ на сетке $411 \times 154 \times 218$, которая обеспечивает 23 точки на длину волны в продольном и в боковом направлениях; высота подобласти составляет не менее $20\delta(x_{in})$. Для валидации предложенного метода также рассматривается задача развития возмущений в обычной постановке, когда возмущения вносятся в пограничный слой с помощью генератора массового расхода типа «вдув — отсос». Для этого расчётная подобласть расширяется вверх по потоку до генератора возмущений и по размаху, $x \in [0.1, 2.15] \times [0, 0.25] \ni z$, а размерность расчётной сетки увеличивается до $1079 \times 154 \times 218$. Границы по z считаются плоскостями симметрии. Невозмущённое поле течения и границы подобластей проиллюстрированы на рис. 3.13

Расчёты по линейной теории устойчивости проведены для автомодельного пограничного слоя в рамках локально-параллельного приближения для точечного источника возмущений с широким спектральным составом. Источник расположен вблизи точки $x_0 \approx 0.1$ — точки потери устойчивости гармоника, преобладающей в сечении x_{in} , в котором применяется предложенное граничное условие. Как показано на рис. 3.14, автомодельный и рассчитанный напрямую пограничные слои хорошо согласуются.

Характеристики устойчивости ($S_{\beta\beta}$, $S_{\omega\beta}$ и т. п.) взяты для гармоника, растущей в сечении x_{in} и обобщены в табл. 3.5. Они соответствуют преобладающей гармо-

Таблица 3.4 — Параметры набегающего потока

M_∞	$Re_{\infty,L}$	T_∞^*	T_w^*	T_w/T_∞	T_w/T_0
2	$1.8 \cdot 10^7$	167 K	$280.1 \text{ K} \approx T_r^*$	1.677	0.932

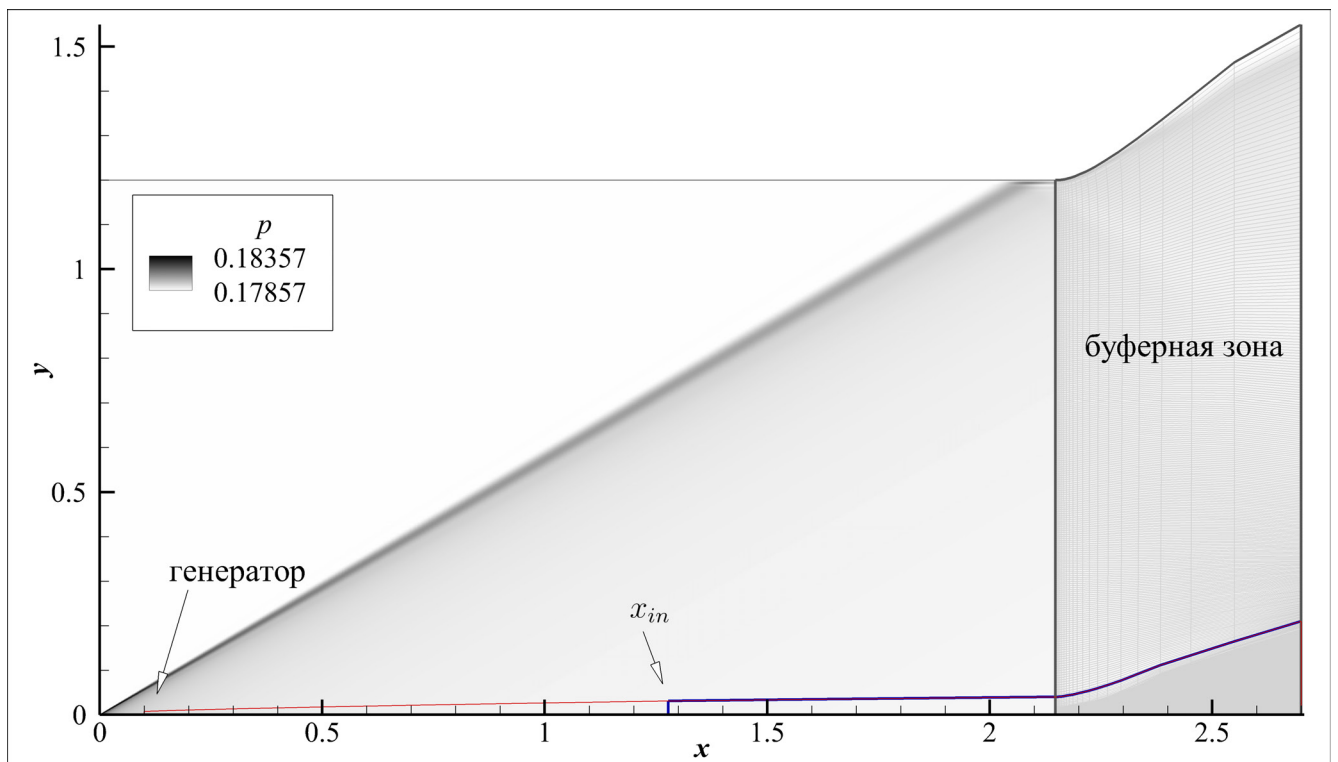


Рисунок 3.13 — Невозмущённое поле давления в полной расчётной области. Границы подобластей для расчёта возмущённых течений выделены цветными линиями

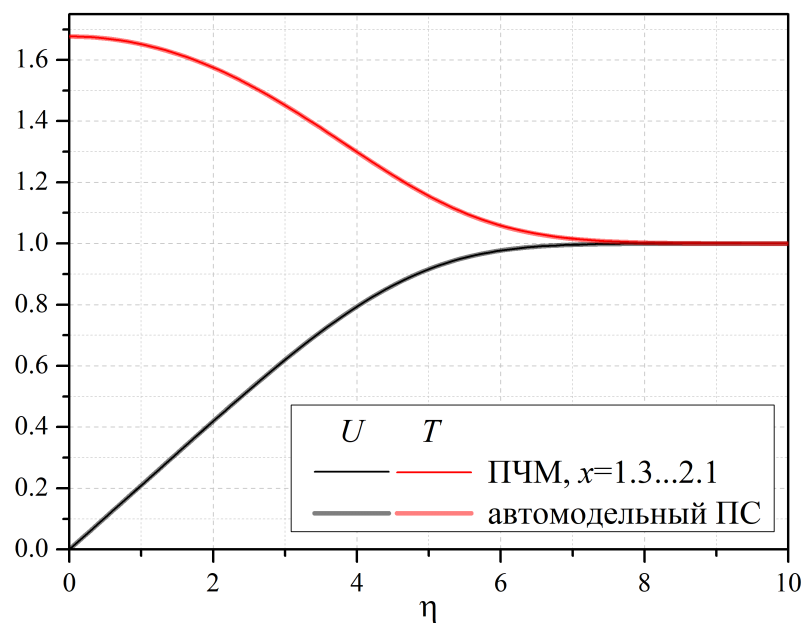


Рисунок 3.14 — Профили пограничного слоя, $\eta = y\sqrt{Re_{\infty,L}/x}$

нике, кроме величины $S_{\omega\omega,i}$, которая увеличилась в 1.7 раз (это увеличение связано с уточнением аппроксимации спектра и обсуждается ниже). Время t_s и боковая координата z_s прохождения горба пакета через входное сечение x_{in} для удобства заданы явно.

3.3.1. Генератор возмущений

Генератор моделируется прямоугольным отверстием, расположенным на поверхности при $x \in [x_s, x_e] \times [z_s, z_e] \ni z$. Чтобы обеспечить широкий спектральный состав возмущений, генератор помещается вблизи точки потери устойчивости, предсказанной с помощью теории, и имеет куполообразную форму:

$$(\rho v)' = \epsilon \cos^3 \left(\pi \frac{x - 0.5(x_e + x_s)}{x_e - x_s} \right) \cos^3 \left(\pi \frac{z - 0.5(z_e + z_s)}{z_e - z_s} \right) \sin(\omega_c t). \quad (3.16)$$

Генератор действует в течение половины периода характерного возмущения — в течение интервала времени $\Delta t = \pi/\omega_c$. Выбранные параметры генератора приведены в табл. 3.6.

Следует отметить, что пространственно-временной спектр генератора, а следовательно, и формируемого начального возмущения выполаживается при уменьшении частоты и волновых чисел, при этом спектральная амплитуда достигает максимума при $\alpha = 0, \beta = 0, \omega = 0$. Параметры генератора подбираются с учётом предсказания ЛТУ и гарантируют, что преобладающая в сечении x_{in} гармоника порождается генератором со спектральной амплитудой, которая близка к максимальной³.

Таким образом, начальные характеристики волнового пакета в достаточной степени соответствуют условиям анализа в рамках линейной теории устойчивости (точечный источник с широким спектром).

³Иллюстрация аналогичного утверждения приведена, напр., в главе 5 (см. подраздел 5.1.2).

Таблица 3.5 — Параметры возмущения (ЛТУ, точечный источник, локально-параллельное приближение)

x_{in}	t_s	z_s	$N_s = -S_{s,i}$	ω_s	β_s	$S_{\omega,r}$	$S_{\beta,r}$	$S_{\omega\omega} \times 10^3$	$S_{\omega\beta} \times 10^4$	$S_{\beta\beta} \times 10^4$
1.27787	1.3	0.085	10.85	66.12	342.46	2.34219	0.0822866	-15.7684 +8.88149i	+10.5685 -5.99006i	-3.47344 +2.33024i

Таблица 3.6 — Параметры генератора возмущений

x_s	x_e	z_s	z_e	ω_c	ϵ
0.10777	0.11777	-0.005	0.005	100	10^{-8}

3.3.2. Уточнение параболической аппроксимации эйконала

В отличие от случая второй моды величина интегрального усиления $N_{\omega\omega} = -S_{\omega\omega,i}$, которую предсказывает линейная теория устойчивости в сечении x_{in} , заметно меняется в зависимости от предположения о возбуждении возмущений и о параллельности пограничного слоя. Вместе с $N_{\omega\omega}$, естественно, меняется и аппроксимация спектра волнового пакета при x_{in} , которая используется для построения нестационарного граничного условия. На рис. 3.15а–г показаны спектры, полученные с помощью четырёх различных подходов. Качественно все они имеют куполообразную форму с главными осями, расположенными под некоторым углом к осям β и ω . Низкочастотная часть спектров заметно различается и для всех случаев оказывается более наполнена, чем в случае пакета от генератора возмущений при $x = x_{in}$ (рис. 3.15д). Вниз по потоку преобладают всё более низкочастотные возмущения. Поэтому избыточное спектральное наполнение низких частот проявляется при $x > x_{in}$ в виде слишком быстрого смещения волнового пакета в низкочастотную область. (Конкретные параметры расчётов по ЛТУ и сравнение с результатами ПЧМ не представлено, чтобы не запутывать изложение.)

Как видно из рис. 3.15д, форма спектра волнового пакета от генератора заметно отклоняется от гауссовой и не является симметричной относительно точки $(\omega_{max}, \beta_{max})$. Поэтому естественно уточнить параболическую аппроксимацию эйконала (3.9) путём добавления членов более высокого порядка по $\Delta\omega$ и $\Delta\beta$. Однако такой подход затрудняет процедуру формирования граничного условия, в частности, аналитическое взятие интеграла (3.4). Вместо этого можно уточнить параболическую огибающую спектра возмущений $N(\omega, \beta)$ напрямую с помощью дополнительной информации из ЛТУ (см. рис. 3.16а):

- в рамках ЛТУ рассчитать зависимость $N(\omega, \beta_{max}(\omega))$ при $\omega < \omega_{max}$ (она также не является симметричной относительно максимума и не может быть аппроксимирована простой параболой);
- определить частоту $\omega_{1/2}$, для которой $N(\omega_{1/2}) = 0.5N_{max} \equiv 0.5N(\omega_{max})$;

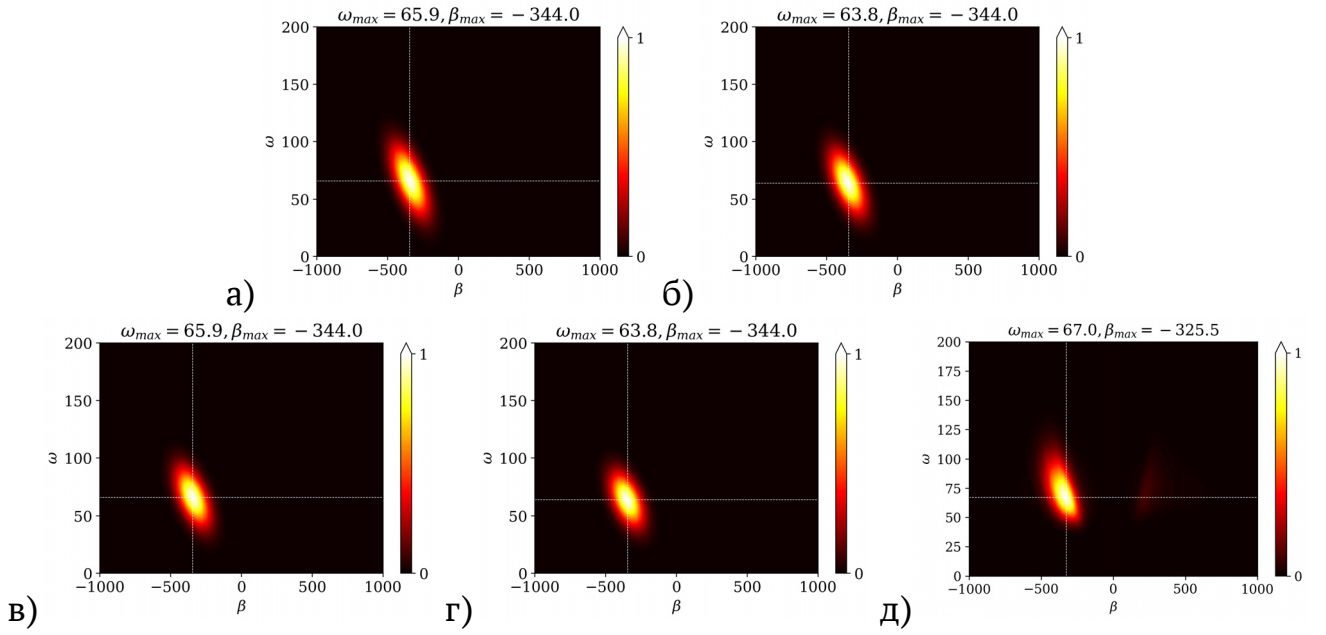


Рисунок 3.15 — Нормированный на максимум спектр возмущений для построенного теоретического сигнала (а–г) и из ПЧМ возмущений от генератора (д) в сечении x_{in} . Устойчивость рассчитана в предположении e^N метода (а, б) или от фиксированной точки (в, г) без учёта непараллельности течения (а, в) или с учётом непараллельности (б, г). Шаг по волновому числу $h_\beta \approx 31$, по частоте $h_\omega \approx 1$

- аппроксимировать низкочастотное плечо кривой $N(\omega)$ с помощью параболы, проходящей через три точки: (ω_{max}, N_{max}) , $(\omega_{1/2}, 0.5N_{max})$, $(2\omega_{max} - \omega_{1/2}, 0.5N_{max})$.

При таком подходе все комплекснозначные производные $S_{\beta\beta}$ и $S_{\omega\beta}$ остаются практически неизменными, а $S_{\omega\omega,i}$ увеличивается примерно в 1.7 раза при практически неизменной величине $S_{\omega\omega,r}$ (итоговые значения даны в табл. 3.5). Изменение формы спектра показано на рис. 3.16б. При уточнении низкочастотного плеча спектра появляется погрешность в аппроксимации его высокочастотного плеча. Однако высокочастотные возмущения затухают вниз по потоку и не оказывают влияния на начало нелинейной фазы, поэтому их точным моделированием допустимо пренебречь.

Описанный выше метод уточнения аппроксимации эйконала (3.9) является универсальным и зависит только от информации, полученной при анализе линейной устойчивости пограничного слоя. Его можно использовать вне зависимости от того, моделируется ли волновой пакет первой или второй моды.

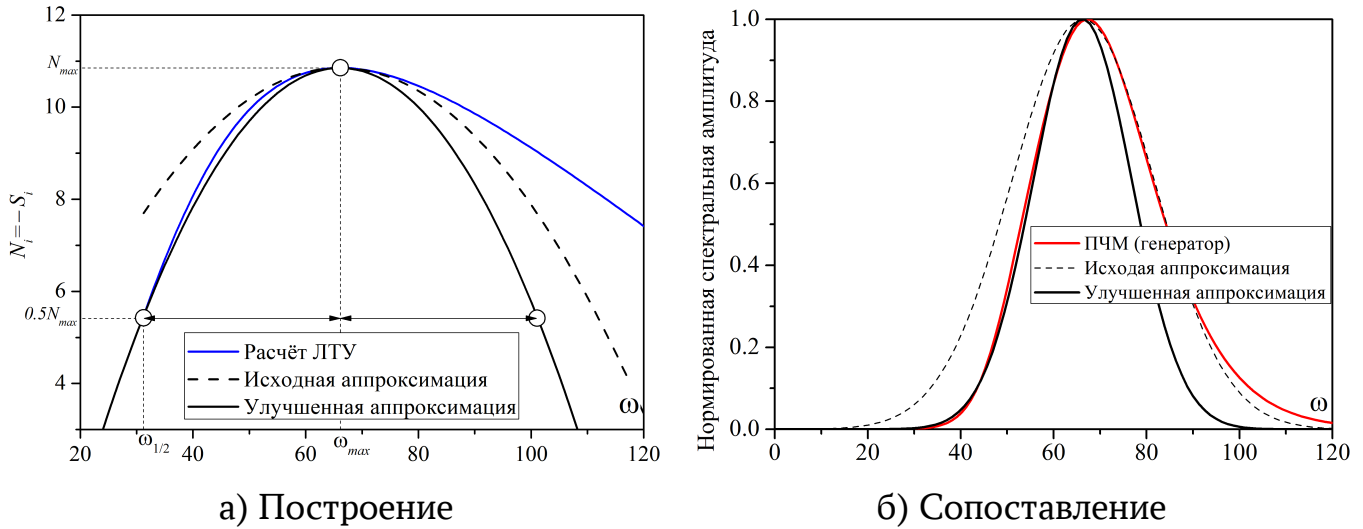


Рисунок 3.16 — Улучшение аппроксимации низкочастотного плеча спектра в рамках ЛТУ и локально-параллельного приближения; $\beta = \beta_{max}$

3.3.3. Линейный режим

При порождении пакета в сечении x_{in} в граничном условии (3.15) используется амплитуда $\varepsilon = 10^{-6}$. Сформированный пакет показан на рис. 3.17а в некоторый момент времени, когда горб пакета оказывается в середине расчётной области по x . Аналогично на рис. 3.17б изображён пакет, развившийся от генератора возмущений. Волновая форма пакетов согласуется удовлетворительно. Вблизи плоскости симметрии наблюдается шахматная картина возмущений давления, отражающая интерференцию пакета с его ответной частью при $z < 0$. Такая картина проявляется слабее в случае пакета от предложенного граничного условия, так как пакет расплывается слабее по сравнению с пакетом от генератора. Следует отметить, что нестационарное граничное условие хорошо согласовано с невозмущённым течением и не приводит к появлению паразитных возмущений при выходе волнового пакета из сечения x_{in} , как и в случае второй неустойчивой моды (см. раздел 3.2).

На рис. 3.18 показаны собственные функции возмущений в сечении x_{in} . Вблизи критического слоя пульсации температуры, продольной и боковой компонент скорости сильно осциллируют, причём амплитуды \hat{T} , \hat{u} , \hat{w} на два порядка превосходят амплитуду \hat{p} . По мере выхода из пограничного слоя возмущения затухают, и при $y > 15\delta$ их можно положить равными нулю с абсолютной погрешностью 10^{-3} . Амплитудные (собственные) функции из ЛТУ хорошо согласуются с результатами численного моделирования волнового пакета от генератора в сечении $x = x_{in}$.

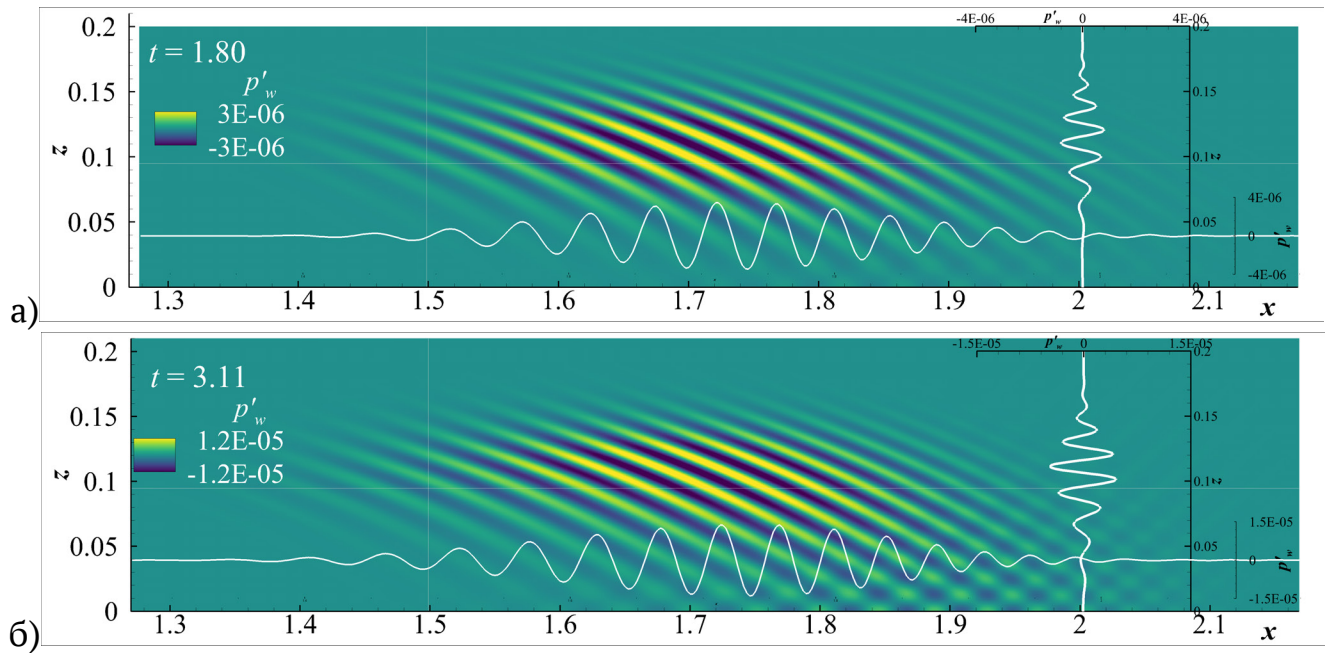


Рисунок 3.17 — Поле $p'_w(x, z)$ и распределения p'_w вдоль отмеченных линий $x = 1.5$ и $z = 0.095$ для волнового пакета, горб которого подошёл к сечению $x \approx 1.75$: а) от генератора возмущений; б) от предложенного граничного условия. Палитра и диапазоны p'_w на распределениях подобраны пропорционально друг с другом

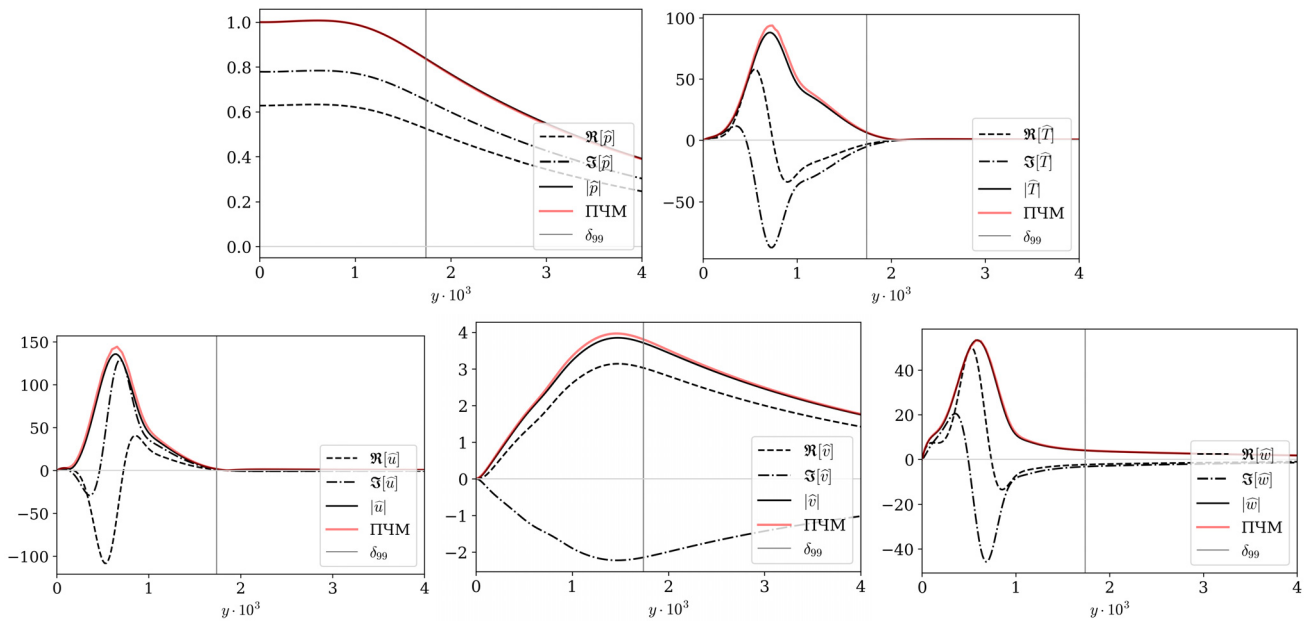


Рисунок 3.18 — Собственные функции возмущений

На рис. 3.19 показана эволюция характеристик горба волнового пакета. По мере продвижения вниз по потоку частота преобладающего возмущения уменьшается, а горб движется практически прямолинейно, удаляясь от плоскости симметрии. Результаты проведённых расчётов хорошо согласуются друг с другом и с результатами линейной теории, в которой учтён эффект слабой непараллельности пограничного слоя. Следует отметить, что и другие характеристики горба пакета, такие как β_s , также хорошо согласуются.

Серая кривая демонстрирует следствие недостаточно широкого спектра начальных возмущений от генератора. Форма генератора по x для серой кривой — один синусоидальный период. Не вдаваясь в подробности, следует отметить, что характерная форма спектра генератора⁴ будет иметь нули при $\alpha/\alpha_c = 0$ и 2 , где $\alpha_c = 4\pi/(x_e - x_s)$. Если α_c подобран без запаса (серой кривой соответствует $x_e - x_s \approx \lambda_x$), нули спектра могут пересечься с гармониками, которые должны преобладать в сечении наблюдения. То есть, у гармоник с наибольшими N -факторами (по методу e^N) амплитуда начального возбуждения оказывается слишком мала. В этом случае в сечение наблюдения преобладающими окажутся другие гармоники, что приведёт к невозможности аккуратно сопоставить результаты расчёта с выводами теории, в которой используется *широкий* спектр начальных возмущений. Недостаточно широкий спектр проявился в результатах расчётов преимущественно в траектории горба пакета (рис. 3.19б): она лежит несколько ниже общей тенденции и внезапно отклоняется от неё при $x \approx 1.6$. Это указывает на важность контроля спектральных характеристик используемого генератора возмущений.

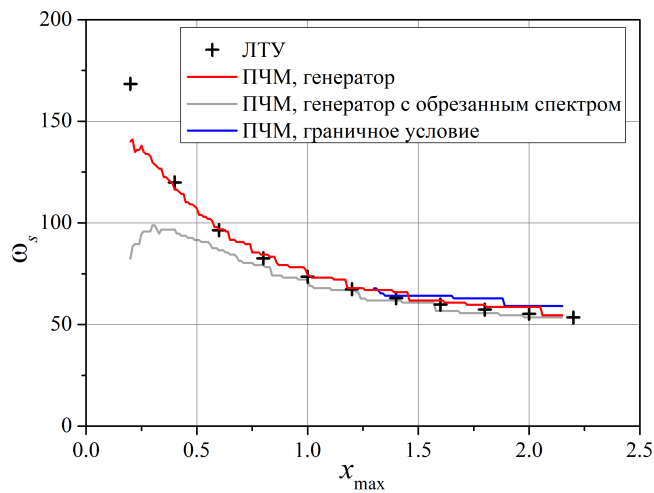
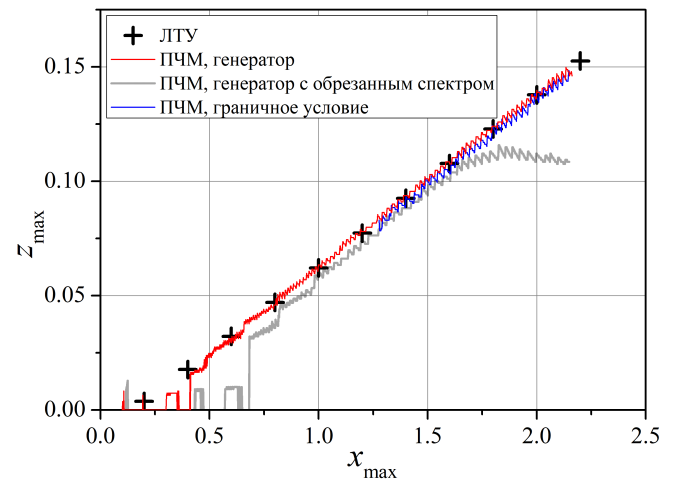
Рассчитанные амплитуды пакетов также хорошо согласуются друг с другом, как показано на рис. 3.20. Для согласования амплитуд возмущений, рассчитанных различными методами, проведена их нормировка на условия ЛТУ при $x_1 \approx 1.4$.

3.3.4. Нелинейный режим (турбулентное пятно)

Предложенный подход можно использовать для порождения турбулентных пятен, если повысить амплитуду ϵ волнового пакета, порождаемого в сечении x_{in} .

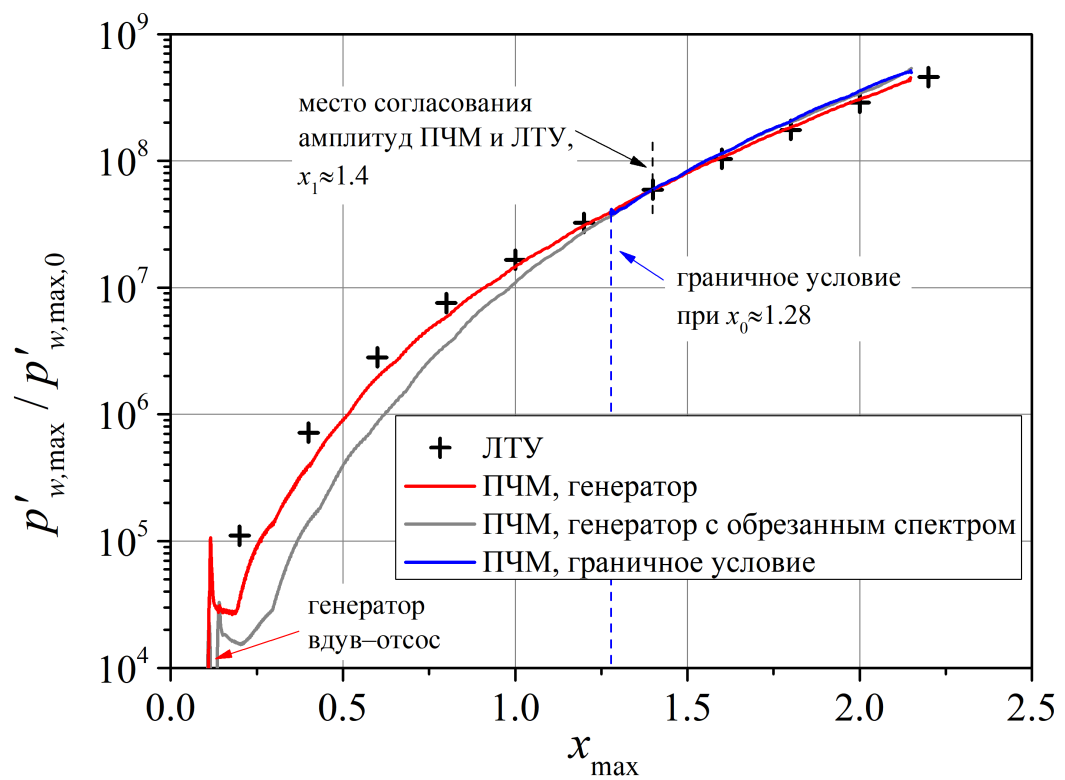
На рис. 3.21 показаны отпечатки зародившегося турбулентного пятна при различных исходных амплитудах волнового пакета. Моменты времени t_0 подобраны

⁴Спектральные характеристики аналогичного генератора обсуждаются в главе 4, см. рис. 4.6б.

а) Частота ω_s 

б) Траектория

Рисунок 3.19 — Эволюция горба волнового пакета

Рисунок 3.20 — Распределение амплитуды горба волнового пакета, $p'_{w,max}(x)$

таким образом, чтобы стадии зарождения пятна в обоих случаях были близки (рис. 3.21б, в) — визуально пятна выглядят одинаково, но формируются в различных сечениях пограничного слоя. Критические значения N -фактора, при которых плавный рост сменяется сначала постоянной величиной и далее резким нарастанием, равны ≈ 1.8 для $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ и ≈ 1.1 для $\varepsilon_2 = 2 \cdot 10^{-4}$. Эти значения хорошо согласуются с различием в исходной амплитуде возмущений: $e^{1.8}/e^{1.1} \approx 2.0 = \varepsilon_2/\varepsilon_1$. Это косвенно подтверждает амплитудный характер критерия перехода — интенсивный нелинейный распад возмущений начинается при достижении критической амплитуды и слабо зависит от места пограничного слоя, где эта амплитуда была достигнута.

Следует отметить, что перед турбулизацией (рис. 3.21а) волновой пакет развивается аналогично случаю малой амплитуды (рис. 3.17) с выраженным горбом и периферийными возмущениями, в которых преобладает гармоника с характерным наклоном волновых фронтов. Когда амплитуда горба достигает величины $\max(p'_w) \approx 0.3\% p_\infty$, пакет начинает распадаться. При этом ранее экспоненциальный рост амплитуды горба ускоряется. Процесс распада в физическом пространстве проиллюстрирован на рис. 3.22. Его можно описать как быстрое нарастание пульсаций p'_w в ограниченной области — при продвижении вниз по потоку формируется всплеск, или выброс, величина которого насыщается на уровне $\approx 10\%$ от p_∞ к концу расчётной области. При этом волновые фронты быстро выполаживаются вдоль оси Ox в окрестности горба пакета — пакет сильно искажается (рис. 3.21б, в). В отличие от волнового пакета, траектория сформировавшегося турбулентного пятна (рис. 3.21д) соответствует направлению внешнего невязкого течения — пятно сносится с потоком, расширяясь в боковом направлении (вдоль оси Oz).

Процесс формирования турбулентного пятна из волнового пакета проиллюстрирован на рис. 3.23 в спектральной плоскости (β, ω) в случае $\epsilon = 10^{-4}$. В ранних сечениях $x \lesssim 1.7$ возмущение развивается как линейный волновой пакет. Далее спектр расширяется в область больших волновых чисел β , его целостная структура расщепляется на несколько локальных максимумов, которые удаляются друг от друга. Проявляется гармоника $(\omega, \beta) = (0, 0)$, свидетельствуя об изменении среднего течения. Она быстро нарастает вместе с преобладающей гармоникой искажённого пакета и начинает преобладать в пакете уже при $x \approx 2$. Ниже по потоку волновой пакет активно распадается, а в поле возмущения появляются высокочастотные гармоники, быстро заполняющие весь спектральный диапазон. В

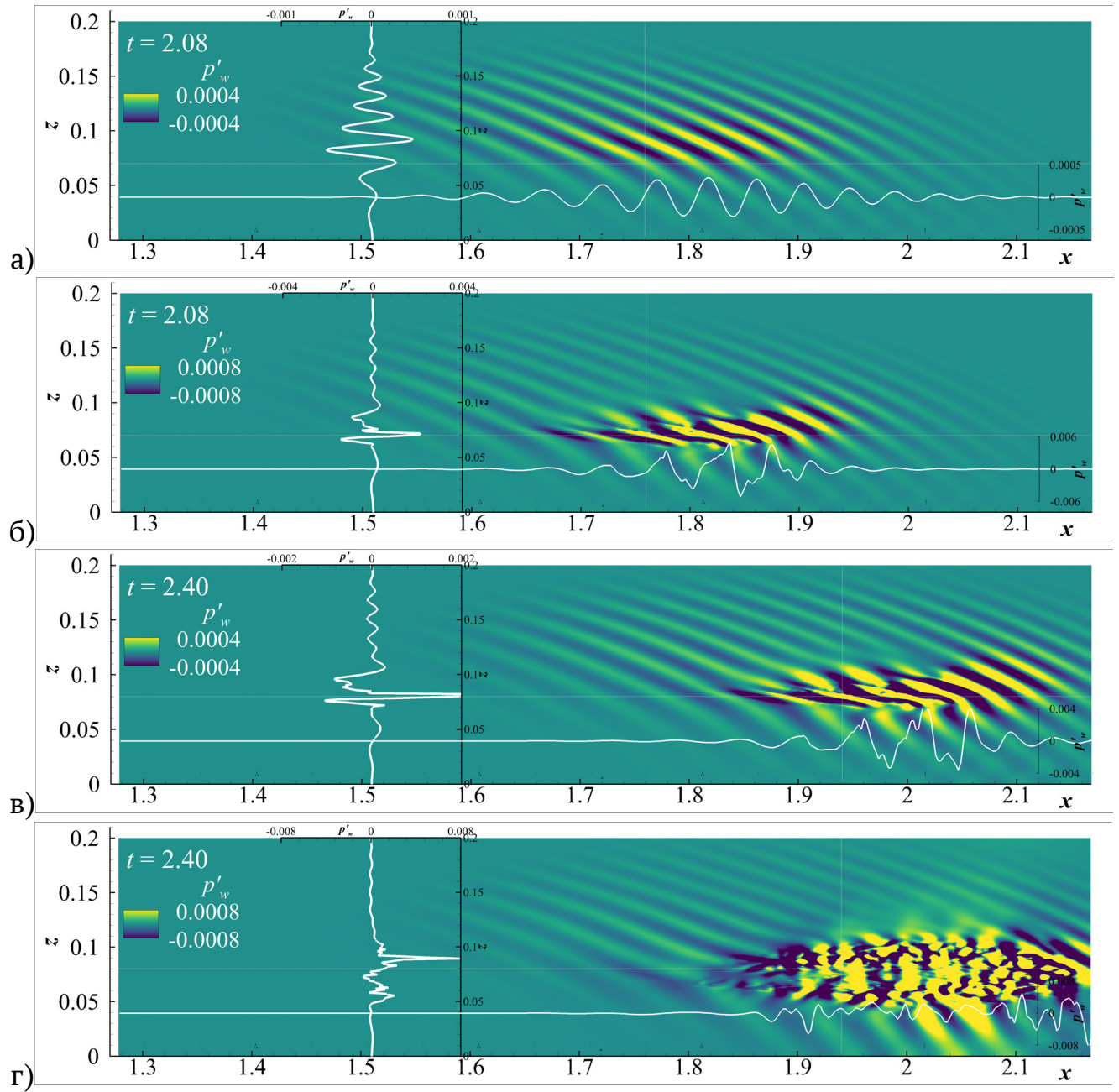


Рисунок 3.21 — Поле $p'_w(x, z)$ при формировании турбулентного пятна в моменты времени $t_0 = 2.08$ (а, б) и 2.4 (в, г) при $\varepsilon = 10^{-4}$ (а, в) и $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ (б, г)

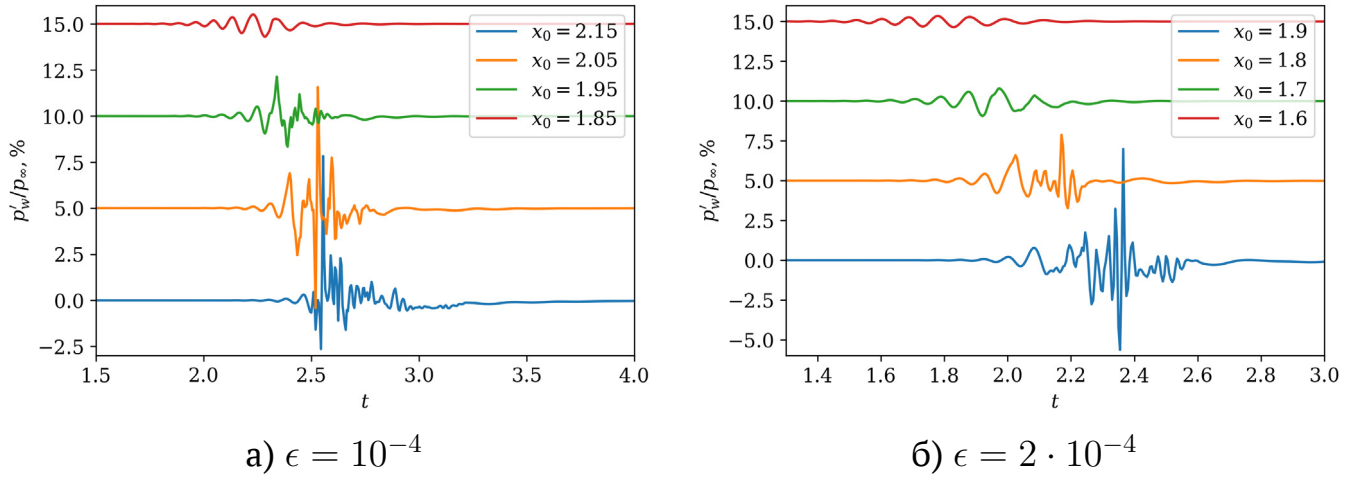


Рисунок 3.22 — Формирование выброса в поле p'_w при продвижении вниз по потоку. Каждая осциллограмма изображена при $z = z_{max}$, где (t_{max}, z_{max}) — точка максимума соответствующего сечения $p'_w(t, x_0, z)$. Для читаемости каждая осциллограмма смещена по оси ординат относительно предыдущей на +5%, кроме первой

том числе, проявляются волны, наклон которых близок к наклону преобладающей гармоники в симметричной части волнового пакета ($\beta > 0$), которая изначально не возбуждалась. Наблюдаемый процесс нелинейного распада не похож ни на резонанс наклонных волн, ни на фундаментальный резонанс, ни на субгармонический резонанс и требует дополнительного рассмотрения, что выходит за рамки настоящей главы.

3.3.5. Выводы

Прямое численное моделирование с использованием предложенных граничных условий подтвердило их применимость и согласованность с полными уравнениями Навье–Стокса в случае преобладания наклонных волн первой моды неустойчивости:

- пакет первой моды сохраняет асимптотическую структуру при выходе из левой границы расчетной области;
- при малых амплитудах горба пакета ($u'_{max} \sim 0.1\%U_\infty$) наблюдается эволюция возмущений в соответствии с линейной теорией устойчивости без проявления признаков нелинейности;

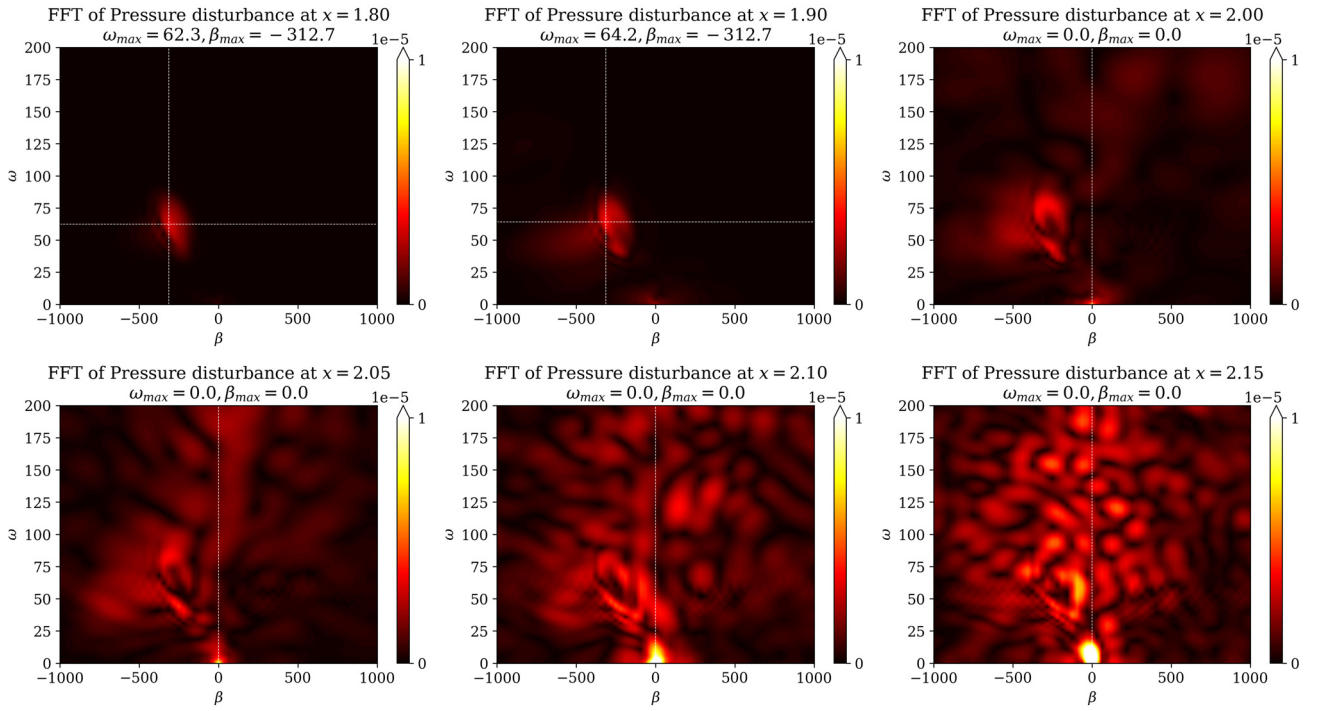


Рисунок 3.23 — Фурье-амплитуды для $p'_w(x, z)$ в нескольких сечениях $x = \text{const}$; $\epsilon = 10^{-4}$

- при больших амплитудах горба пакета ($u'_{max} \sim 10\%U_\infty$) пакет быстро распадается в турбулентное пятно; для анализа сценария нелинейного распада требуется дополнительное исследование;
- косвенно подтверждён амплитудный характер критерия ламинарно-турбулентного перехода в сверхзвуковом пограничном слое.

Использование теоретического граничного условия позволяет исключить линейную стадию развития возмущений из процесса численного моделирования. Вследствие этого суммарное время проведённых расчётов эволюции линейных волновых пакетов сократилось примерно в 5,6 раза. Такое значительное ускорение получено на фиксированных вычислительных ресурсах (12 узлов кластера лаборатории FlowModellium МФТИ, каждый по 24 вычислительных ядра) за счёт сокращения расчётной области практически вдвое и за счёт сокращения времени расчёта. Следует отметить, что амплитуда возмущений от генератора оказалась на порядок выше, чем амплитуда возмущений, вводимых с помощью граничного условия, что также повлияло на скорость расчёта. Реалистичное оцениваемое ускорение при прочих равных условиях составляет около четырёх.

В зависимости от задачи ускорение может как уменьшаться, так и увеличиваться, потому что моделирование нелинейной стадии всегда более трудозатратно. Например, если исследуется формирование турбулентного пятна и его последую-

щий длительный рост, доля времени на моделирование линейной стадии окажется незначительной. Напротив, для расчётного выявления амплитудного критерия перехода без необходимости моделировать сильно нелинейную стадию и развитую турбулентность предложенный подход позволит получить существенное сокращение времени расчёта.

3.4. Выводы по главе

На базе линейной теории устойчивости сформулированы новые нестационарные граничные условия, выражающие асимптотическую форму волнового пакета. Граничные условия применимы при достаточно больших значениях N -фактора. Работоспособность предложенного метода подтверждена путём прямого численного моделирования развития возмущений в сверхзвуковых пограничных слоях на пластине с заострённой передней кромкой для первой и второй неустойчивой моды.

Предложенный подход позволяет порождать реалистичные волновые пакеты и волновые поезда контролируемой амплитуды. При этом из расчёта исключается длительная стадия линейного роста возмущений от момента их возбуждения, что позволяет сосредоточиться на моделировании эволюции уже развитых возмущений, в частности, на перерождении волновых пакетов в турбулентные пятна.

В рассмотренных случаях теоретическое граничное условие даёт экономию времени расчёта примерно до четырёх раз и экономию ресурсов для хранения данных до двух раз (за счёт сокращения расчётной области).

Глава 4. Спонтанное излучение акустических волн

Как отмечено во введении, нарастание неустойчивых мод пограничного слоя чувствительно к температуре поверхности, отнесённой к температуре внешнего невязкого течения, T_w/T_e . Охлаждение поверхности стабилизирует первую моду и дестабилизирует вторую моду.

В работе [193] было отмечено, что устойчивость пограничного слоя исследовалась ранее лишь для умеренных уровней охлаждения ($T_w/T_e > 1$). Однако в высокоэнтальпийных ударных трубах и в некоторых полётных условиях ([194; 195]) отношение T_w/T_e может быть меньше единицы. Это обстоятельство побудило авторов [193] изучить влияние сильного охлаждения поверхности на устойчивость высокоскоростных пограничных слоёв. В рамках ЛТУ в локально параллельном приближении были рассчитаны характеристики устойчивости пограничного слоя на плоской пластине в высокоэнтальпийном набегающем потоке. Было обнаружено, что сильное охлаждение поверхности ($T_w/T_e \approx 1$) приводит к появлению новых особенностей в спектре собственных возмущений пограничного слоя. В частности, волны второй моды могут распространяться со сверхзвуковой скоростью относительно внешнего невязкого течения. То есть, их фазовая скорость может быть меньше, чем $U_e - a_e$, где U и a — продольная компонента вектора скорости и скорость звука, соответственно. Сверхзвуковые волны наблюдались вблизи верхней ветви нейтральной кривой второй моды и приводили к расширению частотного диапазона неустойчивости. Следует отметить, что неустойчивые сверхзвуковые моды обнаруживались и обсуждались ранее в нескольких других исследованиях устойчивости высокоскоростных пограничных слоёв на пластинах, клиньях и конусах [180; 196; 197]. Их также наблюдали в течениях со вдувом газа [198] и над поверхностью с тонким пористым слоем [199; 200].

Важно, что сверхзвуковые моды пограничного слоя синхронизируются с медленными акустическими волнами непрерывного спектра, то есть их спектральные характеристики (частота, фазовая скорость) могут оказаться очень близки друг к другу. Теоретическая возможность такой синхронизации обсуждалась в [42]. Было отмечено, что она может привести к спонтанному излучению акустических волн из пограничного слоя. Но реализуемость этого явления в рамках численного моделирования ранее не подтверждалась.

Спонтанное излучение может привести к новым физическим механизмам, влияющим на эволюцию неустойчивостей пограничного слоя. В данной главе роль спонтанного излучения в процессе ЛТП исследуется с помощью линейной теории устойчивости и прямого численного моделирования.

4.1. Анализ устойчивости

Анализ устойчивости проводится для плоских волн $\beta = 0$, которые преобладают среди волн второй моды. Постановка задачи устойчивости согласуется с общим трёхмерным подходом (подраздел 3.1), приведённым к двумерной постановке: $\beta = 0, w = 0, \partial_z(\cdot) = 0$.

Спектр линеаризованной задачи (3.2) – (3.3) исследовался ранее в работах [181; 182]. Было показано, что помимо дискретного спектра $\alpha_n(\omega)$, который удовлетворяет однородным граничным условиям в невязком потоке ($\hat{u}, \hat{v}, \hat{T} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$), существует семь ветвей непрерывного спектра (см. рис. 4.1). Математически они являются *разрезами* комплексной плоскости α и соответствуют возмущениям, осциллирующим по y при $y \rightarrow \infty$ — при удалении из пограничного слоя. Три ветви $\alpha_{c,1}^-, \alpha_{c,2}^-, \alpha_{c,3}^-$ соответствуют волнам, которые быстро затухают, распространяясь *вверх* по потоку. Две ветви $\alpha_{c,3}^+, \alpha_{c,4}^+$ соответствуют акустическим волнам, распространяющимся *вниз* по потоку (см. также подраздел 1.1.3)

$$\alpha_{c,3}^+ = \frac{\omega M_\infty \cos \theta}{M_\infty \cos \theta - 1} + O(Re^{-1}), \quad (4.1)$$

$$\alpha_{c,4}^+ = \frac{\omega M_\infty \cos \theta}{M_\infty \cos \theta + 1} + O(Re^{-1}), \quad (4.2)$$

где θ — угол между волновым фронтом и осью Oy . Фазовая скорость, $c = \omega/\alpha$, лежит в области $c_r \leq 1 - 1/M_\infty$ для медленных волн и в области $c_r \geq 1 + 1/M_\infty$ для быстрых волн. Две ветви $\alpha_{c,1}^+, \alpha_{c,2}^+$ соответствуют волнам завихренности и энтропии, которые распространяются *вниз* по потоку с фазовой скоростью $c_r = 1 + O(\sqrt{Re})$. Здесь и далее нижние индексы i и r отвечают, соответственно, за действительную и мнимую части комплексной величины.

В качестве примера рассмотрим обтекание заострённой пластины с параметрами набегающего потока, приведёнными в табл. 4.1. Анализ устойчивости проводится для автомодельного пограничного слоя. Профили невозмущённого пограничного

слоя $U(\eta)$ и $T(\eta)$ в автомодельных переменных представлены линиями на рис. 4.2. Рассматриваемый пограничный слой имеет две моды дискретного спектра: устойчивую первую (аналог волн Толлмина — Шлихтинга при дозвуковых скоростях) и неустойчивую вторую моду по терминологии Мэка, которая имеет акустическую природу и преобладает в рассматриваемом случае. Дальнейшее обсуждение сосредоточено на взаимодействии второй моды с акустическими волнами непрерывного спектра.

На рис. 4.3а показаны пространственные инкременты роста $\sigma = -\alpha_i$ второй моды в зависимости от продольной координаты x для различных значений частотного параметра F . На рис. 4.3б показаны соответствующие траектории (дисперсионные кривые) дискретной моды в комплексной плоскости (c_r, c_i) , которые далее для краткости также именуется фазовыми траекториями; толстой линией приближённо отмечено положение ветви непрерывного спектра медленных акустических волн. В отличие от высокочастотных возмущений (линии 1–4), траектории низкочастотных возмущений (линии 5–10) испытывают излом, или *кивок*, в окрестности точки ветвления, из которой начинается разрез медленных акустических волн, $c_S = 1 - 1/M_\infty$. Он подобен геометрической точке возврата кривой. Далее будем называть эту точку сокращённо *точкой кивка*, или просто *кивком*. Ниже по потоку от кивка низкочастотные возмущения распространяются со сверхзвуковой скоростью относительно внешнего невязкого потока. Инкременты их нарастания изменяются медленно вдоль x . В конце концов дисперсионные кривые сливаются с разрезом медленных акустических волн — дискретная мода исчезает из теоретического решения.

Поведение возмущений иллюстрируется более детально на рис. 4.4. Низкочастотная волна (рис. 4.4а) начинает развитие в точке ветвления быстрых акустических волн, $c_F = 1 + 1/M_\infty$. Это происходит в окрестности передней кромки пластины при $x \rightarrow 0$. Стрелками показано, как меняется фазовая скорость с ростом x . Поначалу $c_i < 0$, что указывает на затухание возмущения вниз по потоку. Далее фазовая траектория моды пересекает разрез волн завихренности и энтропии при $c_r \approx 1$. Это явление исследовано в [33; 57]. Показано, что мода испытывает небольшой разрыв в величине c_i (заметно на рис. 4.4а) и продолжает развиваться слева

Таблица 4.1 — Параметры набегающего потока

M_∞	$Re_{\infty,L}$	$T_\infty^*, \text{ К}$	$T_w^*, \text{ К}$	T_w/T_∞
6	10^6	300	150	0.5

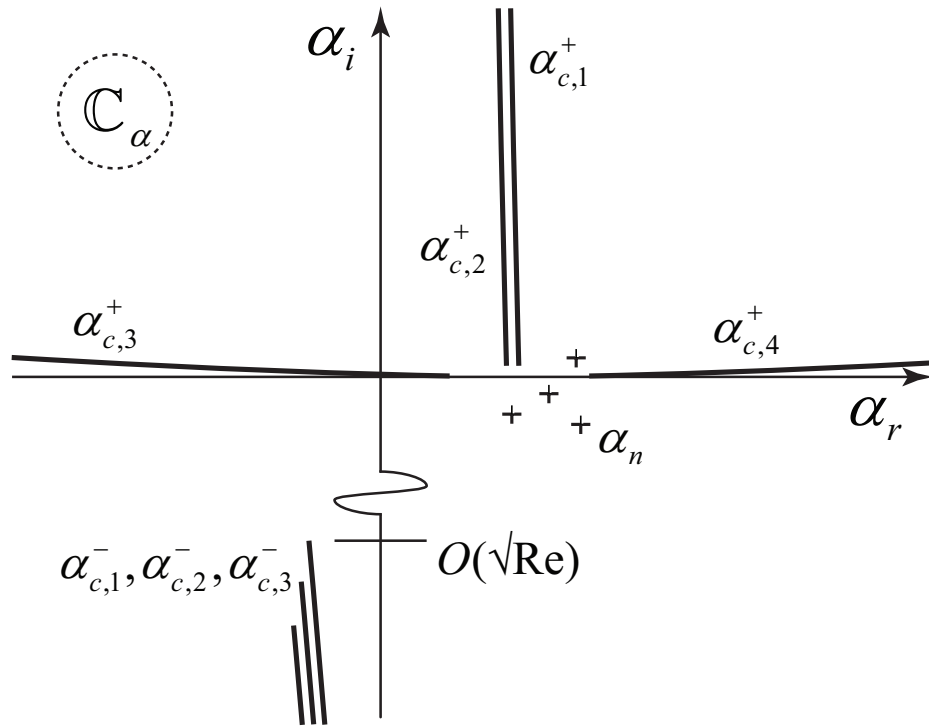


Рисунок 4.1 — Схематическое изображение непрерывного (линии) и дискретного (крестики) спектров в комплексной плоскости α для фиксированной действительной частоты ω ; $\alpha_{c,1}^+$ — волны завихренности, $\alpha_{c,2}^+$ — волны энтропии, $\alpha_{c,3}^+$ и $\alpha_{c,4}^+$ — акустические волны, $\alpha_{c,1,2,3}^-$ — волны, распространяющиеся вверх по потоку; α_n — моды дискретного спектра

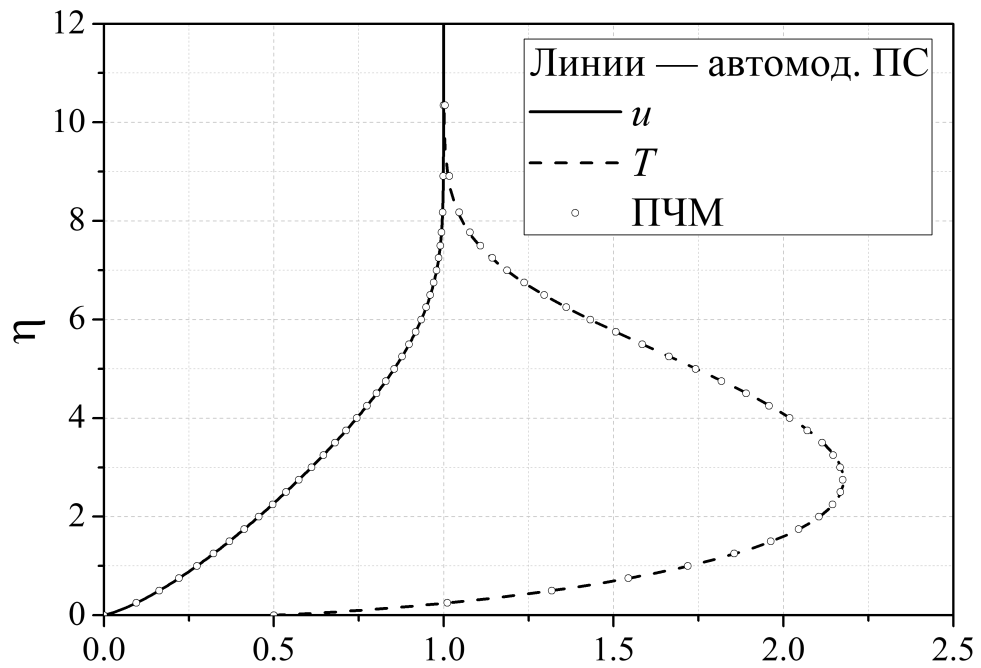


Рисунок 4.2 — Профили автомодельного пограничного слоя; $\eta = y^* / \sqrt{\mu_\infty^* x^* / \rho_\infty^* U_\infty^*}$

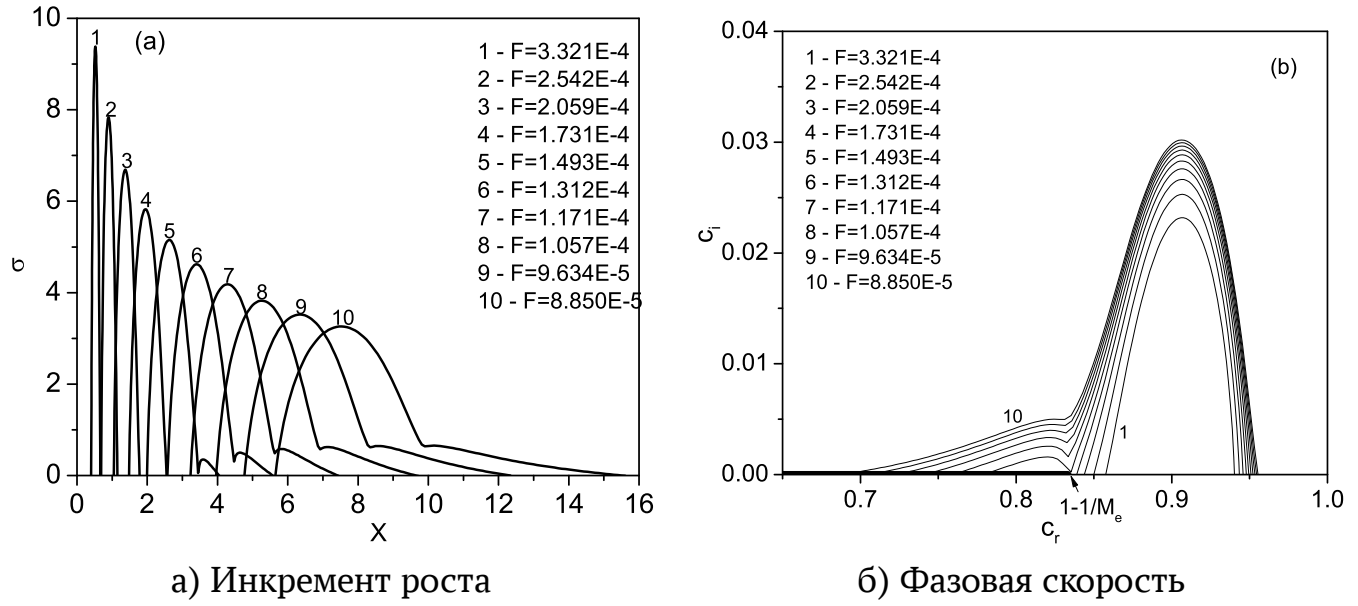


Рисунок 4.3 — Характеристики волн второй моды при различных частотных параметрах $F = \omega/Re_{\infty,L}$. Толстой линией отмечен разрез медленных акустических волн

от разреза. Других особенностей, связанных с данным синхронизмом дискретного и непрерывного спектров, в течении не возникает.

При дальнейшем увеличении x возмущение переходит в неустойчивую область, $c_i > 0$, и проходит *выше* точки ветвления медленных акустических волн $c_S = 1 - 1/M_\infty$, оставаясь в неустойчивой области и в конце концов сливаясь с непрерывным спектром на верхнем берегу разреза медленных акустических волн при $c_s \approx c_{sr} \approx 0.76$. В окрестности точки ветвления c_S , где фазовая траектория испытывает кивок, формируется *новая устойчивая* мода дискретного спектра. Её траектория показана пунктирной линией на рис. 4.4а.

Фазовая траектория высокочастотного возмущения (рис. 4.4б) качественно отличается. Она начинается в окрестности точки ветвления c_S (при $x \rightarrow 0$) и по мере развития не пересекается с разрезами вихревых, энтропийных и акустических волн. С ростом x возмущение попадает в неустойчивую область и затем снова возвращается в устойчивую область, оставаясь при этом дозвуковым ($c_r < c_S$). Хотя фазовая траектория не пересекается с разрезом медленных акустических волн, она проходит близко к точке ветвления c_S .

Будем называть *областью синхронизма* некоторую область на поверхности пластины (по x), в которой фазовая траектория неустойчивой моды проходит рядом с точкой c_S или же расположена вблизи медленной акустической ветви

непрерывного спектра. Положение фазовой траектории в обоих рассматриваемых случаях конкретизировано ниже.

Из рис. 4.4а видно, что характеристики второй моды остаются очень близки к ветви непрерывного спектра медленных акустических волн в области $c_{sr} < c_r < 1 - 1/M_\infty$, что соответствует физической области течения $4.47 < x < 5.59$ (см. линию 6 на рис. 4.3). Поэтому вторая мода слабо затухает по y во внешнем невязком течении и должна излучаться в виде практически нейтральных медленных акустических волн. Из (4.1) – (4.2) следует, что наклон фронтов θ_s таких волн должен возрастать от 0° при $x \approx 4.47$ до $\approx 46.5^\circ$ при $x \approx 5.59$. Это подтверждается локальным полем возмущения давления, проиллюстрированным на рис. 4.5а вблизи точки слияния $x = x_s \approx 5.59$, где $c = c_s \approx 0.758 - 8.509 \cdot 10^{-6}i$, а также на рис. 4.5б в середине области синхронизма $x = 5$, где $c = 0.794 + 1.693 \cdot 10^{-4}i$. Во внешнем течении поле возмущений есть наклонная медленная акустическая волна. Расчёты показывают, что вертикальная составляющая вектора потока энергии для этой волны положительная, $e_y = (\hat{v}_r \hat{p}_r + \hat{v}_i \hat{p}_i)/2 > 0$, — волна распространяется *от* стенки.

Таким образом, ЛТУ предсказывает, что вторая мода Мэка, развивающаяся в пограничном слое над достаточно холодной пластиной, должна излучать низкочастотные медленные акустические волны. Следует отметить, что *теоретическая* возможность излучения акустических волн сверхзвуковым пограничным слоем

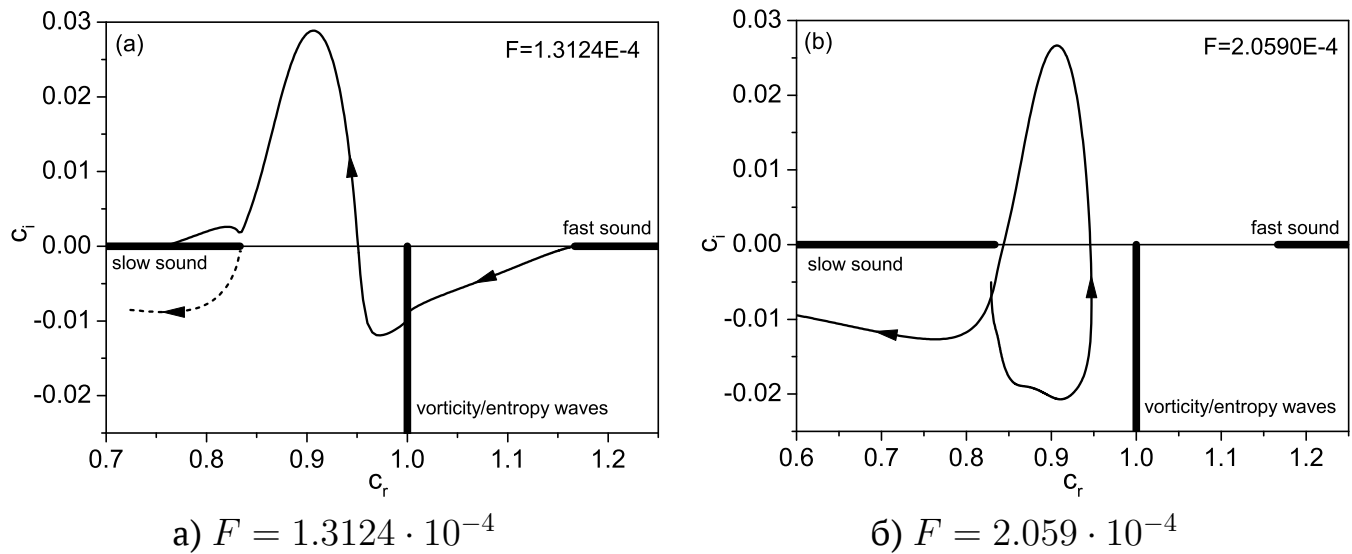


Рисунок 4.4 — Две характерные фазовые траектории волны второй моды Мэка в комплексной плоскости фазовой скорости. Пунктиром изображена траектория новой устойчивой моды

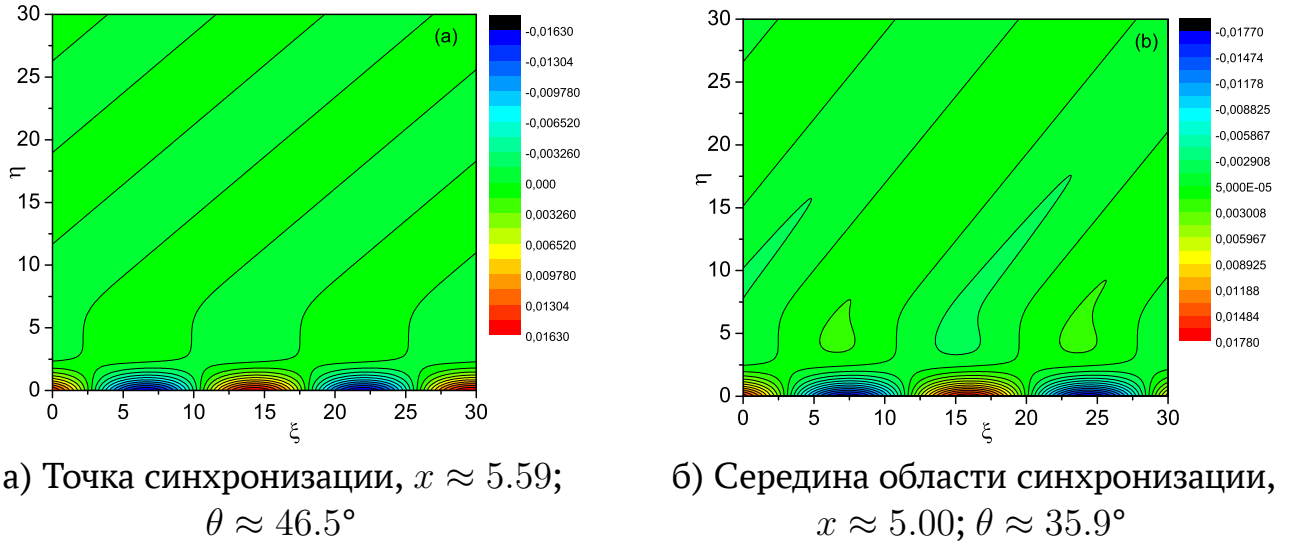


Рисунок 4.5 — Поле возмущения давления, вызванного волной второй моды; $(\xi, \eta) = (x^*, y^*) / \sqrt{\nu_\infty^* x^* / U_\infty^*}$; θ — угол наклона волновых фронтов во внешнем невязком течении ($\eta > 10$ при толщине пограничного слоя $\eta_{\delta_{99}} \approx 7.5$)

обсуждалась в книге [42]. Это явление получило название *спонтанного излучения звука*¹.

В следующем разделе полученные теоретические результаты будут подтверждены с помощью прямого численного моделирования.

4.2. Численное моделирование

Уравнения Навье — Стокса численно интегрируются в прямоугольной расчётной области: $x \in [0, L_x] \times [0, L_y] \ni y$. Стенка расположена при $y = 0$ и предполагается изотермической, $T = T_w$. Поле течения над пластиной тривиально и поэтому не иллюстрируется. Профили пограничного слоя хорошо согласуются с автомодельным решением, как показано на рис. (4.2) для $x = 4$. Согласование проверено при $x = 0.5, 2.0, 6.0$. Параметры на границе пограничного слоя очень близки к набегающему потоку: $U_e \approx 1.000$, $M_e \approx 5.985$, $T_e \approx 1.005$. Это подтверждает, что вязко-невязкое взаимодействие пренебрежимо мало.

¹Явление спонтанного излучения также обсуждалось классиками в [140] в связи с гофрировочной неустойчивостью ударных волн.

Возмущения вводятся в пограничный слой с помощью генератора

$$(\rho v)' = \varepsilon \sin(\alpha_c(x - x_0)) \sin(\omega_c t), \quad (4.3)$$

$$y = 0, \quad x \in [x_0, x_0 + 2\pi/\alpha_c], \quad t \in [0, t_{max}]. \quad (4.4)$$

Начальная точка x_0 выбрана достаточно близко к нижней ветви нейтральной кривой при частоте ω_c ; $2\pi/\alpha_c$ — продольная длина области вдува — отсоса, которая соответствует длине волны возмущения на частоте ω_c с фазовой скоростью $c = 1$. Амплитуда массового расхода ε равна 10^{-4} , если не указано иное. Она достаточно мала, чтобы гарантировать линейный характер развития возмущений (подтверждено расчётом с $\varepsilon = 10^{-6}$).

Численное моделирование проводится для *волновых поездов*, порождаемых непрерывно действующим генератором ($t_{max} \rightarrow \infty$), и для *волновых пакетов*, порождаемых действием генератора в течение двух периодов ($t_{max} = 4\pi/\omega_c$). В обоих случаях рассматриваются две частоты: $\omega_c = 131.24$ ($F = 1.3124 \cdot 10^{-4}$) соответствует низкочастотному возмущению (НЧ) с фазовой траекторией на рис. 4.4а; $\omega_c = 205.90$ ($F = 2.0590 \cdot 10^{-4}$) соответствует высокочастотному возмущению (ВЧ) с фазовой траекторией на рис. 4.4б. Параметры генератора возмущений указаны в табл. 4.2.

Спектральные образы используемого генератора для его пространственной формы ($f(\zeta) = \sin(2\pi\zeta)$, $\zeta = \alpha_c(x - x_0)/(2\pi)$) и временной формы ($f(\tau) = \sin(2\pi\tau)$, $\tau = \omega_c t/(2\pi)$) —

$$\hat{f}(\bar{\alpha}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) e^{-i\bar{\alpha}\zeta} d\zeta, \quad \bar{\alpha} = \alpha/\alpha_c,$$

$$\hat{f}(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\bar{\omega}\tau} d\tau, \quad \bar{\omega} = \omega/\omega_c$$

Таблица 4.2 — Параметры генератора возмущений для проведённых расчётов

Аббр.	ε	ω_c	$t_{max}/(2\pi/\omega_c)$	x_0	α_c
НЧ поезд	10^{-4}	131.24	∞	2.5	ω_c
НЧ пакет	10^{-4}	131.24	2	2.5	ω_c
ВЧ поезд	10^{-4}	205.90	∞	1.01448	ω_c
ВЧ пакет	10^{-4}	205.90	2	1.01448	ω_c
адиаб. пакет	10^{-3}	130.00	0.5	1.0	ω_c

— показаны на рис. 4.6. Амплитуды гармоник, представляющих интерес, располагаются в окрестности максимумов $\bar{\alpha} = 1$ и $\bar{\omega} = 1$ и не приближаются к нулю.

Расчётная область для НЧ возмущений имеет размер $L_x \times L_y = 7.0 \times 1.5$ и покрыта прямоугольной сеткой $N_x \times N_y = 5001 \times 1001$ узлов. Сетка сгущена к передней кромке пластины ($x = 0$) и к поверхности. При $x > 0.05$ шаг сетки по направлению x равномерный. За генератором ($x > x_0$) поперёк пограничного слоя приходится более 270 узлов. На длину волны преобладающего возмущения приходится около 27 узлов в продольном направлении. С учётом результатов раздела 2.1 такое сеточное разрешение представляется достаточным для целей настоящей главы: численная диссипация приводит к затуханию возмущений примерно на 0.2% на длине волны, что в 10 раз меньше темпа нарастания неустойчивых мод.

Для низкочастотного волнового поезда (НЧ поезд) проведено исследование сеточной сходимости по y . Значительного рассогласования по амплитуде возмущений не наблюдается на сетках 5001×2001 и 5001×1001 (см. рис. 4.7); влияние генератора вверх по потоку отсутствует. Несмотря на избыточное сеточное разрешение в направлении y имеется заметное отличие амплитудных кривых, полученных на более грубых по y сетках. Предположительно, это связано не столько с численной диссипацией развивающихся возмущений, сколько с начальным участком формирования волнового пакета: генератор возмущений работает при различном

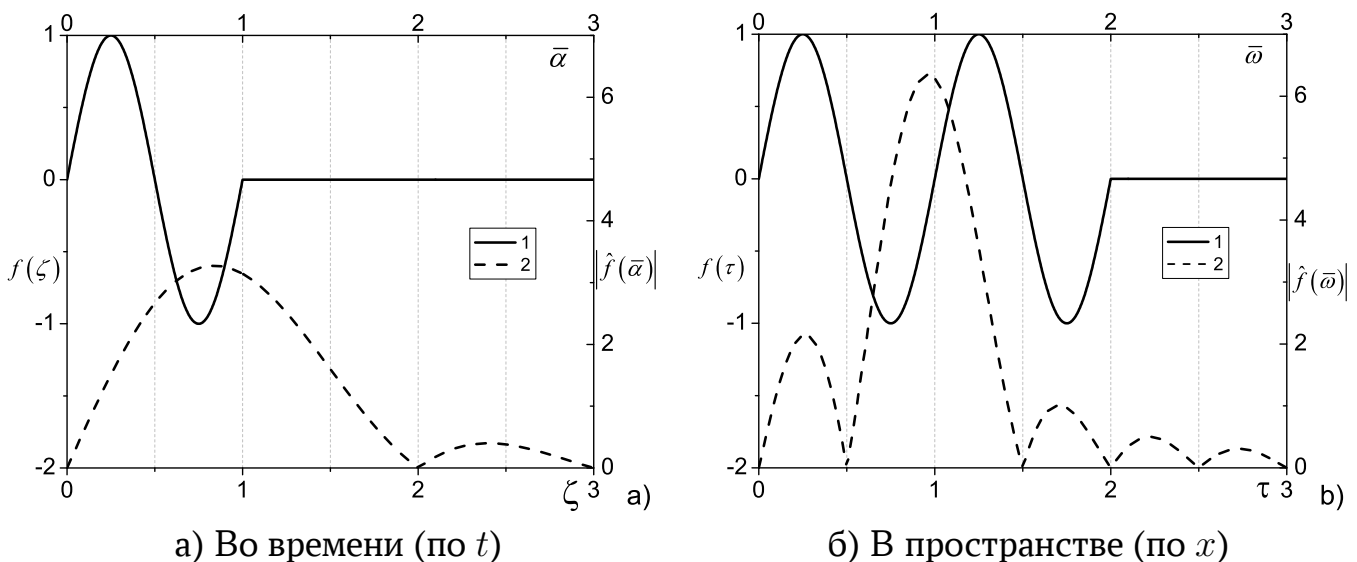


Рисунок 4.6 — Генератор возмущений: 1 — физическая форма; 2 — её Фурье-образ

сеточном разрешении, и спектр формируемого пакета может искажаться. Подробное исследование этого вопроса не проводилось за ненадобностью².

Расчётная сетка для моделирования высокочастотных возмущений получена путём масштабирования сетки 5001×1001 , описанной выше для низкочастотных возмущений. Предполагая, что фазовая скорость возмущений второй моды слабо зависит от частоты, все характерные линейные размеры и временной шаг численного интегрирования уменьшены в $(\omega_c)_{\text{ВЧ}}/(\omega_c)_{\text{НЧ}} \approx 1.57$ раз.

4.2.1. Волновой поезд

Поле возмущения давления от низкочастотного волнового поезда показано на рис. 4.8. В соответствии с линейной теорией устойчивости, поначалу возмущение растёт экспоненциально за генератором. В окрестности кивка фазовой траектории, $x_k \approx 4.5$, волновой поезд начинает проникать во внешнее течение (рис. 4.8с). В области $4.5 < x < 5.6$ (далее — область синхронизма), волновой поезд излуча-

²Тем не менее исследование этого вопроса является хорошей методической задачей, которую автор когда-нибудь предложит своим студентам или аспирантам.

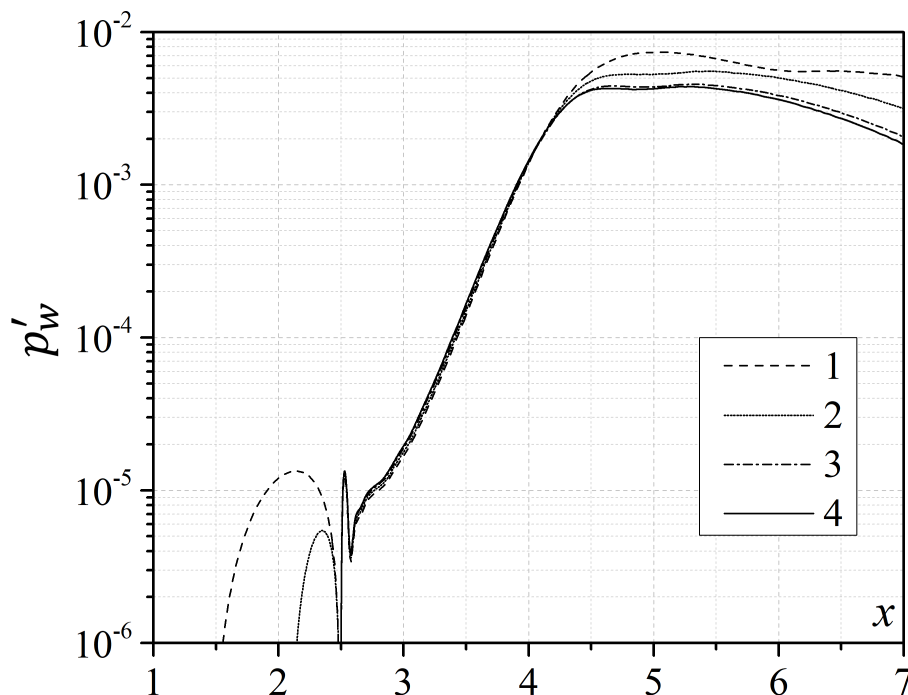


Рисунок 4.7 — Исследование сходимости по сеткам: $N_x = 5001$; $N_y = 251$ (1), 501 (2), 1001 (3), 2001 (4)

ет медленные акустические волны, которые распространяются от поверхности, формируя внешнее акустическое поле (рис. 4.8a). Углы наклона фронтов соответствуют предсказанию ЛТУ: от $\theta = 0^\circ$ при $x = 4.5$ (рис. 4.8c) до $\theta \approx 46^\circ$ при $x \approx 5.6$ (рис. 4.8d). Поле возмущений рис. 4.8d напоминает результаты ЛТУ, представленные на рис. 4.5. Ниже по потоку интенсивность излучаемого звука падает. Таким образом, спонтанное излучение сосредоточено в области синхронизма.

Показанное на рис. 4.8 поле возмущения давления в дальнем поле похоже на луч медленных акустических волн. Волновые фронты луча наклонены под углом $\theta \approx 33^\circ$. Луч направлен вдоль вектора групповой скорости, наклонённого под углом $\approx 6^\circ$ к поверхности пластины. Этот угол заметно меньше, чем угол распространения волны Маха $\sin^{-1}(1/M_\infty) \approx 9.6^\circ$. Под главным лучом акустическое поле имеет сложную структуру, характерную для интерференции нескольких плоских монохроматических волн с различными углами наклона фронтов и амплитудами. Присутствие такого набора волн может объясняться тем, что наиболее сильное излучение формируется от области кивка ($x \approx 4.5$) и возле точки синхронизации ($x \approx 5.6$), где спектральные характеристики второй моды наиболее близки к характеристикам акустической волны.

Рисунок 4.8b демонстрирует, что возмущение давления на стенке ведёт себя практически нейтрально в области синхронизма, в то время как ЛТУ в локально-параллельном приближении предсказывает небольшой экспоненциальный рост. Данное рассогласование побудило к расчёту устойчивости с учётом эффектов непараллельности с помощью асимптотического метода многих масштабов (см., напр., [179]). На рис. 4.9 сопоставляются фазовые скорости c_r (рис. 4.9a) и инкременты роста $\sigma = -\alpha_i$ (рис. 4.9б), рассчитанные по ЛТУ в локально-параллельном приближении и с учётом непараллельности (ЛТУ+Н), а также результаты прямого

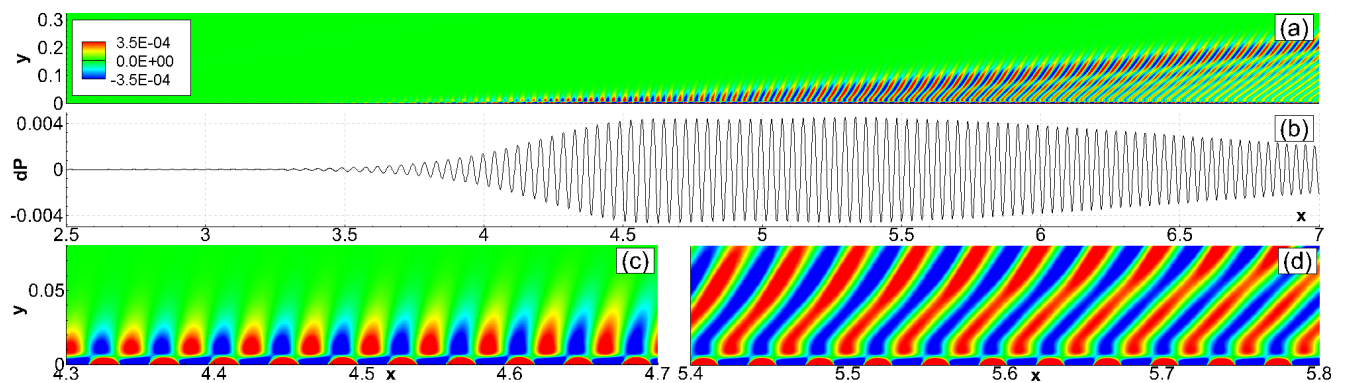


Рисунок 4.8 — НЧ поезд: а — поле возмущений давления $p'(x, y)$; б — распределение по поверхности $p'_w(x) \equiv p'(x, 0)$; в — область кивка фазовой траектории, $x_k \approx 4.5$; г — область синхронизации, $x_s \approx 5.6$

численного моделирования. Последние получены из мгновенных распределений возмущения давления на стенке. Около точки кивка $x = x_k$, где рассчитанная по ЛТУ производная $d\sigma(x)/dx$ терпит разрыв, поправка на непараллельность течения имеет особенность. Вне этой области фазовые скорости, рассчитанные по ЛТУ и ЛТУ+Н, хорошо согласуются с результатами ПЧМ. Все три решения указывают на то, что возмущение является сверхзвуковым за точкой кивка, а в области $x < x_k$ инкременты роста в рамках ЛТУ+Н удовлетворительно согласуются с результатами прямого численного моделирования. В области спонтанного излучения ($x > x_k$) согласование качественное.

Из рис. 4.10а видно, что перед областью спонтанного излучения ($x < 4.5$) возмущение давления усиливается в соответствии с ЛТУ+Н. Однако далее теоретическое решение продолжает расти, в отличие от численного решения. В этой области течения инкременты нарастания малы и может проявляться эффект численной диссипации возмущений³. Тем не менее, данные, представленные в логарифмическом масштабе (рис. 4.10б), указывают на то, что эффект численной диссипации слабый.

Высокочастотный волновой поезд также излучает акустические волны, что иллюстрируется на рис. 4.11. Это происходит возле точки $x \approx 1.9$, где траектория

³Во время выполнения расчётов мы объясняли это расхождение тем, что возмущение теряет энергию за счёт её излучения из пограничного слоя. Однако последующий анализ и более поздние исследования других авторов [201] опровергли это предположение.

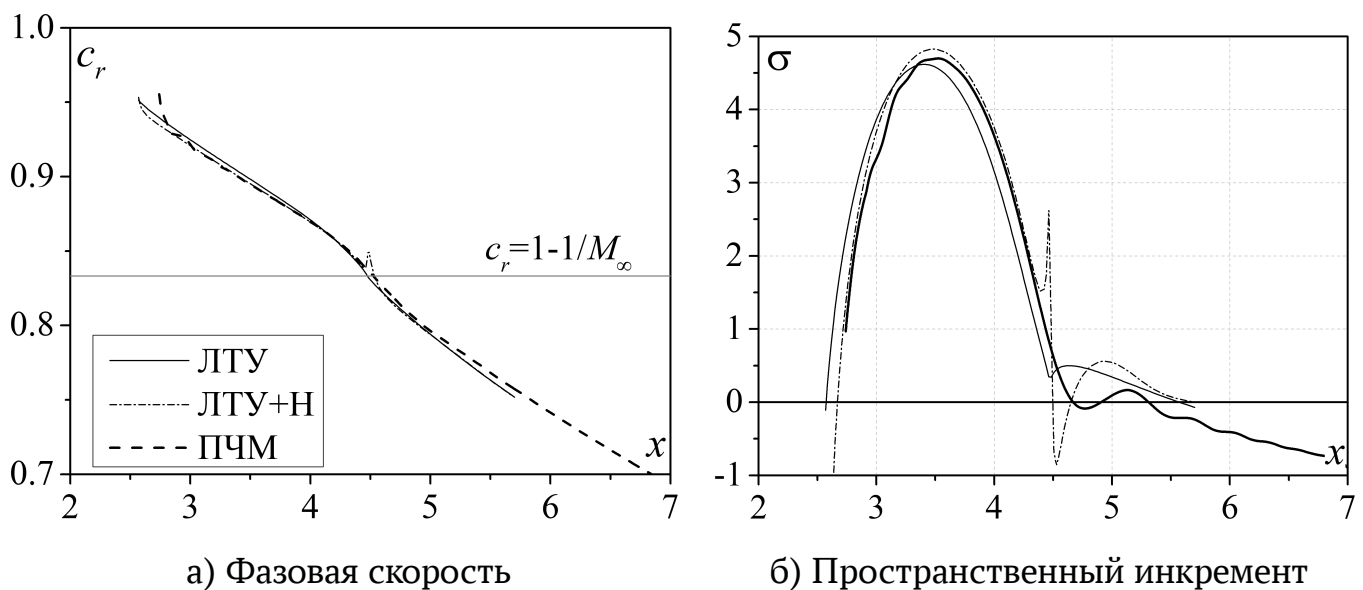


Рисунок 4.9 — Сопоставление результатов численного моделирования, ЛТУ в локально-параллельном приближении и ЛТУ с учётом непараллельности течения (ЛТУ+Н) для НЧ поезда

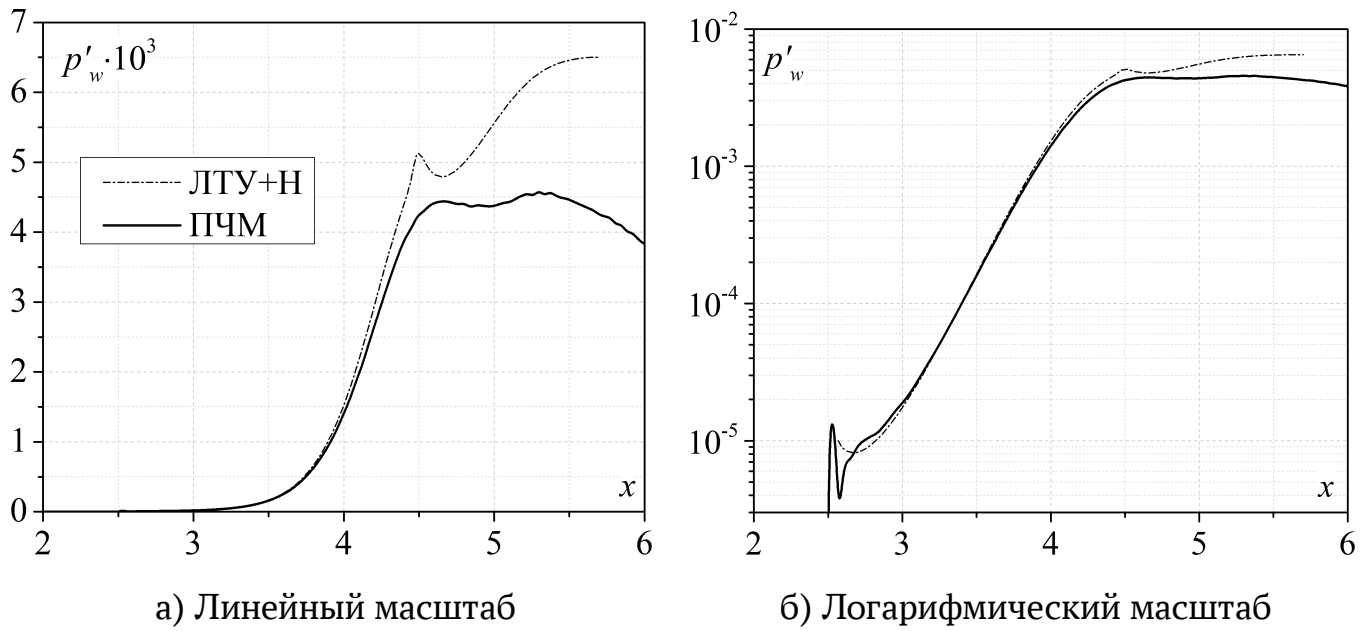


Рисунок 4.10 — Распределение амплитуды возмущения давления для НЧ поезда

фазовой скорости второй моды проходит вблизи точки ветвления разреза медленных акустических волн c_S (см. рис. 4.46). Аналогично случаю НЧ поезда, дальнейшее поле возмущений напоминает луч, в котором преобладают акустические волны с углом фронтов $\theta \approx 39^\circ$. Однако излучающая область существенно уже, а амплитуда излучаемого звука примерно в 20 раз меньше. Существенное падение амплитуды можно объяснить тем, что, в соответствии с прогнозом ЛТУ, интегральное усиление ВЧ поезда должно быть примерно в 18 раз слабее, чем в случае НЧ поезда. Под основным акустическим лучом наблюдается волновая картина, свойственная медленным акустическим волнам, которые излучаются неподвижным гармоническим источником. Предположительно, такой источник формируется из-за пространственной неоднородности волнового поезда в области синхронизма.

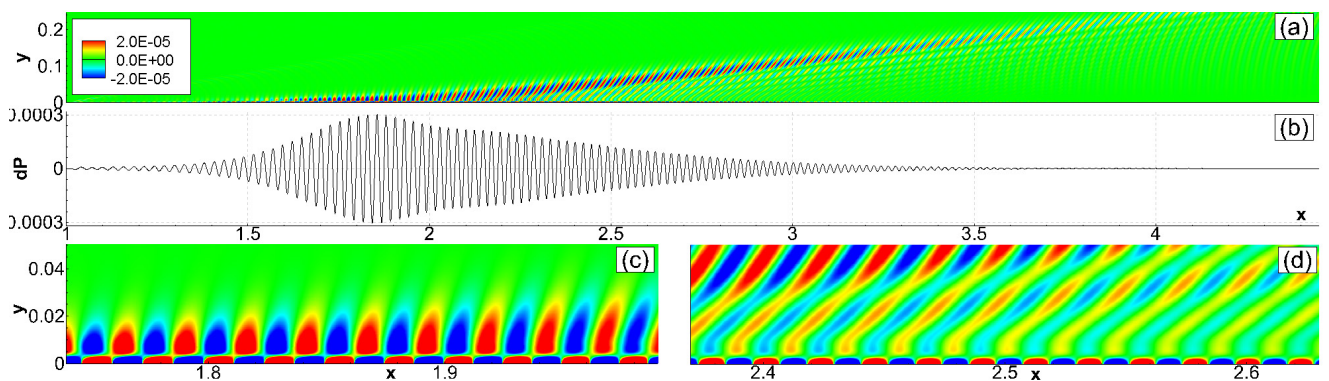


Рисунок 4.11 — ВЧ поезд: а — поле возмущений давления $p'(x, y)$; б — распределение по поверхности $p'_w(x) \equiv p'(x, 0)$; в — область синхронизации, $x_s \approx 1.9$; г — за областью синхронизации

4.2.2. Волновой пакет

В более реалистичной ситуации неустойчивость пограничного слоя проявляется в виде широкополосного пакета волн. Сначала рассмотрим случай адиабатически прогретой стенки, которая приближённо моделируется граничным условием $T_w/T_e \approx 7$. В соответствии с анализом устойчивости, волны второй моды остаются дозвуковыми, а их фазовые скорости далеки от фазовых скоростей медленных акустических волн (см. рис. 4.4б). Параметры генератора возмущений (4.3) – (4.4) для ПЧМ приведены в табл. 4.4 для случая «адиаб. пакет»: $x_0 = 1.0$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $\alpha_c = \omega_c = 130$. Время работы генератора составляет половину периода на центральной частоте, поэтому частотный спектр генератора в области низких частот наполнен и плавно выходит на некоторый ненулевой уровень при $\omega \rightarrow 0$. Пространственная форма генератора не изменяется (рис. 4.6а). Расчёты показывают, что волновой пакет не излучает акустические волны во внешнее течение. Это проиллюстрировано на рис. 4.12: волновой пакет имеет куполообразную огибающую, а длина несущей волны медленно увеличивается вниз по потоку. Анализ линейной устойчивости показывает, что неустойчивость развивается вниз по потоку обычным образом: возмущения остаются дозвуковыми (рис. 4.13а); их область роста, изображённая на рис. 4.13б не вытянута вблизи верхней ветви нейтральной кривой в отличие от режима спонтанного излучения (сравни с рис. 4.3а).

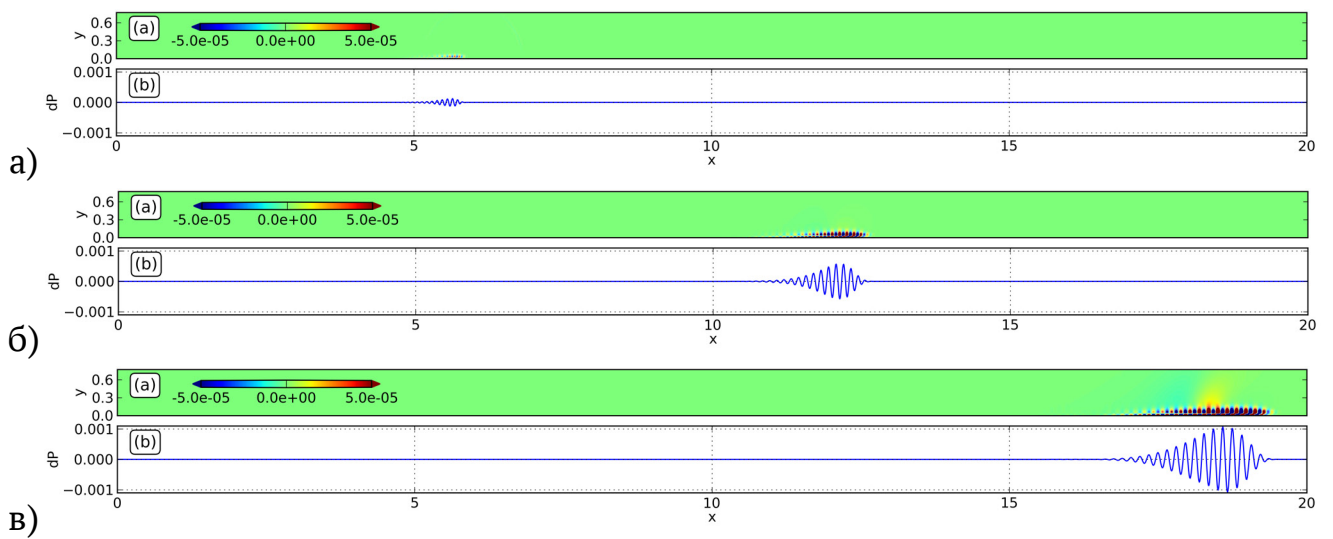


Рисунок 4.12 — Поле возмущения давления $p'(x, y)$ и распределение $p'_w(x)$ для случая прогретой стенки ($T_w/T_e = 7$) в моменты времени $t = 5.0$ (а), 12.0 (б), 19.0 (в)

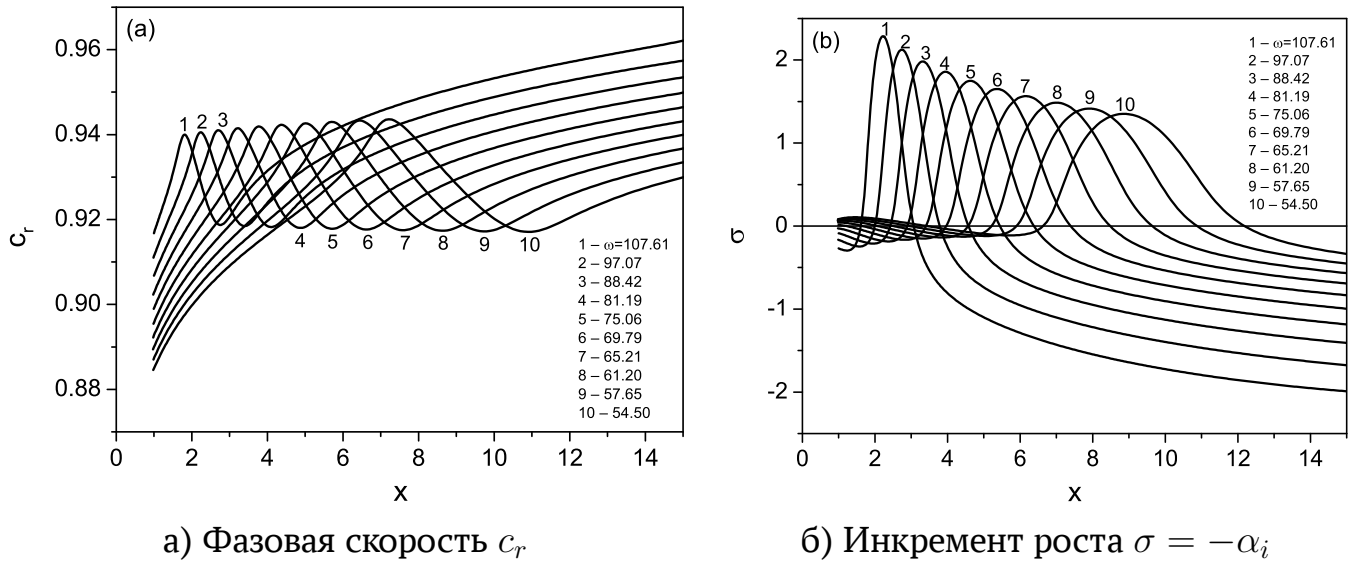


Рисунок 4.13 — Характеристики устойчивости для случая прогретой стенки, $T_w/T_e = 7$

Рассмотрим развитие волновых пакетов на охлаждённой стенке, $T_w/T_e = 0.5$. Генератор возмущений работает в течение двух периодов $t_{max} = 4\pi/\omega_c$; его остальные параметры даны в табл. 4.4. Частотный состав генератора проиллюстрирован на рис. 4.6б. Результаты численного моделирования для НЧ и ВЧ пакетов представлены на рис. 4.14 и 4.15, соответственно. В обоих случаях качественные особенности поля возмущения сохраняются, но имеется значительное количественное различие — ВЧ пакет усиливается слабее, и излучённое им акустическое поле также слабее, чем в случае НЧ пакета.

Рассмотрим поле возмущения давления от НЧ пакета (рис. 4.14). В начальный момент генератор порождает слабую акустическую волну, которая проявляется в виде фронтов-полуокружностей. Вместе с ней генератор возбуждает пакет второй моды, который нарастает в пограничном слое. Акустическая волна распространяется быстрее, чем горб волнового пакета, и медленно затухает по мере распространения. Кроме этого, волновой пакет излучает медленные акустические волны очень малой амплитуды (см. мгновенные поля $p'(x, y)$ при $t = 2.0$ и 3.2). Предположительно, это излучение обусловлено эффектами непараллельности основного течения, связанной с нарастанием пограничного слоя.

Первая значительная порция звука излучается в момент времени $t \approx 4.5$. По мере дальнейшего развития пакета его амплитуда растёт, а амплитуда излучённого акустического «пятна» остаётся практически неизменной. Так как скорость распространения акустического пятна выше, чем скорость горба волнового пакета, оно растягивается и трансформируется в акустический луч; основание луча следу-

ет вместе с пакетом. Спустя некоторое время волновой пакет излучает ещё одно акустическое пятно ($t \approx 5.6$). Третья порция излучения отмечается при $t \approx 6.8$, и т.д. Этот каскадный процесс приводит к значительному вытягиванию исходного возмущения вдоль потока. Неоднородное распределение компонент волнового пакета и их взаимная интерференция с излучаемым акустическим полем приводит к формированию сложной картины внешнего акустического поля.

В частности, появляется амплитудная модуляция возмущений внутри пограничного слоя, как видно, например, на рис. 4.14г, д при $t \approx 5.6$ и 6.8 . Предположим, что период модуляции Δx — расстояние между соседними максимумами огибающей $p'_w(x)$ — порядка продольной длины области, где несущая волна в волновом пакете синхронизируется с соответствующей акустической волной. В окрестности точки синхронизации $x_{rad} \equiv x_c$ волновое число второй моды можно аппроксимировать как

$$\alpha \approx \alpha_{rad} + \frac{\partial \alpha(x_{rad})}{\partial x} \Delta x.$$

Тогда из определения эйконала $S(x, \omega)$ (см. подраздел 3.1) следует, что отстройка эйконала второй моды от эйконала акустической волны ведёт себя как

$$\Delta S \approx \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha(x_{rad})}{\partial x} \Delta x^2. \quad (4.5)$$

Эффективное излучение звука происходит при небольшой расстройке эйконов, $|\Delta S| \leq 1$, то есть рассинхронизация должна оставаться относительно небольшой при излучении. Используя это ограничение и оценивая собственное значение α преобладающего возмущения второй моды для автомодельного пограничного слоя⁴ как $\alpha \approx \alpha(x_{rad}) \sqrt{x_{rad}/x}$, где $\alpha(x_{rad}) = \omega/c(x_{rad})$, можно оценить масштаб длины модуляции из (4.5):

$$\Delta x \approx 2 \sqrt{x_{rad} c(x_{rad}) / \omega}.$$

Принимая во внимание, что излучение происходит вблизи $c(x_{rad}) \approx c_S = 1 - 1/M_\infty$, получаем $\Delta x \approx 0.36$ для НЧ пакета ($\omega \approx 131$, $x_{rad} \approx 5$) и $\Delta x \approx 0.18$ для ВЧ пакета ($\omega \approx 206$, $x_{rad} \approx 2$). Данные оценки хорошо согласуются с длинами модуляции, наблюдаемыми в численном решении на рис. 4.14 и 4.15.

Спектральные компоненты волнового пакета развиваются в соответствии с предсказанием ЛТУ с учётом эффектов непараллельности для широкого диапазона частот, как показано на рис. 4.16. Расчёт устойчивости проводится из начальной

⁴Оно масштабируется обратно пропорционально толщине пограничного слоя.

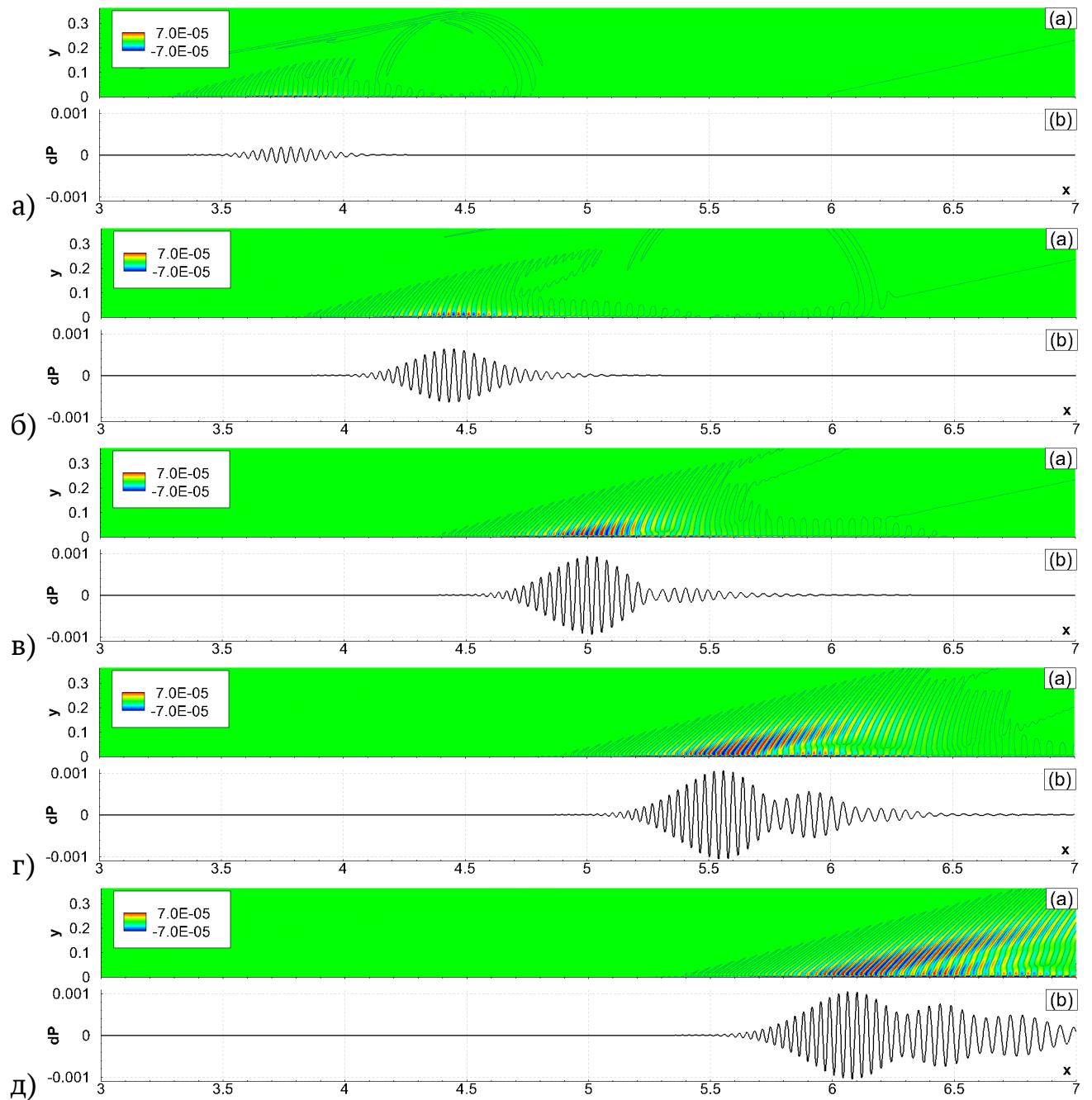


Рисунок 4.14 — Развитие НЧ пакета. Поле возмущения давления $p'(x, y)$ с изолинией $p' = 10^{-8}$ и распределение вдоль стенки $p'_w(x)$ в моменты времени $t = 2.0$ (а), 3.2 (б), 4.4 (в), 5.6 (г), 6.8 (д)

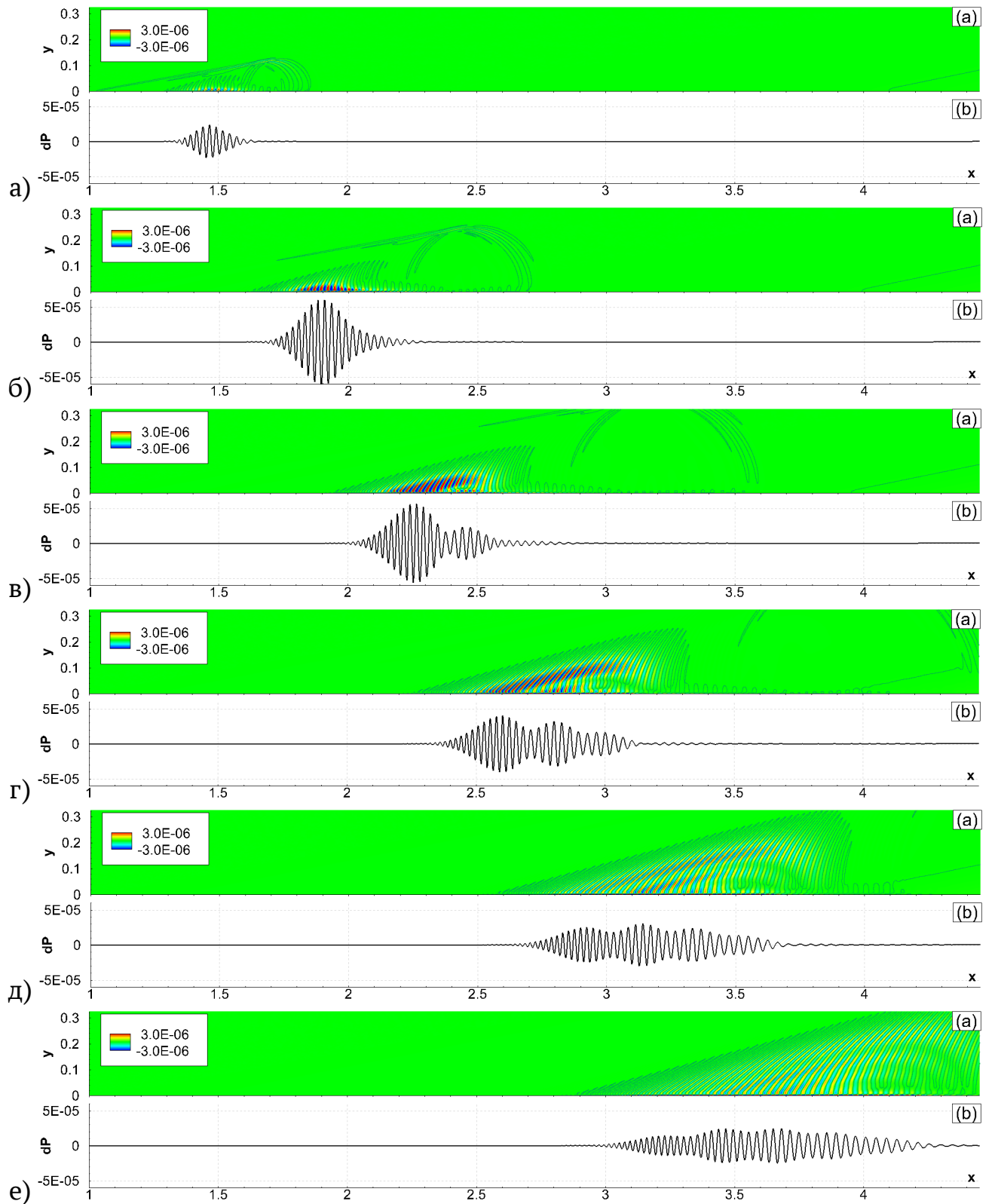


Рисунок 4.15 — Развитие ВЧ пакета. Поле возмущения давления $p'(x, y)$ с изолинией $p' = 10^{-8}$ и распределение вдоль стенки $p'_w(x)$ в моменты времени $t = 0.72$ (а), 1.48 (б), 2.24 (в), 3.00 (г), 3.76 (д), 4.52 (е)

точки $x_0 = 2.5$, начальные амплитуды всех компонент равны единице. Амплитуды ПЧМ приведены к амплитудам ЛТУ в точках $x_{max}(\omega)$ максимального темпа роста, которые предсказаны ЛТУ и помечены крестиками на рис. 4.16:

$$\hat{p}_{w, \text{ПЧМ, норм}}(x) = \hat{p}_{w, \text{ПЧМ}}(x) \cdot \frac{\hat{p}_{w, \text{ЛТУ+Н}}(x_{max})}{\hat{p}_{w, \text{ПЧМ}}(x_{max})}.$$

Аналогично случаю НЧ волнового поезда (рис. 4.10), теоретическое решение отклоняется от решения ПЧМ в области спонтанного излучения.

Амплитудно-частотные спектры возмущений, рассчитанные по численному решению напрямую в сечениях $x = const$, указывают на аномальную дисперсию волновых пакетов в области спонтанного излучения и за ней (рис. 4.17). — По мере продвижения вниз по потоку спектр быстро расширяется в область низких частот, достигая нескольких локальных максимумов.

В дальнем поле от источника возмущений ожидается асимптотическое поведение спектров 4.17, которое должно обладать единственным выраженным максимумом. Отличие от асимптотического поведения может проявиться, если интегральное усиление возмущений недостаточно велико⁵. При этом на результат может влиять как начальный частотный состав возбуждённой моды, так и спектр всего начального возмущения, в состав которого входят другие моды. По мере про-

⁵В этом случае метод перевала (см. главу 3) даёт большую погрешность.

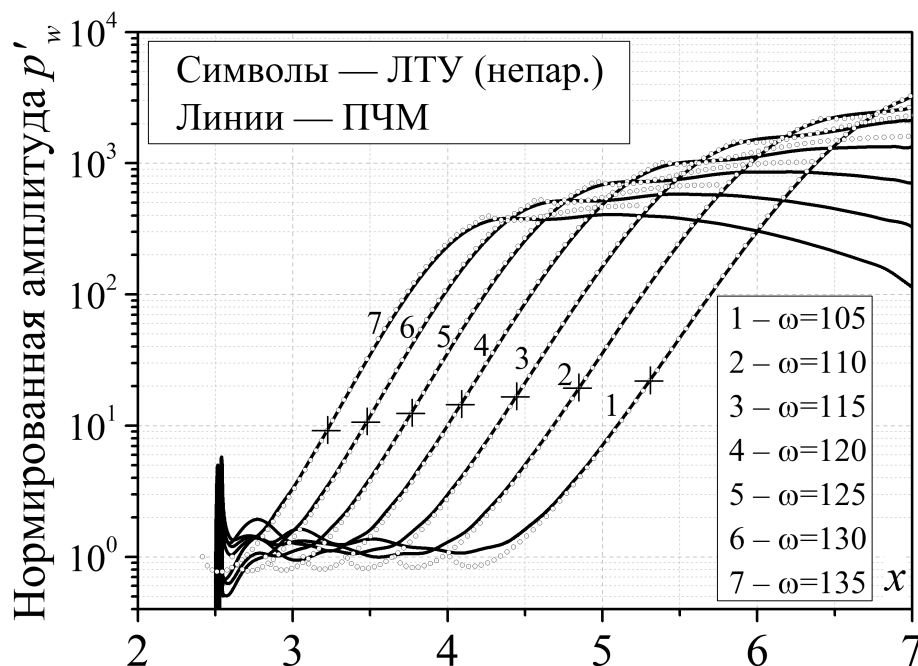
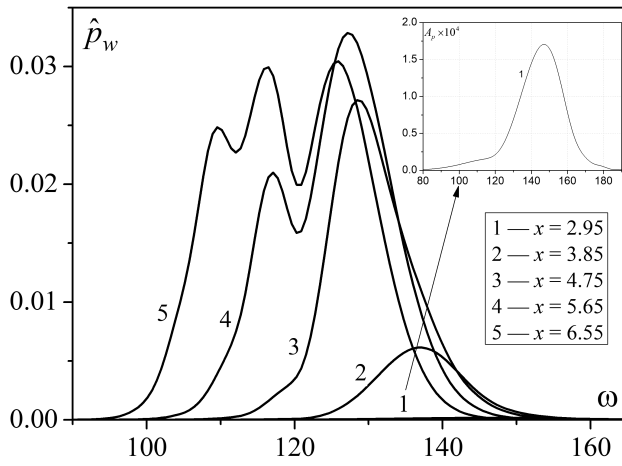
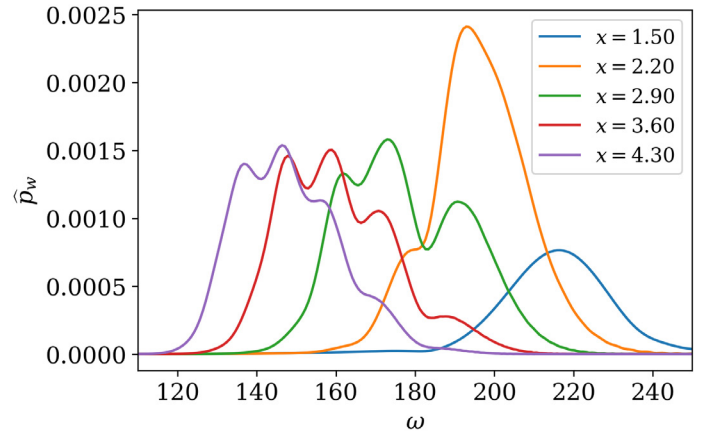


Рисунок 4.16 — Усиление различных гармоник низкочастотного НЧ пакета. Крестиками отмечены места нормирования результатов ПЧМ на результаты ЛТУ



а) НЧ пакет

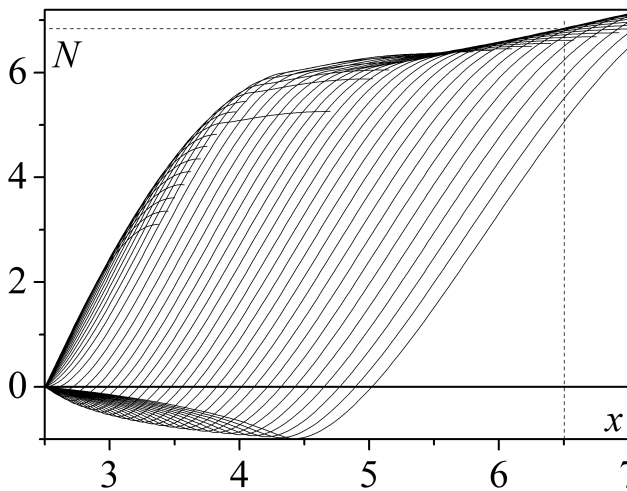
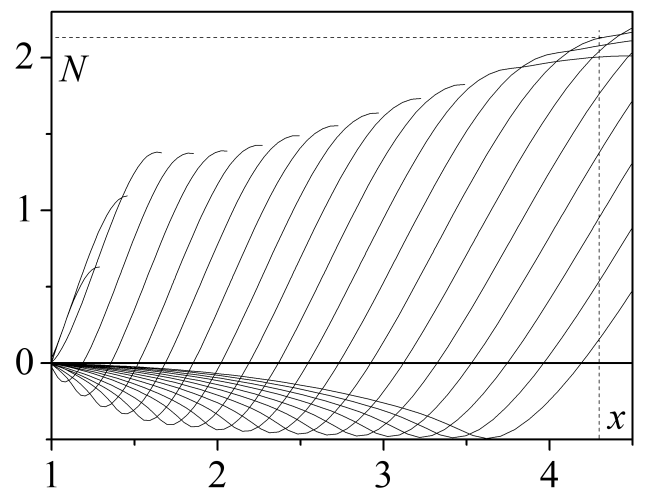


б) ВЧ пакет

Рисунок 4.17 — Спектры волновых пакетов в различных сечениях $x = \text{const}$

движения вниз по потоку исходный спектр растущей моды становится уже, а его начальная неравномерность проявляется всё слабее на фоне растущего максимума. Возмущения устойчивых мод затухают вниз по потоку. Обсудим оба этих эффекта.

Распределения факторов интегрального усиления (N -факторов) для НЧ и ВЧ волновых пакетов, рассчитанных по ЛТУ из фиксированной точки, представлено на рис. 4.18. Спектр НЧ пакета в наиболее дальнем сечении $x = 6.55$, представленном на рис. 4.18а, соответствует достаточно большому значению $N \approx 7$, и асимптотическое решение должно быть справедливо в этом сечении. Аналогичный спектр для ВЧ пакета ($x = 4.3$, рис. 4.18б) соответствует малому усилению $N \approx 2$, что ставит под сомнение применимость асимптотики дальнего поля.

а) НЧ пакет, $x_0 = 2.5$ б) ВЧ пакет, $x_0 = 1.0$ Рисунок 4.18 — Интегральное усиление возмущений, рассчитанное по ЛТУ из фиксированной точки x_0

Эффект затухания немодальных возмущений можно оценить, рассматривая спектры относительно некоторого сечения $x = x_0$. Такие спектры представлены на рис. 4.19 в логарифмическом масштабе. При $x_0 = 2.5$ нормировка происходит непосредственно на спектр генератора возмущений, и множественные максимумы, отмеченные на рис. 4.17а, сохраняются. Спектры, нормированные в сечении $x_0 = 4$, обладают единственным максимумом, который растёт вниз по потоку и монотонно смещается в область низких частот, что качественно согласуется с результатами линейной теории устойчивости.

Таким образом, необычное поведение спектров на рис. 4.17б может объясняться как невыходом на асимптотический режим, так и медленным затуханием других мод, возбуждённых генератором в пограничном слое.

4.3. Влияние спонтанного излучения на переход к турбулентности

Изложенные выше результаты были подтверждены в работе [202], где отмечено, что спонтанное излучение является механизмом для передачи энергии из пограничного слоя во внешнее невязкое течение. В частности, отмечено, что излучает лишь хвостовая часть волнового пакета, в которой сосредоточена сверхзвуковая мода и которая располагается вблизи верхней ветви нейтральной кривой (то есть там, где неустойчивость практически закончила свой рост). В то же время передняя часть волнового пакета является дозвуковой, не излучает энергию во внешнее течение и подвержена основному механизму роста. Это утверждение [202] можно

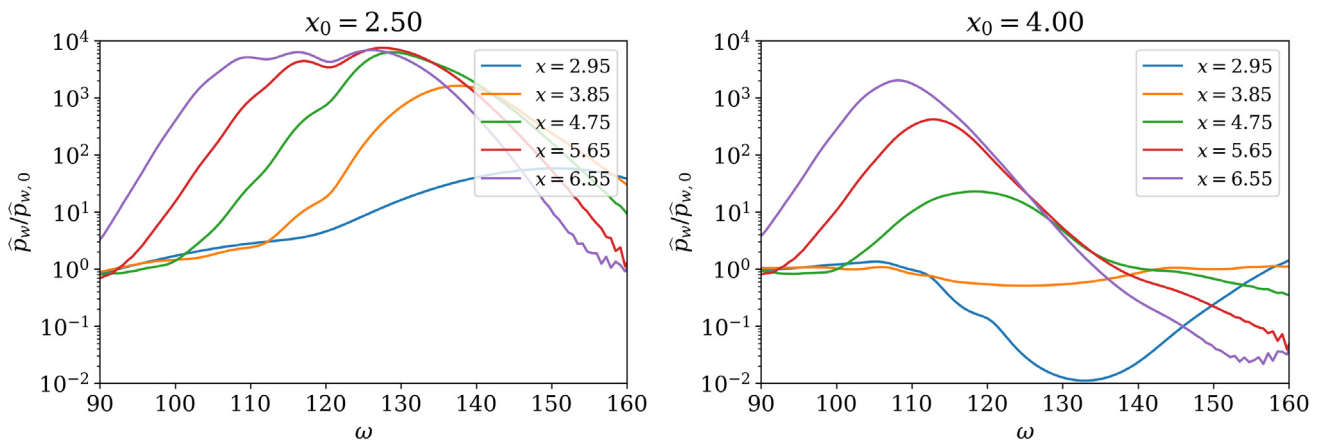


Рисунок 4.19 — Амплитудные спектры НЧ пакета в различных сечениях $x = const$, нормированные в сечении x_0

интерпретировать как сомнение в том, что спонтанное излучение способно влиять на ламинарно-турбулентный переход сверхзвукового пограничного слоя над охлаждаемыми поверхностями.

После получения изложенных результатов автор диссертации численно исследовал формирование турбулентных клиньев и пятен на режиме спонтанного излучения. К сожалению, из-за недостатка вычислительных ресурсов удалось завершить меньше половины запланированных расчётов. Проведённые расчёты показали, что влияние спонтанного излучения на процесс перехода к турбулентности маловероятно.

Следует отметить, что относительно недавно этот вывод подтверждён путём параметрического численного моделирования развития турбулентных пятен [201]. Отмечено, что излучение акустической энергии из пограничного слоя даёт на порядок меньший вклад, чем усиление второй моды, вызванное охлаждением поверхности. Поэтому спонтанное излучение практически не оказывает влияния на переход к турбулентности.

В связи с этим изложение и анализ результатов трёхмерного моделирования волновых пакетов и турбулентных пятен, полученных автором диссертации, представляется излишним.

4.4. Выводы по главе

В рамках численного моделирования подтверждены предсказания линейной теории устойчивости о том, что вторая мода, развивающаяся в пограничном слое над заострённой пластиной с достаточно сильно охлаждённой поверхностью, может излучать акустические волны во внешнее невязкое течение. Численные и теоретические результаты согласуются друг с другом.

Данный эффект — эффект спонтанного излучения звука — вызван синхронизацией второй моды с непрерывным спектром медленных акустических волн. В области синхронизма волны второй моды движутся со сверхзвуковой скоростью по отношению к внешнему невязкому течению, а их фазовые и спектральные характеристики оказываются очень близки к характеристикам медленных акустических волн. Явление спонтанного излучения не оказывает существенного влияния на процесс перехода к турбулентности.

Глава 5. Развитие возмущений над углом разрежения

Обтекание элементов сверхзвуковых летательных аппаратов сопряжено с образованием зон разгона и торможения потока. В них пограничный слой может взаимодействовать со скачками уплотнения, отрываться и формировать зоны повышенного теплообмена при последующем присоединении к поверхности. Турбулизация пограничного слоя значительно усиливает этот эффект. Зоны разгона потока с благоприятным (отрицательным) градиентом давления встречаются на практике не реже, чем зоны торможения (см. напр., [203–206]). Тем не менее большинство расчётных, теоретических и экспериментальных работ посвящено именно конфигурациям в угле сжатия, включая ламинарное, переходное и турбулентное состояние пограничного слоя (см., напр., [207]). Несмотря на способность благоприятного градиента давления приводить к частичной или полной стабилизации пограничного слоя (например, к возврату турбулентного течения в ламинарное состояние, или к реламинаризации [208]), течения разрежения получили значительно меньше внимания научного сообщества [209].

Проблема реламинаризации исследовалась с середины прошлого века. Изучение дозвуковых турбулентных течений в присутствии большого отрицательного градиента давления указало на возможность полной реламинаризации пограничного слоя [210–213], которая связана с искривлённым характером линий тока, а также благоприятными продольным и нормальным градиентами давления, которые приводят к быстрому сокращению масштаба турбулентных пульсаций на разгонном участке течения [214]. Величина продольного градиента статического давления и число Рейнольдса набегающего потока были отмечены как основные параметры течения, влияющие на возникновение и развитие процесса реламинаризации. По этим параметрам и параметрам, характеризующим состояние пограничного слоя, были предложены различные критерии реламинаризации [214].

На сверхзвуковом режиме течения реламинаризация ведёт к значительному снижению сил вязкого трения и теплоотдачи от горячего газа к обтекаемой поверхности. На базе данных, полученных для умеренно сверхзвуковых течений ($M_\infty < 2.3$), предпринимались попытки определить критерий реламинаризации, экстраполируя низкоскоростные данные [214].

Для больших чисел Маха экспериментально установлено, что эффекты сжимаемости преобладают над другими эффектами во внешней части пограничного слоя

(напр., [215; 216]). К эффекту сжимаемости относится слабое затухание и увеличение размера крупномасштабных вихревых структур в течении разрежения. В [215] отмечено значительное подавление сдвиговых напряжений Рейнольдса, вследствие чего крупные вихри ослабевают вниз по потоку. Также в ряде работ отмечается значительное подавление мелкомасштабных структур сразу за веером волн разрежения. Например, в экспериментах [217] при $M_\infty = 6$ за коническим углом разрежения 5° подавляются волны неустойчивости, что приводит к значительному ослаблению пульсаций давления на поверхности и рассеиванию возмущений во внешнее течение. Эти выводы так или иначе подтверждаются в экспериментах [218; 219] при $M_\infty = 4.9$, где обнаружено, что область перемежаемости пограничного слоя в разгонном течении сокращается, смещаясь к его границе. Это затрудняет подмешивание газа из внешнего течения в пограничный слой.

В экспериментах [220] при $M_\infty = 4$ показана возможность частичной реламинаризации пограничного слоя (пристенная часть до 40% от его полной толщины). Отмечено, что рост числа Рейнольдса приводит главным образом к увеличению протяжённости реламинаризованного участка течения, а больший разгон потока (больший отрицательный градиент давления) в области взаимодействия приводит к всё большему ослаблению турбулентных пульсаций. Отмечено, что критерии реламинаризации, полученные при дозвуковых скоростях, можно применять при сверхзвуковых скоростях. Эксперименты [221] при $M_\infty = 5 \dots 8$ косвенно подтверждают стабилизирующее влияние благоприятного градиента давления на теле вращения «оживало-конус-конус-цилиндр», а также указывают на реламинаризацию турбулентного клина за изолированной неровностью поверхности (реламинаризация наблюдалась по картинам теплового потока, полученным методом чувствительных к температуре люминофоров, современное состояние которого изложено в [65]).

Следует отметить работу [208]. В ней путём обобщения различных экспериментальных данных показано, что реламинаризация течения в угле разрежения хорошо коррелирует с величиной параметра

$$\tilde{\beta} = \frac{dp^*}{dx^*} \frac{\delta^*}{\tau_w^*} \sim \frac{\Delta p^*}{\delta^*} \frac{\delta^*}{\tau_w^*} = -\frac{c_p}{c_f} \gtrsim 70,$$

где Δp — перепад давления при прохождении угла разрежения, а τ_w — трение непосредственно перед углом. Отмечая, что коэффициент давления меняется слабо (до двух раз) в изученных экспериментах, $c_p \gtrsim -0.2$, и используя модель течения Прандтля — Майера над углом разрежения величиной ε , автор [208] приводит

критерий реламинаризации

$$\varepsilon_{cr} \gtrsim 5.74^\circ \cdot \sqrt{M_e^2 - 1},$$

который допустимо использовать, по крайней мере, при $M_e \leq 3$ и $Re_{\delta_2, x=0} \lesssim 10^5$. В случае $M_e = 3$, который рассматривается в настоящей главе, критерий даёт $\varepsilon_{cr} = 16.2^\circ$, а в случае $M_e = 6$ — $\varepsilon_{cr} = 34.0^\circ$.

Экспериментальные работы, такие как [221], дают хорошую тестовую базу для разработки расчётных моделей данного типа течений, применимых совместно с уравнениями Рейнольдса и методом крупных вихрей. Однако из-за вычислительной сложности имеется очень мало публикаций по прямому численному моделированию устойчивости ламинарного течения и реламинаризации турбулентного течения при сверхзвуковых скоростях. Одними из немногих работ являются [222] при $M_\infty = 2.9$ и [223] при $M_\infty = 2.7$. В этих работах рассмотрено турбулентное обтекание угла разрежения. Обнаружена двухслойная структура разгонного течения вблизи угла, подтверждающая экспериментальные наблюдения. Течение в верхнем слое характеризуется сильным подавлением турбулентных пульсаций, которые медленно восстанавливаются вниз по потоку. В нижнем слое пульсации подавляются только в небольшой окрестности области поворота и быстро восстанавливаются вниз по потоку.

Применимость известных критериев реламинаризации, таких как описанный выше критерий [208], к обтеканию углов разрежения при $M_\infty > 3$ ставится под сомнение в расчётах методом уравнений Рейнольдса [224]. В целом, сверхзвуковые течения с резким разгоном потока (например, угол разрежения) исследованы недостаточно, в том числе в открытых источниках мало данных о линейной устойчивости таких течений.

В рамках ЛТУ было показано, что неблагоприятный (тормозящий) продольный градиент давления, порождаемый вогнутой поверхностью конуса при $M_\infty = 8$ [225], приводит к увеличению инкрементов второй моды. Невозмущённое поле течения было получено с помощью параболизированных уравнений Навье — Стокса в допущениях теории пограничного слоя. Расчёты [226] сверхзвукового ($M_\infty = 6$) пограничного слоя на плоской пластине подтверждают, что неблагоприятный продольный градиент давления приводит к увеличению инкрементов первой и второй неустойчивых мод, за счёт чего переход к турбулентности начинается выше по потоку. Однако процесс нелинейного распада возмущений для большинства актуальных сценариев перехода — фундаментального резонанса второй моды, или

К-типа распада; косого распада первой или второй моды — при этом качественно не изменяется.

Выводы [225; 226] подтверждаются в работе [227]. Рассматривается гиперзвуковое ($M_\infty \approx 7.9$) обтекание модели острого конуса с юбкой. Юбка имеет вогнутую или оживально выпуклую форму, обеспечивающую постоянный продольный градиент давления. При больших числах Рейнольдса начало перехода наблюдалось на безградиентной конической части модели, а его окончание — на искривлённой. Это подтверждает, что турбулентные пятна продолжают развиваться при появлении благоприятного градиента давления. При низких числах Рейнольдса, когда начало перехода оказывается на искривлённой поверхности, отмечается, что благоприятный градиент давления сдвигает переход вниз по потоку. В отличие от дозвукового случая, длина зоны перехода при этом сокращается по сравнению со случаем безградиентного течения на остром конусе. Автор [227] связывает это с ослаблением турбулентного теплообмена, а также с замедляющимся вниз по потоку ростом площади оживальной поверхности — турбулентное пятно будет покрывать такую поверхность быстрее. Из обзора следует, что турбулентные пульсации ослабевают в присутствии благоприятного градиента давления. Поэтому сокращение длины переходной зоны, по-видимому, вызвано именно фактором формы поверхности.

Роль благоприятного градиента давления в устойчивости сжимаемых течений исследовалась как для первой, так и для второй неустойчивых мод, $0 \lesssim M_e \lesssim 10$; работы немногочисленны. Как правило, рассматриваются различные невозмущённые течения, полученные в приближённых постановках, например: автомодельный пограничный слой с учётом градиента давления $M_e \sim 4.5$ [228] или неавтомодельный пограничный слой вдоль границы которого число Маха меняется по степенному закону [228–230]. Было показано, что благоприятный градиент давления стабилизирует обе моды, причём для первой моды частоты и волновые числа наиболее быстро растущего возмущения уменьшаются, а стабилизирующий эффект ослабляется с ростом числа Маха [230]. Для второй моды ($\beta = 0$) отмечалось, что частота наиболее неустойчивой волны может уменьшаться или увеличиваться [228; 229]. Однако за счёт уширения области неустойчивости низкочастотных возмущений частота *преобладающего* возмущения медленно понижается с ростом благоприятного градиента давления [231]. Последнее также наблюдается для случая угла разрежения при $M_\infty = 6$, который будет рассмотрен ниже.

Уместно отметить, что в [225; 226; 228–231] исследована устойчивость пограничных слоёв, рассчитанных в приближённой постановке для простых кон-

фигурций типа плоской пластины. Конфигурации, в которых пограничный слой перестраивается быстро на масштабе нескольких своих толщин, по-видимому, ранее не рассматривались. В рамках настоящей главы, в том числе, исследуется устойчивость пограничного слоя, рассчитанного для конфигурации угла разрежения в рамках полных уравнений Навье–Стокса.

Цель данной главы — исследовать развитие возмущений на конфигурациях с резкой перестройкой пограничного слоя, которая имеет место, например, над углом разрежения.

5.1. Постановка задачи

Для согласованности с другими разделами настоящей диссертационной работы выбраны режимы с числами Маха 3 и 6. На первом режиме преобладает первая неустойчивая мода пограничного слоя, которая активна в характерных полётных условиях с адиабатически прогретой стенкой (в расчётах настоящей главы рассматривается изотермическая стенка при $T_w = T_r$). На втором режиме могут быть неустойчивы как первая, так и вторая мода. Чтобы выделить эффект второй моды, рассматривается охлаждаемая стенка, для которой неустойчивость первой моды частично подавлена. Рассматриваемые конфигурации представлены в табл. 5.1. Для различных углов разрежения ε будем использовать сокращения: $\varepsilon = 0^\circ$ — FP¹; $\varepsilon = 5^\circ$ — EC05; $\varepsilon = 10^\circ$ — EC10, или EC².

¹Flat Plate — плоская пластина

²Expansion Corner — угол разрежения

Таблица 5.1 — Параметры набегающего потока и угла разрежения

M_∞	$Re_{\infty,L}$	T_∞^*, K	T_0^*, K	T_w^*, K	T_w/T_∞	T_w/T_0	ε	$\delta_1 \sqrt{Re_{\infty,L}/x}$
3	10^6	103.57	290.0	261.8	2.53	0.90	$0^\circ, 10^\circ$	5.50
6	10^6	73.17	600.0	150.0	2.05	0.25	$0^\circ, 5^\circ, 10^\circ$	7.82

5.1.1. Устойчивость автомодельного пограничного слоя

Возмущения вносятся в пограничный слой перед изломом поверхности (углом) с помощью генератора, размещённого на поверхности. Угол всегда расположен в точке $(x, y) = (0, 0)$. Расстояние от угла до острой передней кромки $|l_c| = 7.5$, положение и параметры генератора, температура поверхности (последняя в случае $M_\infty = 6$) подобраны на основе параметрических расчётов устойчивости автомодельного пограничного слоя на плоской пластине, показанного на рис. 5.1. Рассмотрим результаты этих расчётов для выбранных конфигураций.

Из рис. 5.2 видно, что область неустойчивости гармоник первой моды ($M_\infty = 3$) значительно шире, чем второй моды ($M_\infty = 6$). Продольная длина волны λ_x первой моды монотонно растёт вниз по потоку, а боковая длина волны λ_z остаётся практически неизменной. В случае второй моды, напротив, λ_x убывает вниз по потоку ($\lambda_z = \infty$ для плоских волн второй моды с $\beta = 0$). Однако волновой пакет с широким спектральным составом перестраивается вниз по потоку так, что длина преобладающей волны, которая соответствует верхней ветви нейтральной кривой, растёт с ростом x (рис. 5.3б). В обоих случаях такой рост соответствует росту пограничного слоя.

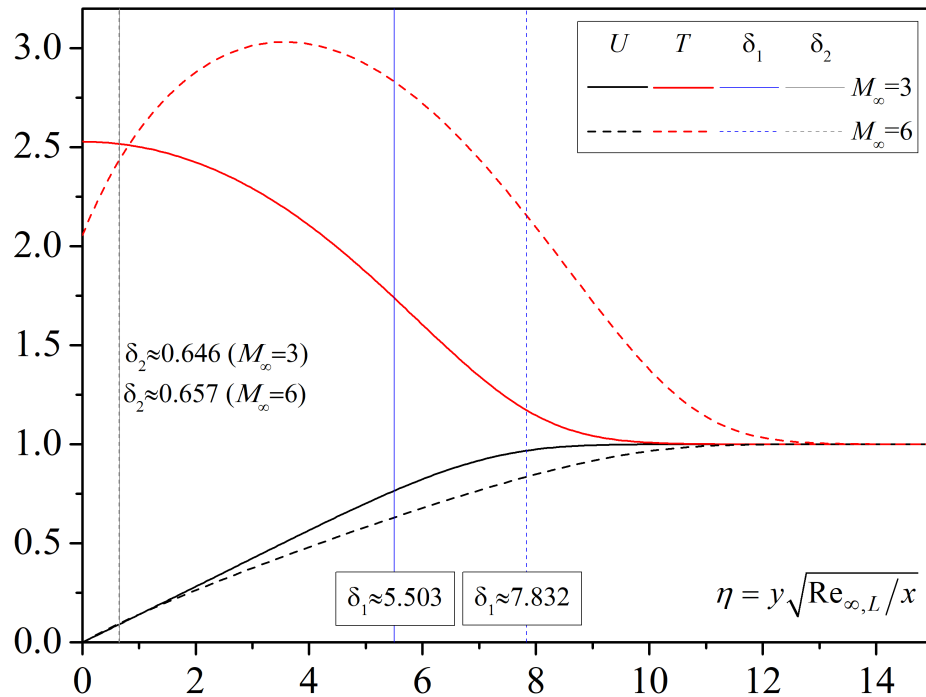


Рисунок 5.1 — Автомодельный пограничный слой на плоской пластине

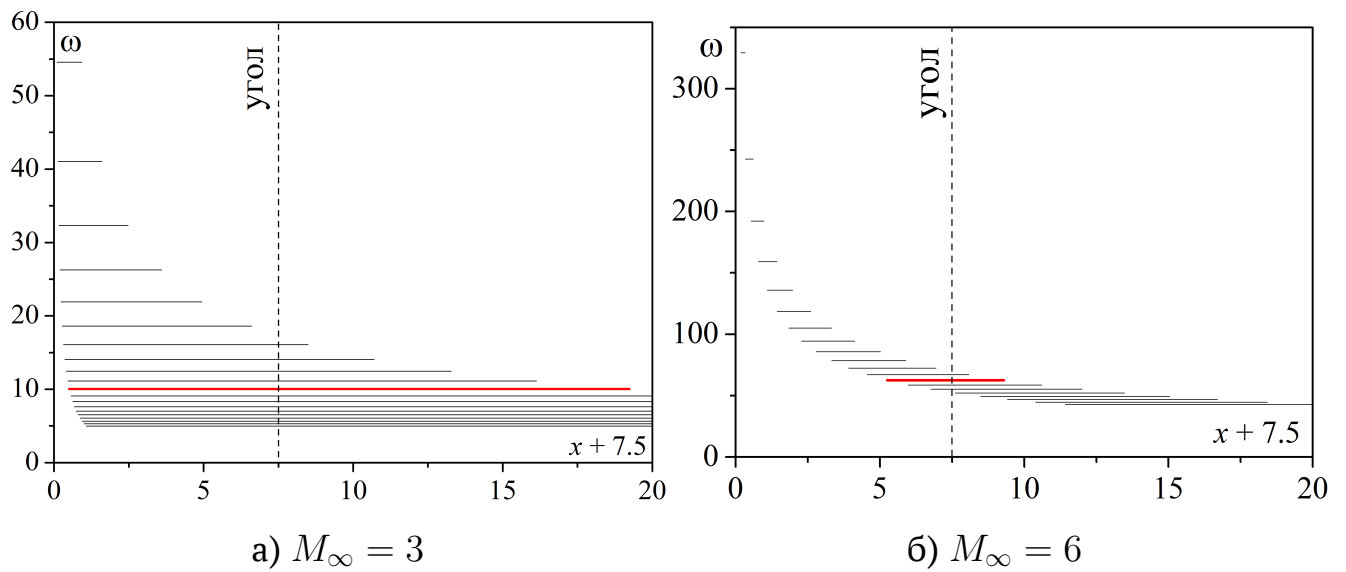


Рисунок 5.2 — Расчёт устойчивости автомодельного пограничного слоя: частота возмущений в их области неустойчивости

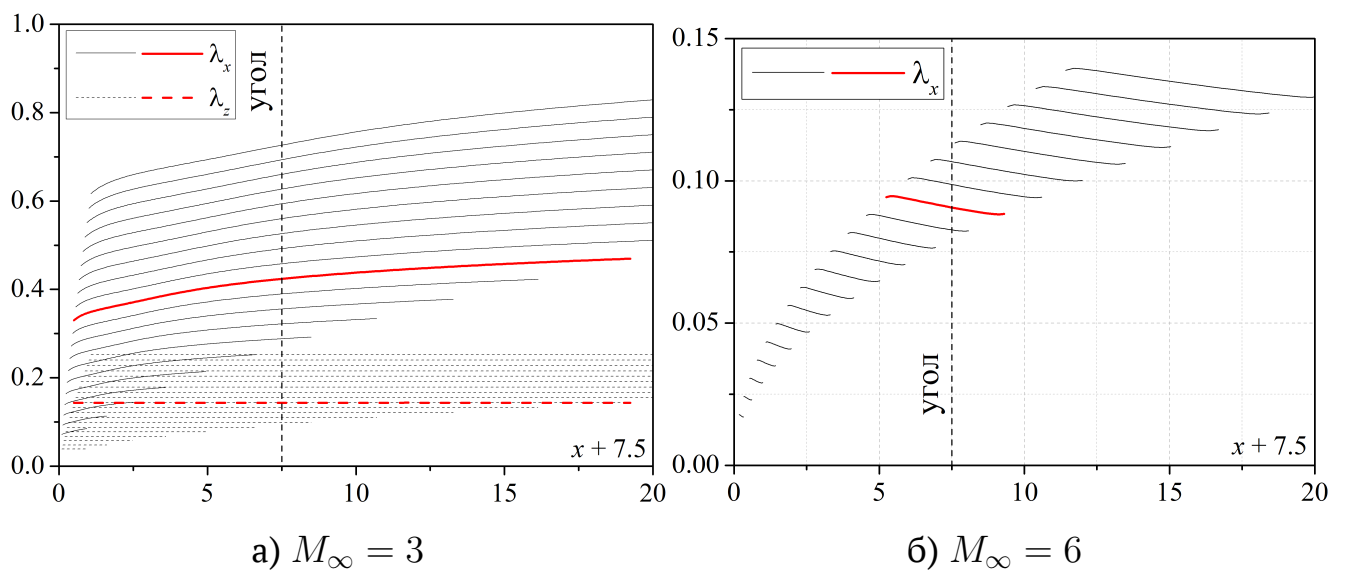


Рисунок 5.3 — Расчёт устойчивости автомодельного пограничного слоя: длины волн

Отмеченное различие в длине неустойчивой области для двух рассматриваемых случаев компенсируется различием в величине инкрементов усиления возмущений, $-\alpha_i$, — интегральные усиления возмущений оказываются близки. Это проиллюстрировано на рис. 5.4 кривыми N -факторов, которые получены в рамках метода e^N и демонстрируют монотонное практически экспоненциальное нарастание возмущений вниз по потоку.

5.1.2. Генератор возмущений

Красным цветом отмечена гармоника на частоте ω_* , которая продолжает расти при $x > 0$ и которую далее будем называть *целевой*. Развивающееся над углом возмущение (а следовательно, и начальное возмущение пограничного слоя при $x < 0$) должно содержать в своём спектральном составе окрестность данной гармонике. Для порождения такого возмущения на поверхности при $x \in [x_s, x_e] \times [z_s, z_e] \ni z$ в течение интервала времени $\Delta t = 2\pi/\omega_c$ включается бигармонический генератор массового расхода:

$$(\rho v)' = \epsilon \cos^3 \left(\pi \frac{x - 0.5(x_e + x_s)}{x_e - x_s} \right) \cos^3 \left(\pi \frac{z - 0.5(z_e + z_s)}{z_e - z_s} \right) (\sin(\omega_c t) + \sin(\omega_c t/2)), \quad (5.1)$$

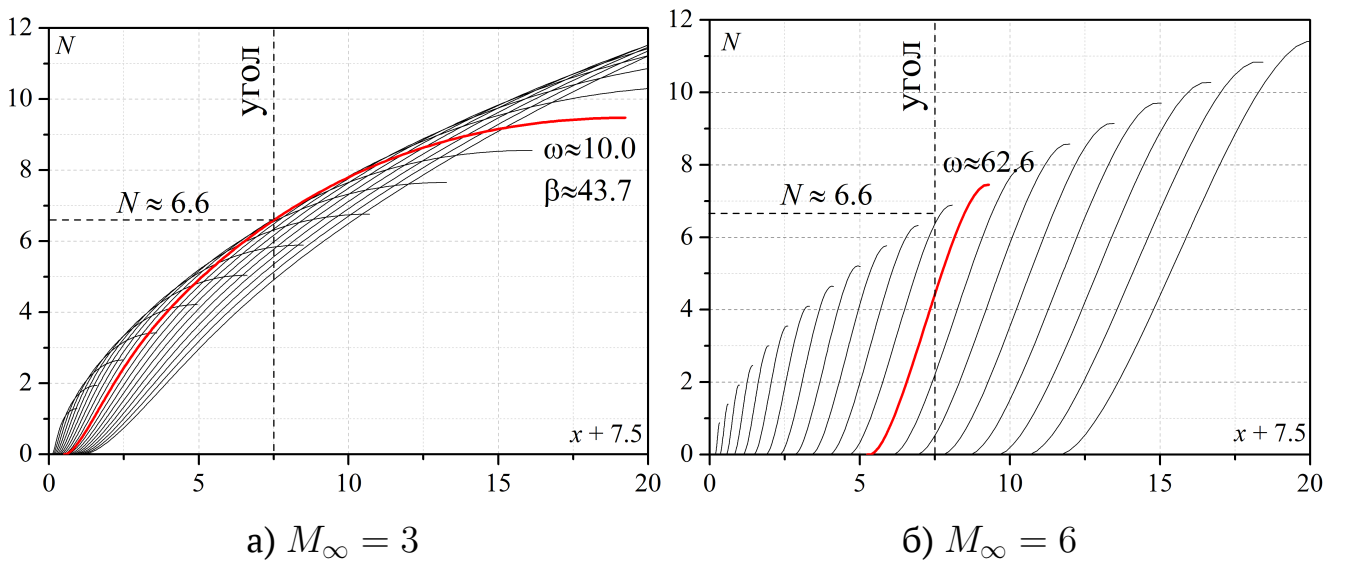


Рисунок 5.4 — Расчёт устойчивости автомодельного пограничного слоя: интегральное усиление возмущений

где $\omega_c > \omega_*$. Выбранные параметры генератора приведены в табл. 5.2.

При движении вниз по потоку частота преобладающей гармоники уменьшается (см. рис. 5.2). Поэтому гармоника ω_c преобладает выше по потоку, чем целевая гармоника ω_* . Частотный спектр генератора хорошо наполнен при $\omega < \omega_c$ и быстро выполаживается по мере уменьшения ω (рис. 5.5). Таким образом, порождаемый волновой пакет должен усиливаться в любом сечении пограничного слоя для $x > x_s$. При $M_\infty = 3$ выбрано значение $\omega_c = 2\omega_*$, а при $M_\infty = 6$ — $\omega_c \approx \omega_*$.

Размеры генератора таковы, чтобы обеспечить широкий пространственный спектр порождаемых возмущений. Этот спектр должен содержать целевую гармонику с корректными длинами волн $\lambda_{x,*}$, $\lambda_{z,*}$ (рис. 5.3), а генератор должен располагаться перед точкой потери устойчивости $x_{0,*}$, чтобы возмущение успело усиливаться в области $x < 0$. Поэтому размер генератора должен быть сопоставим с длиной волны целевой гармоники вблизи точки потери устойчивости — $x_e \approx x_s + \lambda_{x,*}(x_{0,*})$. В случае $M_\infty = 3$ область неустойчивости отдельно взятой гармоники широкая (рис. 5.2а) и $x_s = x_{0,*}$. В случае $M_\infty = 6$ области неустойчивости слишком узкие (рис. 5.2б), поэтому генератор помещён при $x_s < x_{0,*}$. В направлении z генератор имеет симметричную форму: $-z_s = z_e \approx \lambda_*(x_{0,*})/4$, где $\lambda = \lambda_z$ при $M_\infty = 3$ и $\lambda = \lambda_x$ при $M_\infty = 6$.

В зависимости от начальной амплитуды генератора ϵ , в пограничном слое могут развиваться низкоамплитудные волновые пакеты или существенно нелинейные образования — турбулентные пятна. Далее будут рассмотрены оба случая. Для них будут использованы сокращения WP^3 и TS^4 , соответственно.

³Wave Packet — волновой пакет

⁴Turbulent Spot — турбулентное пятно

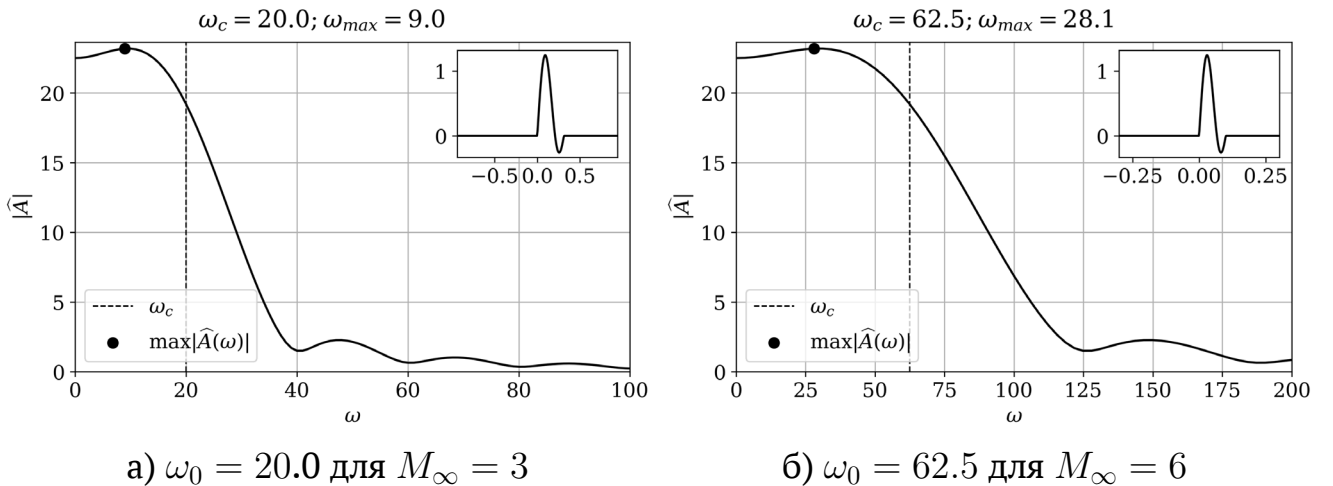


Рисунок 5.5 — Частотно-амплитудный спектр генератора возмущений

Несмотря на нестрогий подход к определению параметров генератора, порождаемые им возмущения имеют широкий плавный частотно-волновой спектр. В случае WP (малые возмущения) следует учесть достаточно большие значения интегрального усиления по мере приближения к углу ($N \approx 6.6$ при $x = 0$, рис. 5.4), что обеспечивает селективный характер усиления пограничного слоя. В случае TS, развитие больших нелинейных возмущений не должно существенно зависеть от предыстории их формирования из интенсивного волнового пакета. Таким образом, небольшой произвол в выборе параметров генератора приведёт лишь к незначительному количественному изменению результатов — основные выводы настоящей главы сохранятся.

5.1.3. Условия расчётов

Общий подход к расчёту возмущённых полей, представленный в подразделе 1.2.3.1, сохраняется. Рассмотрим особенности процедуры расчёта, применяемой ниже. Она состоит из пяти шагов и гарантирует одинаковые начальные поля *сформированных перед углом* возмущений внутри групп WP и TS.

Во-первых, методом установления по времени рассчитывается среднее течение на пластине при $-7.5 \leq x \leq 0.2$.

Во-вторых, под головной ударной волной, порождённой вязко-невязким взаимодействием, выделяется *первая* подобласть, левая входная граница которой расположена при $l = l_{min}$, $0 \leq y \leq y_{max}$, l — координата вдоль поверхности, измеряемая от угла ($l \equiv x$ при $x < 0$, $l = x / \cos \varepsilon$ при $x \geq 0$). Верхняя граница подобласти отдаляется от поверхности пропорционально толщине пограничного слоя δ_{99} , обеспечивая $C_\delta = y_{max}(x) / \delta_{99}(x) \approx const$. Параметры, связанные с подобластью 1, собраны в табл. 5.3.

В-третьих, установившееся в подобласти поле течения дублируется в боковом направлении в диапазоне $0 \leq z \leq z_{max}$; в направлении z накладываются граничные

Таблица 5.2 — Параметры генератора возмущений

M_∞	$2 \cdot \epsilon$, WP	$2 \cdot \epsilon$, TS	ω_c	x_s	x_e	z_s	z_e
3	10^{-6}	10^{-3}	20.042	-6.9923	-6.6623	-0.036	0.036
6	10^{-4}	10^{-1}	62.5	-4.1751	-4.0841	-0.02275	0.02275

условия симметрии. В момент времени $t = 0$ включается генератор возмущений, описанный выше. Расчётная сетка в первой подобласти имеет избыточное разрешение $N_x \times N_y \times N_z$ и обеспечивает $n_{x,*}$ точек на $\lambda_{x,*}$. Временное разрешение составляет $n_{t,*}$ шагов на период целевой гармоники $2\pi/\omega_*$. Развитие возмущений моделируется до момента времени t_{max} , когда их передний фронт приближается к сечению $l = 0$, а задний уже заметно удалился от $l = l_{min,1}$.

В-четвёртых, в соответствии с описанной выше процедурой рассчитывается невозмущённое течение в расширенной по x и z подобласти 2 над пластиной или углом разрежения: длина вдоль стенки $l \leq 6$; левая граница подобласти начинается при $l = l_{min}$, $0 \leq y \leq y_{max}$. Расширенная сетка разрешает длину волны базового возмущения на 45 точках. Поперечное разрешение пограничного слоя по нормали к поверхности не изменилось по сравнению с исходной сеткой в подобласти 1 и составляет примерно 100–120 сеточных линий. При $l > 6$ расширенная расчётная область замыкается буферной зоной. Следует отметить, что при $\varepsilon \neq 0$ и $l > 0$ величина C_δ увеличивается — внешняя граница удаляется от границы пограничного слоя. Параметры, связанные с подобластью 2, собраны в табл. 5.4.

В-пятых, рассчитывается поле возмущений, полученное в подобласти 1 (шаги 1–3). Оно добавляется к невозмущённому течению в расширенной подобласти 2 (шаг 4). Так как сетки в подобластях не совпадают узел в узел, для переноса возмущений применяется интерполяция 1го порядка точности. Таким образом, начальные поля возмущений в расширенной расчётной подобласти *одинаковы* для всех значений угла разрежения ε в пределах неизменного числа Маха. Следует подчеркнуть, что процедура переноса возмущений с сетки на сетку не вносит заметных паразитных возмущений в решение.

Расчёты продолжаются до тех пор, пока возмущения не покинут расчётную область, то есть пока максимальная поправка к зависимым переменным задачи на шаге по времени не достигнет величины 10^{-7} для волновых пакетов и 10^{-4} для турбулентных пятен во всём поле течения. После этого анализируется поле возмущения давления $p'_w(t, l, z)$ на поверхности.

Таблица 5.3 — Параметры расчётов в подобласти 1

M_∞	l_{min}	y_{max}	z_{max}	$N_x \times N_y \times N_z$	C_δ	$n_{x,*}$	$n_{t,*}$	t_{max}
3	−7.2	0.12	0.7	$2023 \times 262 \times 330$	24–26	90	125	7.5
6	−4.5	0.18	0.15	$4554 \times 233 \times 101$	10	90	100	4.3

Таблица 5.4 — Параметры расчётов в подобласти 2. Время t_{max} указано сразу для трёх конфигураций: FP / EC05 / EC10

M_∞	l_{min}	y_{max}	z_{max}	$N_x \times N_y \times N_z$	C_δ	$n_{x,*}$	$n_{t,*}$	$t_{max,WP}$	$t_{max,TS}$
3	-3.5	0.52	1.5	$1317 \times 262 \times 470$	30	45	125	20 / - / 20	30.5 / - / 26.5
6	-2.2	0.25	0.3	$4201 \times 233 \times 151$	10	47	100	20 / 17.5 / 17	20 / 20.5 / 20

Суммарная погрешность полученных в настоящей главе нестационарных полей возмущения оценивается в пределах 10% к концу расчётной области для случая волнового пакета (WP). В случае турбулентного пятна (TS) порождаются возмущения меньших масштабов, которые подвержены большему численному затуханию. Предполагается, что это обстоятельство не должно изменить выводы настоящей главы.

5.2. Вторая мода

5.2.1. Невозмущённое течение

Невозмущённое течение для случая $\varepsilon = 10^\circ$ показано на рис. 5.6. Его невязкое приближение известно как течение Прандтля — Майера [232]. В невязком анализе газодинамические величины течения мгновенно меняются при переходе через центр веера волн разрежения при $l = 0$ вблизи поверхности. Вязкое взаимодействие устраняет эту особенность. Поверхностное давление перестраивается на масштабе толщины невозмущённого пограничного слоя δ_0 непосредственно перед углом. Этот масштаб практически не зависит от величины угла разрежения ε . Профили температуры T и продольной компоненты скорости u перестраиваются на длине порядка $20\delta_0$, которая зависит от ε . Таким образом, при переходе через угол параметры на границе пограничного слоя и его толщина меняются быстро, но не скачкообразно.

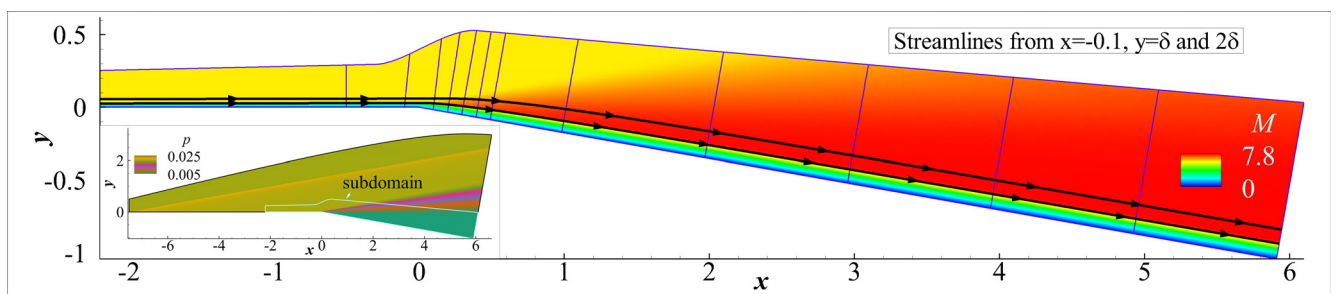


Рисунок 5.6 — Невозмущенное поле числа Маха в подобласти 2. Сплошными показаны линии тока (streamlines), проведённые через точки $x = -0.1, y = \delta$ и $x = -0.1, y = 2\delta$. На врезке: невозмущённое поле давления и граница подобласти 2 (subdomain)

На рис. 5.7 показаны профили модуля вектора скорости, температуры и числа Маха в нормальных к поверхности сечениях, которые отмечены на рис. 5.6. В области взаимодействия, расположенной сразу за углом, профили скорости неоднородно изогнуты. Далее вниз по потоку они постепенно возвращаются к поведению, свойственному автомодельному пограничному слою. Профили температуры и числа Маха иллюстрируют это более наглядно. Они также показывают, что параметры течения на верхней границе пограничного слоя меняются слабо при $l > 1$, где веер волн разрежения уже удалился от пограничного слоя на заметное расстояние.

На рис. 5.8 показаны две линии тока, проходящие через сечение $l = -0.1$ на высотах δ_0 и $2\delta_0$. Полагая, что они распространяются синхронно с ростом толщины пограничного слоя, рассмотрим нелинейную аппроксимацию их формы с помощью степенной зависимости $d_w = A|l - l_0|^b + d_{w0}$. Врезка на рис. 5.8 демонстрирует, что при $l > 1 \approx 33\delta_0$ показатель степени b стремится к значению 0.5, которое соответствует безградиентному автомодельному пограничному слою над плоской пластиной.

Опираясь на это наблюдение, можно заключить, что отношение толщин пограничного слоя на угле EC10 и на плоской пластине FP при фиксированном l должно стремиться к постоянной величине вдали от области взаимодействия $l \approx 0$. Такое отношение можно оценить, используя теорию Прандтля — Майера и предполагая постоянным массовый расход газа в пограничном слое:

$$\frac{\delta_{EC}}{\delta_{FP}} = \frac{\rho_1 U_1}{\rho_2 U_2} = \frac{\rho_1 M_1}{\rho_2 M_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{M_1}{M_2}. \quad (5.2)$$

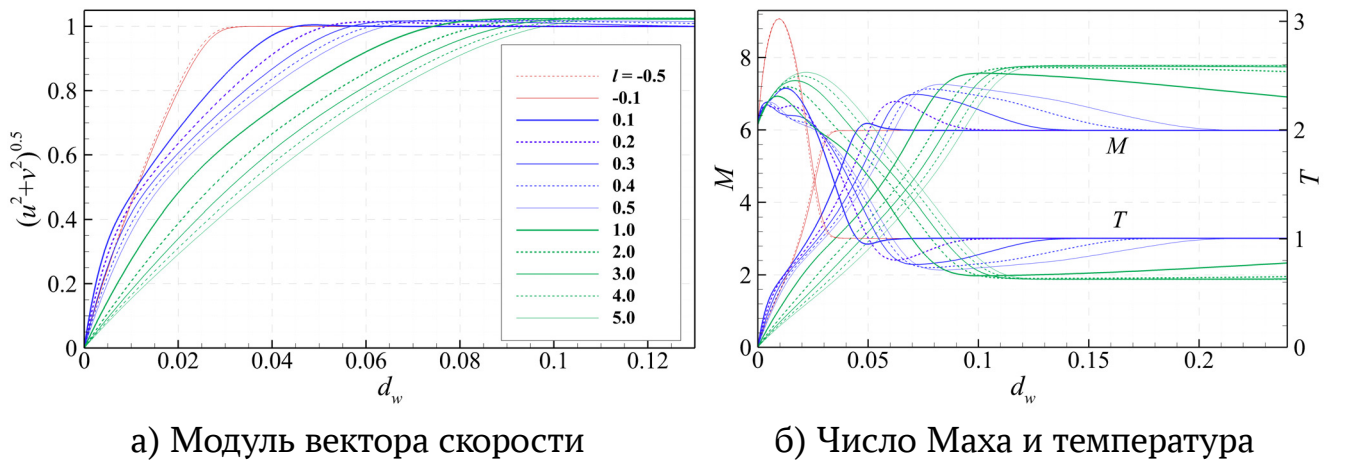


Рисунок 5.7 — Профили невозмущённого течения по нормали к поверхности в разных сечениях $l_w = const$

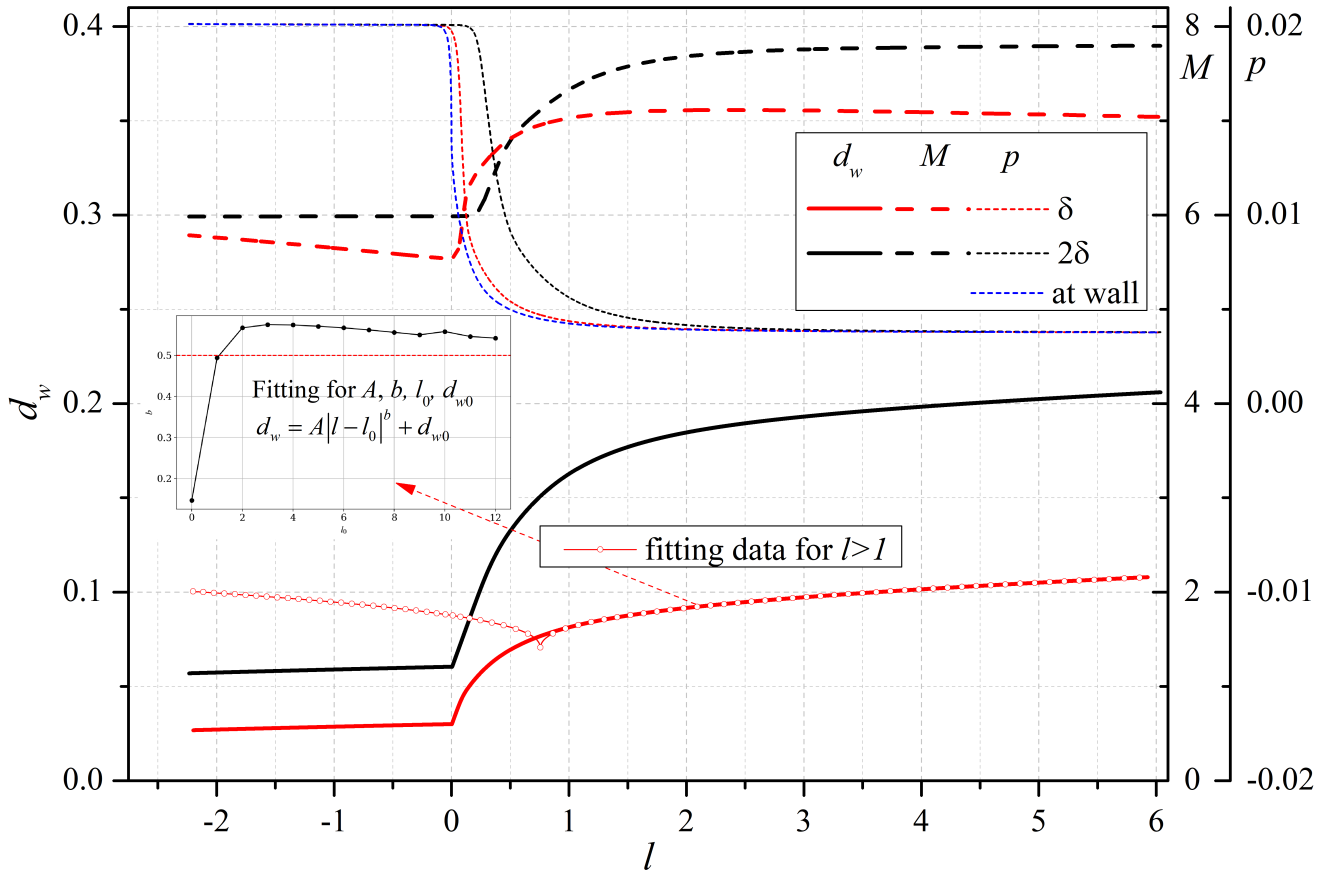


Рисунок 5.8 — Распределение числа Маха и давления вдоль линий тока EC10, проходящих через точки $(l, y) = (-0.1, \delta_{99})$ и $(-0.1, 2\delta_{99})$ и изображённых на рис. 5.6, а также расстояние d_w от этих линий до поверхности. На врезке: показатель степени нелинейной аппроксимации $d_w(l)$ при $l > 1$

Соотношение (5.2) используется далее для быстрой оценки частоты неустойчивой области. Подстановка предельных значений числа Маха на границе пограничного слоя перед углом, $M_{e,1} \approx 6$, и после него, $M_{e,2} = M_{e,EC10} \approx 7.85$, в (5.2) даёт $\delta_{EC10}/\delta_{FP} \approx 3.3$.

5.2.2. Анализ устойчивости

Анализ линейной устойчивости невозмущённого течения из подраздела 5.2.1, которое получено в рамках уравнений Навье — Стокса, показывает, что над углом разрежения существует только одна неустойчивая мода — вторая мода по терминологии Мэка [45]. Несмотря на заметное отклонение профилей пограничного слоя от случая плоской пластины, процедура глобального поиска неустойчивостей не

выявила новых мод. Известно, что наиболее быстро растут плоские волны второй моды, $\beta = 0$; их длина пропорциональна местной толщине пограничного слоя ($\lambda \approx 2\delta$), а фазовая скорость близка к скорости невязкого течения ($c \approx 0.9u_e$). Поэтому отношение характерных частот неустойчивостей за углом, f_2 при $l > 1$, и перед углом, f_1 при $l < 0$, можно оценить как $f_2/f_1 = \lambda_1/\lambda_2 \cdot c_2/c_1$. Из рис. 5.7а видно, что $u_{e1} \approx u_{e2}$. Поэтому отношение фазовых скоростей близко к единице и

$$\frac{f_2}{f_1} \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \approx \frac{\delta_1}{\delta_2}. \quad (5.3)$$

Используя оценку (5.2), получаем $f_2/f_1 \approx 0.6$ в случае ЕС05 и $f_2/f_1 \approx 0.3$ в случае ЕС10. В рамках линейной теории частота элементарной волны, распространяющейся с малой амплитудой в невозмущённом пограничном слое, сохраняется. Поэтому ожидается, что высокочастотные возмущения на частоте $f \sim f_1$, к которым пограничный слой был неустойчив перед углом, могут оказаться в устойчивой области пограничного слоя за углом и, таким образом, будут затухать. Для низкочастотных возмущений на частоте $f \sim f_2$ ситуация обратная: они находятся в устойчивой области перед углом при $l < 0$ и попадают в неустойчивую область за углом при $l \gtrsim 1$. Это предположение подтверждается результатами линейной теории устойчивости, которые обобщены на рис. 5.9.

На пластине (FP, чёрные линии) огибающая N -факторов монотонно растёт. При $l = 0$ максимальное усиление $N_{max} \approx 6.6$ соответствует волне с частотой 113 кГц ($\omega \approx 69$), для которой нейтральная точка расположена при $l \approx -3.2$. Так как влияние угла разрежения вверх по потоку практически отсутствует, N -факторы при $l < 0$ остаются идентичными во всех трёх случаях. За углами разрежения ЕС05 и ЕС10 ситуация меняется кардинально. Изначально растущие высокочастотные возмущения быстро затухают, а низкочастотные возмущения начинают нарастать. Следует отметить, что кривая N -фактора для возмущения $\omega \approx 69$ переходит в огибающую N -факторов для случая ЕС05 (толстая красная линия) и случая ЕС10 (толстая синяя линия). Все нарастающие при $l = 0$ возмущения, для которых кривые N -факторов расположены под огибающей (их частоты ниже 113 кГц), затухают за углом, а их N -факторы следуют практически параллельно своим огибающим (опущено на рис. 5.9 для читаемости). Таким образом, волновой пакет второй моды должен монотонно затухать в области за углом разрежения, причём частота его преобладающей гармоники должна сохраняться. Описанное поведение наблюдается далее в прямом численном моделировании.

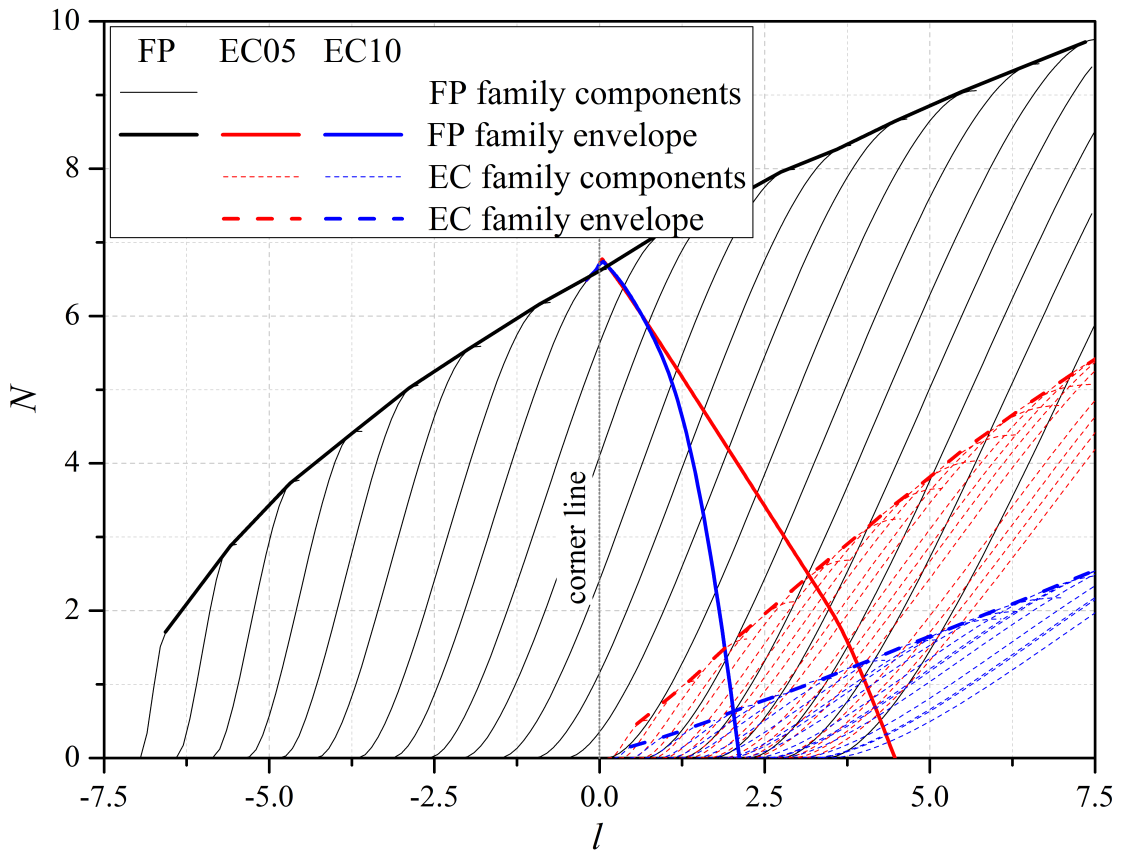


Рисунок 5.9 — Факторы интегрального усиления отдельных гармоник (тонкие линии) второй моды и их огибающие (толстые линии), полученные в рамках e^N метода для ПЧМ (пограничный слой из раздела 5.2.1); family components (envelope) — семейство линий (их огибающая), которые соответствуют нарастающим возмущениям перед углом (FP) и за ним (EC)

Рисунок 5.9 также показывает, что эффективность стабилизации растёт с ростом угла разрежения ε : затухание высокочастотных возмущений проявляется сильнее, а рост низкочастотных возмущений при $l > 0$ — слабее. Точки, где огибающие затухающего и растущего пакета пересекаются, расположены при $l \approx 3.3$ для угла EC05 и $l \approx 2.2$ для угла EC10. В этих точках преобладающие низкочастотные возмущения имеют частоты 56 кГц ($\omega \approx 34.2$) и 35 кГц ($\omega \approx 21.4$), соответственно.

5.2.3. Линейный режим

Эволюция волновых пакетов, сформированных при $l \approx -4.2$, показана на рис. 5.10 для пластины (FP, верхняя половина каждого подрисунка) и угла $\varepsilon = 10^\circ$ (EC10, нижняя половина). Сначала волновые пакеты развиваются идентично

(рис. 5.10а – в): они растут вниз по потоку и выглядят, как ряд плоских волновых фронтов, что типично для второй неустойчивой моды сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине. Веер волн разрежения не оказывает влияния на волновой пакет перед углом (при $l < 0$). Заметная продольная модуляция амплитуды возмущений (рис. 5.10г – е) в случае плоской пластины вызвана неоднородностью начального спектра волнового пакета, сформированного за генератором возмущений, а также эффектом спонтанного излучения звука при схожих параметрах набегающего потока (детали даны в главе 4). За углом разрежения волновые пакеты быстро затухают (рис. 5.10г–е) и не восстанавливаются в оставшейся части расчётной области. Таким образом, течение за углом разрежения оказывается устойчивым по отношению к возмущениям, преобладавшим перед углом. В случае ЕС05 эволюция волнового пакета протекает аналогично случаю ЕС10, но затухание волнового пакета выражено слабее (детали не приводятся для краткости).

Распределение амплитуды возмущения давления на поверхности (рис. 5.11) показывает, что в случае ЕС10 амплитуда уменьшается на порядок в области $0 < l < 0.7$ и становится пренебрежимо малой при $l > 1.5$. В случае ЕС05 эффект стабилизации проявляется похожим образом.

Рассмотрим частотно-волновой состав возмущений $p'_w(z, t)$ в нескольких характерных сечениях $l = \text{const}$. Перед углом, $l < 0$, спектры идентичны во всех

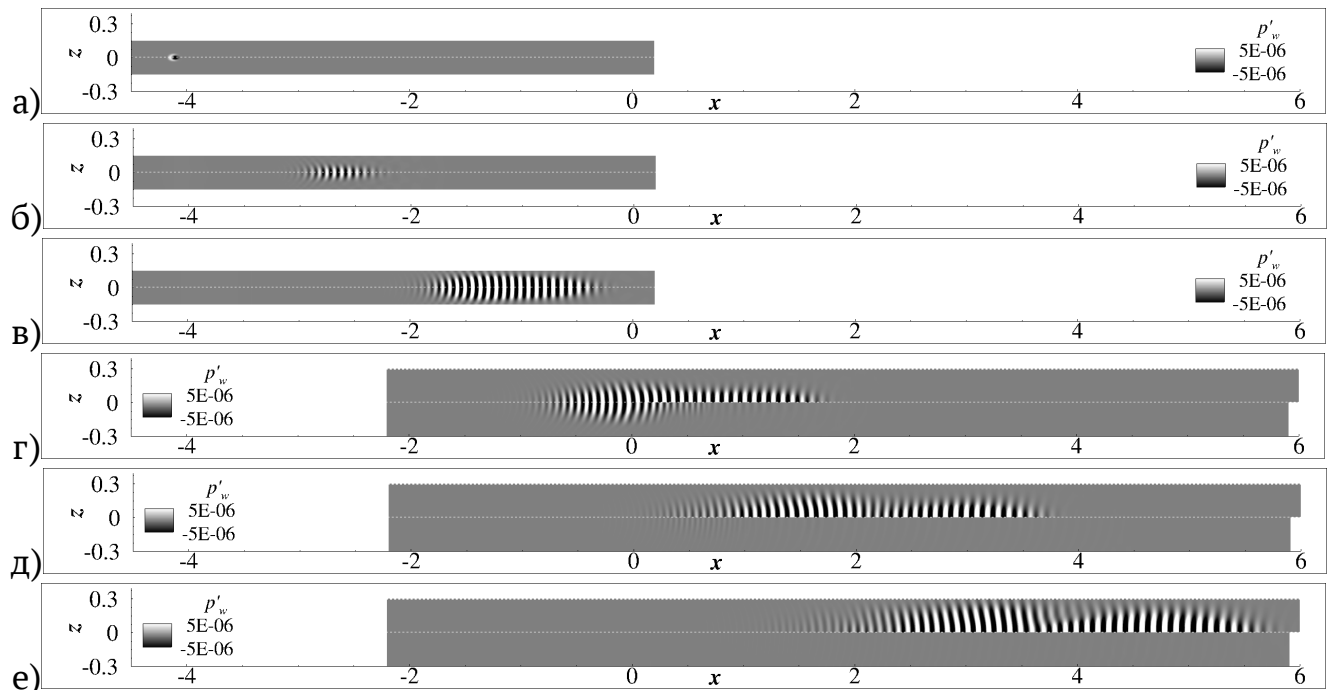


Рисунок 5.10 — Отпечатки поля возмущения давления на поверхности в моменты времени: а — 0.1, б — 2.15, в — 4.3, г — 6.45, д — 8.6, е — 10.75; вид сверху; WP. Верхняя половина каждого подрисунка — FR, нижняя половина — ЕС10

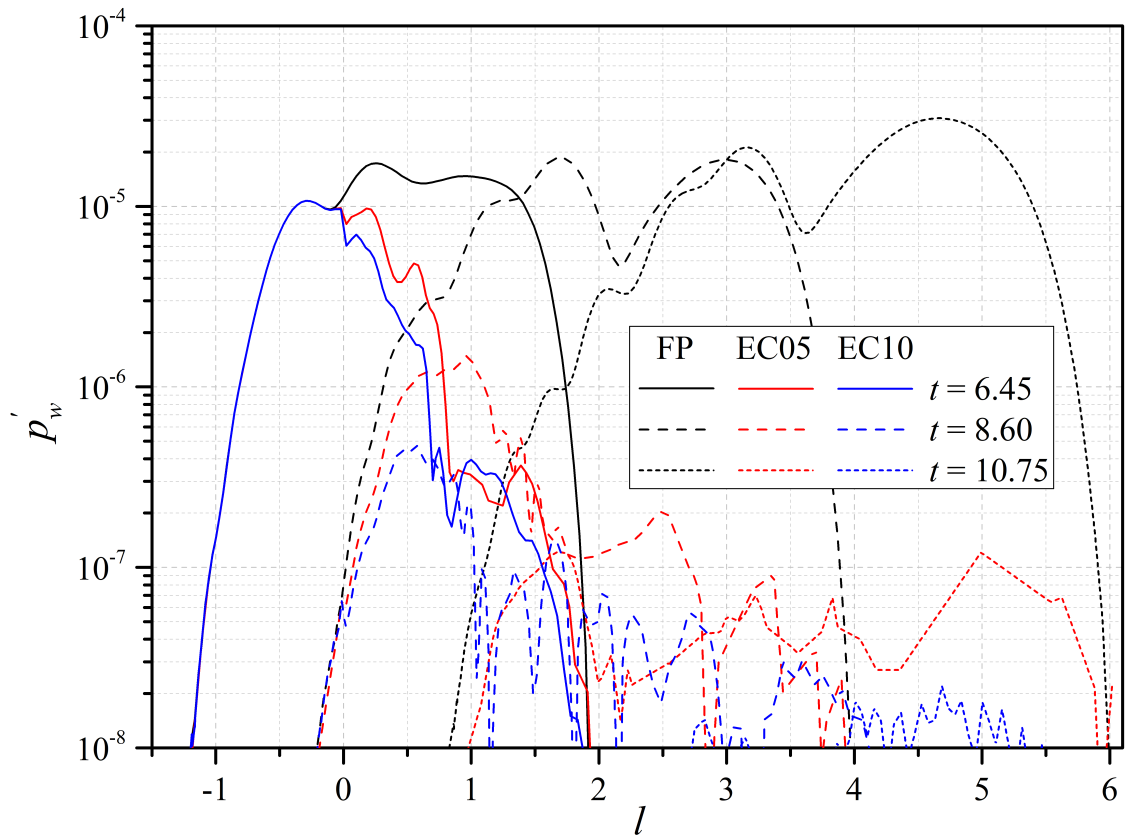


Рисунок 5.11 — Амплитуда $p'_w(t, l, z)$ при $z = 0$ в несколько моментов времени, WP

рассматриваемых случаях, как продемонстрировано на рис. 5.12: левая половина каждого подрисунка, соответствующая плоской пластине, является зеркальным отражением правой половины, соответствующей углу разрезания. Волновые пакеты возбуждаются в широком спектральном диапазоне, включая область, в которой пограничный слой является локально неустойчивым. По мере развития волнового пакета наибольший рост проявляют плоские волны в окрестности $\beta = 0$, которые начинают преобладать в волновом пакете. Такое поведение согласуется с предсказаниями ЛТУ и подтверждает эффективность возбуждения волновых пакетов второй моды с помощью генератора (5.1).

На рис. 5.13 и 5.14 изображены аналогичные спектры в нескольких сечениях за углом. На плоской пластине (FP) возмущения развиваются аналогично области $l < 0$. При прохождении над углом разрезания преобладающее в пакете возмущение затухает. Однако помимо затухания исходных волн проявляются новые низкочастотные плоские волны $\beta \approx 0$, которые формируют новый максимум. В случае EC10 их характерная частота примерно втрое меньше, чем частота максимума исходного волнового пакета, что согласуется с оценкой по формуле (5.3).

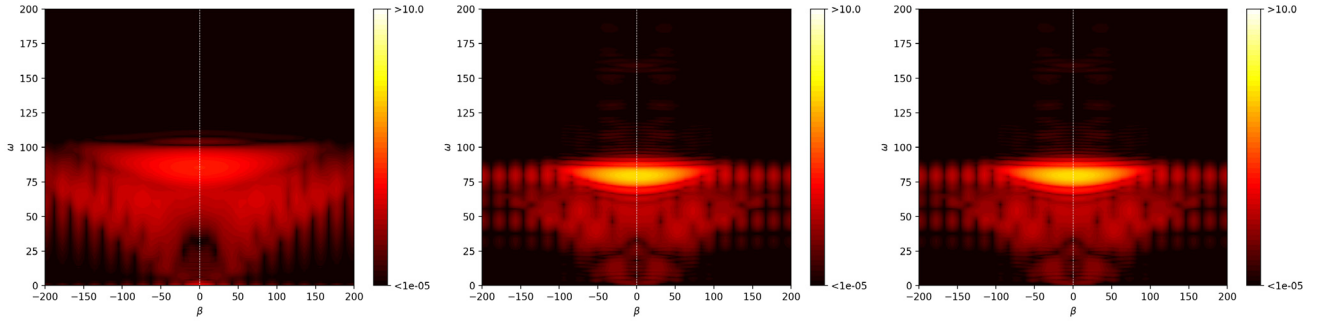


Рисунок 5.12 — Спектры $p'_w(t, z)$ перед углом при $l = -3.5, -2, -0.5$ (слева направо). Левая половина каждого подрисунка — FP, правая половина — EC05 или EC10 (идентичны). Цветовая палитра задана в масштабе \log_{10}

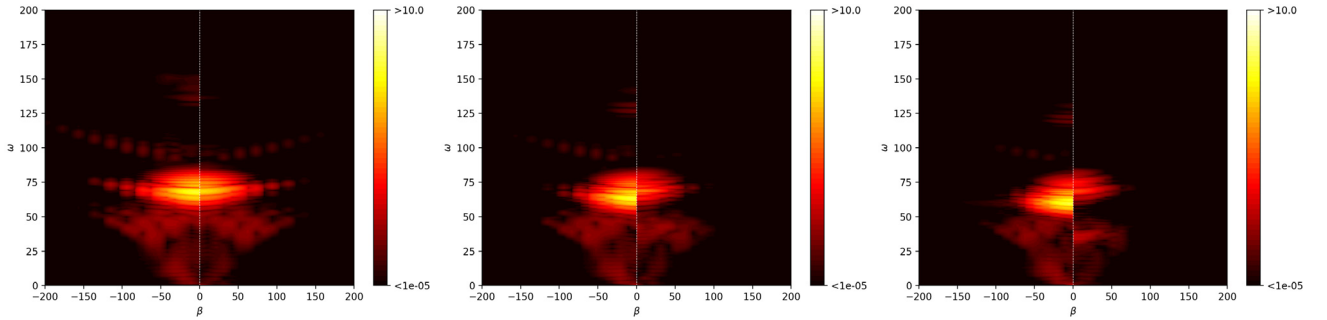


Рисунок 5.13 — Спектры $p'_w(t, z)$ за углом при $l = 0.5, 1.5, 2.5$ (слева направо). Левая половина каждого подрисунка — FP, правая половина — EC05. Цветовая палитра задана в масштабе \log_{10}

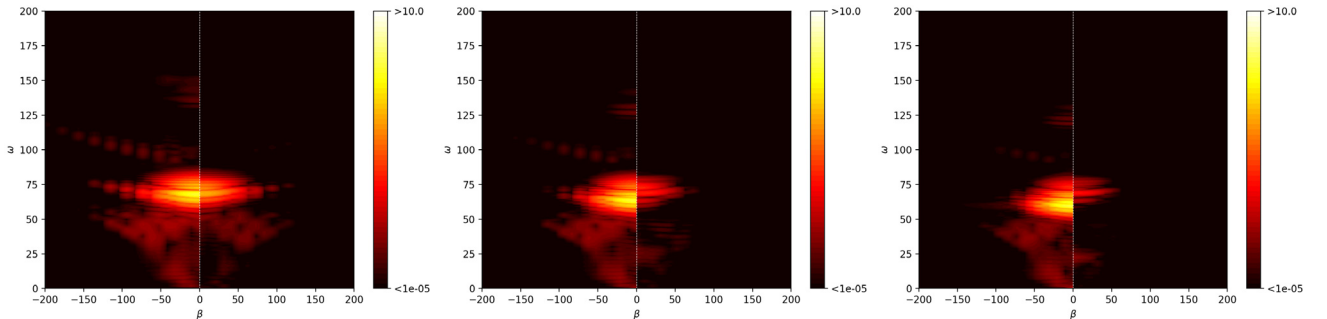


Рисунок 5.14 — Спектры $p'_w(t, z)$ за углом при $l = 0.5, 1.5, 2.5$ (слева направо). Левая половина каждого подрисунка — FP, правая половина — EC10. Цветовая палитра задана в масштабе \log_{10}

Рисунок 5.15 количественно иллюстрирует появление новых максимумов при $\beta \approx 0$. Сплошными изображён частотный спектр в сечении $l = 0.5$, расположенном в области взаимодействия пограничного слоя с веером волн разрежения, а пунктир соответствует дальнему сечению $l = 6$. Серые линии показывают спектры в промежуточных сечениях $l = const$. На пластине поведение спектров обычное (чёрные линии): частота преобладающего возмущения уменьшается и максимальная амплитуда увеличивается вниз по потоку, $\omega_{max} \approx 52$ при $l = 6$. Для ненулевого угла разрежения, $\varepsilon \neq 0$, поведение возмущений при $l > 0$ отличается: наряду с затуханием изначально развивающегося высокочастотного волнового пакета формируется новый нарастающий низкочастотный волновой пакет. В дальнем сечении $l = 6$ его частота равна $\omega_{max} \approx 17.5$ в случае EC10 и $\omega_{max} \approx 31$ в случае EC05. Следует отметить, что отношение $\omega_{max,FP}/\omega_{max,EC10} \approx 3.0$, что близко к соответствующей теоретической оценке 3.3 на основе выражений (5.2)–(5.3). Также следует отметить, что исходные волновые пакеты затухают равномерно по частоте, при этом частота их максимума остаётся постоянной (сплошные синяя и красная кривые на рис. 5.15). Такое поведение соответствует предсказаниям линейной теории устойчивости (см. рис. 5.9 и обсуждение выше).

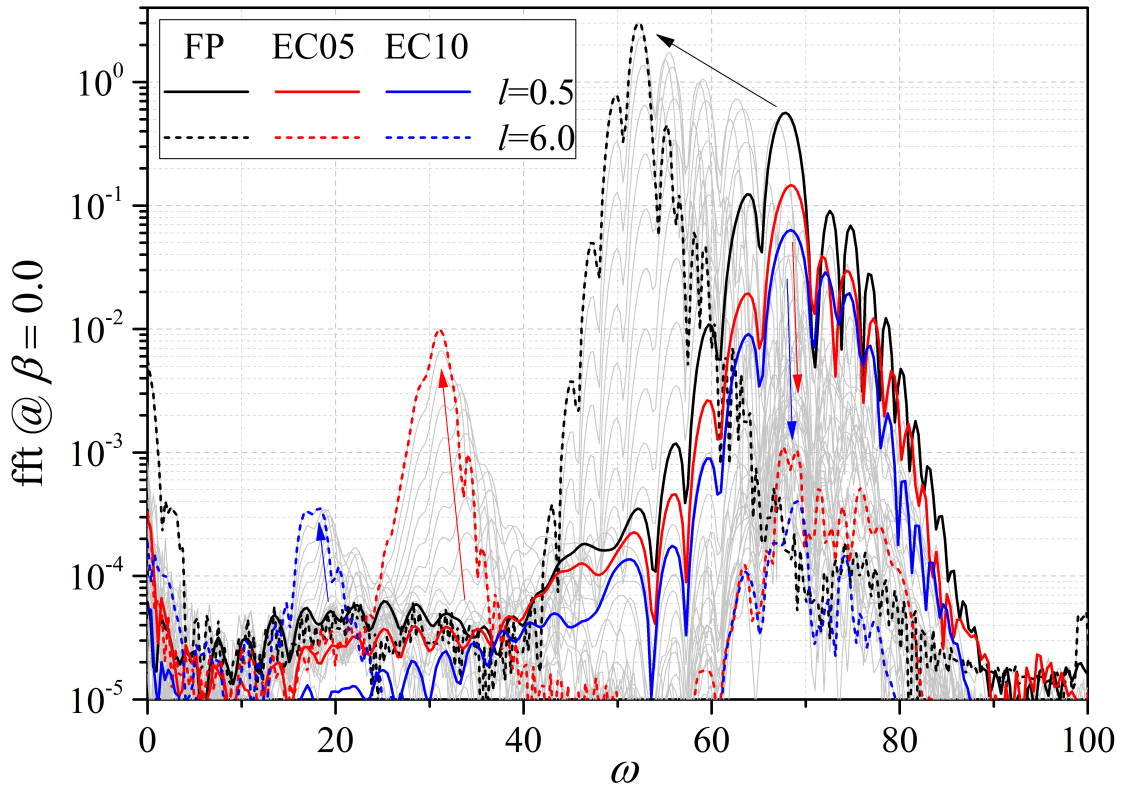


Рисунок 5.15 — Частотный спектр плоских волн ($\beta = 0$) для $p'_w(t, z)$ в сечениях $l = 0.5 \dots 6.0$ с шагом 0.5

Перекрытое сравнение результатов. На рис. 5.16 частота преобладающего возмущения ω_{max} из ЛТУ сравнивается с результатами ПЧМ. В случае ЛТУ приведены распределения $\omega_{max}(l)$: $N(\omega_{max}, l) = N_{max}(l)$ для волн второй моды. В случае ПЧМ распределения $\omega_{max}(l)$ соответствуют движению двух максимумов, показанному на рис. 5.15 стрелками. В области $-3 < l < 0$, которая расположена перед углом и достаточно далеко от генератора возмущений, наблюдается единственный максимум, которых хорошо предсказывается как линейной теорией, так и прямым расчётом. Ниже по потоку при $l > 0$ результаты ПЧМ указывают на то, что преобладающая гармоника в затухающем волновом пакете больше не зависит от l . Центральная частота нового волнового пакета, который выделяется в ПЧМ из фона возмущений при $l \gtrsim 1$, хорошо согласуется с частотой, предсказанной в ЛТУ. Следует отметить, что центральная частота ω_{max} близка к верхней ветви соответствующей нейтральной кривой, изображённой на рис. 5.16б. Перед углом $l < 0$ нейтральные кривые совпадают для всех случаев. За углом $l > 0$ наблюдается резкое смещение неустойчивой области в сторону низкочастотных возмущений. Это смещение тем больше, чем больше угол разрежения ε . Разделение неустойчивых областей при $l \approx 0$ происходит быстро: области прекращают перекрываться при $l \gtrsim 0.4$ (FP и EC05) и $l \gtrsim 0.15$ (FP и EC10), что указывает на полную стабилизацию пограничного слоя по отношению к волновым пакетам, развивавшимся перед углом разрежения.

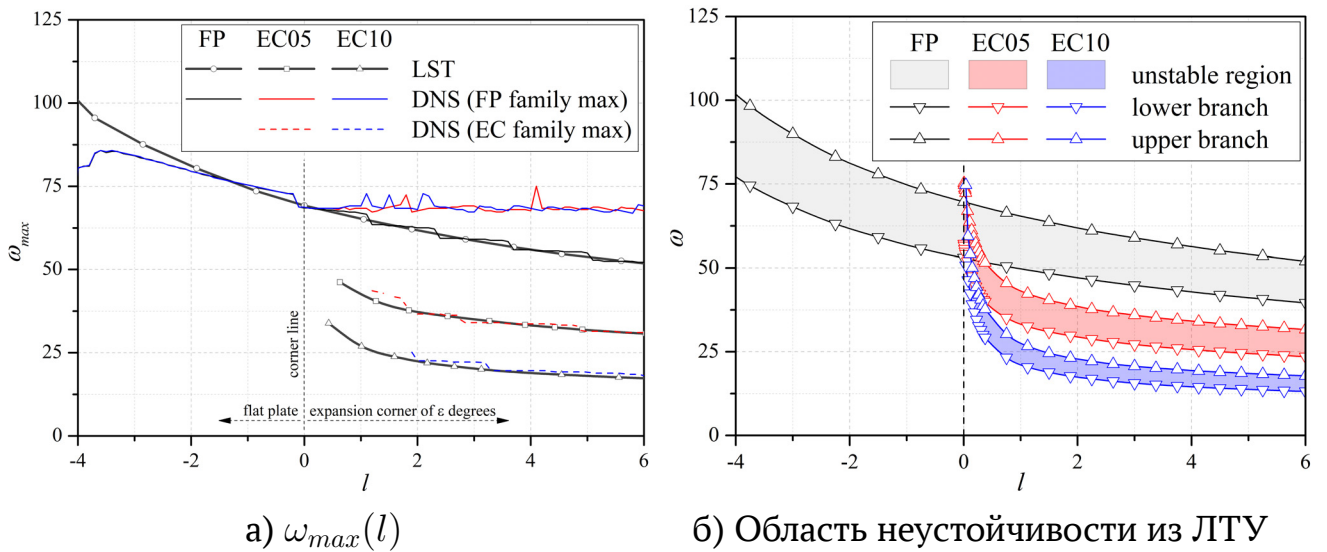


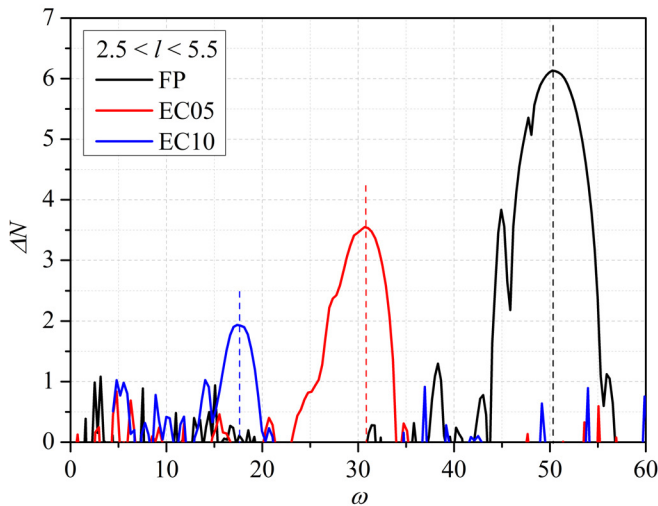
Рисунок 5.16 — Сопоставление результатов ЛТУ (LST) и ПЧМ (DNS): частоты неустойчивых возмущений; unstable region — неустойчивая область; lower / upper branch — нижняя / верхняя ветвь нейтральной кривой

Сопоставим интегральные усиления, полученные в рамках ЛТУ и ПЧМ. На рис. 5.17 представлены распределения ΔN — N -факторов относительно сечения l_1 при $\beta = 0$:

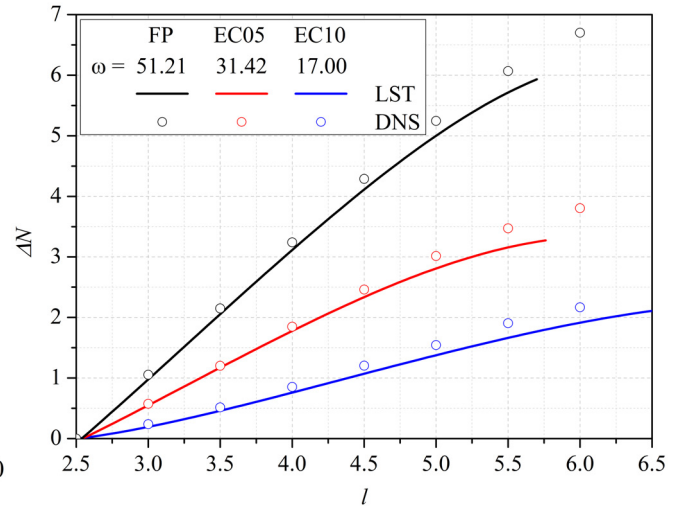
$$\Delta N(l_1, l_2, \omega) \equiv N(l_2, \omega) - N(l_1, \omega) = \ln \left| \frac{\hat{p}_w(l_2, \omega)}{\hat{p}_w(l_1, \omega)} \right|,$$

которые в случае ПЧМ рассчитаны по амплитудам двумерного преобразования Фурье \hat{p}_w пульсаций давления на поверхности; для анализа выбран интервал $[l_1, l_2] = [2.5, 6.0]$. Вертикальным пунктиром на рис. 5.17а отмечены частоты, которые соответствуют максимумам ΔN и максимумам ω_{max} , введённым выше. Следует отметить, что максимумы на рис. 5.17а с высокой точностью лежат на одной прямой, что в совокупности с теоретической оценкой (5.2)–(5.3) открывает возможность нахождения ΔN при других углах отклонения поверхности ε .

Теоретическое и расчётное распределения хорошо согласуются (рис. 5.17б). Расхождение не превосходит 7% и, по-видимому, обусловлено эффектами непараллельности, которые не учитывались в анализе ЛТУ. Таким образом, линейная теория устойчивости даёт достаточно надёжную оценку интегрального усиления (N -факторов) возмущений второй моды сверхзвукового пограничного слоя над углом разрежения, где невозмущённое течение стремительно меняется в узкой области взаимодействия пограничного слоя с веером волн разрежения.



а) ПЧМ: $\Delta N(l_1, l_2, \omega)$



б) $\Delta N(l_1, l, \omega_{max}), l_1 = 2.5$

Рисунок 5.17 — Сопоставление результатов ЛТУ и ПЧМ: интегральное усиление

5.2.4. Нелинейный режим (турбулентное пятно)

Рассмотрим аналогичные картины при амплитуде генератора возмущений на три порядка выше, чем в случае линейного волнового пакета (WP). Развитие начального возмущения в турбулентное пятно показано на рис. 5.18. Сначала формируется волновой пакет плоских волн с регулярными вертикальными фронтами, что соответствует второй неустойчивой моде пограничного слоя при числе Маха 6 и визуально совпадает со случаем WP. Далее наблюдается быстрая стадия нелинейного распада возмущений: плоские волновые фронты деформируются, пакет искажается и превращается в молодое турбулентное пятно до момента, когда возмущение начнёт пересекать сечение $x = l = 0$. При $t = 4.3$ одно и то же турбулентное пятно «запускается» на каждой из трёх конфигураций стенки: FP, EC05, EC10. На рис. 5.18 проиллюстрированы только случаи FP и EC10; картины для случая EC05 аналогичны и занимают промежуточное положение по интенсивности и вихревому наполнению возмущений.

Как и в случае волнового пакета WP, влияние угла разрежения вверх по потоку не наблюдается. При прохождении угла отпечаток давления пятна заметно ослабевает, хотя пятно не исчезает вниз по потоку. Мелкие вихревые структуры отпечатка пропадают по мере того, как пятно EC10 покидает окрестность угла. В случае пластины FP такие структуры эволюционируют при $l > 0$ без видимых качественных изменений. За углом EC10 пятно продолжает развиваться, но ослабление пятна остаётся некомпенсированным вниз по потоку: пятно FP выглядит больше, интенсивнее и наполненнее, чем пятно EC10.

Примечательно, что пространственное вихревое наполнение турбулентного пятна EC10, по-видимому, не ослабляется так сильно, как это следует из отпечатка возмущения давления на стенке. Рассмотрим рис. 5.19, иллюстрирующий развитие пятен с помощью изоповерхностей Q -критерия в трёх проекциях. За углом пространственная вихревая структура остаётся хорошо развитой, но пятно в целом приподнимается над поверхностью. После того, как пятно EC10 перевалило через угол разрежения, оно продолжает расти вдоль отклонённой поверхности, как будто расширения потока не было. Однако размеры пятна EC10 оказываются несколько меньше, чем размеры пятна FP. Это наблюдение указывает на то, что влияние угла разрежения локализовано в пространстве и проявляется как небольшая задержка в развитии турбулентного пятна. По мере дальнейшего продвижения пятна над

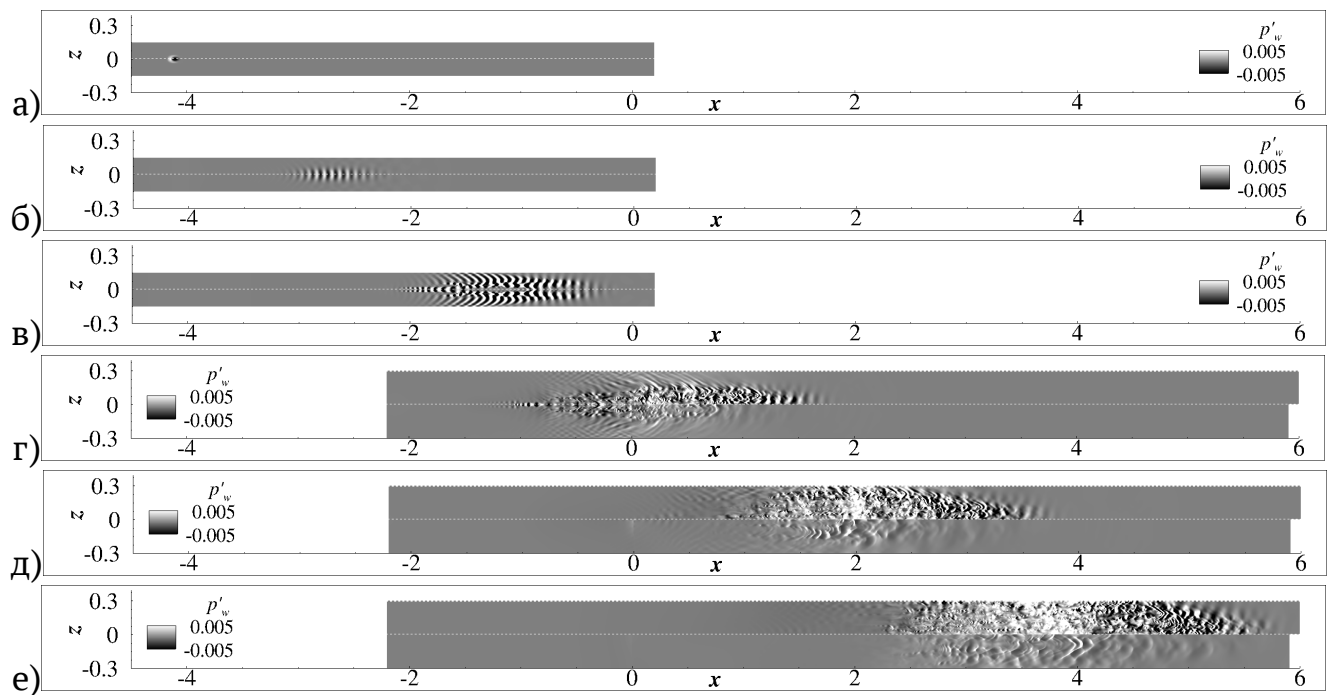


Рисунок 5.18 — Отпечатки поля возмущения давления на поверхности в моменты времени: а — 0.1, б — 2.15, в — 4.3, г — 6.45, д — 8.6, е — 10.75; вид сверху; TS. Верхняя половина каждого подрисунка — FP, нижняя половина — EC10

углом EC10 оно медленно возвращается к обтекаемой поверхности. Результаты для пятна EC05 аналогичны и поэтому не иллюстрируются.

Спектры пульсаций давления в различных сечениях $l = const$ представлены на рис. 5.20, 5.21 и 5.22.

Как показано на рис. 5.18 при $t = 2.15$, раннее возмущение пограничного слоя на плоской пластине выглядит, как обычный волновой пакет второй моды. Это подтверждается спектром при $l = -3$ (рис. 5.20). Он состоит из единственного максимума около $(\omega, \beta) \approx (90, 0)$, который соответствует плоской волне, преобладающей в пограничном слое. Несколько ниже по потоку, при $l = -2$, преобладающая волна смещается вниз по частоте (в соответствии с линейной теорией устойчивости) и появляются множественные кратные гармоники, что указывает на начало нелинейной стадии развития возмущений. При этом частотно-волновой спектр стал существенно шире по β ; появилось несколько наклонных гармоник $\beta \neq 0$ на частоте преобладающей гармоники. Такой процесс нелинейного распада напоминает механизм фундаментального резонанса, когда две симметричных наклонных волны $(\omega, \pm\beta)$ быстро нарастают вниз по потоку в присутствии сильной плоской волны той же частоты $(\omega, 0)$. Возмущения волнового пакета распадаются быстро и проявляют признаки молодого турбулентного пятна уже перед углом разреза: их спектр наполняется и значительно уширяется ($l = -0.5$ на рис. 5.20).

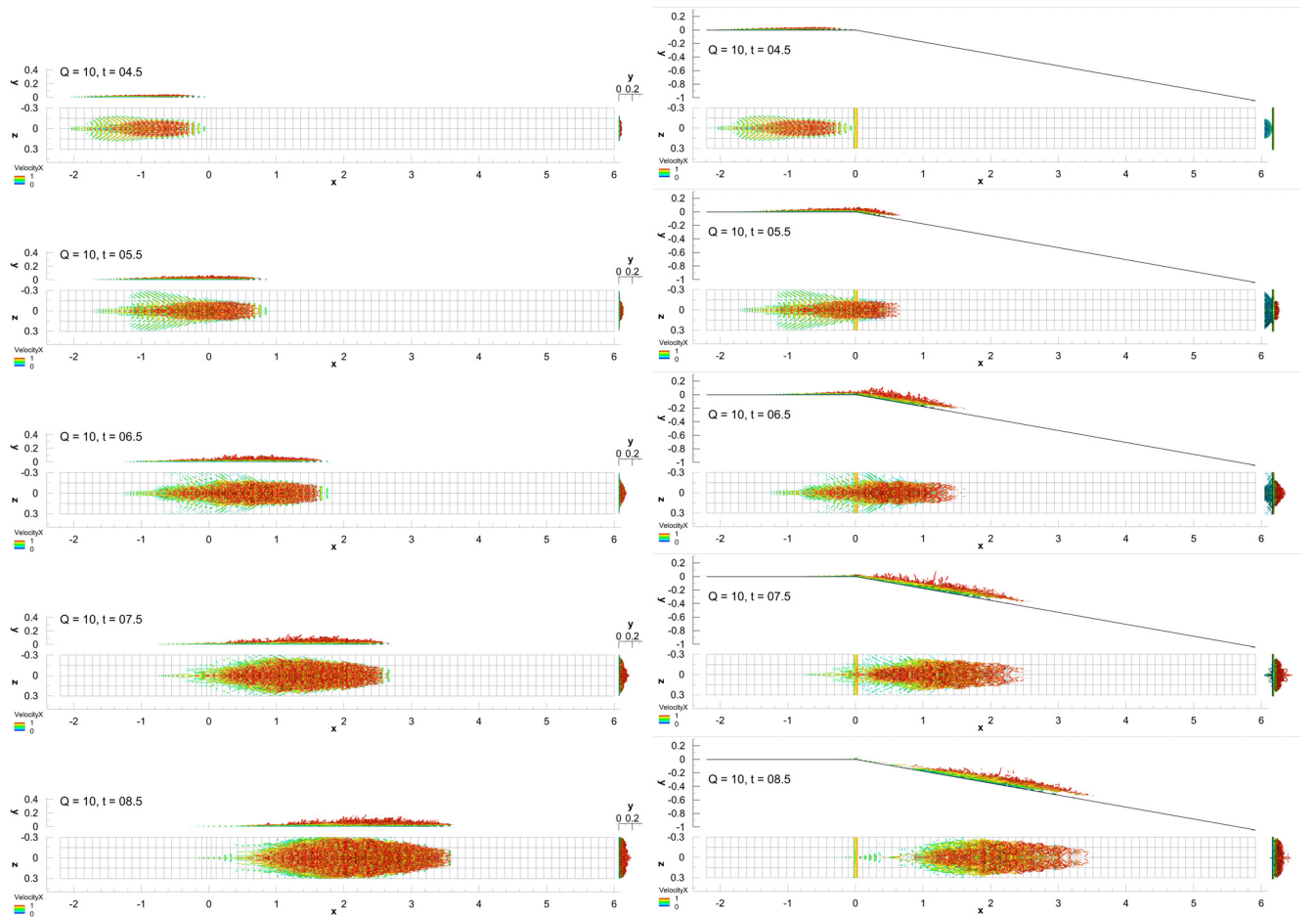


Рисунок 5.19 — Эволюция турбулентного пятна на примере изоповерхностей Q -критерия в трёх проекциях в разные моменты времени. Слева — FR, справа — EC10

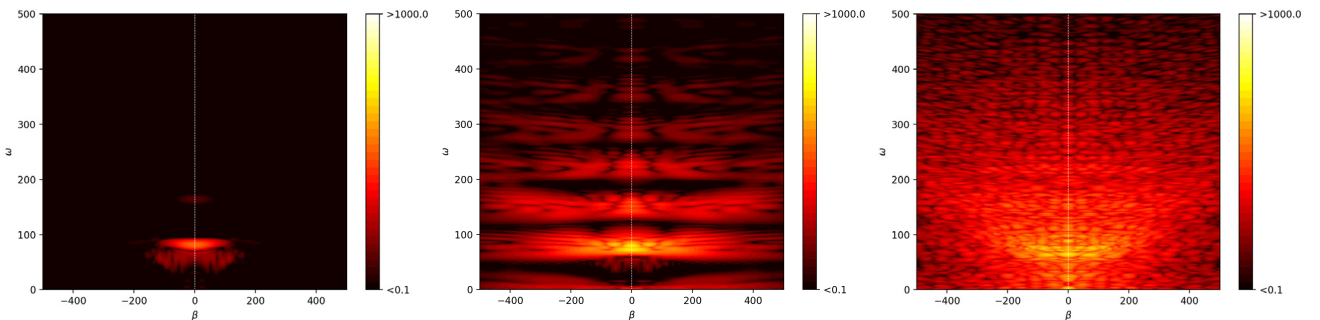


Рисунок 5.20 — Спектры $p'_w(t, z)$ перед углом при $l = -3, -2, -0.5$ (слева направо). Левая половина каждого подрисунка — FR, правая половина — EC05 или EC10 (идентичны). Цветовая палитра задана в масштабе \log_{10}

При $l > 0$ спектр пятна FP всё активнее и равномернее заполняет низкочастотный диапазон (рис. 5.21 и 5.22, левая половина подрисунков). Усиливается гармоника с нулевой частотой, что указывает на значительное изменение среднего течения в присутствии турбулентного пятна. Спектр сразу за углами разрежения ЕС10 (рис. 5.21 и 5.22, правая половина подрисунков, $l = 0.5$) подтверждает, что пятно затухает непосредственно вблизи угла во всём частотно-волновом диапазоне, причём затухание проявляется тем сильнее, чем выше частота или волновое число. Далее вниз по потоку спектры развиваются аналогично случаю FP: низкочастотные гармоники медленно восстанавливаются ($l = 1.5, 2.5$), однако гармоники с большой частотой или волновым числом восстанавливаются намного медленнее и остаются заметно слабее к концу расчётной области, чем в случае FP.

Проиллюстрированное поведение спектра возмущений подкрепляет идею о том, что турбулентное пятно не исчезает за углом и продолжает развиваться, но с подавленными мелкомасштабными компонентами. Это также подтверждается на распределениях максимальной по размаху амплитуды возмущений давления на стенке (рис. 5.23). В любой фиксированный момент времени амплитуды возмущений FP, ЕС05 и ЕС10 эволюционируют бок о бок до самого угла ($l < 0$), а при $l > 0$ становятся меньше на угловых конфигурациях. При удалении от угла амплитуды снова сближаются, но качественно расхождение сохраняется: чем выше величина угла ε , тем ниже амплитуда.

5.3. Первая мода

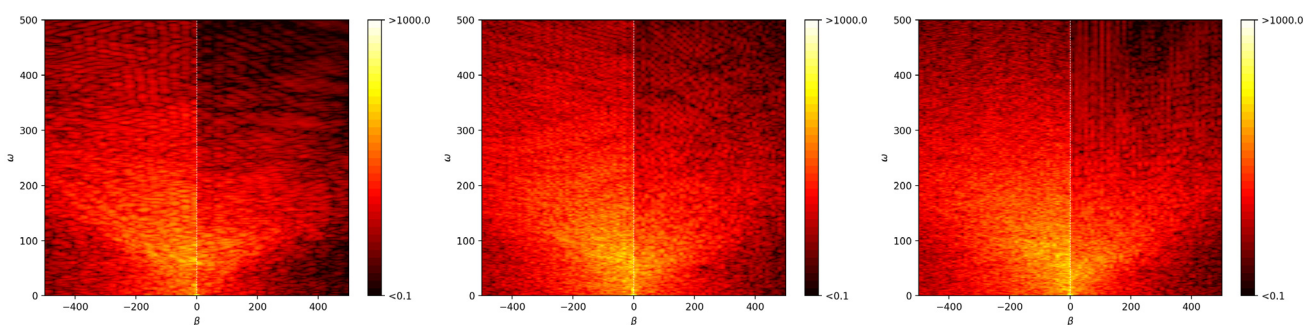


Рисунок 5.21 — Спектры $p'_w(t, z)$ за углом при $l = 0.5, 1.5, 2.5$ (слева направо). Левая половина каждого подрисунка — FP, правая половина — ЕС05. Цветовая палитра задана в масштабе \log_{10}

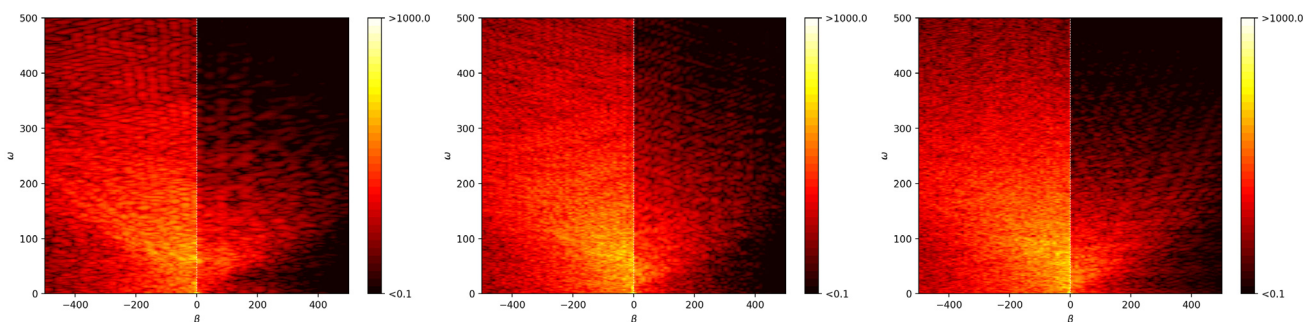


Рисунок 5.22 — Спектры $p'_w(t, z)$ за углом при $l = 0.5, 1.5, 2.5$ (слева направо). Левая половина каждого подрисунка — FP, правая половина — EC10. Цветовая палитра задана в масштабе \log_{10}

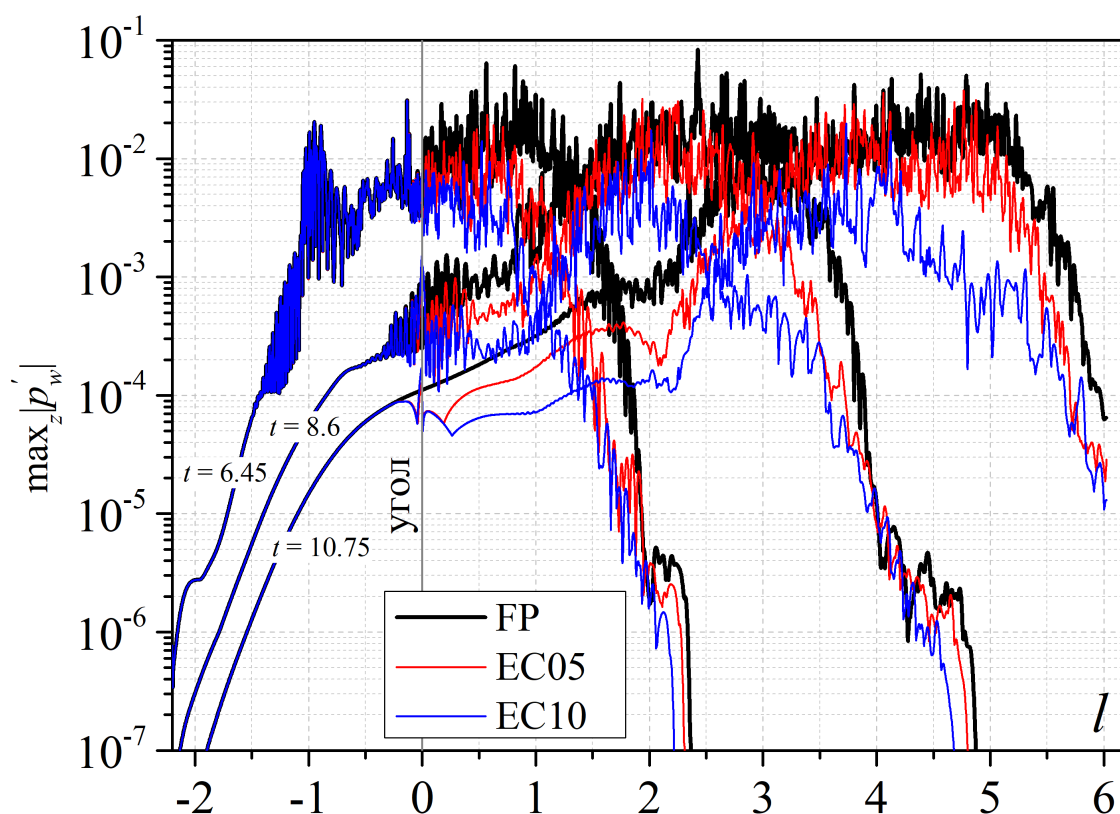


Рисунок 5.23 — Максимум амплитуды пульсаций $p'_w(t, l, z)$ на поверхности в несколько моментов времени, TS

5.3.1. Невозмущённое течение

Невозмущённое поле течения и граница расчётной подобласти 2, в которой моделируется прохождение волновых пакетов и турбулентных пятен через сечение $l = 0$, представлены на рис. 5.24. Общая структура течения аналогична случаю $M_\infty = 6$. Зелёной линией со стрелками показана линия тока, проходящая через сечение $l = -1$ на высоте $5\delta(-1) \approx 0.0221$. Над углом линия тока заметно удаляется от поверхности, указывая на резкое утолщение пограничного слоя.

На рис. 5.25 в нескольких сечениях до и за углом разрежения показаны рассчитанные профили модуля скорости, числа Маха M и статической температуры T ; d_w — расстояние до стенки. Профили перед углом хорошо соответствуют профилям для случая плоской пластины и начинают испытывать искажения лишь в непосредственной близости от угла при $l > -0.1$ — влияние угла разрежения вверх по потоку мало. Сразу за углом профили неоднородно искривляются. Далее вниз по потоку их прежнее поведение медленно восстанавливается — они вновь начинают походить на профили над плоской пластиной.

При переходе через угол скорость потока растёт незначительно, новое значение модуля скорости на границе пограничного слоя $U_e \approx 1.056$ на ~6% выше соответствующего значения перед углом. Ускорение потока с точки зрения числа Маха

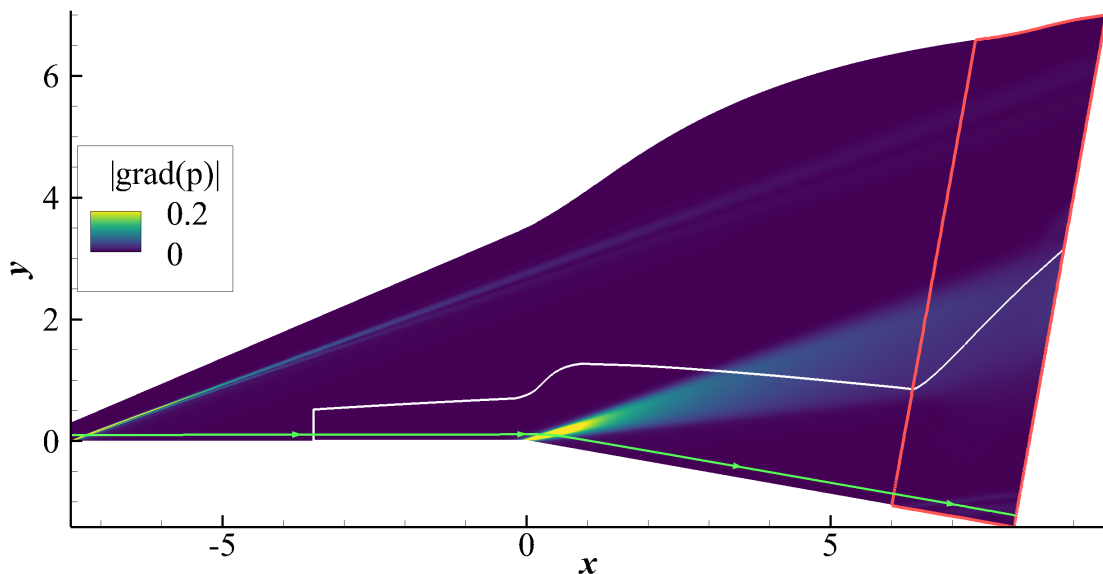
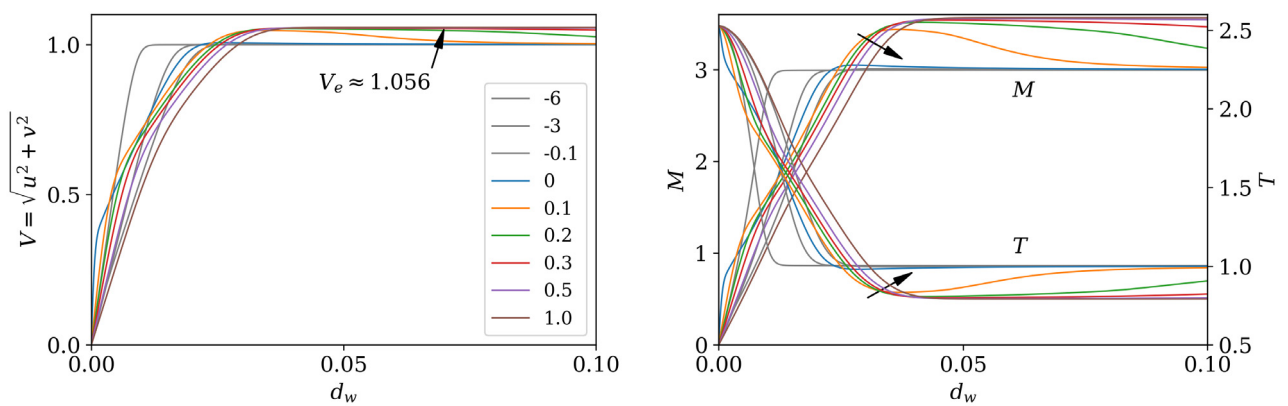


Рисунок 5.24 — Невозмущенное поле модуля градиента давления в полной расчётной области. Белой линией отмечена граница подобласти 2. Красной линией отделена буферная зона

осуществляется за счёт охлаждения потока (рис. 5.25б). Параметры течения на верхней границе пограничного слоя устанавливаются уже при $l < 0.3$, что составляет порядка десяти толщин пограничного слоя перед углом, 10δ . При этом веер волн разрежения расположен достаточно высоко над поверхностью, и пограничный слой формируется под ним. Относительная длина области установления пограничного слоя на угловой конфигурации примерно вдвое меньше, чем в случае $M_\infty = 6$. Это объясняется тем, что с ростом числа Маха веер располагается более полого и медленнее удаляется от поверхности угла, из-за чего область взаимодействия за углом удлиняется.

Следует отметить, что параметры потока на границе пограничного слоя за углом хорошо соответствуют значениям, предсказываемым теорией Прандтля — Майера: $M_e \approx 3.58$, $T_e \approx 0.79$. Поэтому вновь можно использовать эту теорию для быстрых оценок характеристик течения и устойчивости над углом разрежения, опираясь на оценку (5.2)–(5.3). Подставляя в эти формулы $M_1 = M_\infty = 3$ и $M_2 = M_e \approx 3.58$, получим $\delta_2/\delta_1 \approx 1.7$. Соответствующая величина из прямого расчёта составляет 1.5. Сделанная оценка показывает, что за углом частота неустойчивости пограничного слоя должна понизиться примерно в 1.7 раза. Поэтому вновь следует ожидать, что растущие до угла возмущения превратятся в затухающие вниз по потоку от угла. Подтвердим этот вывод в рамках прямого численного моделирования.



а) Модуль вектора скорости

б) Число Маха и температура

Рисунок 5.25 — Профили невозмущённого течения по нормали к поверхности в разных сечениях $l_w = \text{const}$

5.3.2. Развитие возмущений

В соответствии с анализом линейной устойчивости пограничного слоя на плоской пластине, проведённым в подразделе 5.1.1, при рассматриваемых параметрах течения имеется одна неустойчивая мода — первая мода в терминологии Мэка. Возмущения первой моды являются наклонными волнами, которые распространяются с углом наклона фронтов около $60...70^\circ$, имеют продольную длину волны $\sim 10\delta$ и фазовую скорость $\sim 0.5U_e$. Из рис. 5.26 слева видно, что за генератором возмущений быстро формируется волновой пакет первой неустойчивой моды. Он монотонно усиливается вниз по потоку, увеличиваясь пропорционально в продольном и в боковом направлениях до конца расчётной области в случае FR . Волновой пакет ES развивается идентично до излома поверхности при $l = 0$, а ниже по потоку затухает монотонно и быстро, но медленнее, чем в случае $M_\infty = 6$. Количественное сопоставление амплитуд волновых пакетов FR и ES дано на рис. 5.27а, где приведены распределения максимальной по z величины $p'_w(x, z)$ в несколько моментов времени. Амплитуда пакета FR растёт практически экспоненциально вниз по потоку, в то время как пакет ES экспоненциально затухает при $l > 0$.

Турбулентное пятно на плоской пластине эволюционирует иначе (рис. 5.26 справа): оно монотонно растёт, удлиняясь вниз по потоку, но его амплитуда остаётся примерно на одном уровне (рис. 5.27б). На периферии пятна (особенно в его передней части) имеется область пониженного давления, в теле пятна — область повышенного давления. В окрестности пятна, где нелинейное взаимодействие слабо, проявляются наклонные волновые фронты, геометрические параметры которых характерны для волнового пакета первой моды (рис. 5.26 слева). В отличие от случая волнового пакета, турбулентное пятно ES ослабевает при движении над углом разрежения, но это ослабление носит локальный характер, и пятно продолжает свой рост аналогично случаю FR при $l \gtrsim 1$. Появление угла разрежения вносит задержку в развитие пятна. Это наблюдение подтверждается на рис. 5.27б: уровень максимальной амплитуды возмущений в пятне скачкообразно падает за углом и далее вниз по потоку медленно восстанавливается, приближаясь к соответствующему уровню возмущений над плоской пластиной. В целом, поведение волновых пакетов и турбулентных пятен на режиме $M_\infty = 3$, где преобладает первая неустойчивая мода, качественно согласуется со случаем $M_\infty = 6$, где преобладает вторая неустойчивая мода.

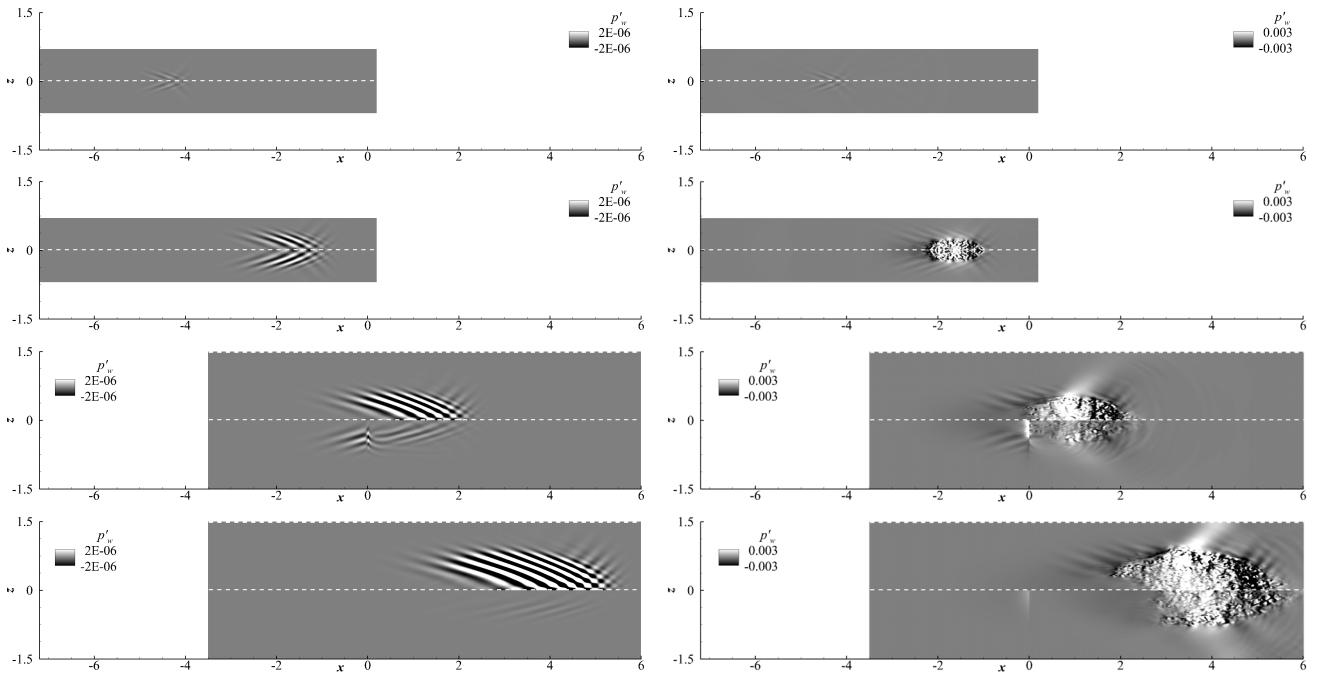
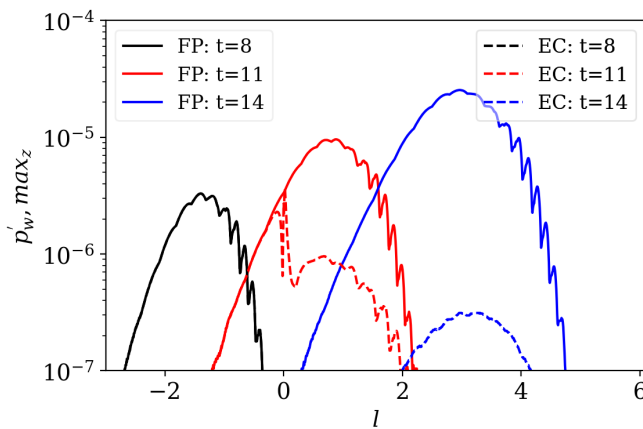
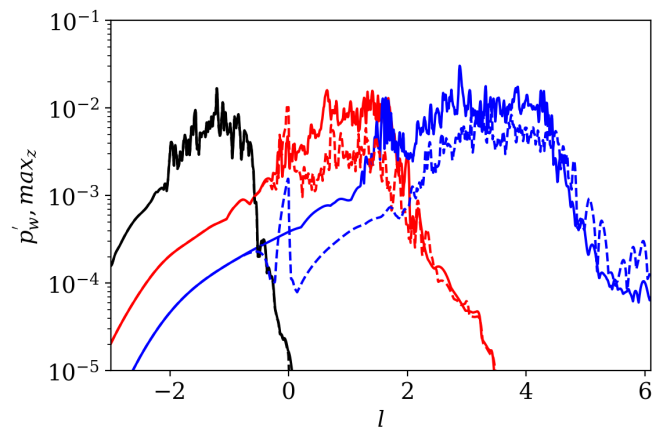


Рисунок 5.26 — Отпечатки поля возмущения давления на поверхности (вид сверху) в моменты времени (сверху вниз): 3.75, 7.5, 11.25, 15. Левый столбец — WP, правый столбец — TS. Верхняя половина каждого подрисунка — FP, нижняя половина — EC10



а) WP



б) TS

Рисунок 5.27 — Максимум амплитуды пульсаций $p'_w(t, l, z)$ на поверхности в несколько моментов времени, TS

Турбулентные пятна при $M_\infty = 3$ имеют выраженную *пространственную* треугольную форму, которая остаётся самоподобной при развитии пятна и над пластиной, и над угловой конфигурацией. Это проиллюстрировано с помощью вихревой структуры пятна на рис. 5.28. Очевидно, что над обеими конфигурациями пятно раскрывается в некотором характерном угле $2\beta_{1/2}$. Передний фронт пятна FP движется со скоростью $u_{le} \approx 0.89$, задний фронт — $u_{te} \approx 0.68$, полуугол раскрытия $\beta_{1/2} \approx 7.5^\circ$; по обобщённым данным экспериментов [233] $\beta_{1/2} \lesssim 6.1^\circ$. Рассогласование величины $\beta_{1/2}$, вероятно, объясняется подходом к измерению. В настоящей работе измерения сделаны визуально по рис. 5.28 (слева) для моментов времени $t = 8$ и 14 по переднему фронту вихревых структур и по положению максимального размаха пятна.

Следует отметить, что наблюдаемая форма пятна сильно отличается от случая $M_\infty = 6$ на охлаждаемой стенке, где пятно сильно вытянуто вдоль потока и зафиксировать его треугольную структуру затруднительно. Аналогичные измерения, выполненные по рис. 5.19 по двум моментам времени $t = 4.5$ и 8.5 , дают: $u_{le} \approx 0.95$, $u_{te} \approx 0.68$ и $\beta_{1/2} \approx 3.5^\circ$ (попадает в разброс экспериментальных данных [233]). Если скорость заднего фронта пятна измерять по заднему фронту изоповерхностей Q -критерия, где пятно ещё выглядит сформированным, то в случае $M_\infty = 3$ величина u_{te} не изменяется, а для $M_\infty = 6$ понижается до $u_{te} \approx 0.60$. Во всех случаях передний фронт пятна движется со скоростью, близкой с скорости невязкого потока над пограничным слоем.

Рассмотрим эволюцию возмущений в спектральной плоскости. В случае WP (рис. 5.29) спектры содержат два симметричных максимума, которые определяют наклон волновых фронтов. Вниз по потоку частота и волновое число этих максимумов медленно убывают, что соответствует результатам линейной теории устойчивости и здесь подробно не обсуждается; спектральная амплитуда максимумов растёт вниз по потоку. До угла $l < 0$ спектры волновых пакетов FP и ES идентичны. За углом спектр возмущений в пакете ES монотонно и равномерно затухает во всём спектральном диапазоне, за исключением ближней окрестности нуля: $\beta \approx 2$, $\omega \sim 10$. Здесь наблюдается слабый рост на уровне фонового шума. Предположительно, это новый волновой пакет, который зарождается из фоновых возмущений в перестроившемся пограничном слое. Из-за ограниченных размеров расчётной области более детальный анализ такого роста на базе проведённых расчётов представляется нецелесообразным.

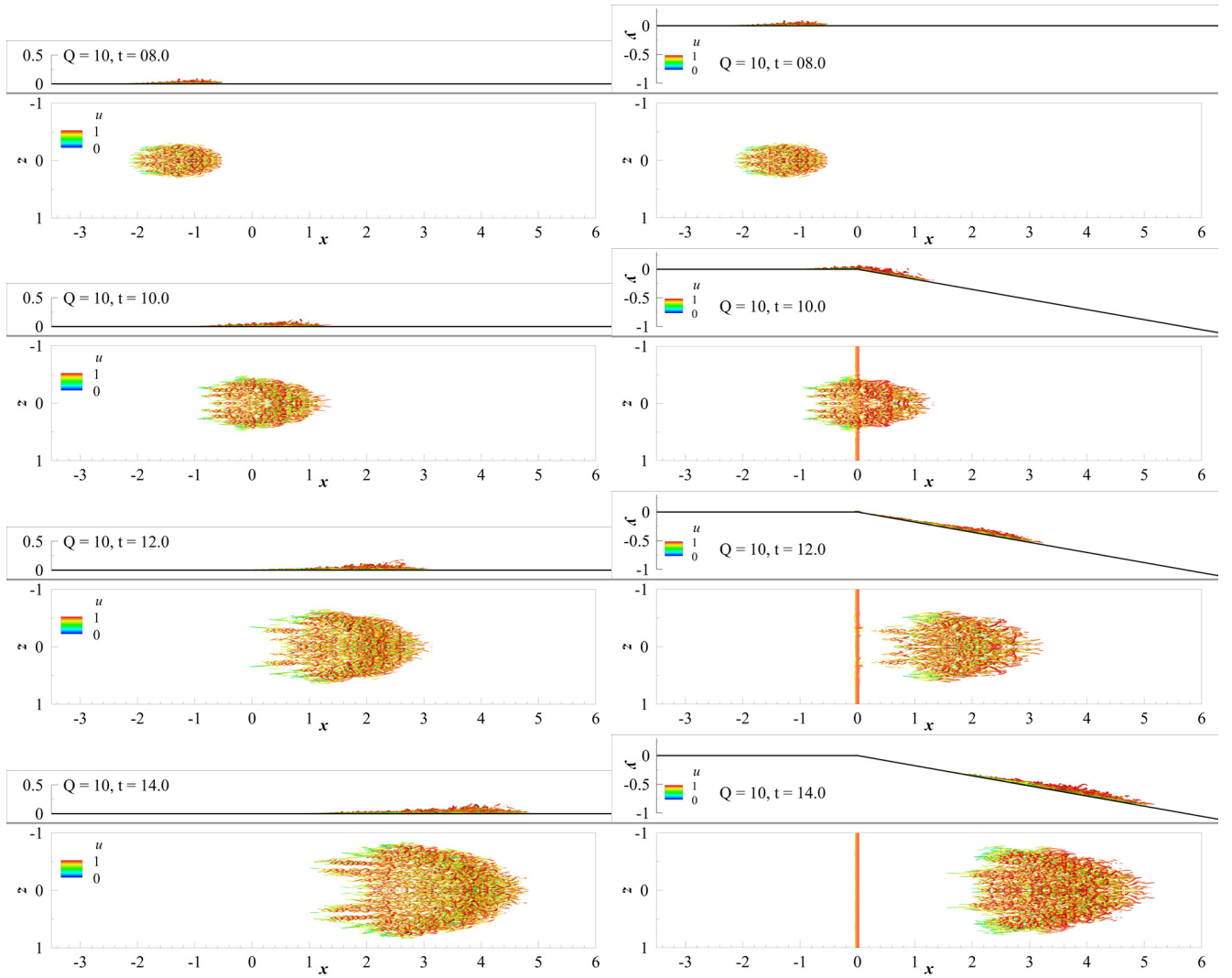


Рисунок 5.28 — Эволюция турбулентного пятна на примере изоповерхностей Q -критерия в двух проекциях в разные моменты времени. Слева — WP, справа — EC10

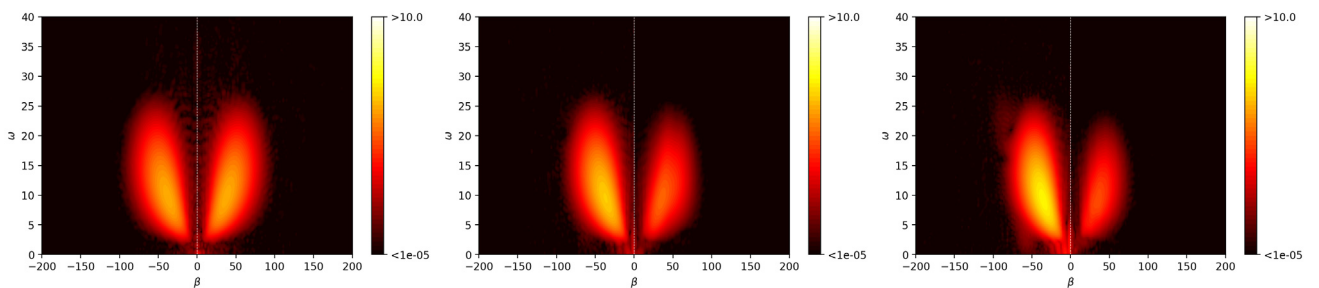


Рисунок 5.29 — Спектры $p'_w(t, z)$ для случая WP при $l = -0.5, 0.5, 2.0$ (слева направо). Левая половина каждого подрисунка — FP, правая половина — EC10. Цветовая палитра задана в масштабе \log_{10}

Соответствующие спектры для случая турбулентного пятна (рис. 5.30) отличаются качественно. Из-за большой амплитуды генератора возмущений начальный спектр возмущений, порождённых в пограничном слое, не является простым, хотя изначально выделяются два максимума первой моды, соответствующие максимумам рис. 5.29. Нелинейное взаимодействие приводит к появлению гармоник с кратными частотами и волновыми числами; спектр быстро наполняется, дробится; появляется и усиливается гармоника $(\omega, \beta) = (0, 0)$, что свидетельствует о растущем изменении среднего течения внутри пятна. Вновь для $l < 0$ спектры оказываются идентичны, а различия появляются сразу при $l \geq 0$. Основное отличие заключается в том, что спектр ЕС быстро теряет в амплитуде во всём частотно-волновом диапазоне и становится менее наполненным, однако вниз по потоку он медленно наполняется и восстанавливается по амплитуде. Тем не менее, наполненность остаётся меньше по сравнению со случаем ФР. Описанное спектральное поведение возмущений за углом разрежения свойственно и турбулентным пятнам при $M_\infty = 6$, как проиллюстрировано на рис. 5.21 и 5.22.

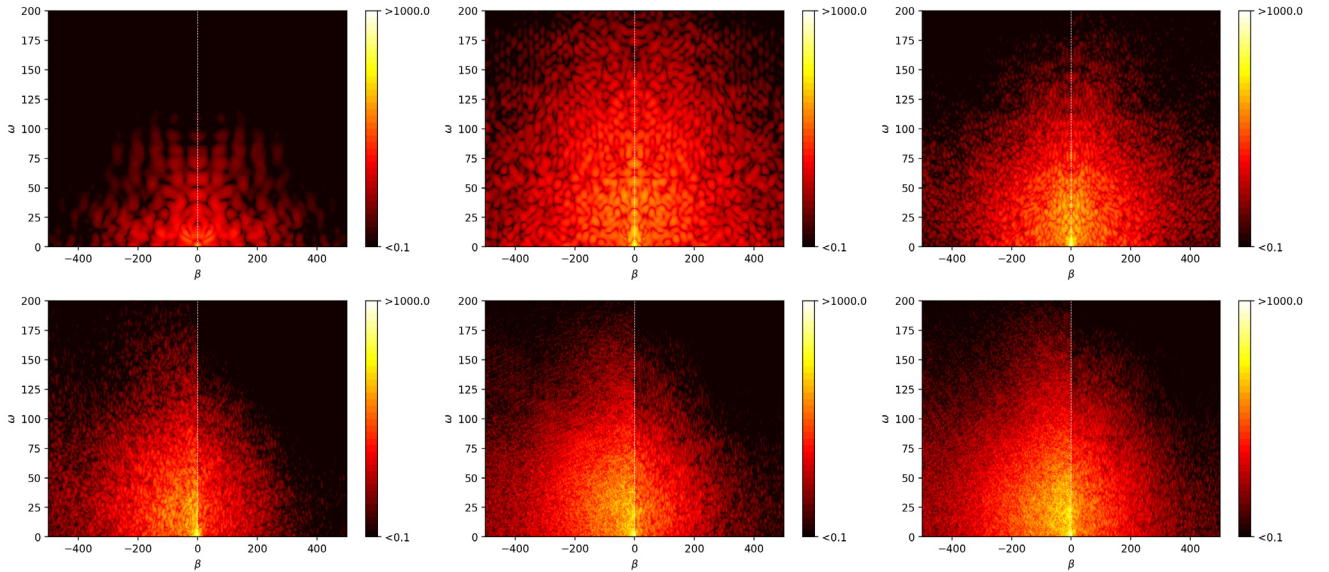


Рисунок 5.30 — Спектры $p'_w(t, z)$: сверху — перед углом, $l = -3, -2, -0.5$; снизу — за углом, $l = 0.5, 2, 3$ (слева направо). Левая половина каждого подрисунка — ФР, правая половина — ЕС10. Цветовая палитра задана в масштабе \log_{10}

5.4. Сравнение линейного и нелинейного режимов

Выводы, сделанные для случаев волнового пакета WP и турбулентного пятна TS, подтверждаются количественно распределениями максимума спектральной амплитуды, резюмированными на рис. 5.31. Действительно, нарастание гармоника, которая преобладает в турбулентном пятне, близко к экспоненциальному и проходит идентично для плоской пластины и для угловых конфигураций при $l < 0$. В окрестности угла $l \approx 0$ кривые быстро разделяются, а при $l \gtrsim 1$ вновь развиваются практически синхронно, различаясь примерно постоянным множителем. Эффект подавления возмущений в пятне сосредоточен в окрестности угла и тем больше, чем сильнее отклоняется поток в угле, что проиллюстрировано здесь лишь для случая $M_\infty = 6$ на рис. 5.31а из-за ограниченных вычислительных возможностей. За углом при $0 < l \lesssim 1$ имеется область влияния угла, в которой происходит задержка развития пятна. Изменение среднего течения при формировании пятна (гармоника $(\omega, \beta) = (0, 0)$) происходит наиболее активно при $l < -2$. Далее зависимость насыщается, что соответствует началу существенно нелинейной стадии развития пятна. Сразу за углом разрежения преобладающая гармоника скачкообразно ослабевает при $0 \leq l \lesssim 0.5$, но далее возобновляет свой рост с инкрементами, близкими к случаю плоской пластины.

Поведение турбулентных пятен TS заметно отличается от поведения линейных волновых пакетов WP. Пограничный слой за углом становится устойчивым к возмущениям, которые нарастали перед углом, и эти возмущения монотонно затухают ниже по потоку; затухание носит примерно экспоненциальный характер. За углом появляется новая низкочастотная неустойчивость; амплитуды низкочастотных возмущений малы из-за длительного участка их начального затухания перед углом. Поэтому новые растущие волновые пакеты достигают существенных амплитуд на больших расстояниях за углом. Для рассмотренных конфигураций новые волновые пакеты второй моды ($M_\infty = 6$, рис. 5.31а) оказались слабее на пару порядков по сравнению с волновыми пакетами на плоской пластине, а волновые пакеты первой моды ($M_\infty = 3$, рис. 5.31б) не наблюдались вовсе. Поэтому общий эффект угла разрежения на линейном режиме можно описать как существенную стабилизацию пограничного слоя даже в случае относительно малых углов разворота потока $\varepsilon = 5^\circ$.

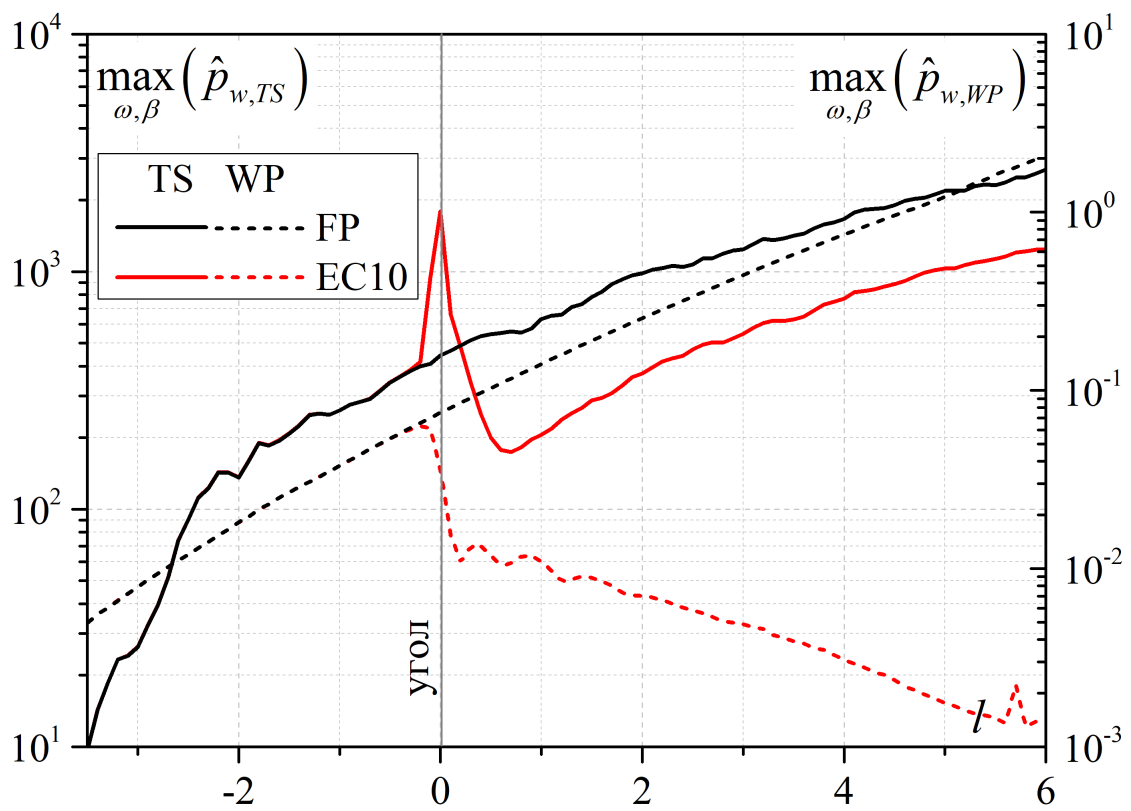
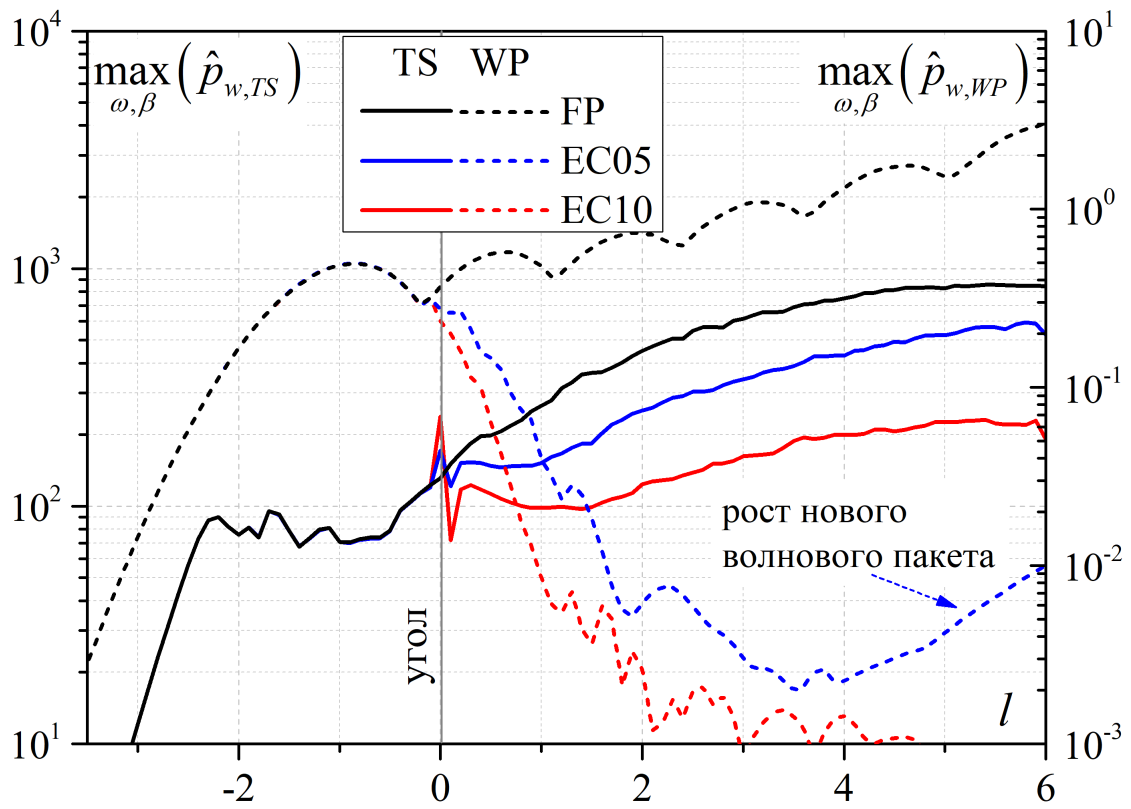


Рисунок 5.31 — Сопоставление эволюции спектрального горба волнового пакета (WP) и турбулентного пятна (TS)

5.5. Задержка турбулентного пятна

Как отмечалось выше, присутствие угла разрежения задерживает развитие турбулентного пятна. Проиллюстрируем это утверждение, используя предположение о треугольной форме турбулентного пятна (см. рис. 5.19 и 5.28 и обсуждение в разделе 5.3).

5.5.1. Теоретическая модель

Пятна над пластиной (FP) оказываются больше, чем над угловыми конфигурациями, а размер пятен в профиль различается слабо. Поэтому следует ожидать, что вклад большего пятна в силу вязкого трения окажется больше. Рассчитаем этот вклад следующим образом:

$$\Delta F_{v,x} \approx \iint_S \Delta c_{f,x} dl dz,$$

где S — площадь обтекаемой поверхности, а $\Delta c_{f,x}$ — избыточный коэффициент трения по сравнению со случаем невозмущённого течения, который обусловлен присутствием турбулентного пятна. Величина $c_{f,x}$ определяется в соответствии с формулой (1.18):

$$c_{f,x} = \frac{2}{\text{Re}_\infty} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]_w.$$

Центр приложения избыточной силы можно определить из простых геометрических соображений аналогично положению центра масс тела

$$\mathbf{r}_c \equiv (l_c, z_c) = \iint_S \mathbf{r} \cdot dF_{v,x} / \Delta F_{v,x}. \quad (5.4)$$

5.5.2. Результаты численного моделирования

Центр приложения избыточной силы трения (l_c, z_c) , рассчитанный по формуле (5.4) для моделируемой половины пятна, располагается внутри пятна, как показано

на рис. 5.32. Положение пятна над пластиной и над угловой конфигурацией различны. При переходе через угол ЕС10 коэффициент трения $c_{f,x}$ в пятне уменьшается на порядок по сравнению со случаем плоской пластины. Очевидно, это отразится на величине $\Delta F_{v,x}$.

Эволюция центров $l_c(t)$ проиллюстрирована на рис. 5.33. Центры движутся синхронно до некоторого момента времени ($t \lesssim 5.5$ при $M_\infty = 6$ и $t \lesssim 9.5$ при $M_\infty = 3$), что соответствует расположению пятна перед углом: $l_c \lesssim -0.5$. Ослабление пятен за углом приводит к тому, что вклад перевалившей через угол части пятна растёт недостаточно быстро, и движение центра приложения избыточной силы замедляется — наклон соответствующих кривых $l_c(t)$ уменьшается. Замедление наблюдается до тех пор, пока значительная часть пятна остаётся перед углом и даёт весомый вклад в трение. При переходе пятна через угол картина меняется на обратную: рост головной части пятна за углом активизируется, а его хвостовая часть всё сильнее подавляется разрежением. Таким образом, по мере прохождения угла разрежения центр приложения избыточной силы трения сначала замедляется, а затем ускоряется. Описанное поведение наблюдается во всех случаях на рис. 5.33а, но проявляется слабее для пятна ЕС10 при $M_\infty = 6$. На рис. 5.33 можно выделить прямолинейные участки кривых $l_c(t)$ за углом и определить их наклон. Величины рассчитанных наклонов приведены в табл. 5.5.

Вдали за углом следует ожидать, что наклон $l_c(t)$ выйдет на новый постоянный уровень, который зависит от геометрических характеристик пятна (u_{le} , u_{te} , $\beta_{1/2}$), которые в свою очередь определяются характеристиками пограничного слоя (U_e , M_e , T_w). Анализ среднего течения и геометрии турбулентных пятен для всех рассмотренных случаев показывает, что зависимость установившейся за углом скорости движения пятна от этих величин не должна быть сильной. Таким образом, пятна FP, ЕС05 и ЕС10 должны иметь близкие наклоны кривых $l_c(t)$ далеко за углом разрежения. Учитывая, что величина U_e слабо растёт с ростом ε , можно

M_∞	FP	ЕС05	ЕС10	$[t_1, t_2]$	$U_{e,EC10}$
3	0.678 ± 0.002	–	0.809 ± 0.005	$[11.5, 16]$	1.056
6	0.723 ± 0.004	0.792 ± 0.005	0.786 ± 0.004	$[8, 12]$	1.026

Таблица 5.5 — Установившаяся скорость точки приложения избыточной силы трения, dl_c/dt за углом, рассчитанная с помощью линейной регрессии в интервале времени $[t_1, t_2]$. В качестве доверительного интервала выбрано удвоенное среднеквадратичное отклонение из соответствующей процедуры линейной регрессии

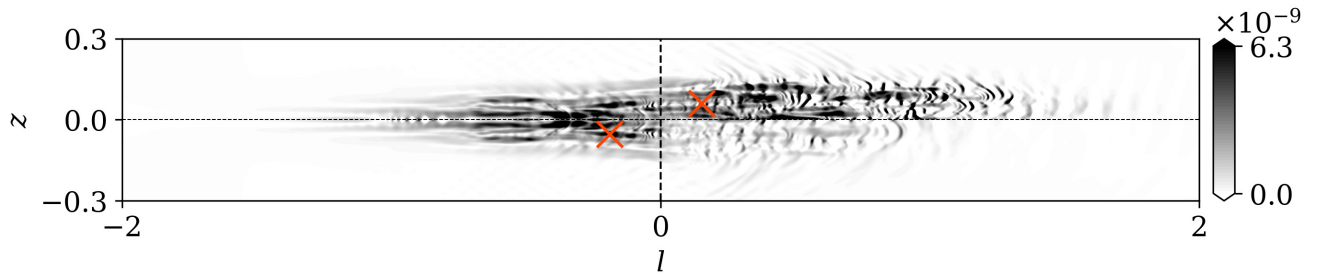
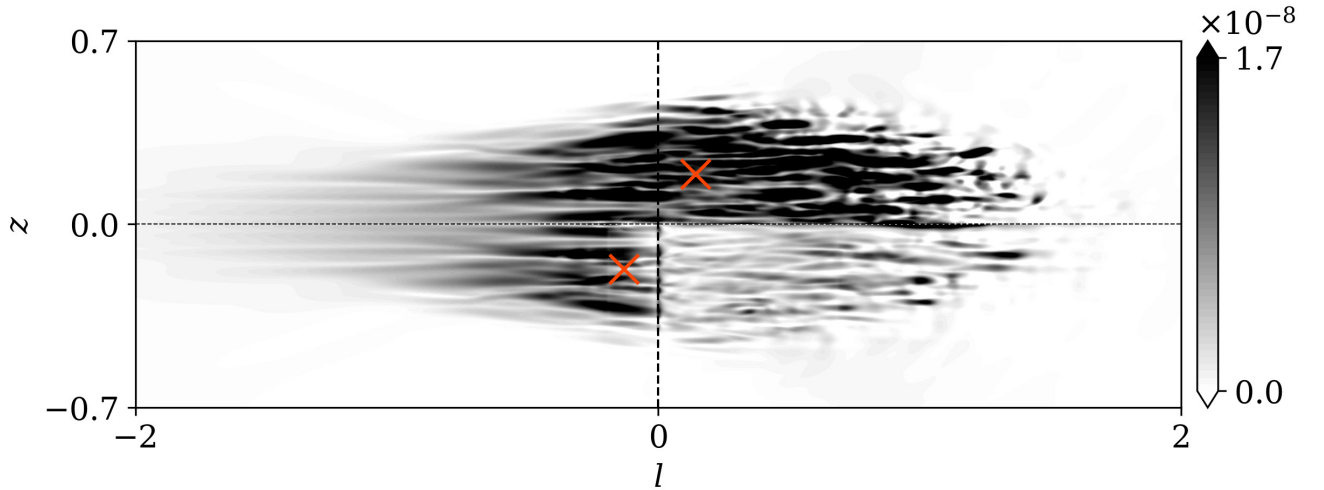
а) $M_\infty = 6, t = 6.6$ б) $M_\infty = 3, t = 10.7$

Рисунок 5.32 — Поле избыточного коэффициента трения $\Delta c_{f,x}$ от турбулентного пятна в некоторый фиксированный момент времени: верхняя половина — FR, нижняя половина — EC10. Крестиком показан центр приложения суммарной силы трения в соответствии с (5.4)

предположить, что скорости u_{le} и u_{te} будут следовать за U_e . Это подтверждается результатами проведённого численного моделирования.

Рассмотрим распределение вклада турбулентного пятна в трение (рис. 5.34). Центр приложения силы l_c лежит внутри пятна, поэтому $l_c < 0$, когда пятно начинает переваливаться через угол. В случае $M_\infty = 6$ (рис. 5.34а) стабилизирующее действие угла начинается раньше по l_c и простирается на большей длине по сравнению со случаем $M_\infty = 3$. Это вызвано вытянутой формой турбулентных пятен над охлаждаемой поверхностью при больших числах Маха.

В случае пятна EC10 распределение $\Delta F_{v,x}$ достигает локального минимума, за которым инкременты величины $\Delta F_{v,x}$ свойственны пятну FR на плоской пластине. Для угла EC05 такой минимум практически не выделяется (рис. 5.34а). Поэтому разумно ограничить область задержки турбулентного сечениями, между которыми темп роста $\Delta F_{v,x}$ на угловой конфигурации существенно отличается от темпа

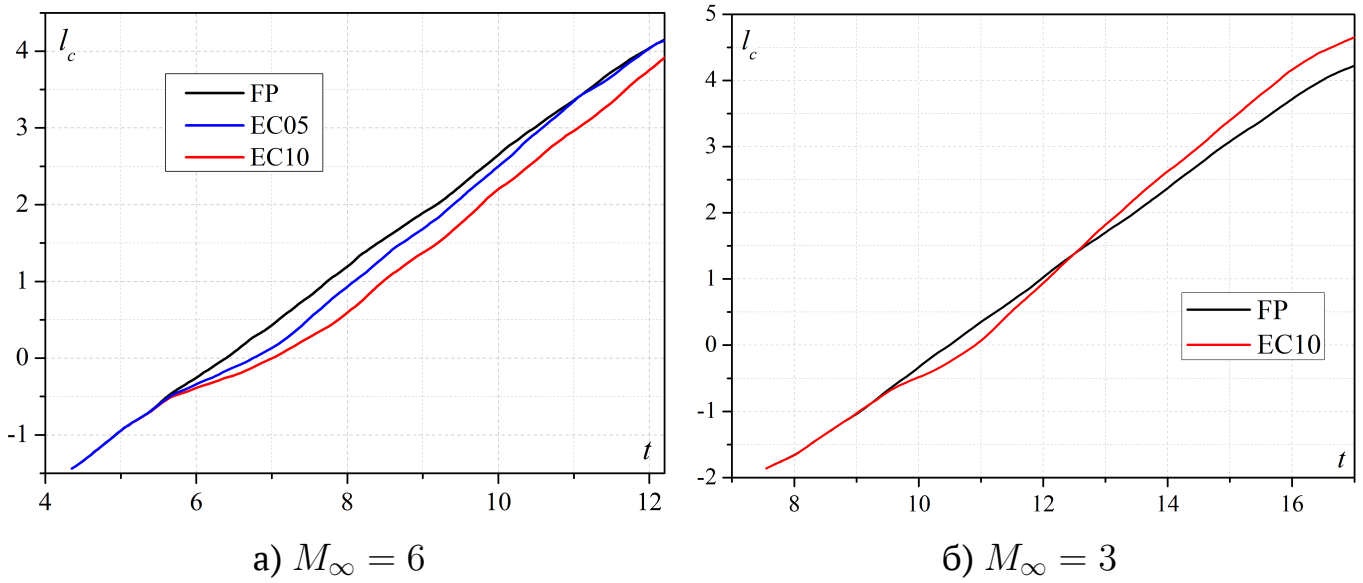


Рисунок 5.33 — Центр приложения избыточной силы трения от турбулентного пятна

роста на плоской пластине. Такие области отмечены на рис. 5.34 вместе с их размером Δl , которым можно определить длину задержки турбулентного пятна при прохождении угла разрежения. Физически длина задержки указывает, на каком расстоянии за углом возобновится эффективное развитие турбулентного пятна, при котором нарастание вклада пятна в трение будет близко к случаю плоской пластины.

Следует отметить, что рост кривых $\Delta F_{v,x}(l_c)$ замедляется при $l_c > 3$. Это связано с тем, что возмущения от пятна начинают взаимодействовать с боковой границей расчётной области при $z = z_{max}$ — размах пятна становится слишком большим. При этом пятно уже не является изолированной областью турбулентного течения, его следует трактовать как несколько сливающихся друг с другом пятен. Замедление происходит более активно в случае $M_\infty = 3$, где пятно имеет чётко выраженную треугольную форму (рис. 5.28). При $M_\infty = 6$ пятна сильно вытянуты вдоль потока (рис. 5.19) и замедление проявляется более плавно.

5.6. Выводы по главе

В рамках линейной теории устойчивости и прямого численного моделирования развития волновых пакетов и турбулентных пятен исследован механизм

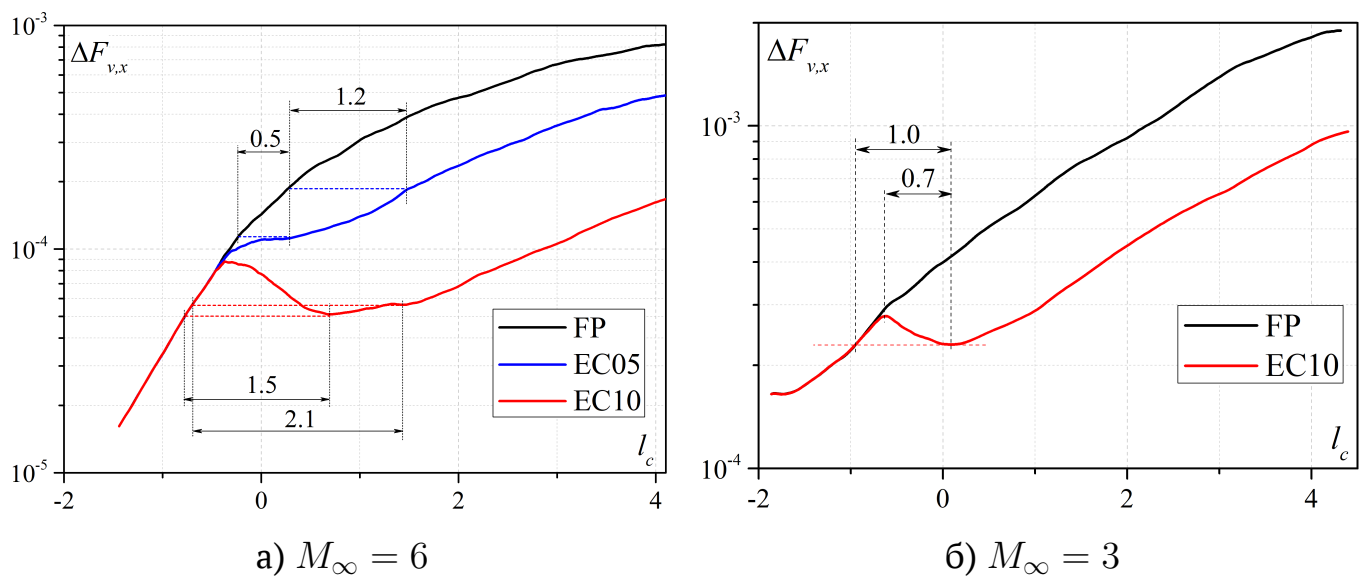


Рисунок 5.34 — Распределение избыточной силы трения от турбулентного пятна

стабилизации возмущённых течений из-за быстрого расширения потока над углом разрежения. Рассмотрены случаи преобладания возмущений первой (число Маха 3, прогретая стенка) и второй (число Маха 6, охлаждаемая стенка) неустойчивых мод пограничного слоя на плоской пластине. Оба режима являются характерными для реалистичных условий высокоскоростного полёта. По результатам исследований можно сделать следующие выводы.

- Расширение потока над углом приводит к значительному, почти скачкообразному утолщению пограничного слоя над отклонённой поверхностью, вследствие чего неустойчивости пограничного слоя сдвигаются в область пониженных частот, а высокочастотные волновые пакеты, нараставшие перед углом, затухают. Эффект стабилизации течения монотонно усиливается с увеличением угла отклонения. Указанный механизм стабилизации течения за углом разрежения одинаков как для первой, так и для второй неустойчивых мод пограничного слоя, которые доминируют при разных условиях обтекания. Несмотря на значительную перестройку течения, в спектре мод пограничного слоя над углом разрежения не появляются новые неустойчивые моды.
- Прямое численное моделирование показывает, что на плоской пластине (без угла) волновые пакеты и турбулентные пятна растут вниз по потоку. На угловой конфигурации волновые пакеты нарастают до линии излома поверхности и быстро (экспоненциально) затухают ниже по потоку. Наряду с этим начинает нарастать новый волновой пакет, центральная частота которого

соответствует новой области неустойчивости пограничного слоя вниз по потоку от излома. В масштабах рассматриваемых конфигураций (и, вероятно, в масштабах реальных конфигураций) амплитуда нового волнового пакета оказывается на два порядка меньше, чем в случае плоской пластины даже при минимальном рассмотренном угле разреза 5° . Поэтому влияние рассмотренных угловых конфигураций можно трактовать как стабилизацию пограничного слоя по отношению к малым возмущениям.

- Турбулентные пятна не подавляются за углом разреза, а лишь испытывают небольшую задержку в развитии на масштабах порядка 20-50 толщин местного пограничного слоя. Это частично связано с локальным всплыванием пятна над поверхностью. За областью задержки турбулентные пятна продолжают развиваться, как на плоской пластине: они сохраняют самоподобную треугольную форму, а их размер монотонно увеличивается. Анализ вклада пятна в сопротивление трения подтверждает предположение о задерживающем влиянии угла разреза на развитие пятна. В связи с этим экспериментальные картины пониженного теплового потока за углами разреза не обязательно указывают на реламинаризацию турбулентного течения и могут свидетельствовать о локальном ослаблении влияния турбулентного пограничного слоя на обтекаемую поверхность.
- Частота преобладающей за углом неустойчивости меняется обратно пропорционально толщине пограничного слоя; частоту можно оценить в рамках простой теоретической модели (5.2) – (5.3), основанной на модели течения Прандтля — Майера. Результаты такой оценки и результаты линейной теории устойчивости хорошо согласуются с результатами прямого численного моделирования низкоамплитудных волновых пакетов второй неустойчивой моды. Поэтому ЛТУ можно применять для анализа устойчивости пограничного слоя над углом разреза, а тяжеловесные расчёты ПЧМ имеет смысл проводить выборочно на поздних стадиях исследования.

По-видимому, близкими стабилизирующими свойствами должно обладать и течение, в котором разгон потока осуществляется над протяжённой частью поверхности, а не сосредоточен в окрестности некоторой характерной точки, такой как угол разреза. В этом случае следует ожидать, что характеристики устойчивости будут меняться постепенно. Модельным примером такого течения является

пограничный слой над тонким параболическим профилем. Исследованию этого течения посвящена глава 6.

Глава 6. Переход на прямом крыле с тонким параболическим профилем

Современные сверхзвуковые пассажирские самолёты (СПС), — например, серия СПС Aerion [234] — проектируются для крейсерского полёта на высотах порядка 15 – 20 км при числе Маха от 1.5 до 4. Профиль крыла СПС тонкий и, как правило, имеет выпуклую близкую к параболической форму. Некоторые модели имеют крыло малой стреловидности, для которого механизм неустойчивости поперечного течения не реализуется. В этом случае ламинарно-турбулентный переход (ЛТП) на гладкой поверхности крыла протекает по малошумному сценарию [235], включающему восприимчивость пограничного слоя к внешнему воздействию и дальнейший рост конвективно неустойчивой первой моды пограничного слоя вплоть до формирования турбулентного течения. До недавних пор оставалось неясным, какое внешнее воздействие является определяющим в условиях натурного полёта. Поиску такого воздействия посвящена настоящая глава.

На высоте 20 км возможными источниками возмущений, способных возбудить в пограничном слое неустойчивые волны, являются [9]: 1) возмущения набегающего потока: атмосферная турбулентность, микрочастицы (пыль, кристаллы льда, жидкие аэрозоли); 2) акустические волны, излучаемые турбулентным пограничным слоем на передней части фюзеляжа; 3) возмущения, индуцированные обтекаемой поверхностью: вибрации обшивки, шероховатость, неровности (уступы, выступы, зазоры, каверны, волнистость и т.п.). Возмущения потока могут взаимодействовать с возмущениями, индуцированными обтекаемым телом, формируя новые механизмы возбуждения мод пограничного слоя. Например, акустические волны могут рассеиваться на отдельных неровностях или распределённой шероховатости, обеспечивая резонансную накачку неустойчивых волн первой моды [236; 237]. В связи с этим поверхность ламинаризованного крыла предполагается аэродинамически гладкой и не вибрирующей в диапазоне неустойчивых частот, и основное внимание сосредотачивается на внешних источниках.

6.1. Невозмущённое течение

Прототипом для выбора параметров сверхзвукового потока и профиля прямого крыла послужил самолёт AS2, который разрабатывался фирмой Aerion [234] (США) совместно с Airbus, Lockheed Martin и Boeing; проект закрыт в 2021 году из-за финансовых трудностей. Внешний вид AS2 показан на рис. 6.1. Профиль крыла имеет чечевицеобразную форму с заострёнными передней и задней кромками — такая конфигурация соответствует концепции естественной ламинаризации. Относительная толщина профиля составляет около 6%. Из-за малой стреловидности передней кромки крыла удаётся устранить неустойчивость поперечного течения и избежать раннего ламинарно-турбулентного перехода. На поверхности тонкого профиля реализуется благоприятный градиент давления, что стабилизирует первую моду сверхзвукового пограничного слоя — единственный тип неустойчивости для данной конфигурации в случае низких уровней внешних возмущений. Далее в качестве модели крыла будем рассматривать прямое крыло с острыми кромками и тонким параболическим профилем относительной толщины τ^1 :

$$y_w = 2\tau \cdot x(1 - x). \quad (6.1)$$

Для согласования с условиями других проведённых расчётов рассматривается режим с числом Маха $M_\infty = 3$. Характерные параметры течения для полёта на высоте 20 км рассчитаны на основе стандартной атмосферы Земли и приведены в табл. 6.1, в частности, линейный масштаб L^* соответствует хорде профиля.

Рассчитанное невозмущённое поле числа Маха показано на рис. 6.2. У кромок формируются наклонные скачки уплотнения, на которых поток изменяет направление движения и тормозится. Над поверхностью профиля поток разгоняется под действием благоприятного градиента давления. В хвостовой части при $x \approx 0.84$ имеется небольшая отрывная зона, что подтверждается распределением продольного коэффициента трения по поверхности профиля. Перед ней формируется скачок

¹Отношение максимальной толщины профиля, которая достигается при $x = 0.5$, к хорде профиля

Таблица 6.1 — Параметры задачи. Жирным выделены случаи для численного моделирования

M_∞	$Re_{\infty,L}$	T_∞^*	T_0^*	стенка	L^*	$\tau, \%$
3	$27.205 \cdot 10^6$	230 К	644 К	теплоизолированная	5 м	0, 1, 2.5, 5, 7.5, 10

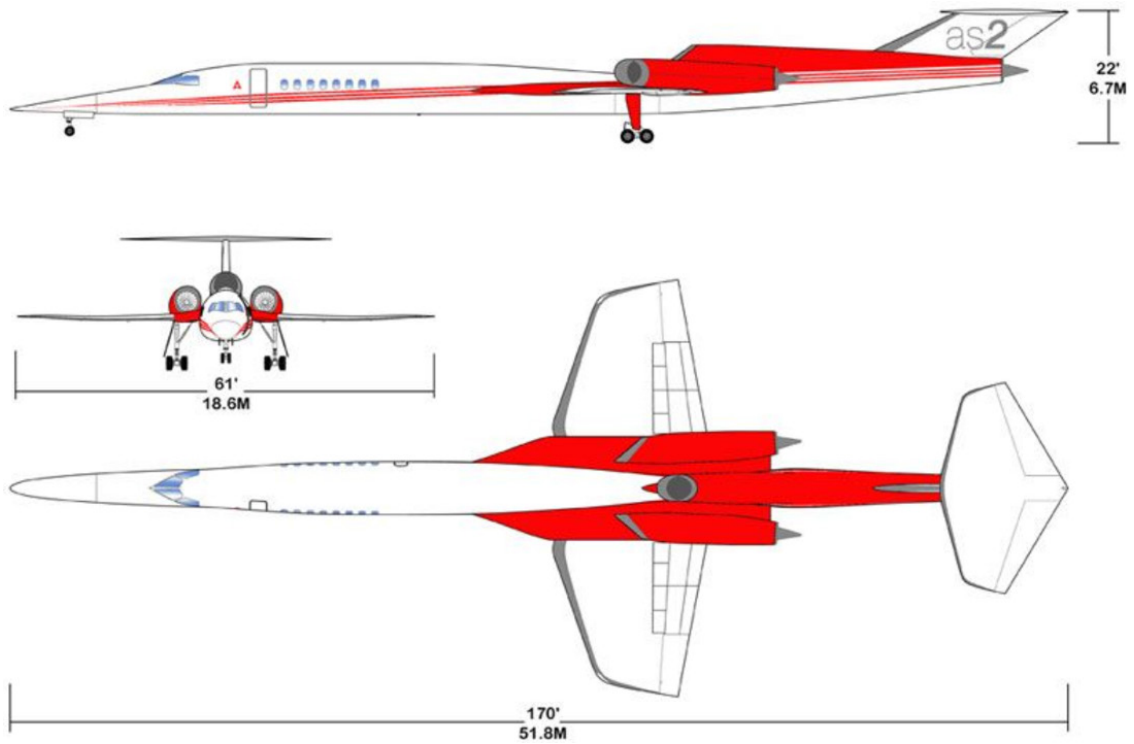


Рисунок 6.1 — Внешний вид СПС Aerion AS2[234]

отрыва, который распространяется вниз по потоку и сливается с замыкающим скачком.

В первом порядке невязкого приближения течение над тонким профилем связано с формой профиля $y_w(x)$ аналитически

$$U_e = 1 - \tau \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \cdot \frac{dy_w(x)/\tau}{dx} + o(\tau),$$

$$T_e = 1 + \tau \frac{(\gamma - 1) M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \cdot \frac{dy_w(x)/\tau}{dx} + o(\tau),$$

$$P_e = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + \tau \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \cdot \frac{dy_w(x)/\tau}{dx} + o(\tau).$$

Поэтому невязкое обтекание параболического профиля (6.1) происходит с постоянным благоприятным градиентом давления

$$\frac{dP_e}{dx} = -\frac{4\tau}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + o(\tau). \quad (6.2)$$

Теоретическое значение коэффициента давления (1.17) имеет вид:

$$c_p = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{dy_w(x)}{dx} = 4\tau \frac{1 - 2x}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}.$$

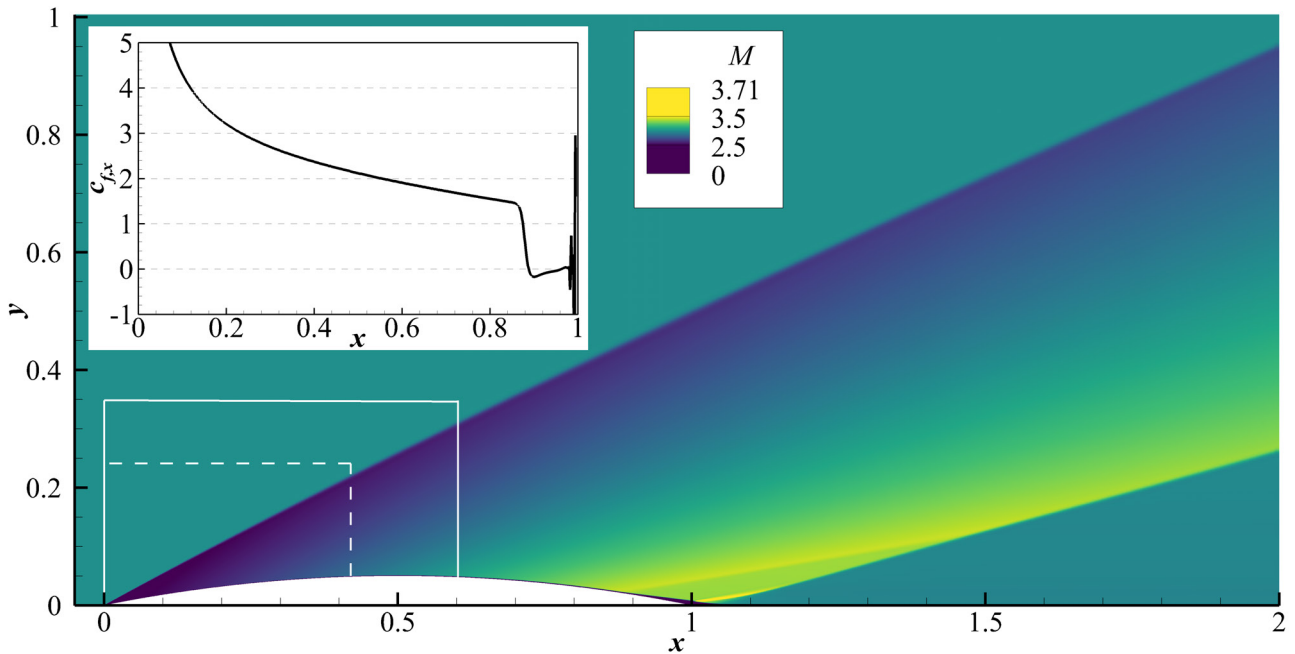


Рисунок 6.2 — Двухмерное невозмущённое поле течения и врезка с распределением $c_{f,x}$ вдоль поверхности. Границы подобластей для моделирования указаны белым: сплошная — для верификации (раздел 6.3); пунктирная — для основных расчётов (разделы 6.4 и 6.5). Цветовая шкала меняется для $M \in [2.5; 3.5]$

Как видно из рис. 6.3, теоретическое и расчётное распределения согласуются качественно: давление монотонно убывает, достигая значения p_∞ посередине хорды профиля при $x = 0.5$. Расчётное распределение всюду оказывается выше из-за вязко-невязкого взаимодействия. Влияние отрывной зоны (рис. 6.2) локализовано при $x > 0.8$ и не распространяется вверх по потоку, что позволяет исключить её из численного моделирования процессов восприимчивости и устойчивости (она не представляет интереса). Такой подход существенно экономит вычислительные ресурсы. Как видно из рис. 6.3, исключение хвостовой части профиля с выставлением граничного условия экстраполяции на правой границе ($x < 0.8$) не влияет на невозмущённое течение: оно устанавливается с высокой точностью и согласуется с расчётом в полной области. Таким образом, моделирование возмущённых течений проводится в подобластях, схематично изображённых белыми прямоугольниками на рис. 6.2.

Для изучения роли параметра τ рассмотрим пограничный слой над пластиной с продольным градиентом давления в рамках локально автомодельного приближения. В каждом сечении $x = \text{const}$ профили описываются сжимаемым аналогом уравнений Фолкнера — Скэн; параметры на границе вычисляются из теории тонкого профиля, и используется степенной закон вязкости $\mu = T^{0.75}$. Благоприятный продольный градиент давления приводит к тому, что на границе пограничного

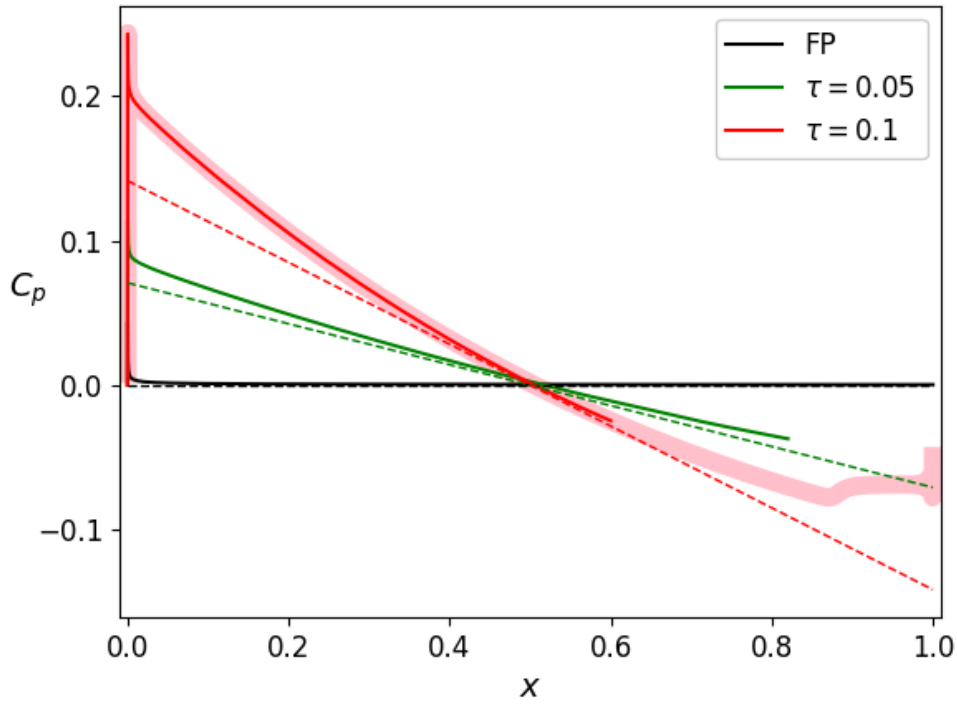


Рисунок 6.3 — Распределение коэффициента давления над профилем

слоя монотонно растёт число Маха, в то время как на плоской пластине $\tau = 0$ распределение $M_e(x)$ не зависит от x . Закон роста пограничного слоя усложняется. Недалеко от кромки $x = 0$ он соответствует случаю безградиентного пограничного слоя, но ниже по потоку рост ускоряется и в распределении толщины вытеснения $\delta_1(x)$ появляется точка перегиба (рис. 6.4). Это наблюдается и для случая полных уравнений Навье — Стокса, хотя имеется небольшое количественное рассогласование зависимостей $\delta_1(x)$ при $\tau > 0$. Далее будет показано, что вблизи точки перегиба характеристики устойчивости ведут себя необычным образом.

Точка перегиба тем ближе расположена к передней кромке, чем толще профиль. Такое поведение можно объяснить качественно, рассматривая при каждом фиксированном x толщину безградиентного пограничного слоя на теплоизолированной плоской пластине, если на его границе число Маха меняется по линейному закону

$$M_e(x) = M_\infty \frac{U_e(x)}{\sqrt{T_e(x)}} = M_\infty - M_\infty \frac{2 + (\gamma - 1)M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \cdot \tau(1 - 2x) + o(\tau) \approx M_{\infty,1} + b \cdot x,$$

$$\delta_1 \sqrt{\frac{Re_{\infty,L}}{xC_*}} = 1.72 + 2.21 \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2(x),$$

где $M_{\infty,1}$ — число Маха за косым скачком у передней кромки; C_* — константа Чепмена — Рубезина; b — величина, не зависящая от x . В рамках данной модели

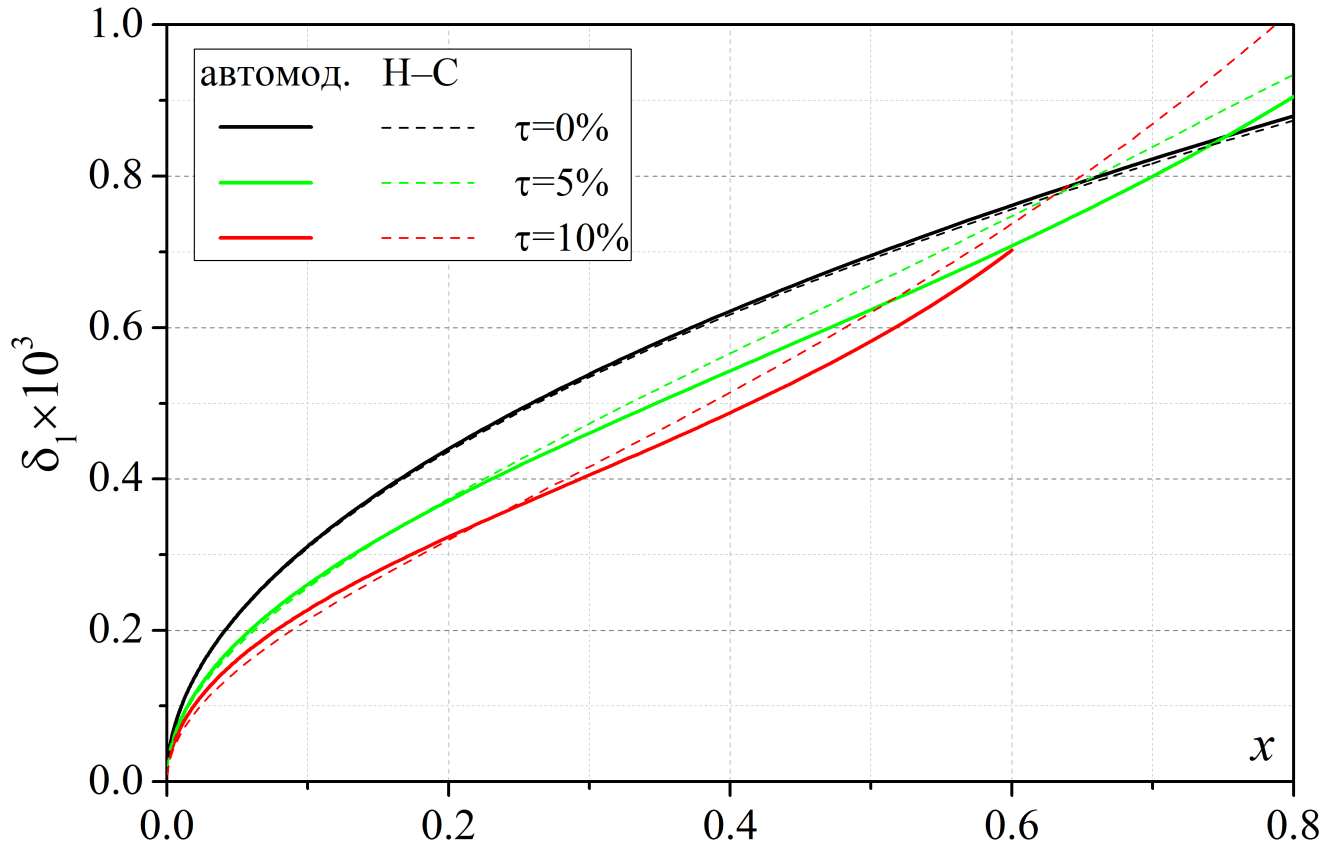


Рисунок 6.4 — Толщина вытеснения δ_1 в локально автомодельном приближении (автомод.) и в рамках полных уравнений Навье — Стокса (Н – С)

асимптотическое поведение пограничного слоя у передней кромки совпадает со случаем плоской пластины с фиксированным числом Маха $M_e \equiv M_{\infty,1}$ ($\delta_1 \propto \sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$), а вдали от кромки существенно отличается ($\delta_1 \propto x^{5/2}$ при $x \rightarrow \infty$). Следует отметить, что распределения $\delta_1(x)$, представленные на рис. 6.4, достаточно точно аппроксимируются функцией $f(x) = \sqrt{x} (a_0 + a_1x + a_2x^2)$ как в случае локально автомодельного пограничного слоя, так и в случае полных уравнений Навье — Стокса. Очевидно, что у зависимости $\delta_1(x)$ такого вида есть точка перегиба $x_{\text{пер}}$, которую можно выразить аналитически и для которой можно выписать асимптотическое поведение $x_{\text{пер}} \propto 1/\tau$ при $\tau \rightarrow 0$.

Для рассматриваемых параметров потока зависимость $x_{\text{пер}}(\tau)$ достигает минимума $x_{\text{пер},\min} \approx 0.085$ при $\tau_{\min} \approx 48\%$. Это значит, что при утолщении реалистичных профилей ($\tau < 20\%$) точка перегиба монотонно движется к передней кромке, а пограничный слой всё быстрее отстраивается от поведения, свойственного безградиентному пограничному слою на плоской пластине. Для оценки положим, что неустойчивость пограничного слоя по отношению к некоторому элементарному возмущению проявляется в ограниченном диапазоне по δ_1 . Таким образом,

утолщение профиля должно приводить к сокращению области неустойчивости. К сожалению, эта простая модель не позволяет проанализировать темп роста элементарного возмущения и сделать вывод о его интегральном усилении над профилем. Тем не менее, она позволяет сделать качественное предположение о том, что по мере утолщения профиля пограничный слой над ним должен становиться более устойчивым, а наиболее неустойчивая его область должна смещаться к передней кромке.

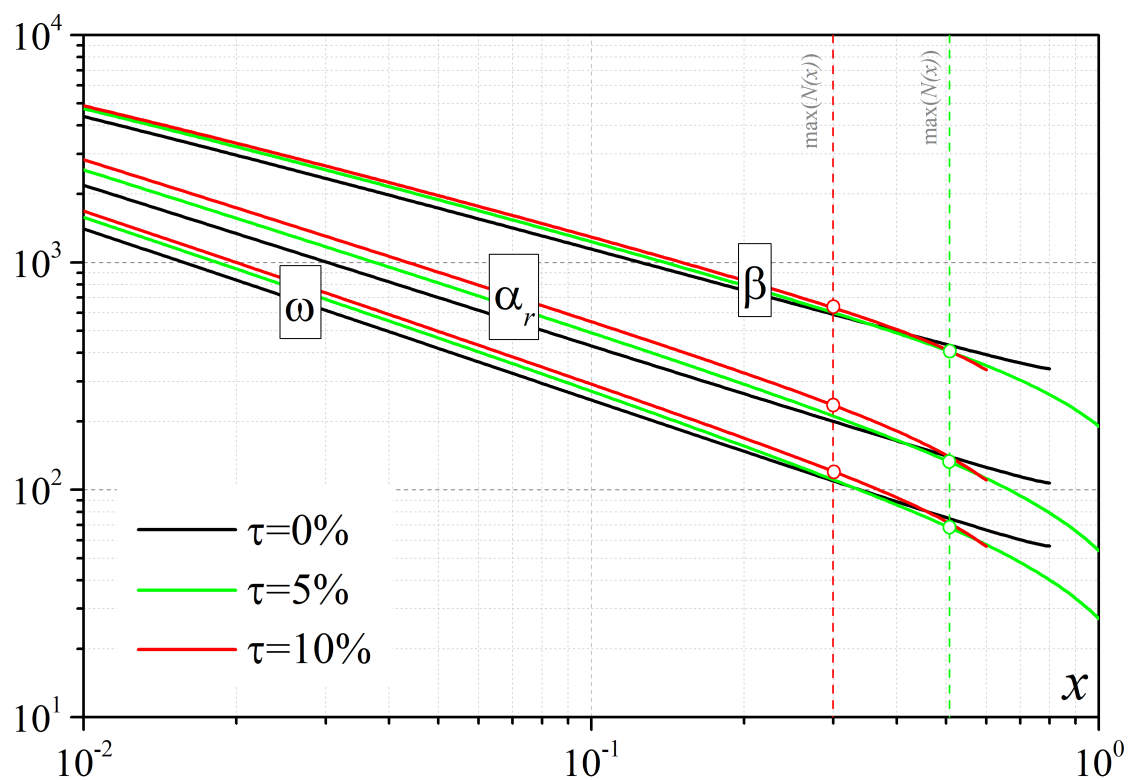
6.2. Максимально возможное усиление возмущений

Рассмотрим результаты линейной теории устойчивости для локально автомодельного пограничного слоя при продольном градиенте давления (6.2). Расчёты показали, что спектр пограничного слоя остался простым: новых мод, обусловленных параболической формой профиля, не появилось, и преобладающей является первая мода.

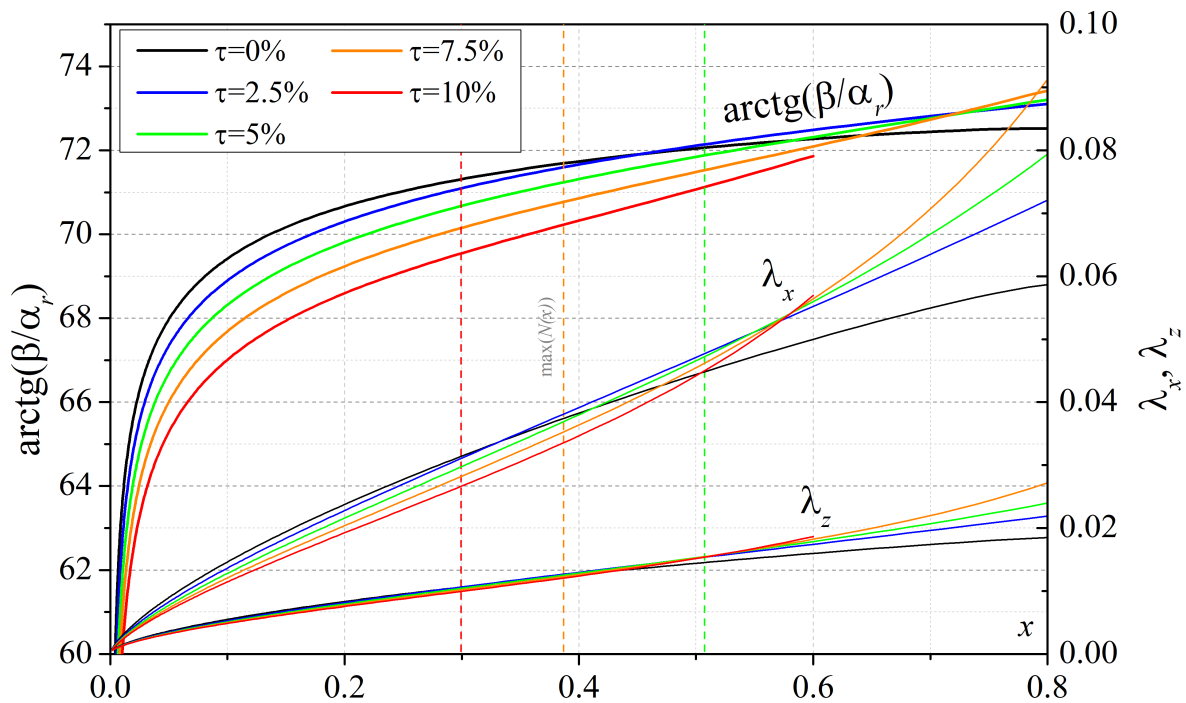
Характеристики возмущений масштабируются вместе с пограничным слоем $\delta_1(x)$ (рис. 6.5а): длина волны растёт вниз по потоку, а угол наклона волновых фронтов $\arctg(\beta/\alpha_r) \equiv \arctg(\lambda_x/\lambda_z)$ изменяется слабо, оставаясь при $x \gtrsim 0.1$ вблизи значения 70° (рис. 6.5б).

С ростом толщины профиля τ область неустойчивости каждой отдельно взятой гармоники становится уже; аналогично ведёт себя распределение инкремента преобладающей волны по поверхности (рис. 6.6а). Несмотря на небольшой участок при $x \lesssim 0.1$, где максимальный инкремент незначительно подрастает, благоприятный градиент давления оказывает стабилизирующее влияние: интегральное усиление возмущений, рассчитанное по e^N методу, уменьшается при утолщении профиля (рис. 6.6б).

Следует отметить, что резкое утолщение пограничного слоя над углом разреза, вызванное локализованным изменением давления на масштабе нескольких толщин пограничного слоя (см. главу 5), привело к резкой перестройке характеристик устойчивости. Как следствие, пограничный слой мгновенно стабилизировался по отношению к растущим перед углом возмущениям. На тонком параболическом профиле градиент давления ограничен, и темп роста пограничного слоя увеличивается постепенно, начиная с величины, которая свойственна плоской пластине

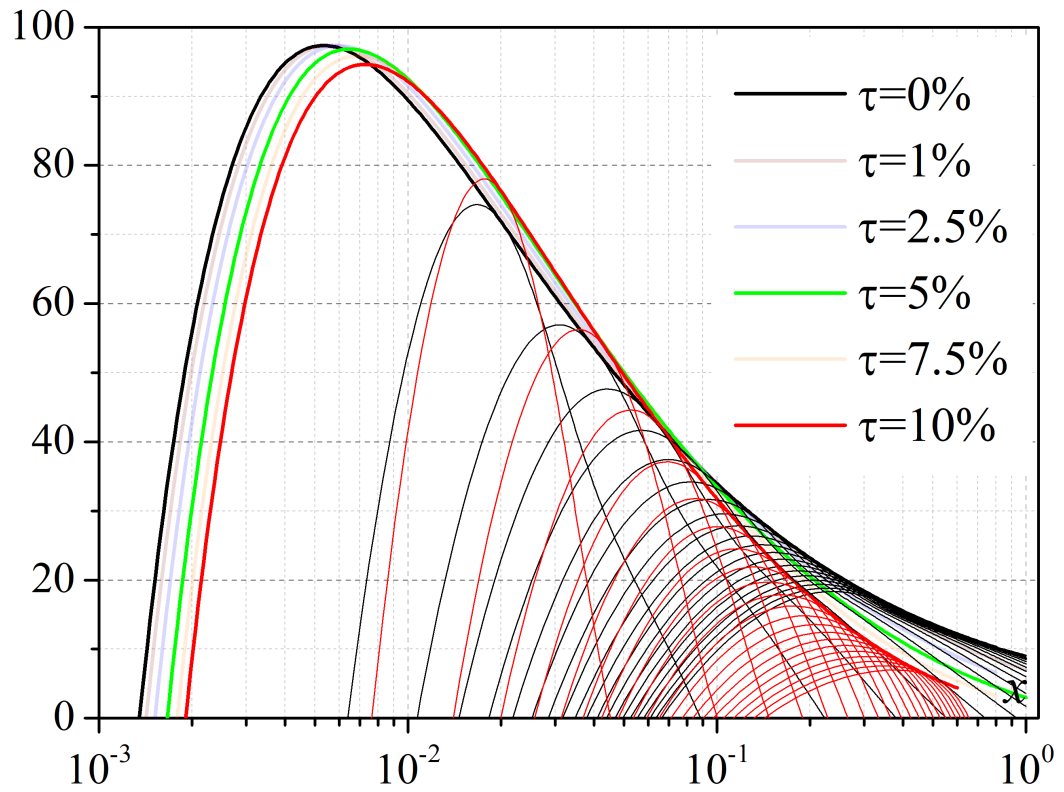


а) Частота и волновые числа

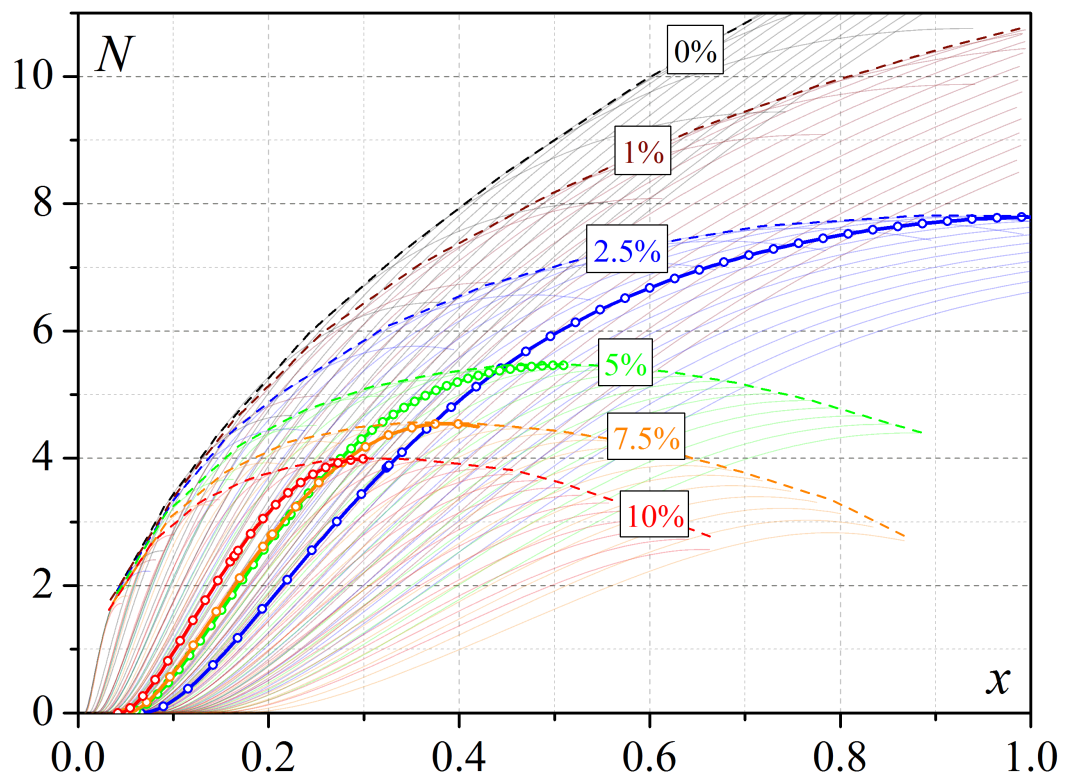


б) Угол наклона волновых фронтов и длина волны

Рисунок 6.5 — Распределение характеристик гармоника с наибольшим инкрементом роста, $-\alpha_i$



а) Инкременты, $-\alpha_i$, и их огибающие



б) Факторы интегрального усиления, N

Рисунок 6.6 — Характеристики устойчивости, рассчитанные по методу e^N

($\sim \sqrt{x}$). Распределение $\delta_1(x)$ может иметь точку перегиба (рис. 6.4), за которой пограничный слой начинает расти быстрее, чем по линейному закону. Ускоряющийся рост приводит к сокращению области неустойчивости во всём спектральном диапазоне. Чем толще профиль, тем раньше возникает перегиб и тем сильнее сокращается область неустойчивости. Очевидно, что в окрестности точки перегиба можно ожидать плавную стабилизацию пограничного слоя.

Действительно, при $\tau \geq 2.5\%$ распределение $N(x)$ достигает максимума за перегибом $\delta_1(x)$. Это значит, что на профиле появляется точка x_* , за которой возмущения из всего спектрального диапазона *не могут* достичь более высокой амплитуды, чем та, что уже была достигнута в этой точке! Таким образом, сделанное теоретическое наблюдение предполагает, что для ламинаризации рассматриваемого класса профилей достаточно принять меры по ламинаризации лишь их части $x < x^*$. Этот важный с практической точки зрения вывод будет подтверждён далее в рамках прямого численного моделирования.

Параметры гармоник, которая достигает максимального значения N -фактора, даны в табл. 6.2. Случаи $\tau = 0\%$ и 1% опущены, так как для них максимум внутри профиля не достигался. При $\tau = 2.5\%$ максимум $N(x)$ появляется на задней кромке профиля (отрыв не моделируется в локально-автомодельном приближении). При утолщении профиля точка максимума монотонно движется к точке перегиба, практически достигая её при $\tau = 10\%$. По-видимому, существование точки перегиба в $\delta_1(x)$ является необходимым условием появления максимума в распределении $N(x)$. Однако вовсе не обязательно, чтобы точка перегиба являлась предельной точкой, к которой x_* стремится с ростом τ .

Характеристики, указанные в табл. 6.2 для случая $\tau = 10\%$, положены в основу постановки задач прямого численного моделирования развития возмущений.

Следует отметить, что максимумы распределений $N(x)$ пологие. Поэтому даже небольшое изменение условий моделирования (например, закона вязкости) может привести к заметному смещению точки x_* . На рис. 6.7 показаны кривые $N(x)$, которые получены для невозмущённых полей течения, рассчитанных в рамках уравнений Навье — Стокса. Максимумы сдвигаются вверх по потоку, и существующие значения $N(x_*)$ уменьшаются (сравните данные табл. 6.3 и 6.2). Ниже результаты ПЧМ сопоставляются именно с этими результатами ЛТУ.

Таблица 6.2 — Параметры максимально растущей гармоник (локально автономный пограничный слой)

τ	$x_{\text{пер}}$	$x_{0,*}$	x_*	$N(x_*)$	ω_*	β_*	$\lambda_{x,*}(x_{0,*})$	$\lambda_{x,*}(x_*)$	$\lambda_{z,*}$	$\arctg(\lambda_{x,*}(x_*)/\lambda_{z,*})$
2.5%	0.70	$\gtrsim 0.066$	$\gtrsim 1.0$	$\gtrsim 7.79$	$\lesssim 100.7$	$\lesssim 558.4$	$\gtrsim 0.0291$	$\gtrsim 0.0393$	$\gtrsim 0.0113$	$\gtrsim 74.0^\circ$
5%	0.42	0.050	0.510	5.46	142.4	736.8	0.0209	0.0262	0.0085	$\approx 71.9^\circ$
7.5%	0.33	0.049	0.387	4.54	160.1	805.3	0.0186	0.0220	0.0078	$\approx 70.5^\circ$
10%	0.29	0.042	0.300	3.99	197.9	947.8	0.0150	0.0174	0.0066	$\approx 69.1^\circ$

Таблица 6.3 — Параметры максимально растущей гармоник (пограничный слой в рамках уравнений Навье — Стокса)

τ	$x_{\text{пер}}$	$x_{0,*}$	x_*	$N(x_*)$	ω_*	β_*	$\lambda_{x,*}(x_{0,*})$	$\lambda_{x,*}(x_*)$	$\lambda_{z,*}$	$\arctg(\lambda_{x,*}(x_*)/\lambda_{z,*})$
5%	0.48	0.037	0.439	4.96	165.0	878.3	0.0169	0.0242	0.0072	73.5°
10%	0.26	0.034	0.218	3.19	197.5	1055.3	0.0132	0.0167	0.0060	70.4°

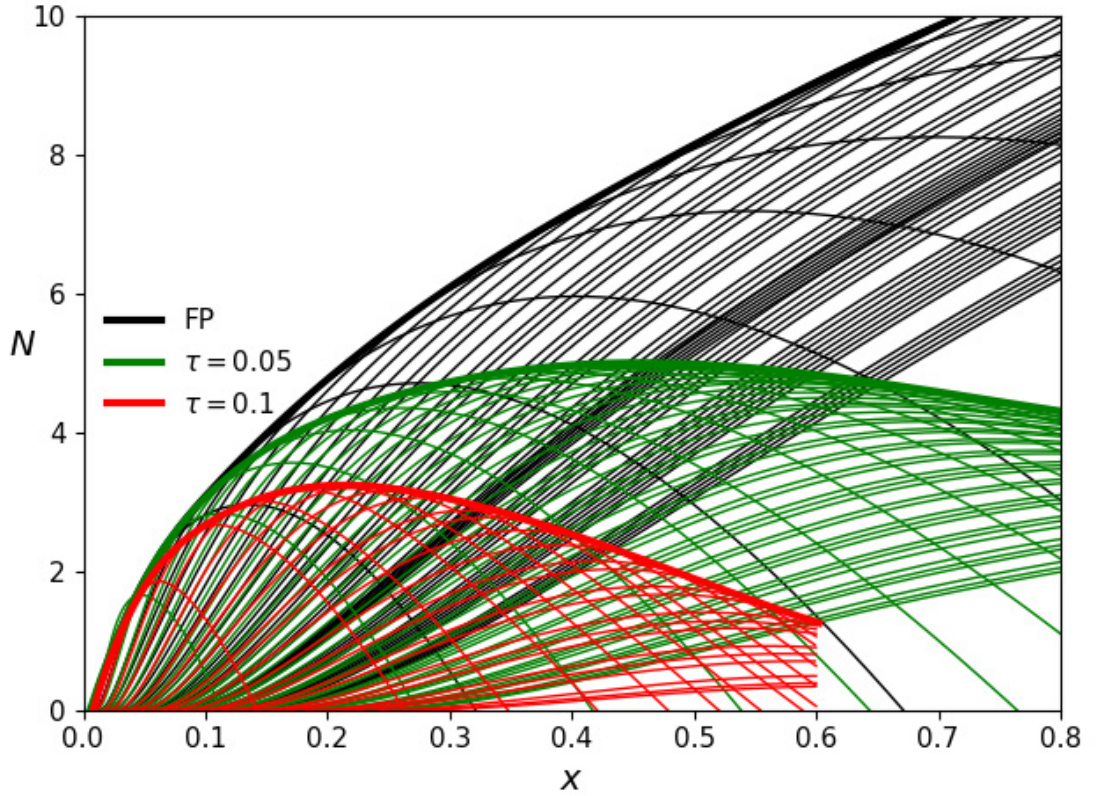


Рисунок 6.7 — N -факторы и их огибающие по методу e^N для невозмущённого пограничного слоя, рассчитанного численно в рамках уравнений Навье — Стокса

6.3. Верификация

Для подтверждения результатов линейной теории и оценки параметров дальнейших расчётов рассмотрим модельную задачу развития возмущений, искусственно введённых в пограничный слой путём вдува — отсоса газа с поверхности профиля вблизи точки потери устойчивости $x_{0,*}$ максимально нарастающей гармоники. Генератор возмущений действует в прямоугольной области $x \in [x_s, x_e] \times [z_s, z_e] \ni z$, $x_e \approx 0.041 \approx x_{0,*}x_s = 0.026 \approx x_e - \lambda_{x,*}(x_{0,*})$, $z_e = -z_s = \lambda_{z,*}/2 \approx 0.0033$ в течение одного периода $2\pi/\omega_0 \approx 0.0318$, $\omega_0 = 197.7 \approx \omega_*$; граничное условие, задающее работу генератора, имеет вид

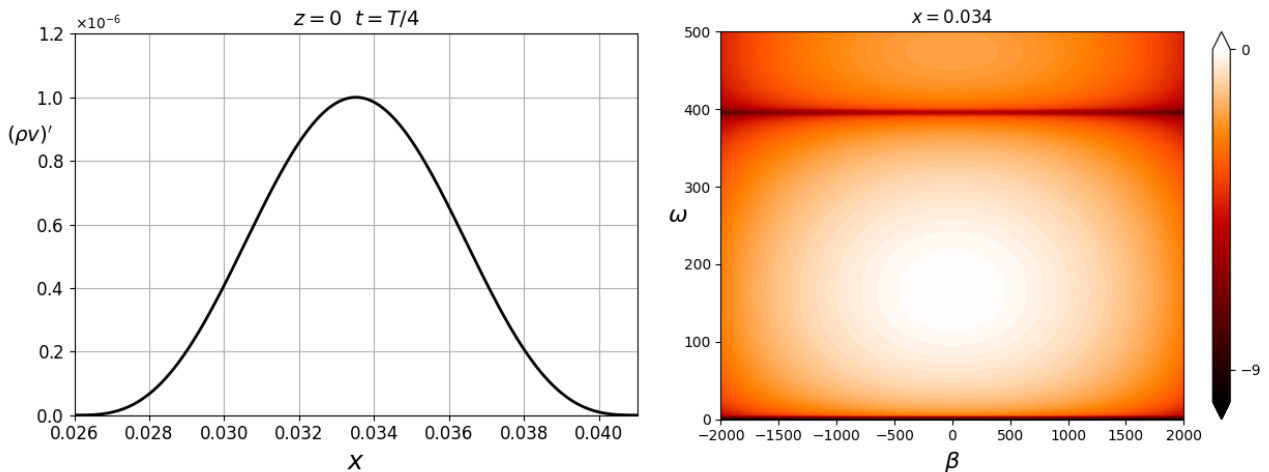
$$(\rho v)' = \epsilon \cos^3 \left(\pi \frac{x - 0.5(x_e + x_s)}{x_e - x_s} \right) \cos^3 \left(\pi \frac{z - 0.5(z_e + z_s)}{z_e - z_s} \right) \sin(\omega_0 t),$$

где $\epsilon = 10^{-6}$. Такая локализация в пространстве (рис. 6.8а) и времени гарантирует широкий частотно-волновой состав начального возмущения, вводимого в пограничный слой, что проиллюстрировано на рис. 6.8б с помощью десятичного логарифма спектральной плотности мощности генератора, нормированной на

своё максимальное значение. Полоса «молчания» на частоте $2\omega_0 \approx 400$ может быть получена аналитически путём преобразования Фурье временного сигнала генератора. Присутствие такой полосы является допустимым при исследовании линейного режима развития возмущений, так как частота преобладающей гармоники понижается при движении вниз по потоку ($\omega_{max}(x) < \omega_*$ при $x > x_*$), а кратные гармоники не появляются из-за отсутствия нелинейного взаимодействия.

Численное моделирование возмущённых течений проводится для профиля $\tau = 10\%$ на расчётной сетке $3000 \times 300 \times 150$ в области $x \in [0, 0.6] \times [0, 0.06] \ni z$. Поперёк пограничного слоя (до $\delta_{99}(x)$) равномерно укладывается не менее 100 (на большей части 125) сеточных линий. Для обеспечения плавного перехода к области внешнего невязкого течения ещё 125 линий попадает в интервал $[\delta_{99}, 3\delta_{99}]$ с постепенным увеличением шага сетки по мере удаления от стенки. Вдоль профиля и в боковом направлении z сетка является равномерной. На длину волны λ_x приходится примерно 75 точек, на λ_z — 17 точек. Такую сетку будем называть базовой.

В боковом направлении z накладываются условия симметрии. Нестационарные расчёты выполнены с шагом $dt = 10^{-4}$.



а) Пространственная форма, $t = 0.5\pi/\omega_0$ б) Спектральная форма, $x \approx 0.034$

Рисунок 6.8 — Генератор возмущений «вдв — отсос»

6.3.1. Развитие возмущений от генератора

Эволюция волнового пакета над поверхностью проиллюстрирована на рис. 6.9 в компактном виде. Над пластиной (рис. 6.9а) пакет расширяется в пространстве и возмущения монотонно нарастают вниз по потоку. Линия $z_{max}(x_{max})$, на которой возмущения достигают наибольшей амплитуды, сначала лежит в плоскости симметрии $z = 0$, но при $x \gtrsim 0.25$ отклоняется от неё и приближается к предсказанию линейной теории устойчивости (детали этого сравнения опущены для краткости и иллюстрируются для аналогичного возмущённого течения в главе 7). Над профилем $\tau = 10\%$ (рис. 6.9б, пределы цветовой палитры уменьшены на порядок) размеры волнового пакета также увеличиваются вниз по потоку, но амплитуда возмущений достигает максимума вблизи $x \approx 0.2$. Далее волновой пакет равномерно и монотонно затухает.

Это наблюдение лучше иллюстрируется полем максимальной амплитуды волнового пакета, которая была достигнута по мере его движения над поверхностью (рис. 6.10). Ядро пакета над профилем имеет полосчатую структуру, которая соот-

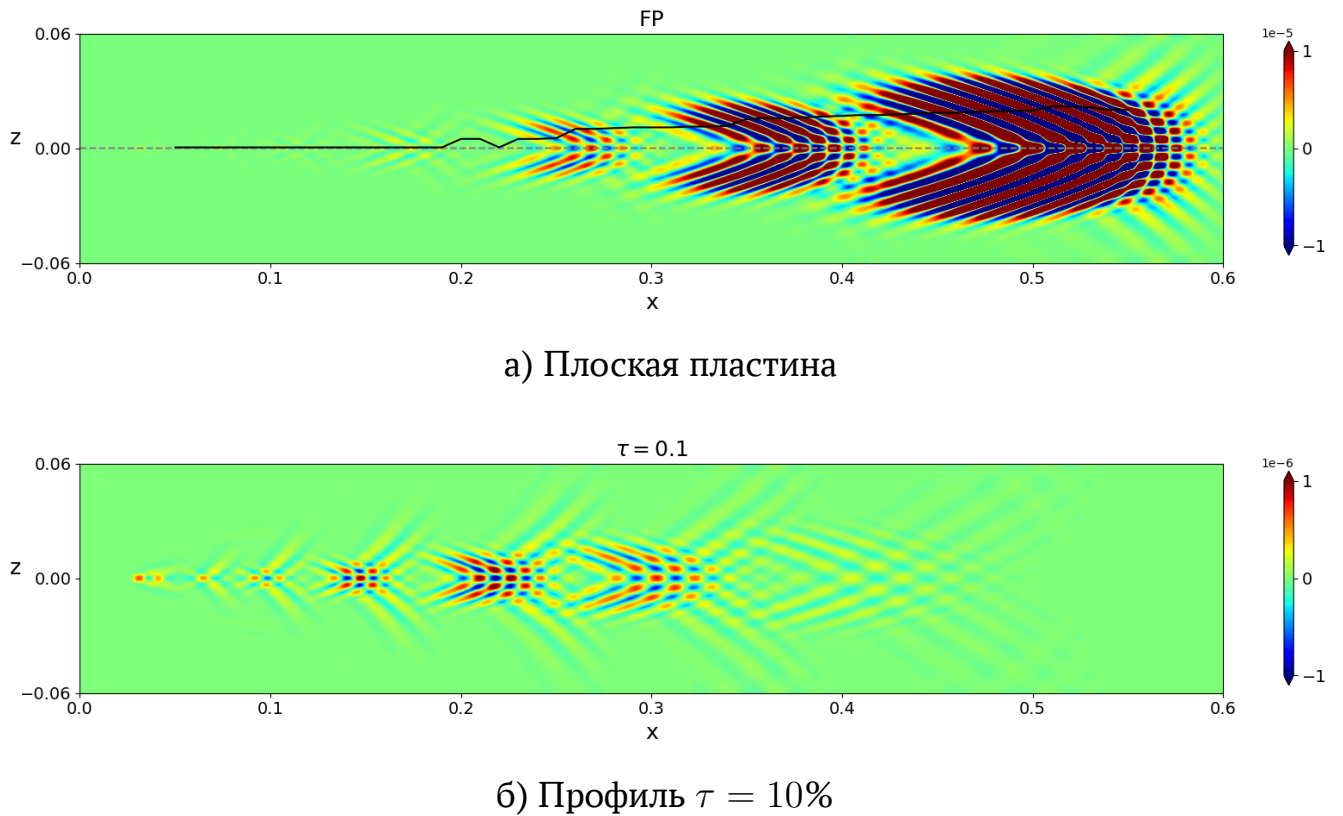
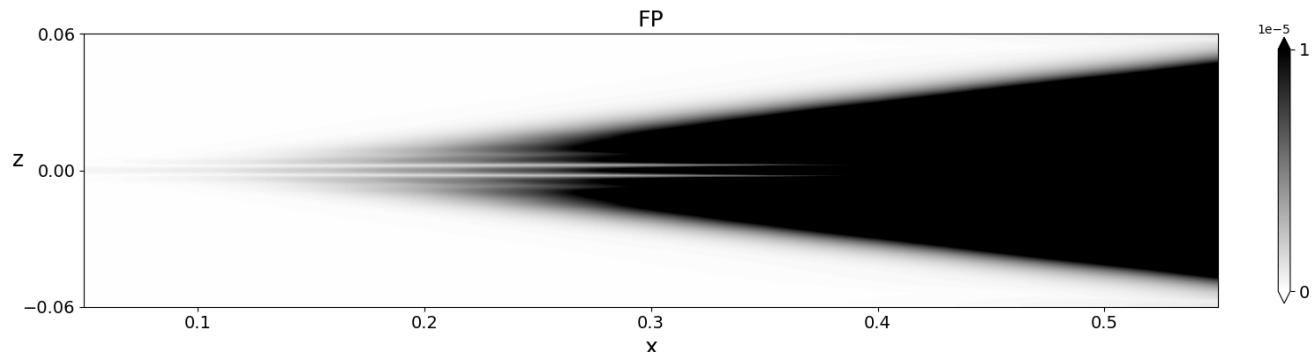


Рисунок 6.9 — Помещённые на одно изображение поля $p'_w(x, z)$ в несколько моментов времени: $t = 0.025, 0.08, 0.14, 0.23, 0.36, 0.51, 0.71$

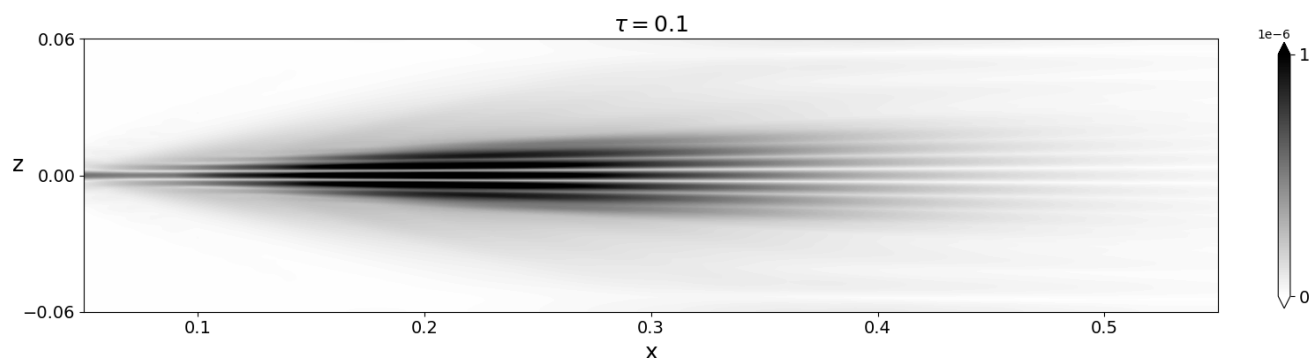
ветствует шахматной структуре возмущения на рис. 6.9 и усиливается до сечения $x = 0.2 \dots 0.25$, а далее затухает. Ядро пакета над пластиной нарастает вниз по потоку, причём при $x \gtrsim 0.25$ пакет раскрывается в полуугле $\approx 6.6^\circ$ (по траектории горба пакета), что близко к верхней границе $\approx 6.2^\circ$ полуугла раскрытия турбулентных пятен и клиньев по данным [233].

Эволюция спектров, проиллюстрированная на рис. 6.11, характерна для описанного поведения волновых пакетов. Спектры имеют максимумы при $\omega_{max} \neq 0$, $\beta_{max} \neq 0$, соответствующие преобладанию волн с характерным наклоном фронтов $\pm \arctg(c \cdot \beta_{max} / \omega_{max})$, где c — фазовая скорость распространения возмущений. По мере развития волновых пакетов в обоих случаях величины ω_{max} и β_{max} понижаются в соответствии с предсказаниями ЛТУ.

Изначально в сечении $x = 0.1$ спектры для пластины и профиля близки. Ниже по потоку спектры для пластины демонстрируют монотонный рост интенсивности волнового пакета, а спектры для профиля — рост при $x \lesssim 0.2$ и дальнейшее ослабление максимальной амплитуды. Следует отметить, что отдельно взятые гармоники продолжают расти при $x > 0.2$, однако их амплитуды не превосходят максимального значения, достигнутого преобладающей гармоникой при $x \approx 0.2$.



а) Плоская пластина



б) Профиль $\tau = 10\%$

Рисунок 6.10 — Поле максимальной амплитуды возмущения давления на поверхности за всё время расчёта

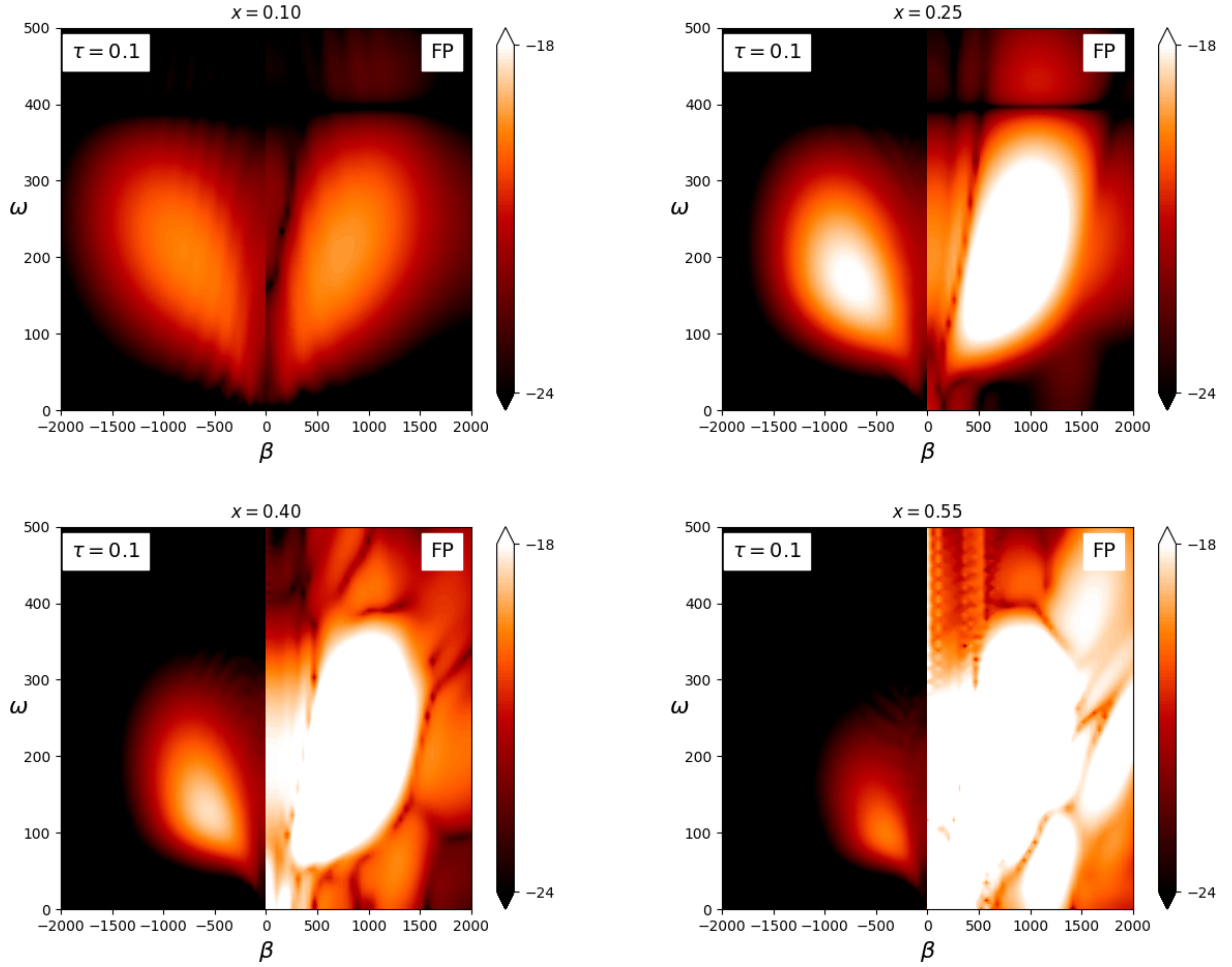


Рисунок 6.11 — Десятичный логарифм спектральной плотности мощности $p'_w(t, z)$ для профиля $\tau = 10\%$ (левая часть) и пластины (FP, правая часть)

6.3.2. Сравнение с теорией

На рис. 6.12 сопоставляются N -факторы интегрального усиления возмущений относительно точки $x_0 = 0.1$, где в ПЧМ волновой пакет уже сформировался. Это позволяет исключить из сравнения эффект различия в начальной амплитуде возмущений. Для расчётов ПЧМ имеем $\Delta N(x) = \ln(A(x)/A(x_0))$, где $A(x) = \max_{t,z} p'_w(t, x, z)$. На большей части пластины наблюдается хорошее согласование зависимостей $\Delta N(x)$. Лишь при $x \approx 0.7$, где возмущения достигают больших амплитуд, кривая ПЧМ начинает отклоняться вверх. Такое поведение может быть связано с появлением признаков нелинейных взаимодействий, которые не представляют интереса для целей подтверждения результатов линейной теории устойчивости. В случае профиля наблюдается удовлетворительное согласие при $x \lesssim 0.3$, в том числе по положению глобального максимума интегрального

усиления. Однако при $x > 0.3$ кривая ПЧМ заметно отклоняется вниз от кривой ЛТУ, что указывает на более быстрое затухание возмущений в случае численного моделирования. Есть две очевидные причины такого расхождения.

Во-первых, в расчётах ПЧМ не выполняется предположение e^N метода о равенстве амплитуд всех гармоник в их точках потери устойчивости. Несмотря на широкий спектр начального возмущения, в ПЧМ возмущение локализовано вблизи передней кромки. Поэтому изначально устойчивые низкочастотные гармоники успевают ослабнуть до момента начала их роста. Такие гармоники преобладают ниже по потоку от точки максимума x_* , и начальный участок их ослабления приводит к меньшему интегральному усилению по сравнению с результатами ЛТУ. По мере движения вниз по потоку расхождение между результатами ПЧМ и ЛТУ растёт, так как частота и волновое число преобладающего возмущения уменьшаются, а область начального устойчивого развития увеличивается.

Во-вторых, расчёты ЛТУ проведены в рамках локально-параллельного приближения, которое хорошо выполняется на плоской пластине. Однако непараллельность течения на крыловом профиле $\tau = 10\%$ может стать существенной. Вероятно, что наблюдаемое на рис. 6.12 расхождение при $x > 0.3$ одновременно обусловлено обеими причинами.

Кривые N -факторов для отдельно взятых гармоник из ПЧМ можно построить с помощью спектральной плотности мощности: $\Delta N(\omega, \beta, x) = 0.5 \ln(psd(\omega, \beta, x)/psd(\omega, \beta, x_0))$. Такие кривые из ПЧМ и ЛТУ согласуются удовлетворительно, как показано на рис. 6.13. Следует отметить, что в случае параболического профиля (рис. 6.13б) точка максимального усиления возмущений оказывается систематически ближе к передней кромке по сравнению с ЛТУ, а само значение этого максимума оказывается систематически меньше величины, предсказанной ЛТУ. Преждевременное затухание гармоник после достижения максимума может объясняться как влиянием численной диссипации, так и необходимостью учёта непараллельности течения в пограничном слое над искривлённой поверхностью параболического профиля, что выходит за рамки настоящей работы.

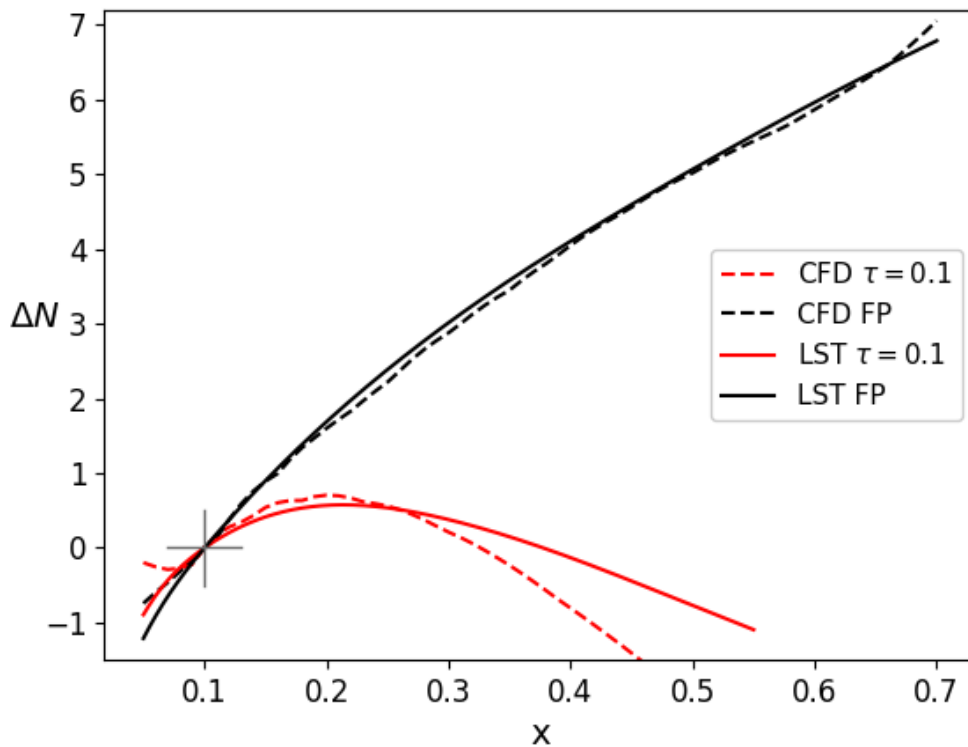
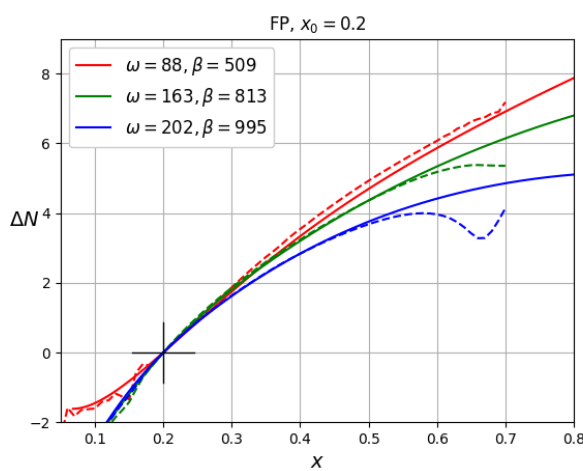
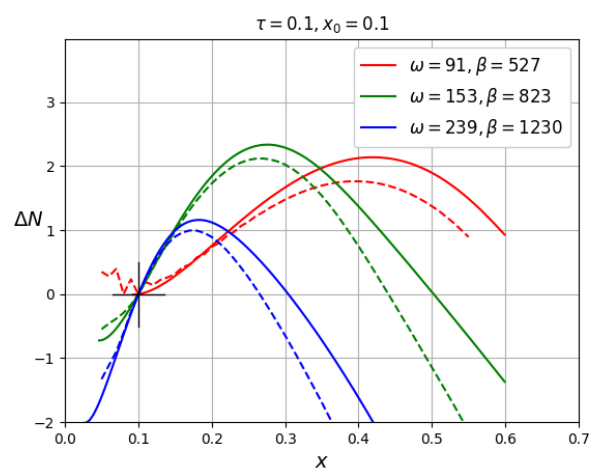


Рисунок 6.12 — Сопоставление огибающих N -факторов из ЛТУ (LST) и ПЧМ (CFD) для профиля $\tau = 10\%$ и пластины (FP) относительно точки $x = 0.1$. Крестиком отмечена точка нормировки кривых, относительно которой рассчитываются приращения N -факторов



а) Плоская пластина, $x_0 = 0.2$



б) Профиль $\tau = 10\%$, $x_0 = 0.1$

Рисунок 6.13 — Сопоставление N -факторов некоторых гармоник относительно точки x_0

6.3.3. Сеточная сходимость

Для анализа сеточной сходимости изучим поведение максимума в распределении амплитуды возмущения давления на поверхности в плоскости симметрии $z = 0$. Несмотря на идентичные условия расчётов, амплитуда волнового пакета сразу за генератором немного различается из-за различия в сетках. Поэтому для анализа сеточной сходимости рассматриваются амплитуды горба пакета, нормированные на соответствующую амплитуду в сечении $x = 0.05 > x_e$, которое расположено ниже по потоку от генератора возмущений — $\bar{p} \equiv p'_{w,max}(x, 0)/p'_{w,max}(0.05, 0)$ (максимум берётся по времени). Нормированные амплитуды показаны на рис. 6.14а².

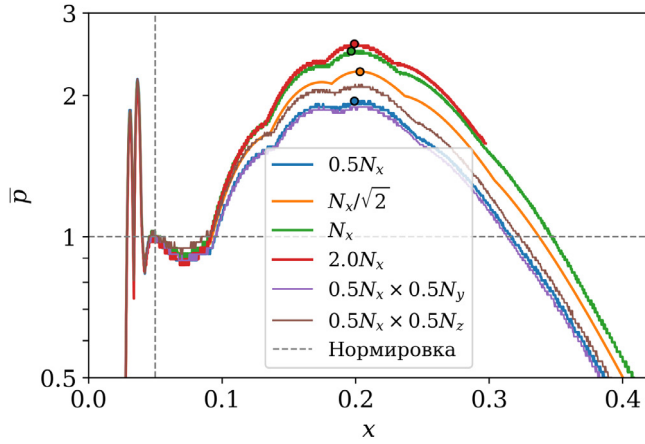
Наиболее интересно влияние продольного сеточного разрешения на численную диссипацию возмущений. Величины максимумов $\bar{p}_* \approx 1.94, 2.25, 2.49$ и 2.58 , отмеченные кружками на рис. 6.14а, получены на четырёх сетках с разным количеством узлов по x , соответственно: $N/N_x = 1/2; 1/\sqrt{2}; 1; 2$ (сеточные шаги $h/h_x = 2, \sqrt{2}, 1, 1/2$). N_x и h_x — параметры базовой сетки. Предположим, что существует предельное значение $\lim \bar{p}_* = \bar{p}_{*,lim}$ при $N \rightarrow \infty$, а порядок аппроксимации численного метода равен q . Тогда для каждой из сеток s можно записать

$$\bar{p}_* = \bar{p}_{*,lim} + const \cdot \left(\frac{h}{h_x} \right)^q. \quad (6.3)$$

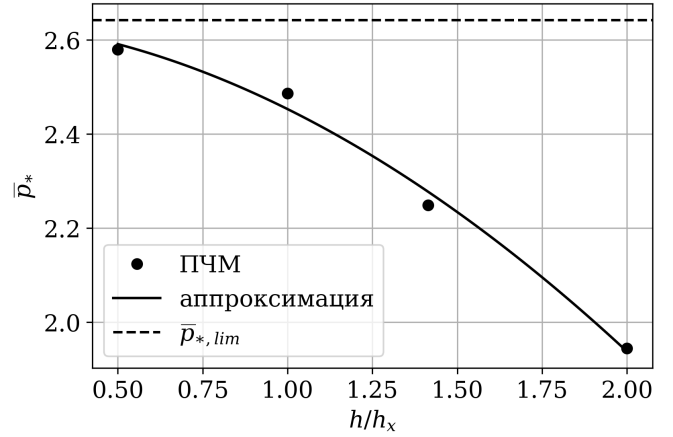
Полагая константу $const$ не зависящей от расчётной сетки, получаем переопределённую систему из четырёх алгебраических уравнений. Оптимизация кривой $\bar{p}_*(h)$ методом наименьших квадратов (рис. 6.14б) даёт следующие значения параметров: $\bar{p}_{*,lim} \approx 2.64$, $const \approx -0.19$ и $q \approx 1.90$. Таким образом, порядок аппроксимации близок ко второму, а относительная погрешность на базовой сетке в продольном направлении составляет 5.9%.

Сеточному разрешению в направлениях y и z уделено меньше внимания (рис. 6.14а). Эффект от N_y оказался незначительным и отрицательным ($\bar{p}_* \downarrow$ при $N_y \uparrow$), а оценка погрешности в боковом направлении z не превосходит полученную выше величину для продольного направления. Поэтому суммарную погрешность результатов, полученных на базовой сетке, можно оценить сверху в 12%.

²Для экономного использования накопителей информации поле возмущений вычисляется по исходным полям течения, рассчитанным с двойной точностью, и далее сохраняется с единичной точностью. По ошибке, для нескольких верификационных расчётов такой порядок был нарушен: сначала был осуществлён перевод полей течения в единичную точность, а затем рассчитаны поля возмущений. Из-за этого появилась ошибка



а) Распределение



б) Аппроксимация максимумов

Рисунок 6.14 — Проверка сеточной сходимости для нормированной амплитуды горба волнового пакета на профиле при $\tau = 10\%$. Базовая сетка имеет размерность $N_x \times N_y \times N_z$

6.4. Роль атмосферной турбулентности

Для многих практически важных случаев было показано [238], что характерный линейный масштаб неустойчивости лежит в инерционном интервале атмосферной турбулентности, где она описывается только двумя параметрами: кинематической вязкостью ν_∞^* (стандартная атмосфера) и мощностью диссипации ε^* кинетической энергии турбулентности, которая изменяется примерно в пределах двух порядков в зависимости от погодных условий [239]. Такая неопределённость в значении ε^* приводит к ошибке предсказания перехода лишь $(\Delta x/x)_t < 17\%$ в широком диапазоне по числу Маха и высоте полёта [238].

Оценим характерные значения N -факторов перехода в условиях реалистичного полёта, полагая $\lambda \approx \eta_K$, где масштаб $\eta_K^* \approx 7.4(\nu_\infty^{*3}/\varepsilon)^{1/4}$ соизмерим с колмогоровским масштабом изотропной турбулентности. Используя спектр изотропной турбулентности [240] и данные [239] о мощности диссипации энергии турбулентности ε , получаем оценку для флуктуации скорости атмосферной турбулентности на масштабе неустойчивой моды $u' \approx 10^{-5}$. Полагая коэффициент восприимчивости равным примерно 10^{-2} [241], получаем амплитуду скорости, возбуждаемой неустойчивой волны $A_0 \approx 10^{-7}$. Считая, что начало перехода соответствует амплитуде $A \approx 10^{-2}$ (1% от значения в набегающем потоке), оцениваем фактор

округления, которая объясняет ступенчатый характер большинства кривых на рис. 6.14а, но не затрудняет проверку сеточной сходимости.

интегрального усиления $N = \ln(A/A_0) \approx 11$, который близок к типичному для свободного полёта эмпирическому значению $N = 10$. Для исследуемых крыловых профилей толщиной $\tau \geq 5\%$ N -фактор не превосходит значения 5.0 (см. рис. 6.7). Таким образом, маловероятно, что атмосферная турбулентность может инициировать ламинарно-турбулентный переход в исследуемом случае.

Проверим сделанную оценку с помощью прямого численного моделирования восприимчивости и устойчивости пограничного слоя к атмосферной турбулентности для штормовых погодных условий, когда интенсивность турбулентности оказывается наибольшей.

Расчёты выполнены в области $x \in [0, 0.42] \times [0, 0.084] \ni z$. Она отделена от выходной границы буферной зоной, где сетка плавно и значительно разрежается в направлениях x и y (рис. 6.15). Как отмечалось выше, такой подход не искажает результаты нестационарного моделирования. Действительно, среднее течение не меняется из-за проведения расчёта в сокращённой области. Отрывная область в хвостовой части профиля не влияет на течение выше по потоку от неё, за исключением малой окрестности порядка толщины предотрывного пограничного слоя. При турбулизации течения над профилем размер отрывной области сократится, и это также не повлияет на процесс развития возмущений при $x < 0.42$. Буферная зона подавляет возмущения перед выходной границей (при $x = 0.55$), но не оказывает влияния на возмущения, входящие в буферную зону при $x = 0.42$.

Многоблочная расчётная сетка имеет размерность $1451 \times 351 \times 187$. Сетка сгущена к передней кромке и к стенке так, что на толщину пограничного слоя δ_{99} попадает около 125 сеточных линий при $x > 0.05$. Сетка разрешает длину преобладающей волны λ_* примерно 40 ячейками в направлениях x и z ; на её период $2\pi/\omega_*$ приходится 159 временных шагов. По опыту численного моделирования и в соответствии с результатами главы 2, такого пространственно-временного разрешения достаточно для достижения точности порядка 10% по амплитуде возмущений, развивающихся в пограничных слоях, в том числе для гармоник с кратными частотами $2\omega_*$, $3\omega_*$ (не менее 50 точек на период).

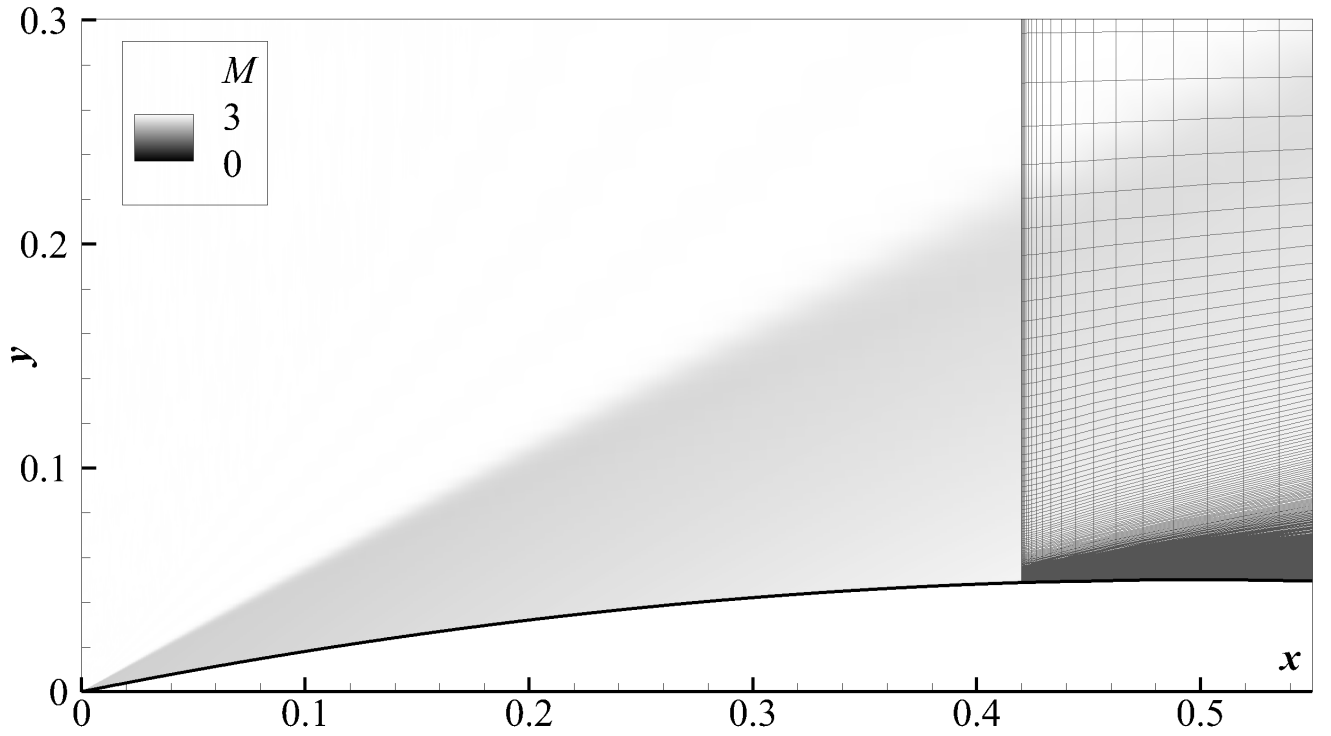


Рисунок 6.15 — Невозмущённое поле числа Маха (базовое 2D течение). В буферной области показана структура расчётной сетки

6.4.1. Нестационарные граничные условия

Стохастическую природу атмосферной турбулентности можно моделировать с помощью подхода [242], в котором используется модельная форма её спектра. Ниже этот подход модифицирован: дополнительно учтено, что малые вихревые возмущения сносятся со скоростью потока \mathbf{U}_∞ . Тогда дисперсионное соотношение для вихревых возмущений $(\mathbf{k}, \mathbf{U}_\infty) = \omega$, где \mathbf{k} — волновой вектор, ω — частота элементарного возмущения. Учитывая, что $\mathbf{U}_\infty = (1, 0, 0)$, дисперсионное соотношение сводится к виду $k_x = \omega$. Генерация синтетической турбулентности осуществляется в виде нестационарного граничного условия: к невозмущённому полю течения добавляется нестационарное вихревое возмущение вида

$$\mathbf{U}' \equiv (u', v', w') = \sum_{i=1}^N \sqrt{2q_i} \hat{\sigma}_i \sin(\mathbf{k}_i (\mathbf{x} - \mathbf{U}_\infty t) + \varphi_i) \quad (6.4)$$

$$T' = 0, \quad p' = 0$$

со случайными начальными фазами, равномерно распределёнными по интервалу $\varphi_i \in [0, 2\pi)$. Волновые вектора \mathbf{k}_i получены в виде произведения ортов \mathbf{d}_i и соот-

ветствующих волновых чисел, разбивающих отрезок $[k_{min}, k_{max}]$ с постоянным шагом Δk : $\mathbf{k}_i = \mathbf{d}_i k_i = \mathbf{d}_i (k_{min} + i\Delta k)$. Орты \mathbf{d}_i и $\hat{\sigma}_i$ взаимно перпендикулярны (следствие уравнения непрерывности для возмущений) и генерировались заранее случайным образом с равномерным распределением по сфере и по окружности, соответственно. Амплитуда гармоник вычислялась исходя из энергетического спектра турбулентности [242]:

$$q_i = E_i \Delta k,$$

$$E_i = A \frac{(k_i/k_e)^4}{(1 + 2.4(k_i/k_e)^2)^{17/6}} \cdot f_\eta(k_i) f_{cut}(k_i),$$

$$f_\eta = \exp \left(- \left(\frac{12k_i}{k_\eta} \right)^2 \right),$$

$$f_{cut} = \exp \left(- (4 \max(k_i/k_e - 0.9, 0))^3 \right),$$

где E_i — спектральная плотность мощности для данного волнового числа k_i ; k_e — характерный масштаб турбулентности ($k_e = 0.01 \ll k_{min} \approx 0.1$). Функции $f_\eta(k)$ и $f_{cut}(k)$ обеспечивают затухание спектра на масштабе Колмогорова $k_\eta = 2\pi(\nu_\infty^3/\varepsilon)^{-1/4}$ и на масштабе спектральной отсечки $k_{cut} = 2\pi/l_{cut}$, $l_{cut} = 2 \max(dx, dy, dz)$; dx , dy и dz — местные шаги сетки на входной границе; ε — мощность диссипации турбулентной энергии. Коэффициент A позволяет нормировать спектр в инерционном интервале на данные эксперимента [240], чтобы получить физически корректную амплитуду возмущений:

$$A = \alpha \varepsilon^{2/3} \cdot \frac{2.4^{17/6}}{k_e^{5/3}}, \quad (6.5)$$

где $\alpha = 1.7$ — эмпирический коэффициент. В случае штормовых погодных условий, когда атмосферная турбулентность наиболее интенсивна, на высоте 20 км $\varepsilon^* = 0.06 \text{ м}^2/\text{с}^3$ [239], а множитель из (6.5) равен

$$\alpha \varepsilon^{2/3} = \alpha \left(\varepsilon^* \cdot \left(\frac{u_\infty^3}{L^*} \right)^{-1} \right)^{2/3} \approx 9.2 \cdot 10^{-7} \lesssim 10^{-6}.$$

Из дисперсионного соотношения $k_x = \omega$ следует, что $|\omega| = |k_x| \leq |\mathbf{k}|$. Для удовлетворительного заполнения частотного интервала вблизи ω_* , который покрывает

основную часть неустойчивой области пограничного слоя, требуется использовать большое число коротковолновых гармоник. Кроме этого, из-за случайного направления волнового вектора \mathbf{k} недостаточное количество гармоник приводит к нефизичным провалам по частоте в спектре генерируемого сигнала. В результате анализа статистической неопределённости для (6.4) выбрано значение $N = 10^4$ гармоник с волновыми числами $k_i \in [60, 600]$, что обеспечивает диапазон моделируемых частот $\omega_i \in [60, 600]$. При этом статистическая неопределённость для мощности, заключённой в узкой части волнового спектра $180 < k_{x*} = \omega_* < 220$ не превышает 10%, как показано на рис. 6.16. Серыми точками отмечены значения мощности E для спектра каждой сгенерированной реализации атмосферной турбулентности. Чёрные символы соответствуют среднему значению $\langle E_N \rangle$ и двум среднеквадратичным отклонениям σ от него для каждого фиксированного значения N . Сплошной линией обозначено математическое ожидание E (величина E_{lim}), пунктиром — аппроксимация границ вероятных значений этой величины. Символом \times обозначено значение E для спектра, использованного ниже; его близость к E_{lim} случайна. Данные рис. 6.16 использовались лишь для выбора подходящей величины N .

На рис. 6.17а представлен пример стохастического поля в сечении $z = 0$, которое было сгенерировано при $t = 0$ для тестового спектра, представленного на рис. 6.17б. Для восстановления волнового спектра по сгенерированному трёхмерному полю использовано трёхмерное преобразование Фурье, все волновые векторы отсортированы по длине, и далее путём осреднения мощности гармоник внутри выбранных волновых интервалов $\widetilde{\Delta k} = const$ рассчитана спектральная плотность мощности psd . Исходный и восстановленный спектры хорошо согласуются друг с другом.

6.4.2. Результаты

На рис. 6.18 изображены поля возмущения давления на стенке (вид сверху) в два фиксированных момента времени, для которых головная часть возмущений уже покинула расчётную область и возмущённое течение вышло на квазипериодический режим. На этом режиме структура возмущений может быть проиллюстрирована снимком в любой конкретный момент времени, например, при $t = 2$ (рис. 6.18а).

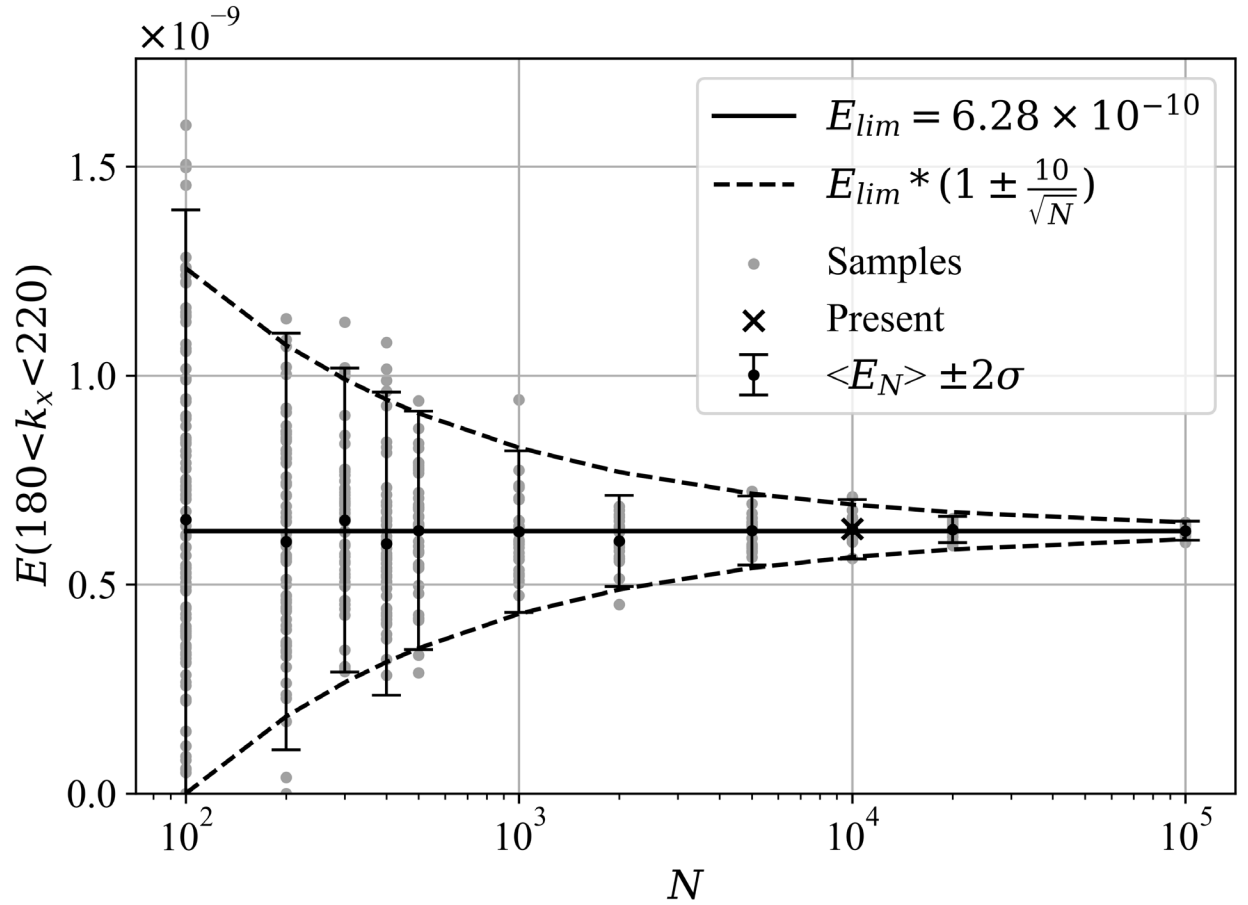


Рисунок 6.16 — Сходимость мощности атмосферной турбулентности E вблизи неустойчивой области по общему числу N гармоник в спектре

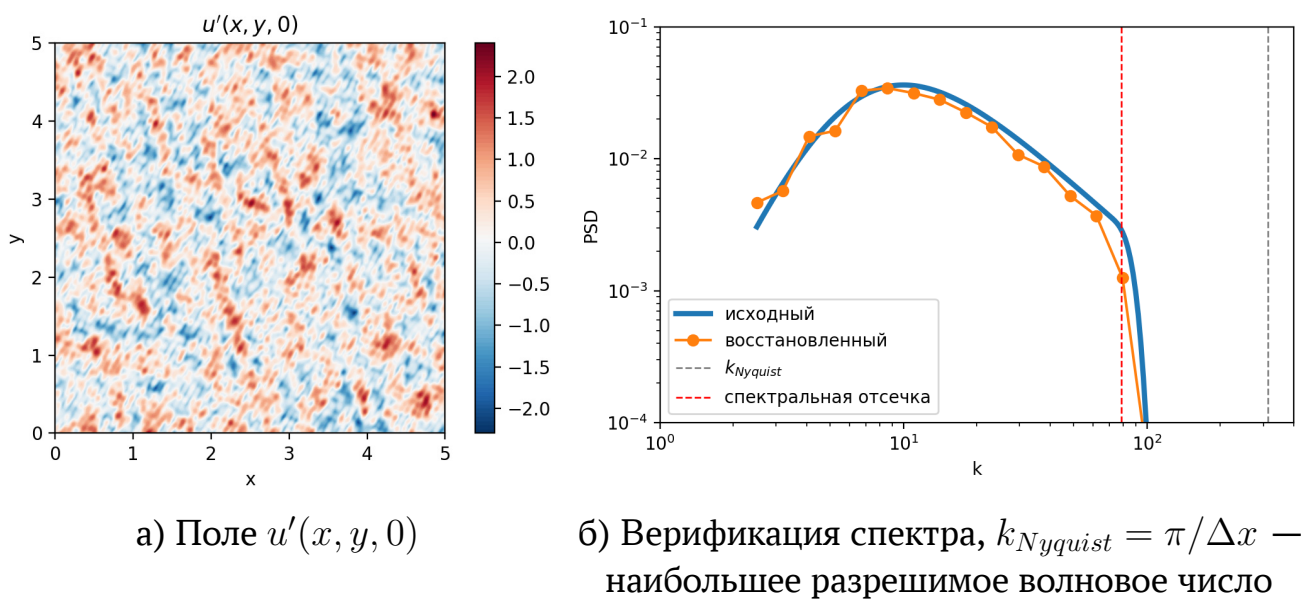


Рисунок 6.17 — Синтетическая атмосферная турбулентность в кубе с ребром 5 и равномерным разрешением $501 \times 501 \times 501$

Атмосферная турбулентность приводит к порождению серии волн с выделяющимся наклоном волновых фронтов. Эти волны наблюдаются при $x > 0.1$. Их амплитуда визуально усиливается, достигает максимума в окрестности $x = 0.2$ и далее убывает. Величина возмущения давления на стенке остаётся малой всюду за исключением области вблизи передней кромки: $p'_w < 10^{-4}$. Признаков турбулизации не наблюдается: течение носит случайный характер благодаря стохастической природе внешнего воздействия, но турбулентных пятен не образуется в течение всего расчёта.

Следует отметить две особенности, которые являются следствием постановки расчётной задачи. Во-первых, на рёбрах периодических границ — $x = 0, z = 0, z = 0.084$ — невозможно согласовать периодические граничные условия на вихревые возмущения. Из-за этого на рёбрах формируется пара слабых косых волн, которые распространяются над поверхностью и сходятся вблизи $x = 0.1, z = 0.042$, становясь дополнительным нефизичным источником возмущений наряду с атмосферной турбулентностью. Эти возмущения являются длинноволновыми и обладают исходным частотным составом. Во-вторых, вблизи передней кромки ($x \approx 0.02$) появляется слабо заметная серия коротковолновых плоских волн ($k_x \gg 1, k_z = 0$), которая быстро затухает и не наблюдается ниже на основной части профиля. Предположительно, эти волны появляются из-за взаимодействия атмосферной турбулентности с головным скачком. Они также могут иметь численную природу. Отмеченные особенности слабы и визуально не влияют на развитие возмущений над поверхностью крыла, в частности, не приводят к турбулизации течения.

Эволюция (β, ω) -спектров возмущений проиллюстрирована на рис. 6.19 в равноудалённых друг от друга сечениях $x = const$. Спектры построены для интервала времени $t \in [1.15, 1.15 + \pi]$.

Форма спектра вблизи передней кромки ($x \leq 0.1$) связана с тем, что волновой вектор элементарной гармоник, входящей в состав сгенерированной атмосферной турбулентности, имеет случайное направление. Из-за этого возмущения, возбуждаемые в пограничном слое, состоят из волновых пакетов плоских волн, в которых преобладают гармоники с малыми волновыми числами, $\beta < 60$, а наклонные волны практически не выделяются на их фоне. Ниже по потоку плоские волны медленно затухают и проявляются спектральные области с наклонными волнами ($x \geq 0.15$), которые соответствуют волнам первой моды пограничного слоя и спектр которых имеет характерную V-образную форму. Интенсивность этих волн мала, и нелиней-

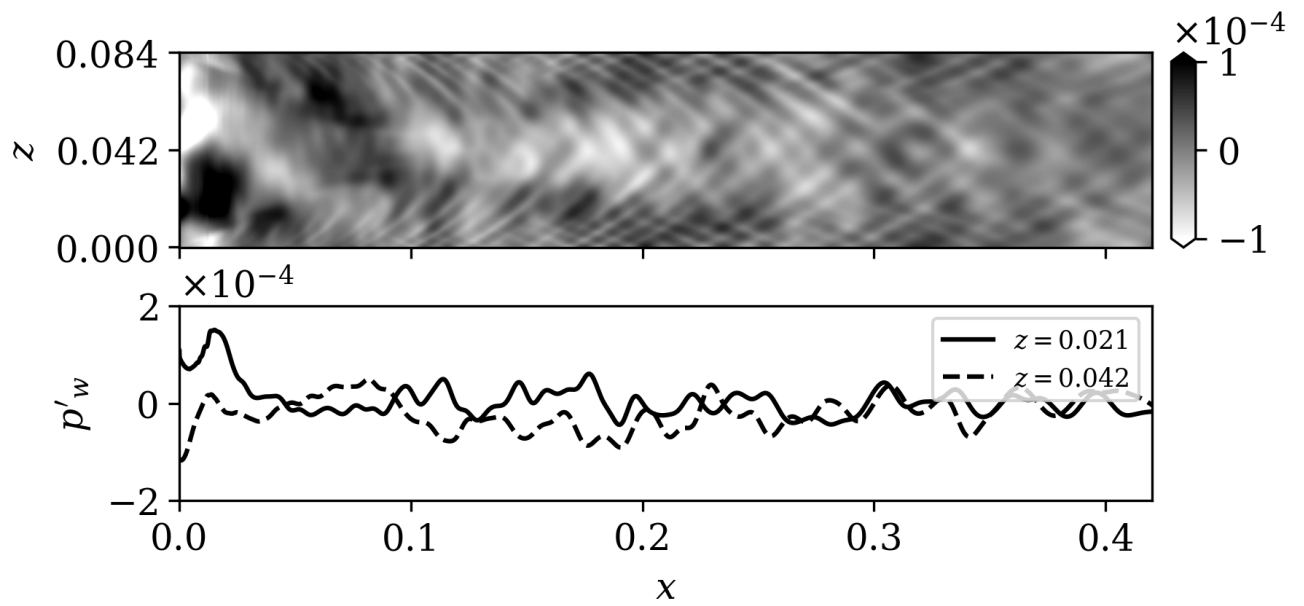
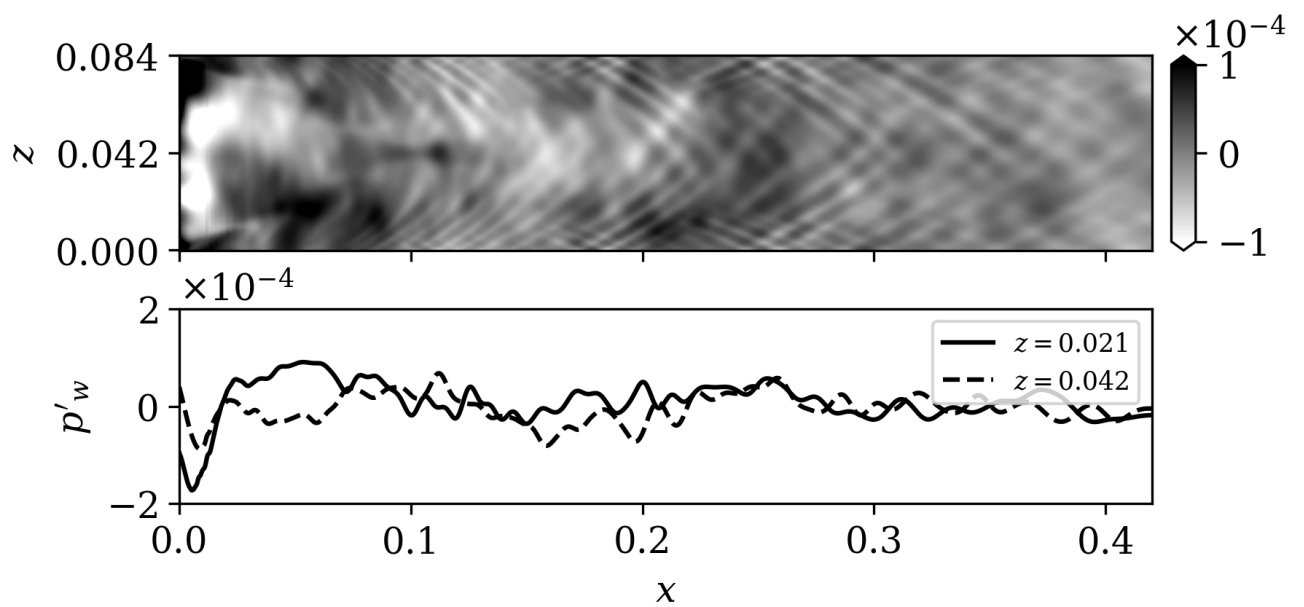
а) $t = 2$ б) $t = 3$

Рисунок 6.18 — Поле возмущений давления на поверхности в разные моменты времени и распределения p'_w вдоль двух линий $z = \text{const}$

ные эффекты не наблюдаются ниже по потоку: спектр не уширяется и постепенно ослабевает при $x \geq 0.25$.

Появление V-образной формы спектра соответствует выделению наклонных волн на поле возмущений давления (рис. 6.18). Линейная теория даёт фазовую скорость распространения волн первой моды $c_r \approx 0.5$, что подтверждается в численном моделировании. Учитывая это, можно оценить наклоны волновых фронтов через наклон прямолинейных плеч V-образной структуры спектра. Например, для $x = 0.2$ получаем:

$$\arctg \left(\frac{\widetilde{\Delta\beta}}{\widetilde{\Delta\alpha_r}} \right) = \arctg \left(c_r \frac{\widetilde{\Delta\beta}}{\widetilde{\Delta\omega}} \right) \approx \arctg \left(0.5 \cdot \frac{1000 - 0}{300 - 100} \right) \approx 68.2^\circ.$$

Это значение хорошо согласуется с предсказаниями линейной теории устойчивости для автомодельного пограничного слоя в сечении $x = 0.2$ (см. раздел 6.2, рис. 6.56). Плечи спектра не являются узкими прямыми линиями, поэтому сделанная оценка имеет некоторую погрешность (строгий регрессионный анализ не проводился). Для невозмущённого течения в рамках полных уравнений Навье — Стокса теория даёт угол 70.4° (табл. 6.3), что, по-видимому, остаётся в пределах этой погрешности.

6.5. Роль акустического шума

Хорошо известно, что акустические волны, излучаемые турбулентным пограничным слоем на стенках сопла и рабочей части сверхзвуковой аэродинамической трубы, являются основным источником ЛТП на испытываемых моделях [14]. В обычных трубах среднеквадратичный уровень пульсаций скорости в ядре потока составляет несколько процентов, что приводит к раннему началу перехода при факторах интегрального усиления возмущений (N -факторах) $N \lesssim 5$, в то время как их характерное значение в полёте равно 10–11. Таким образом, акустические возмущения, излучаемые турбулентным пограничным слоем на передней части фюзеляжа и падающие на крыло, являются возможным источником турбулентности в пограничном слое на крыле.

В расчётах данного раздела использовалась та же расчётная сетка, что и при моделировании восприимчивости к атмосферной турбулентности (см. рис. 6.15 в

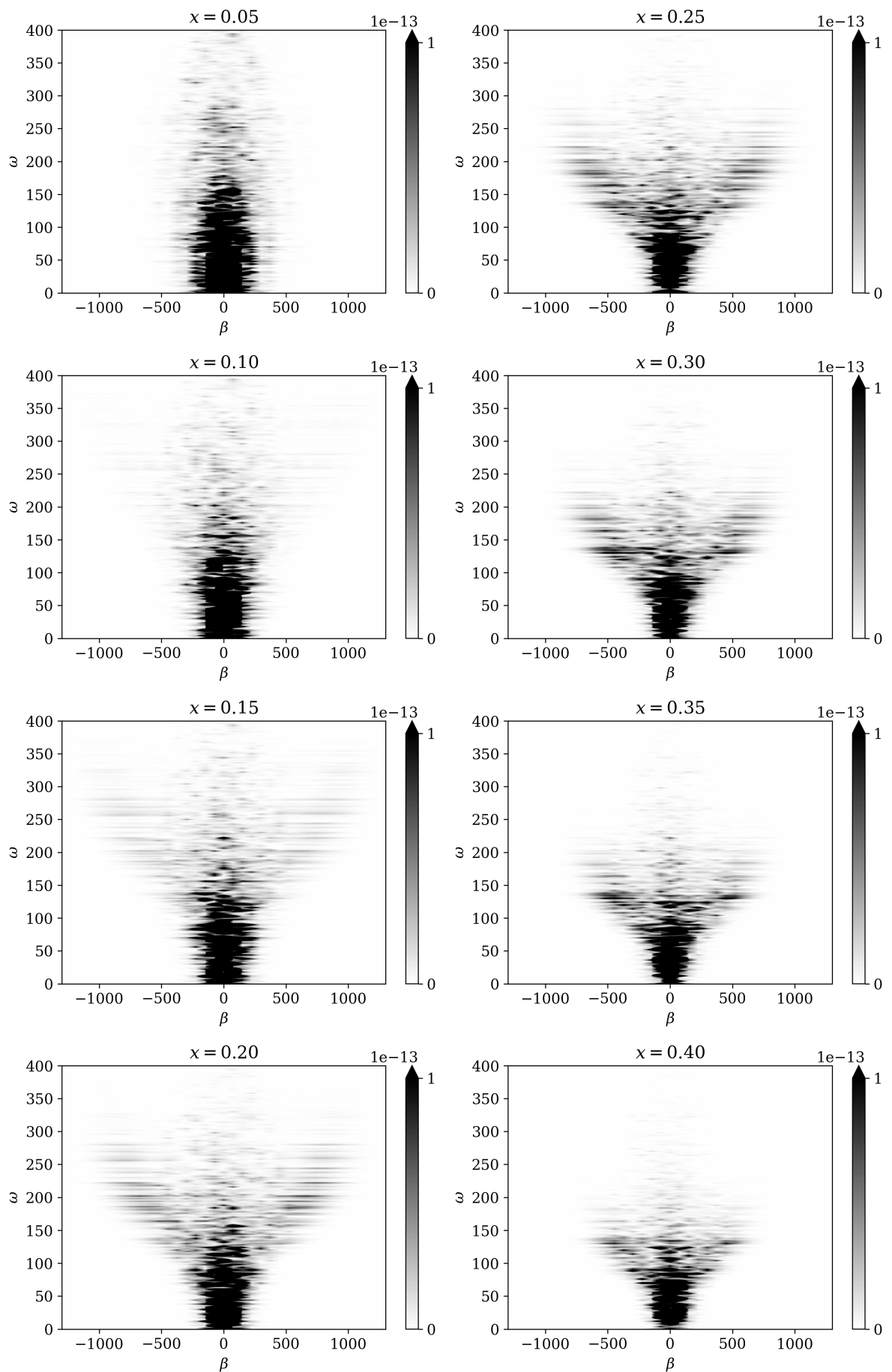


Рисунок 6.19 — Спектральная плотность мощности возмущения давления на стенке в различных сечениях $x = const$

разделе 6.4). На период преобладающей волны $2\pi/\omega_*$ приходится 318 временных шагов.

6.5.1. Нестационарные граничные условия

Акустический шум от турбулентного пограничного слоя исследован в рамках прямого численного моделирования [243] при $M_e = 2.5$. Показано, что в акустическом поле преобладают волны с определённым углом наклона фронтов, среднеквадратичное отклонение от которого можно оценить примерно в 10%. Приведены частотно-амплитудные спектры шума и показано, что возмущение давления в дальнем поле имеет постоянную среднеквадратичную амплитуду. — Дополненная характеристиками турбулентного пограничного слоя работа [243] даёт достаточно данных для воссоздания акустического поля, приходящего со стороны фюзеляжа на крыло СПС типа Aerion AS2 [234].

Оценка статистических свойств акустического излучения от турбулентного пограничного слоя сделана в [244]. Расчёты [243] подтверждают, что при числе Маха 2.5 над турбулентным пограничным слоем преобладают именно акустические волны, а интенсивность энтропийных и вихревых возмущений мала. Установлена связь между излучаемыми волнами и их источниками, двигающимися в турбулентном пограничном слое со сверхзвуковой скоростью $U_b \approx 0.4U_e$ относительно скорости внешнего потока. Такая связь соответствует преобладанию определённого наклона волнового вектора акустических волн по отношению к стенке

$$\cos \psi = M_e^{-1} (U_b - 1)^{-1}.$$

Корреляционный коэффициент для флуктуаций давления $C_{pp}(\Delta t, \Delta x)$, представленный в [244] изолиниями в плоскости $(\Delta t, \Delta x)$, имеет близкую к гауссовой куполообразную форму с двумя выделяющимися направлениями. Наклон главного направления задаёт величину U_b , а среднеквадратичное отклонение от главного направления — её неопределённость

$$\Delta U_b = \frac{\sigma_{U_b^*}}{U_e^*} = \frac{\sigma_{\Delta x^*}}{U_e^* \Delta t_0^*} = \frac{\Omega_0}{2\pi} \frac{\sigma_{\Delta x^*}}{\delta^*},$$

где $\Delta t_0^* = 2\pi/\omega_0^*$, а ω_0^* — преобладающая частота излучаемого акустического шума в дальнем поле: $\omega_0^* \delta^*/U_e^* = \Omega_0 \approx 1.45$ (все параметры даны в [243]). Величину $\sigma_{\Delta x^*}$ можно найти, аппроксимируя поле $C_{pp}(\Delta t^*, \Delta x^*)$ при любом фиксированном Δt^* . Наиболее удобно сделать это при $\Delta t^* = 0$, так как для этого момента времени из соответствующей иллюстрации в работе [243] можно снять наибольшее количество точек:

$$C_{pp}(0, \Delta x) = C_{pp,0} + A \cdot \exp\left(-\frac{(\Delta x^* - \Delta x_0^*)^2}{2\sigma_{\Delta x^*}^2}\right).$$

Аппроксимация оказывается очень близка к сечению исходного поля при $\Delta t = 0$ и даёт $\sigma_{\Delta x^*} \approx 0.00146$ м, что соответствует $\Delta U_b \approx 0.044$. Поэтому неопределённость $\Delta U_b/U_b$ составляет около 10%. Предполагая, что U_b и ΔU_b слабо меняются при небольшом увеличении числа Маха, можно вычислить наклон ψ_b волнового вектора преобладающей акустической волны для выбранных условий обтекания фюзеляжа ($M_e \approx M_\infty = 3$):

$$\cos \varsigma \approx \frac{1}{M_\infty (U_b \pm \Delta U_b - 1)} \approx \frac{1}{M_\infty (U_b - 1)} \left(1 \mp \frac{\Delta U_b}{U_b - 1}\right) = \cos \varsigma_b \mp \Delta (\cos \varsigma_b).$$

Таким образом, $\varsigma = \varsigma_b \pm \Delta \varsigma_b \approx 123.75^\circ \pm 2.78^\circ$, и далее полагается, что излучаемый акустический шум имеет постоянный наклон волновых фронтов $\varsigma = \varsigma_b$ в широком диапазоне частот.

Турбулентный пограничный слой излучает медленные волны под углом $\varsigma_b - \pi = -56.25^\circ$ относительно оси x . Если рассматривать акустические волны, приходящие на крыло от поверхности фюзеляжа, геометрическая интерпретация акустического поля по отношению к оси фюзеляжа будет выглядеть как угол скольжения $\psi_b = \varsigma_b - \pi$, а угол атаки θ_b будет равен нулю (см. схему на рис. 1.1а). Элементарная акустическая волна (1.8) с таким волновым фронтом и амплитудой пульсаций давления $\delta p = \epsilon$ будет иметь амплитуды

$$(\delta u, \delta v, \delta w, \delta p, \delta T) = \epsilon \cdot (-M_\infty \cos \psi_b, 0, -M_\infty \sin \psi_b, 1, (\gamma - 1) M_\infty^2)$$

и волновой вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{\cos \psi_b - 1/M_\infty} \cdot (\cos \psi_b, 0, \sin \psi_b).$$

Стохастический сигнал генерируется аналогично предыдущему случаю в виде суммы элементарных гармоник около $\omega = \omega_*$, которые равномерно заполняют диапазон частот $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ с шагом $\Delta\omega$ (см. табл. 6.4):

$$p' = \sum_i \sqrt{2\Phi(\omega_i)\Delta\omega} \cdot \cos(\mathbf{k}_i\mathbf{x} - \omega_i t + \varphi_i).$$

Сдвиги фаз φ_i случайны и равномерно распределены в интервале $[0, 2\pi)$. Амплитуду возмущений давления $\delta p_i = \sqrt{2\Phi(\omega_i)\Delta\omega}$ можно рассчитать на основе данных [243] о форме спектра $\Phi(\omega)$ и среднеквадратичном значении $p'_{rms}/c_f = 0.5p'_{rms}/\tau_w^* \approx 0.2$. Спектр, нормированный таким образом, что площадь под ним равна единице, показан на рис. 6.21а. Коэффициент трения c_f оценивается через параметры турбулентного пограничного слоя в точке поверхности фюзеляжа, из которой акустические волны падают на среднюю хорду крыла. Используя геометрию аппарата Aegion AS2 [234] (рис. 6.20) и направление распространения акустической энергии ($\phi \approx 13.2^\circ$) для найденного выше угла фронтов акустических волн, получаем, что источник акустических волн на фюзеляже расположен при $x_0^* \approx 9.57$ м от носа фюзеляжа. Используя теоретическое решение [245] для турбулентного пограничного слоя на конусе, получим значение коэффициента трения $c_f \approx 1.136 \cdot 10^{-3}$ на плоской поверхности при x_0^* (меньше значения на конусе в $\sqrt{3}$ раз), откуда $p'_{rms} \approx 2.272 \cdot 10^{-4} \approx 2.86 \cdot 10^{-3} p_\infty$. Подстановка этого значения в частотный спектр [243] замыкает описание акустического поля, накладываемого на входной границе в виде нестационарного граничного условия.

Важно подчеркнуть, что фюзеляж является осесимметричным (грубо — цилиндрическим) источником возмущений, а не плоским. В этом случае амплитуда излучаемых акустических волн убывает обратно квадратному корню из расстояния от оси фюзеляжа, и значение p'_{rms} возле передней кромки крыла оказывается в $\sqrt{z_2/z_1}$ раз ниже, чем от плоского источника. Опираясь на геометрию аппарата

Таблица 6.4 — Параметры случайных акустических возмущений, падающих на крыло

Тип фюзеляжа	ω_{min}	ω_{max}	$\Delta\omega$	rms по всему спектру
плоский	100	300	2	$2.272 \cdot 10^{-4}$
осесимметричный	100	300	2	$9.434 \cdot 10^{-5}$
осесимметричный	60	600	2	$9.434 \cdot 10^{-5}$
осесимметричный	60	600	1	$9.434 \cdot 10^{-5}$

[234] (рис. 6.20), полученную выше величину p'_{rms} следует уменьшить в $\sqrt{5.8}$ раз, что даст $p'_{rms} \approx 9.434 \cdot 10^{-5} \approx 1.19 \cdot 10^{-3} p_{\infty}$.

В рамках настоящей главы ПЧМ проведено для четырёх случаев, указанных в табл. 6.4.

6.5.2. Результаты

Поля возмущений давления на квазипериодическом режиме течения представлены на рис. 6.22 (случай плоского источника-фюзеляжа). Этот режим устанавливается спустя $\Delta t \approx 1$ после начала возмущённого расчёта.

В отличие от атмосферной турбулентности акустические возмущения, проникая в пограничный слой, заметно растут вниз по потоку. Их амплитуда достигает максимума в интервале $0.15 < x < 0.25$. Далее возмущения либо нелинейно распадаются с порождением ограниченных областей турбулентного течения (турбулентных пятен), либо затухают без признаков нелинейности. Пятна рождаются волновыми пакетами, которые возбуждаются локальными всплесками акустических возмущений и достигают критической амплитуды. Рождение пятен происходит дальше 25% хорды и имеет случайное распределение по размаху крыла. Этот процесс не прекращается со временем, в отличие от случая атмосферной турбулентности, где пятна вовсе не появляются (рис. 6.18). Зародившиеся пятна увлекаются потоком, увеличиваясь в размерах и формируя подобие турбулентных клиньев, вершина

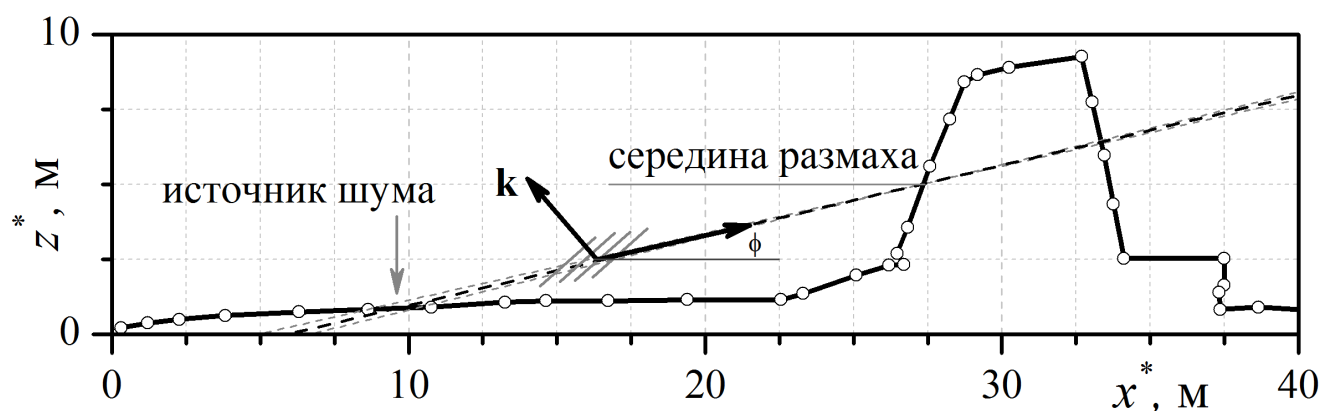
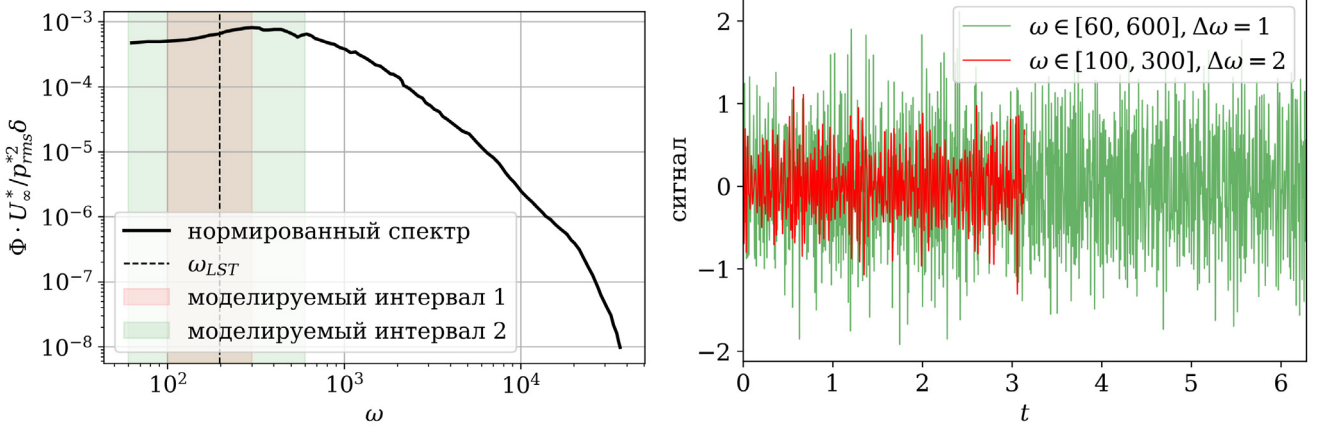


Рисунок 6.20 — Схема излучения плоских акустических волн от фюзеляжа в направлении средней хорды крыла (геометрия аппарата соответствует дизайну Aerion AS2 [234])



а) Спектр [243] после нормализации

б) Сгенерированные сигналы (один период)

Рисунок 6.21 — Построение стохастического сигнала

которых сносится по потоку медленнее, чем пятно в целом. Вершины таких пятен расположены, например, при $x \approx 0.37$, $z \approx 0.06$ на рис. 6.22а или при $x \approx 0.35$, $z \approx 0.02$ на рис. 6.22б).

Для осесимметричного источника возмущений картина принципиально не меняется, но пятна рождаются ниже по потоку (при $x > 0.3$, рис. 6.23). Это происходит значительно реже, чем в случае плоского источника. Большую часть времени возмущённый пограничный слой остаётся ламинарным (рис. 6.23б). При этом уровень возмущений давления на поверхности продолжает оставаться на порядок выше, чем в случае воздействия атмосферной турбулентности.

Верификационные расчёты, проведённые с расширенным спектральным составом акустического шума (см. табл. 6.4) в целом подтверждают результаты, полученные в исходной постановке ($\omega \in [100, 300]$, $\Delta\omega = 2$). Поэтому похожие иллюстрации в случае осесимметричного источника-фюзеляжа не повторяются.

Эволюция (β, ω) -спектров возмущений проиллюстрирована на рис. 6.24 и 6.25 в равноудалённых друг от друга сечениях $x = \text{const}$. Спектры построены для интервала времени $t \in [1.15, 1.15 + \pi]$, который соответствует периоду сгенерированного случайного сигнала $2\pi/\Delta\omega$ с шагом по частоте $\Delta\omega = 2$.

Исходный спектр акустического шума соответствует спектру волнового пакета, состоящего из волн с фиксированным наклоном волновых фронтов — прямой линии в плоскости (ω, β) . Линейная форма спектра наблюдается вблизи передней кромки и сохраняется по мере удаления от неё. При этом максимум спектральной плотности сдвигается в область более низких частот, оказываясь вблизи $\omega = 200 \approx$

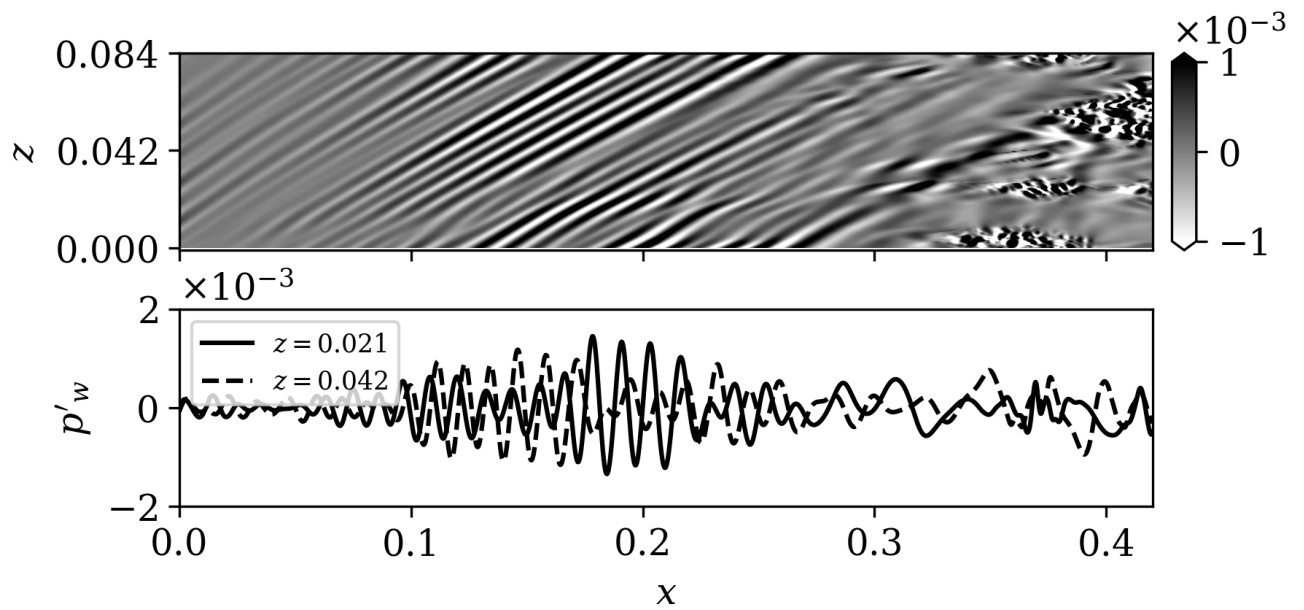
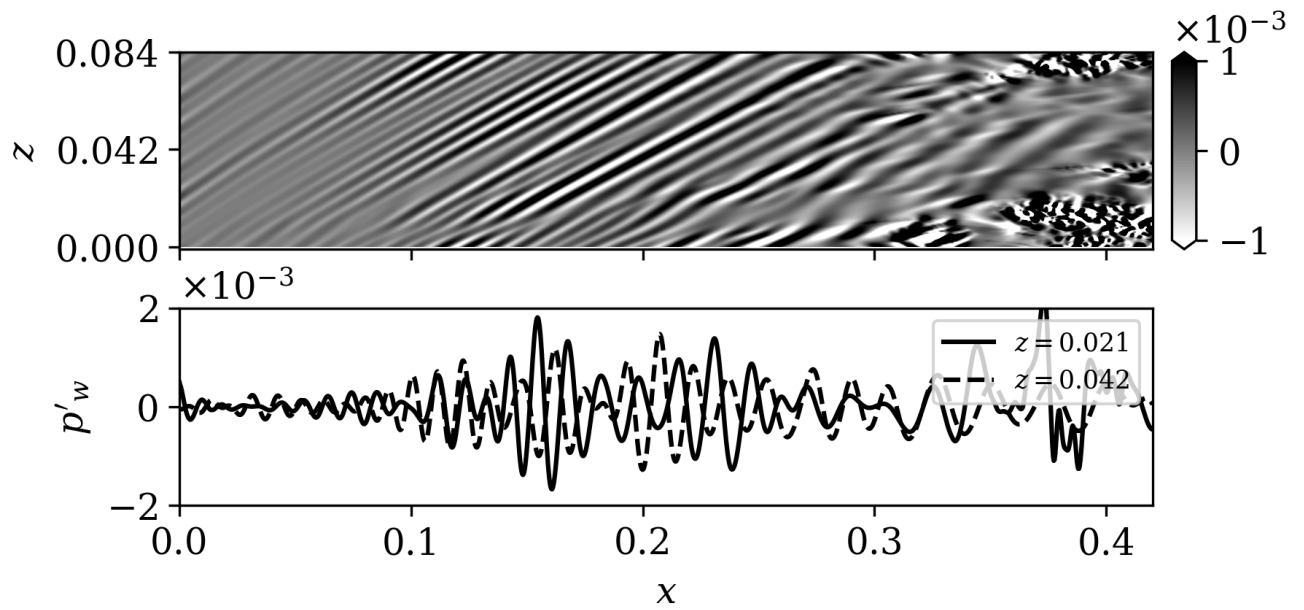
а) $t = 1.1$ б) $t = 3$

Рисунок 6.22 — Поле возмущений давления на поверхности в разные моменты времени и распределения p'_w вдоль двух линий $z = \text{const}$. Источник возмущений — акустический шум от плоского фюзеляжа, $\omega \in [100, 300]$, $\Delta\omega = 2$

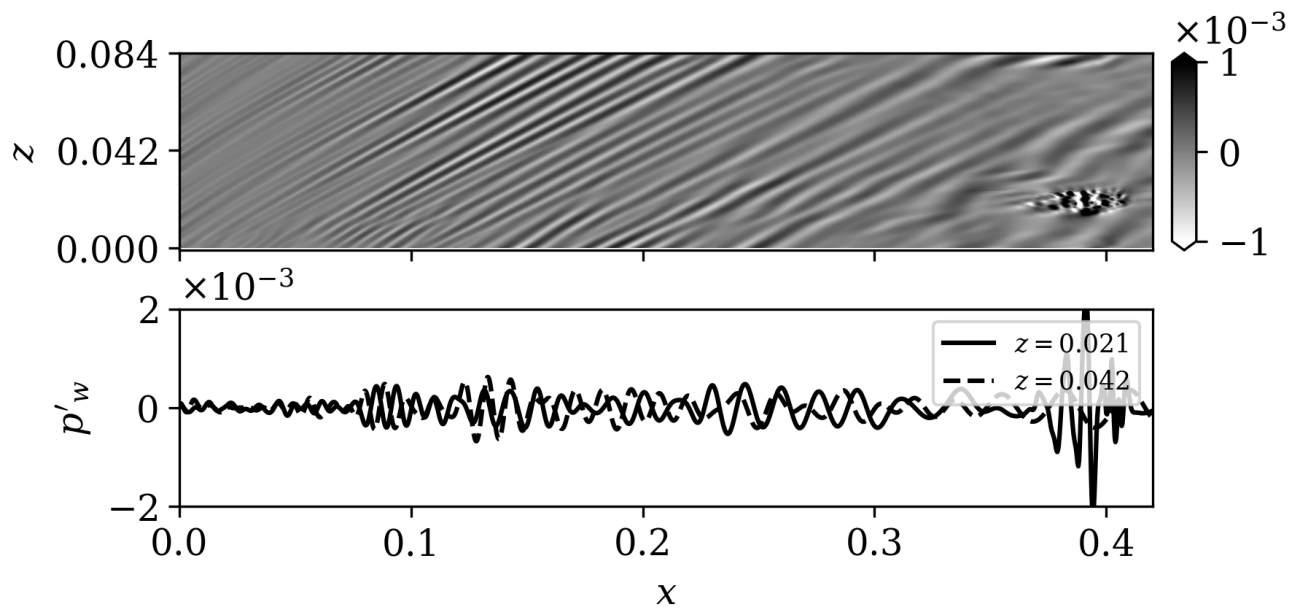
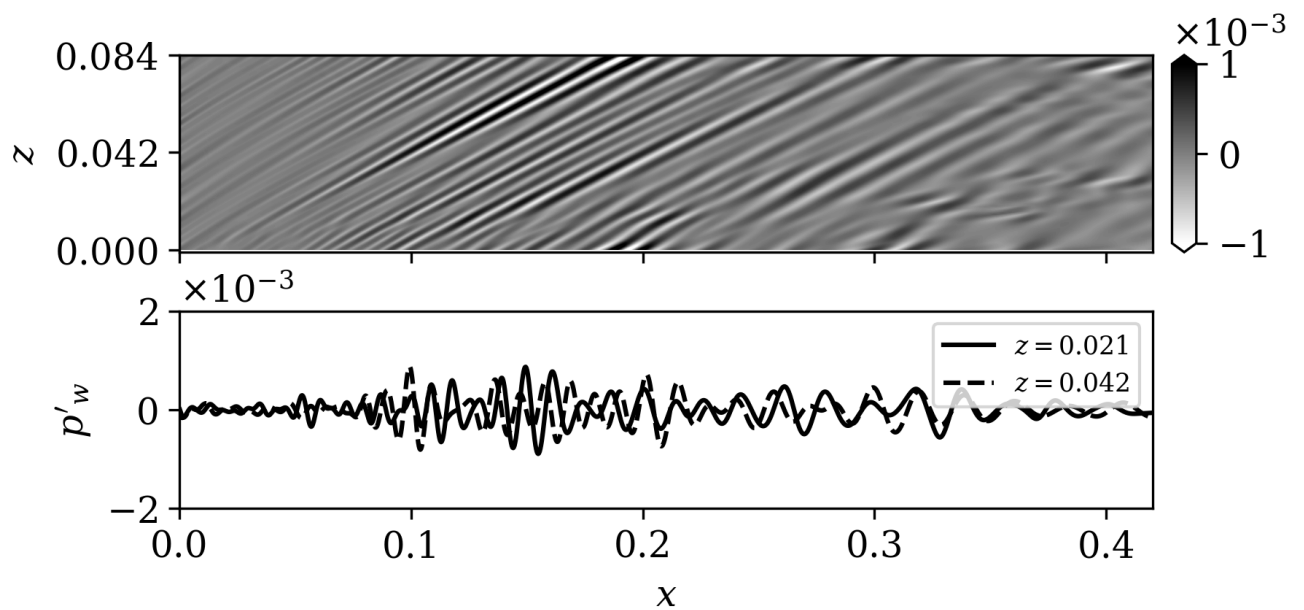
а) $t = 1.4$ б) $t = 2.8$

Рисунок 6.23 — Поле возмущений давления на поверхности в разные моменты времени и распределения p'_w вдоль двух линий $z = \text{const}$. Источник возмущений — акустический шум от осесимметричного фюзеляжа, $\omega \in [60, 600]$, $\Delta\omega = 2$

ω_* при $x = 0.2$. Это соответствует предсказаниям линейной теории устойчивости и свидетельствует о линейном характере эволюции волновых пакетов при $x < 0.2$.

В случае плоского источника-фюзеляжа (рис. 6.24) линейная форма спектра сохраняется до сечения $x = 0.2$, где возмущения достигают пиковых амплитуд. Ниже по потоку ($x > 0.2$) проявляется нелинейное взаимодействие волн в волновом пакете: спектр уширяется по волновому числу ($x = 0.3$) и быстро распадается в широкополосный ($x = 0.35$) с появлением выраженного изменения в среднем течении — гармоники $(\omega, \beta) = (0, 0)$ (плохо заметно на рисунках из-за подробного шага по частоте ω). Следует отметить, что зарождение турбулентных пятен не наблюдается при $x < 0.25$, где возмущения развиваются на линейном и слабонелинейном режиме.

Спектр уширяется вниз по потоку как для плоского, так и для осесимметричного источника-фюзеляжа. Для плоского источника (рис. 6.24) наблюдается активный нелинейный распад возмущений по мере их эволюции над крылом; уширение заметнее и больше соответствует переходному состоянию пограничного слоя. В случае осесимметричного источника-фюзеляжа признаки нелинейного распада на спектрах выражены значительно слабее (рис. 6.25). При этом пятна образуются редко, и можно характеризовать этот случай как начальный переходный. Для конкретной рассматриваемой конфигурации это означает, что пятна развиваются над крылом независимо и не формируют развитого турбулентного пограничного слоя — крыло большую часть времени обтекается ламинарным потоком.

6.6. Перекрёстное сравнение результатов

Сделанные наблюдения подтверждаются на рис. 6.26, где показаны коэффициенты трения $c_{f,x}(x)$, усреднённые по времени и размаху крыла в каждом x -сечении для рассмотренных случаев. В случае акустического шума от плоского источника наблюдается переходный пограничный слой с началом перехода при $x \approx 0.3$, хотя область возмущённого трения начинается при $x \approx 0.1$. В случае осесимметричного источника наблюдается зарождающееся начало перехода, при котором распределение $c_f(x)$ лишь начинает отклоняться от ламинарного при $x \approx 0.35$. В случае воздействия атмосферной турбулентности отклонения коэффициента

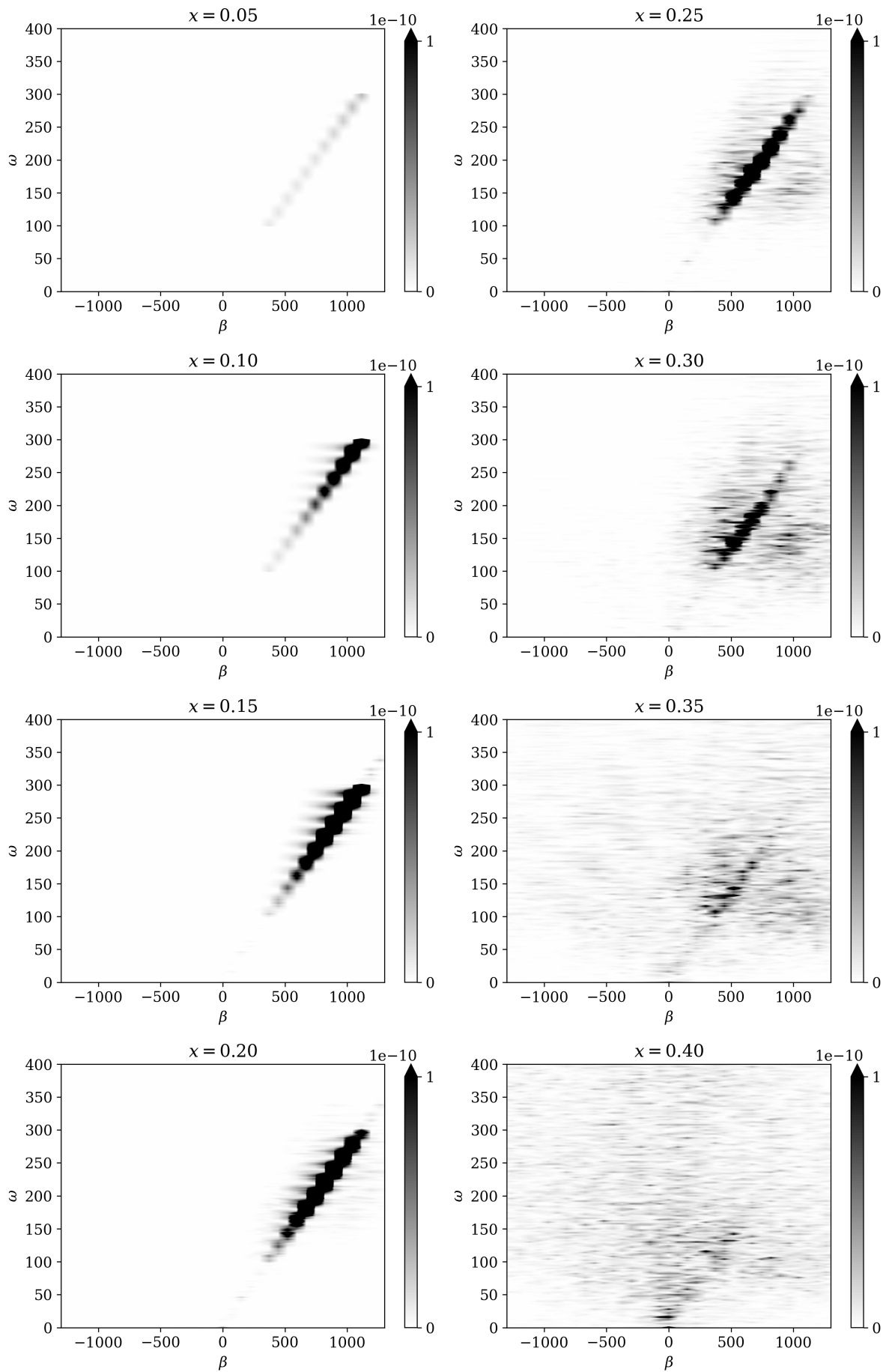


Рисунок 6.24 — Спектральная плотность мощности возмущения давления на стенке в различных сечениях $x = \text{const}$. Источник возмущений — акустический шум от плоского фюзеляжа, $\omega \in [100, 300]$, $\Delta\omega = 2$

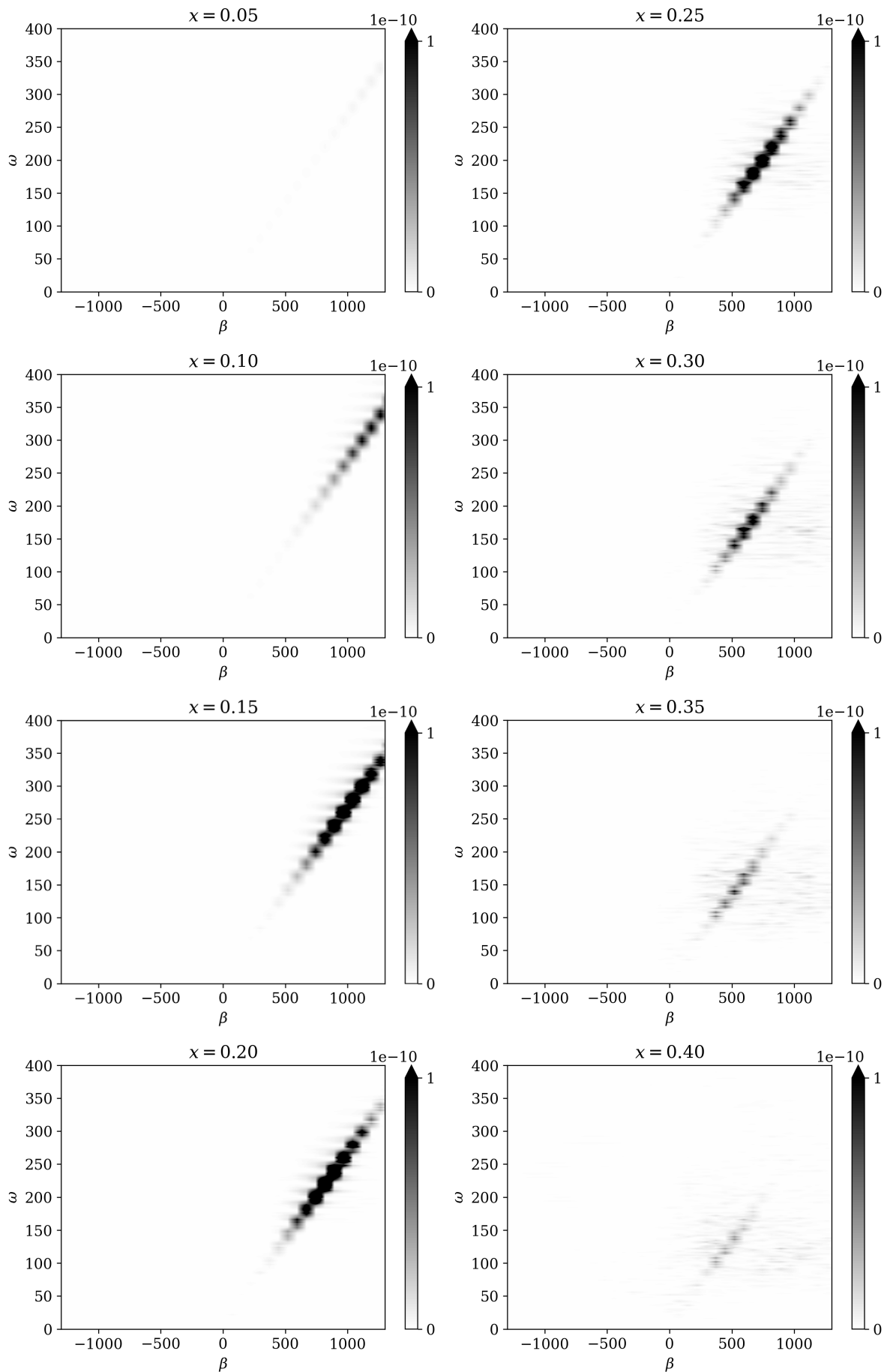


Рисунок 6.25 — Спектральная плотность мощности возмущения давления на стенке в различных сечениях $x = \text{const}$. Источник возмущений — акустический шум от осесимметричного фюзеляжа, $\omega \in [60, 600]$, $\Delta\omega = 2$

трения от ламинарной ветви отсутствуют — возмущённый пограничный слой остаётся ламинарным.

Таким образом, акустические возмущения от турбулентного пограничного слоя на фюзеляже способны приводить к ламинарно-турбулентному переходу в тихих условиях сверхзвукового полёта через механизм формирования, роста и последующего слияния турбулентных пятен. Численное моделирование слияния пятен и формирования режима развитой турбулентности выходит за рамки настоящей работы.

Рисунок 6.27 демонстрирует хорошее согласие теоретических и численных результатов для амплитуды гармоник, которая по предсказанию теории должна преобладать в пограничном слое в сечении наибольшего усиления $x \approx 0.2$: $(\omega_*, \beta_*) \approx (197.5, 1055.3)$ (табл. 6.3). Расчёт N -факторов выполнен в рамках e^N метода: $N = 0.5 \ln(psd/psd_{\text{пу}})$, где нижний индекс «пу» соответствует точке потери устойчивости. В случае акустического воздействия исходный сигнал формировался для $\beta > 0$, и для него берётся только гармоника $\beta > 0$. Атмосферная турбулентность генерировалась для всего диапазона волновых чисел, и в теории нет различия между гармониками $(\omega, \pm\beta)$. На рис. 6.27 сопоставляются лишь гармоники с $\beta > 0$.

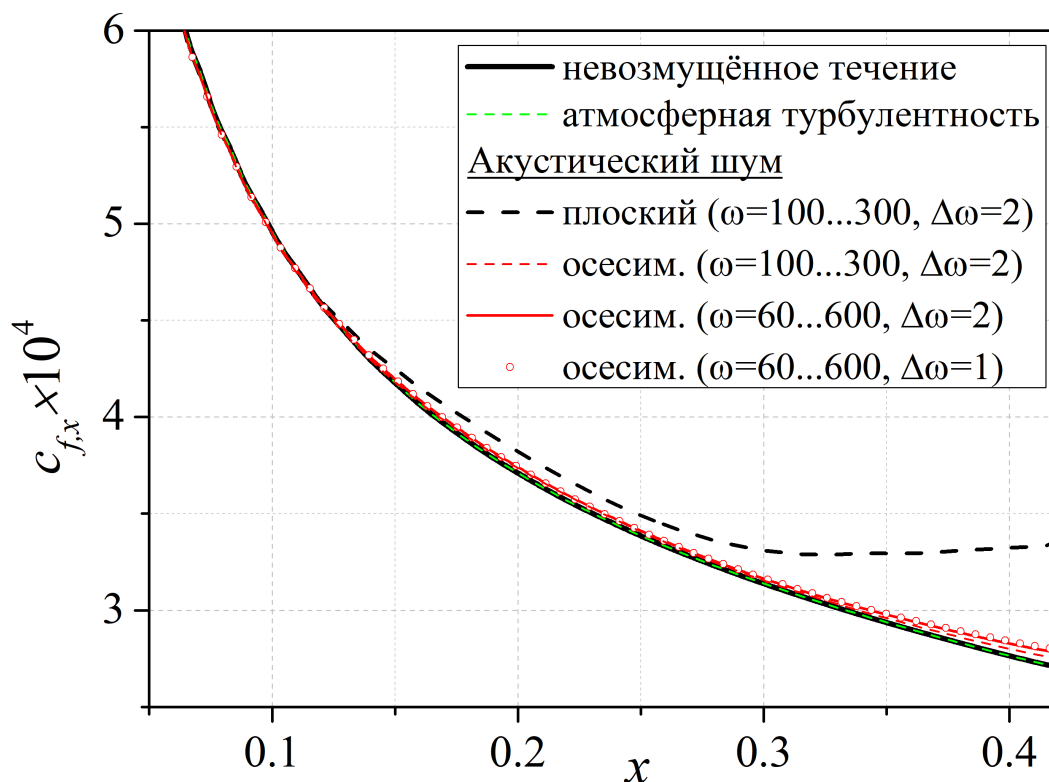


Рисунок 6.26 — Перекрёстное сравнение распределений усреднённого по времени и размаху крыла коэффициента трения на поверхности

Из-за стохастического характера генерируемых сигналов спектры получаются зашумленными. Поэтому проводилось дополнительное осреднение спектральной плотности по четырём соседним ω -гармоникам. По волновому числу β такого осреднения не проводилось. Распределение ΔN (величины N -фактора относительно сечения $x = 0.1$) в случае атмосферной турбулентности хорошо согласуется с теорией, в том числе положение максимума, которое близко к положению глобального теоретического максимума для всех возможных волн. В случае акустического шума распределение сначала соответствует теоретическому, но далее заметно отклоняется от него вверх, при этом максимум вблизи $x \approx 0.2$ достигается только в одном из четырёх случаев, что скорее является совпадением. Это связано с проявлением нелинейных эффектов из-за большого уровня возмущений в пограничном слое. Кривые сильно различаются, так как представляют результат, полученный для разных реализаций одного и того же случайного сигнала. Провести параметрические расчёты и выполнить усреднение по ансамблю реализаций не представлялось возможным и не требовалось в рамках данной работы.

Основываясь на проведённых расчётах, следует отметить, что отклик пограничного слоя на акустический шум не выявляет максимума в распределении $\Delta N(x)$, в отличие от случая атмосферной турбулентности. Начиная с $x \approx 0.3$ активный рост гармоники прекращается, наступает состояние насыщения. Такое поведение наблюдалось ранее и свойственно началу перехода к турбулентности (см., напр., [246]).

Следует отметить, что распределения $\Delta N(x)$ имеют начальный участок убывания, который сменяется ростом в соответствии с ЛТУ в окрестности 5% длины хорды. Очевидно, что область восприимчивости сосредоточена при $x \leq 0.05$. Более точная оценка может быть сделана путём разложения решения ПЧМ по собственным модам пограничного слоя с последующим выделением сечения, за которым первая неустойчивая мода начинает расти в соответствии с предсказаниями ЛТУ.

6.7. О роли микрочастиц

Оценка роли микрочастиц основана на данных о микрочастицах [66; 247], на теоретической [67] и численной [248] моделях восприимчивости к частицам и на расчётах в рамках линейной теории устойчивости (раздел 6.2).

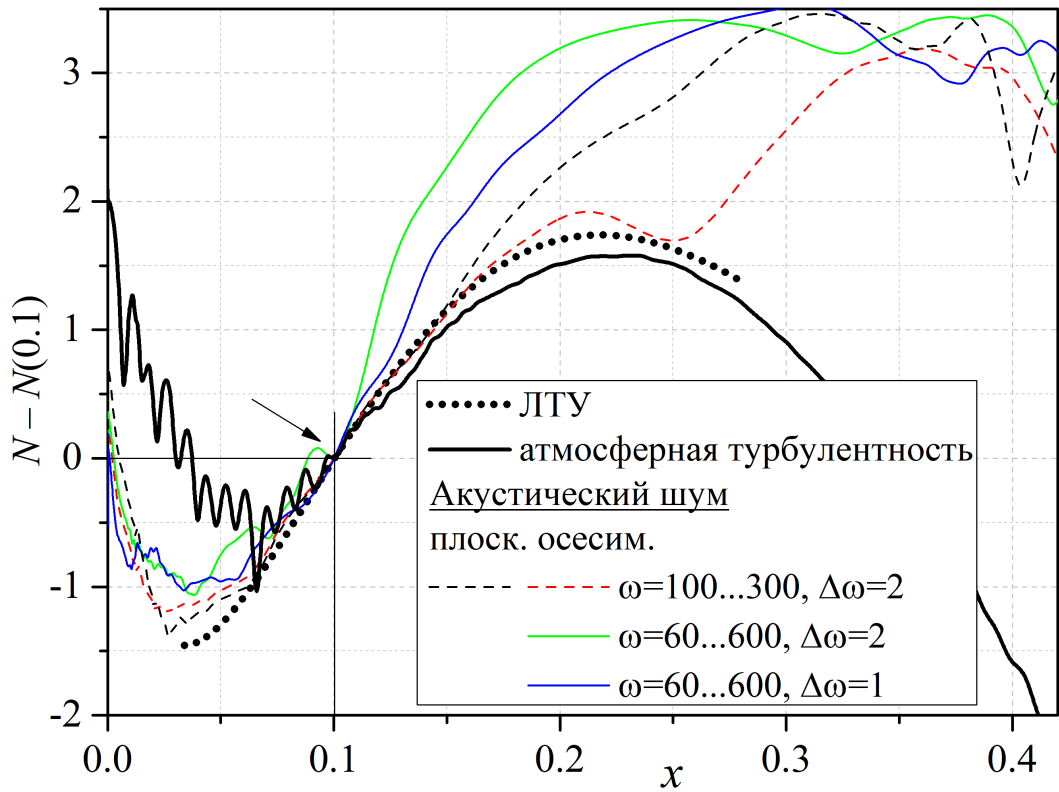


Рисунок 6.27 — Перекрёстное сравнение N -факторов относительно сечения $x = 0.1$ (отмечено стрелкой) для гармоник $(\omega_*, \beta_*) = (197.5, 1055.3)$

Согласно теории [67], для возбуждения неустойчивых волновых пакетов с необходимыми начальными амплитудами требуются частицы радиуса более 10 микрон. Концентрация таких частиц на высоте порядка 20 км не превосходит величины $C^* = 10^2 \text{ м}^{-3}$. Следуя работе [66], частоту столкновений частиц с поверхностью профиля можно оценить как $f^* < C^* U_\infty^* S^*$, где $S^* \approx \lambda_z^* h^*$; h^* — толщина профиля в сечении, соответствующем точке потери устойчивости $x_{0,*}^*$ преобладающей волны; $\lambda_{z,*}^*$ — характерная длина волны вдоль размаха крыла. Отсюда безразмерная средняя частота столкновений оценивается сверху как $f \equiv f^* L^* / U_\infty^* < C^* L^{*3} \lambda_z \tau x_{0,*}$. В соответствии с результатами ЛТУ для первой моды, приведёнными в табл. 6.3 получаем $f < 0.26$ на профиле $\tau = 10\%$ и $f < 0.17$ на профиле $\tau = 5\%$.

Период возбуждения волновых пакетов, f^{-1} , по крайней мере, вчетверо превосходит глобальное аэродинамическое время L^* / U_∞^* . В этом случае, даже если волновые пакеты успели переродиться в турбулентные пятна до точки $x_* < 0.5$ наибольшего интегрального усиления возмущений, такие пятна будут распространяться индивидуально, не сближаясь друг с другом и не формируя единую линию ламинарно-турбулентного перехода над крылом. Таким образом, маловероятно, что микрочастицы в типичных атмосферных условиях могут служить источником перехода. Однако в случае высокой облачности, вулканической активности или при

повышенном содержании продуктов сгорания ракетных топлив в районах с частым полётом ракет концентрация требуемых микрочастиц может возрасти на несколько порядков, а их роль в турбулизации обтекания крыла может стать определяющей. Поэтому задача восприимчивости пограничного слоя к микрочастицам остаётся актуальной.

6.8. Выводы по главе

В качестве объекта исследования выбрано аэродинамически гладкое прямое крыло с тонким чечевицеобразным (параболическим) профилем, которое может применяться на современных сверхзвуковых пассажирских самолётах. Выбран характерный крейсерский режим полёта: стандартная атмосфера, высота 20 км, число Маха 3. На такой конфигурации невозмущённое течение является номинально двухмерным и неустойчивость поперечного течения не реализуется.

- Анализ устойчивости сверхзвукового пограничного слоя над таким крылом показал, что существует некоторая пороговая толщина профиля, начиная с которой возмущения, развивающиеся в пограничном слое, достигают максимума во внутренней точке профиля. Величина максимума уменьшается с ростом толщины профиля (с ростом благоприятного продольного градиента давления). Это значит, что на профиле появляется точка, за которой возмущения из всего спектрального диапазона *не могут* достичь более высокой амплитуды, чем та, что уже была достигнута в этой точке. Это ведёт к двум важным практическим выводам. Во-первых, существует пороговый уровень начальных амплитуд неустойчивых волн, ниже которого точка начала перехода должна резко сдвигаться вниз по потоку, и вся поверхность профиля должна обтекаться в ламинарном режиме. Такой скачок к ламинарному обтеканию, по-видимому, можно наблюдать в трубном эксперименте и относительно легко реализовать в натурных условиях. Во-вторых, ламинаризация рассматриваемого типа крыльев может проводиться не для всего крыла, а лишь до точки максимума, положение которой надёжно предсказывает линейная теория устойчивости.
- Теоретические результаты подтверждены количественно путём прямого численного моделирования развития малых возмущений, искусственно внесён-

ных в исследуемый сверхзвуковой пограничный слой. Это позволяет сделать третий важный вывод. Для быстрых параметрических расчётов характеристик устойчивости пограничного слоя и оценок местоположения начала перехода на тонких профилях можно использовать упрощённый алгоритм, основанный на линейной теории невязкого обтекания тонких тел, теории локально-автомодельного пограничного слоя и линейной теории устойчивости в локально-параллельном приближении. Более трудоёмкие расчёты, основанные на решении полных уравнений Навье — Стокса, имеет смысл выполнять выборочно на поздних стадиях исследований.

- Проанализированы частотно-волновые характеристики атмосферных возмущений, свойственных реалистичному сверхзвуковому полёту. Потенциально «опасные» частотно-волновые компоненты имеют: атмосферная турбулентность; акустический шум от турбулентного пограничного слоя на передней части фюзеляжа; микрочастицы, взвешенные в атмосфере. С помощью простых физических моделей выполнена оценка роли различных источников в формировании ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП) на прямом крыле. В чистой атмосфере концентрация микрочастиц мала, их столкновения с поверхностью редки, порождаемые столкновениями волновые пакеты развиваются независимо и не способны формировать развитый турбулентный пограничный слой. «Опасные» компоненты атмосферной турбулентности попадают в инерционный интервал спектра турбулентных пульсаций вблизи области вязкой диссипации. Их интенсивность оказывается мала, чтобы вызвать ЛТП. Наиболее вероятным источником перехода на аэродинамически гладком прямом крыле является акустический шум, излучаемый турбулентным пограничным слоем на передней части фюзеляжа. Его интенсивность сопоставима с шумом в тракте аэродинамических труб, где он является главным инициатором ЛТП на экспериментальных моделях.
- Предложены и обоснованы способы численного моделирования атмосферной турбулентности и акустического шума от фюзеляжа. Результаты прямого численного моделирования восприимчивости и устойчивости подтверждают теоретические прогнозы и количественно согласуются с результатами линейной теории устойчивости. Акустический шум приводит к спорадическому рождению турбулентных пятен ниже по потоку от области максимального усиления возмущений. Возмущения от атмосферной турбулентности оказываются на порядок слабее даже в случае штормовых погодных условий и не

способны привести к ЛТП в рассмотренных случаях (турбулентные пятна не появляются, пограничный слой остаётся ламинарным).

- Результаты проведённых исследований подсказывают возможные подходы к ламинаризации прямых крыльев сверхзвуковых пассажирских самолётов, основанные на уменьшении интенсивности акустического шума: подбор формы фюзеляжа; полировка его поверхности; отсос пограничного слоя; применение устройств, разрушающих когерентные турбулентные структуры над фюзеляжем.

Глава 7. Восприимчивость к микрочастицам

В работе [9], обобщающей возможные источники атмосферных возмущений в условиях полёта, отмечается, что твёрдые микрочастицы являются одним из главных источников, участвующих в возбуждении неустойчивых мод сверхзвуковых пограничных слоёв. Несмотря на то, что частицы всегда присутствуют в тракте аэродинамических установок (если не предприняты специальные меры по очистке от частиц), их характеристики значительно лучше задокументированы для атмосферы, нежели для АДТ. Появление микрочастиц в атмосфере связывается с формированием ледяных облаков, вулканической активностью, деятельностью человека, а также с космической пылью [247; 249]. Общая структура аэрозолей в стратосфере описана в [250], где анализировались данные атмосферных измерений (счетчики частиц, метеорологические зонды, спутники). Результаты [250], дополненные данными [247] о типах частиц и распределении их концентраций по высотам, обобщены в работе [66]. Значительная доля микрочастиц состоит из продуктов сгорания ракетного топлива (размер ~ 10 мкм) после проведённых полётов и сульфатных образований (размер ~ 0.1 мкм), которые способны пребывать в стратосфере годами, не осаждаясь.

Частицы могут влиять на ЛТП посредством различных механизмов:

- столкновение с поверхностью с прилипанием или образованием кратеров на ней;
- порождение завихренности частицей, пересекающей пограничный слой;
- собственное вращение частицы и связанное с ним вращательное движение газовой среды;
- порождение слабых ударных волн¹ за головной ударной волной от обтекаемого тела;
- отражение частицы от поверхности тела с последующим динамическим взаимодействием частицы с головным скачком; результатом такого взаимодействия может стать формирование погруженных слоёв смещения и струй [251];
- прямое возбуждение неустойчивых мод микрочастицами, размер которых значительно меньше характерного размера области восприимчивости (*динамическое взаимодействие*).

¹ В англоязычной литературе *reverse shocklet* — обратный скачок

Это обстоятельство побудило автора [67] к анализу модельной задачи восприимчивости, описывающей возбуждение неустойчивых мод сферическими микрочастицами, которые взаимодействуют с ламинарным потоком около тела, движущегося со сверхзвуковой скоростью. Анализ сосредоточен на *динамическом* взаимодействии частицы с пограничным слоем. Эффекты, связанные с сопутствующим порождением вихревых возмущений, акустических волн или неровности поверхности, которая могла бы образоваться после удара частицы, не рассматривались. Аналитическое решение задачи восприимчивости подавалось на вход амплитудному методу Мэка [24], чтобы предсказать положение начала перехода, вызванного частицей. В качестве примера в [67] рассматривалось обтекание заострённого клина с полууглом раскрытия 14° , летящего в условиях стандартной атмосферы на высоте 20 км при числе Маха 4 под нулевым углом атаки. В этом случае переход вызван неустойчивостью первой моды по терминологии Мэка [45]. Было показано, что сферические микрочастицы радиуса 10–20 мкм и плотностью больше 1 г/см^3 способны приводить к началу перехода с фактором интегрального усиления $N = 9 \dots 10$, что согласуется с полётными данными [252].

Следует отметить, что во многих аэродинамических установках кратковременного действия, которые используются для наземного исследования сверхзвуковых конфигураций, поток может быть сильно загрязнён частицами различного рода: фрагменты диафрагм, частички ржавчины или сажи, пыль и др. Измерение положения перехода в таких условиях в значительной мере подвержено влиянию микрочастиц. Так, в работе [15] продемонстрировано, что тщательная аккуратно задокументированная процедура чистки ударной трубы Т5 в Калифорнийском технологическом институте позволила улучшить повторяемость измерений ЛТП. До чистки на поверхности моделей непредсказуемо появлялись турбулентные пятна. Это наблюдалось в местах, которые нехарактерны для естественного положения перехода. Чистка позволила практически полностью устранить эти аномальные результаты.

Роль частиц изучалась ранее в работах Н. Н. Яненко, В. М. Фомина и их коллег (ИТПМ СО РАН), где теоретическим и экспериментальным путём исследовалось развитие двухфазных течений (облака микрочастиц в газе) в присутствии поверхностей и ударных волн [253–255]. В этих работах представлены прекрасные теневые визуализации поля слабых ударных волн от частиц, движущихся в потоке за ударными волнами, которые могут взаимодействовать с пограничными слоями, возбуждая их неустойчивости.

Насколько известно автору, влияние единичных микрочастиц на течение исследовалось только в работах М. Холдена. Частицы размером до 1 мм (как минимум, на порядок больше тех, что взвешены в атмосфере [66; 247]) выстреливались навстречу потоку из плоского торца продольно обтекаемого цилиндра [251] ($M_\infty > 6$). Было показано, что скачок от частицы, проникающей более, чем на диаметр цилиндра, взаимодействует с головной ударной волной. Такое взаимодействие приводит к формированию слоёв смещения и высоконапорных струй, которые достигают поверхности модели и тем самым могут провоцировать усиление теплообмена до порядка величины. При этом поле течения вблизи носка оказывается сильно возмущено, что может привести к раннему ламинарно-турбулентному переходу на боковой поверхности обтекаемого цилиндра. Следует отметить, что и отскок микрочастиц от поверхности может приводить к аналогичной существенной перестройке всего течения и влиять на ЛТП, как иллюстрируется в [256]: частица пыли в тракте АДТ отражается от носового притупления конуса и возвращается к головной ударной волне, вызывая отрыв потока, который сопровождается искажением фронта ударной волны и смещением ЛТП к носку. Исследования взаимодействия единичных частиц с ударными и пограничными слоями продолжаются и сегодня. Среди прочих следует выделить работы Д. Ревизникова (Московский авиационный институт, МАИ) (напр., [257]). Они подтверждают экспериментальные результаты Холдена и дают расширенное представление о процессах влияния частиц на течение и теплообмен, которое проблематично получить экспериментальным путём.

Теоретическая модель [67] разработана для относительно простых течений, в которых пограничный слой можно считать слабо непараллельным. Модель основана на асимптотическом подходе в предположении, что местное число Рейнольдса по толщине пограничного слоя велико. Задача возбуждения (восприимчивости) и развития волновых пакетов от удара микрочастицы предполагает, что длина волны преобладающего возмущения мала по сравнению с размерами обтекаемого тела (так называемое *коротковолновое приближение*, или ВКБ² приближение). Однако в большинстве практически важных случаев частицы проникают в пограничный слой в условиях сильно непараллельного течения (например, вблизи носового притупления), где коротковолновое приближение не применимо. Чтобы обойти это ограничение, в данной главе делается попытка заменить аналитическое решение задачи восприимчивости численным интегрированием полных уравнений

²WKB, Wentzel — Kramers — Brillouin

Навье — Стокса с дополнительными членами-источниками, взятыми из оригинального анализа [67] для описания нестационарного *динамического* воздействия частицы на ламинарное невозмущённое поле течения.

В настоящей главе теоретический [67] и предложенный численный подходы подвергаются взаимной проверке путём детального сравнения характеристик волновых пакетов, возбуждаемых частицей. На основе расширенной теоретико-численной модели предлагается простая статистическая модель ламинарно-турбулентного перехода, вызванного микрочастицами.

7.1. Математическая модель частицы

Рассмотрим ламинарное течение над заострённым клином длины L^* , помещённым в сверхзвуковой набегающий поток. Ударный слой предполагается невязким — его толщина существенно превосходит толщину пограничного слоя, развивающегося на поверхности клина, или $Re_{\infty, L} \gg 1$ при $M_\infty \gtrsim 1$. Пренебрегая влиянием вязко-невязкого взаимодействия, будем считать, что течение в невязком ударном слое является однородным с постоянной скоростью \mathbf{U}_2^* , плотностью ρ_2^* , температурой T_2^* и давлением P_2^* . В начальный момент времени $t^* = t_0^*$ твёрдая сферическая частица радиуса R_p^* и плотностью ρ_p^* пересекает границу ударного слоя в точке $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_0^*$, где $\mathbf{r}^* = (r_1^*, r_2^*, r_3^*)$ — вектор в декартовой системе координат, показанной на рис. 7.1. Система координат (x, y, z) связана с поверхностью клина. Здесь и далее нижний индекс « p » указывает на отношения величины к частице.

В ударном слое движение частицы описывается уравнениями

$$m_p^* \frac{d\mathbf{u}_p^*}{dt^*} = \mathbf{F}_p^*, \quad (7.1)$$

$$\mathbf{u}_p^*(t_0^*) = (U_\infty^*, 0, 0)^T, \quad (7.2)$$

где $\mathbf{u}_p^* = d\mathbf{r}_p^*/dt^*$ — скорость частицы, $m_p = 4\pi R_p^{*3} \rho_p^*/3$ — её масса, \mathbf{F}_p^* — сила сопротивления, действующая на частицу со стороны потока. Силой гравитационного притяжения пренебрегаем. Обтекание частицы считается квазистационарным, поэтому силу сопротивления можно рассчитать по формуле

$$\mathbf{F}_p^* = -C_D \frac{\rho_p^*}{2} |\mathbf{u}_p^* - \mathbf{U}^*| (\mathbf{u}_p^* - \mathbf{U}^*) \cdot \pi R_p^{*2}. \quad (7.3)$$

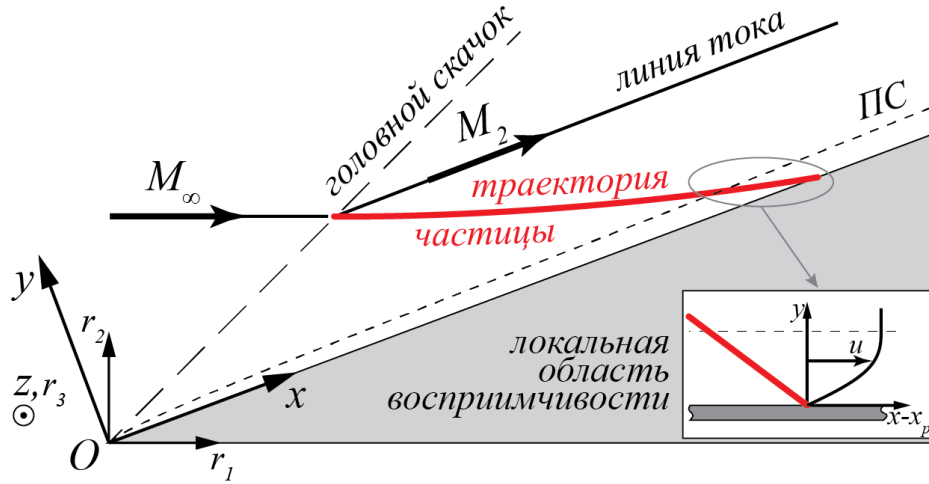


Рисунок 7.1 — Схема сверхзвукового течения около острого клина и принятые системы координат. «ПС» соответствует верхней границе пограничного слоя

Коэффициент сопротивления C_D рассчитывается на основе модифицированной эмпирической корреляции Кроу [258]

$$\begin{aligned}\Delta U_p &= |\mathbf{u}_p^* - \mathbf{U}^*|, \\ Re_p &= Re_{\infty, L} \cdot \frac{\rho \Delta U_p \cdot 2R_p}{\mu}, \\ M_p &= M_\infty \cdot \frac{\Delta U_p}{\sqrt{T}}, \\ T_p &= T, \\ C_{inc} &= \frac{24}{Re_p} (1 + 0.15 Re_p^{0.687}), \\ G_1 &= \left(\frac{Re_p}{312} \right)^{0.6688}, \quad \log_{10} G = \frac{2.5G_1}{1 + G_1}; \\ H &= \frac{4.6}{1 + M_p} + 1.7 \sqrt{\frac{T_p}{T}}, \\ C_d &= 2 + (C_{inc} - 2) \exp \left(-3.07 \frac{\sqrt{\gamma} M_p G}{Re_p} \right) + \frac{H}{\sqrt{\gamma} M_p} \exp \left(-0.5 \frac{Re_p}{M_p} \right). \quad (7.4)\end{aligned}$$

Корреляция (7.4) пригодна как при сплошном, так и при свободномолекулярном режиме обтекания частицы. В частности, она исходно описывает режим Стокса, а при очень маленьких Re_p и больших M_p аппроксимирует режимы умеренных и больших чисел Кнудсена. Последнее оказывается важным при моделировании микрочастиц с радиусом порядка десятых долей микрометра, которые присутствуют в атмосфере в виде сульфатных образований [66]. В рассматриваемом ниже

тестовом случае размер частицы достаточно велик, и вдоль всей траектории полёта частицы работает сплошнородная ветвь корреляции (7.4).

Если радиус частицы много меньше, чем толщина пограничного слоя в сечении столкновения, $R_p^* \ll \delta(x_c)$, то задача (7.1) – (7.2) также описывает прохождение частицы через пограничный слой³.

Решая задачу (7.1) – (7.3), можно отыскать скорость частицы в момент столкновения, $\mathbf{u}_{p,w}^* \equiv \mathbf{u}_c^*$. Далее будем предполагать частицу достаточно тяжёлой, так что её скорость при пролёте через пограничный слой остаётся постоянной и равной \mathbf{u}_c^* . Предварительные расчёты траекторий частиц показали, что в рассматриваемых ниже случаях скорость частицы уменьшается не более чем на 0.25% за время прохождения пограничного слоя.

Для простоты будем считать, что частица прилипает к поверхности при соударении. Эффекты, связанные с образовавшейся неровностью поверхности или с отскоком частицы от неё, не учитываются. Следует заметить, что поверхность клина можно считать аэродинамически гладкой, если число Рейнольдса характерной неровности ограничено сверху $Re_{kk} \equiv ku_k/\nu_k < 25$, где u_k и ν_k — скорость и кинематическая вязкость невозмущённого пограничного слоя на высоте неровности k [259]. Рассматриваемые ниже случаи удовлетворяют этому ограничению [67]. При пересечении пограничного слоя частица порождает возмущения (в том числе, возбуждает неустойчивые моды) в локальной области, где невозмущённое ламинарное течение можно рассматривать как локально параллельное (см. рис. 7.1).

Маленькую частицу можно описать *точечным* источником сосредоточенной силы и мощности. В общем случае наряду с механической мощностью, обусловленной силой сопротивления, источник мощности должен учитывать вклад теплообмена, если частица не находится в тепловом равновесии с окружающим потоком. Если включить такой источник в уравнения Навье — Стокса для совершенного газа (см. раздел 1.1), то в безразмерном виде в декартовой системе координат вектор источников членов (1.2) будет иметь вид

$$\mathbf{S}_c = R_p^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{F}}_p \\ \mathbf{u}_p \cdot \bar{\mathbf{F}}_p + \frac{\bar{Q}_p}{Pr Re R_p (\gamma - 1) M_\infty^2} \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)$ — трёхмерная дельта-функция Дирака; в уравнение энергии входит точечный источник тепла от частицы $\bar{Q}_p = 2\pi Nu(T_p - T)$ (Nu — число Нус-

³Здесь и далее нижний индекс «с» обозначает отношение к месту столкновения частицы с поверхностью

сельта) и точечный источник мощности силы сопротивления, пропорциональный скалярному произведению $\mathbf{u}_p \cdot \bar{\mathbf{F}}_p$, которая выделяется из-за торможения частицы в потоке; в уравнение импульсов входит точечный источник объёмной силы, пропорциональный величине

$$\bar{\mathbf{F}}_p = C_D \frac{\pi \rho}{2} |\mathbf{u}_p - \mathbf{U}| (\mathbf{u}_p - \mathbf{U}). \quad (7.6)$$

7.2. Теоретическое решение

В теоретическом анализе [67] поле возмущённого течения представляется в виде

$$q(x, y, z, t) = Q(x, y, z) + R_p^2 \tilde{q}(x, y, z, t),$$

где q — некоторая физическая величина (например, давление), Q — невозмущённое поле течения, $R_p^2 \tilde{q} \equiv q'$ — порождённое частицей возмущение; ортонормированная система координат (x, y, z) показана на рис. 7.1.

Так как размер частицы мал, $R_p \ll 1$, в первом приближении по R_p^2 возмущение подчиняется линеаризованным уравнениям Навье — Стокса. В рамках данного приближения задача восприимчивости решается путём разложения возмущений по биортогональной системе собственных функций линеаризованного оператора. Иными словами, если частица сталкивается с поверхностью в точке $\mathbf{x}_c = (x, y, z) = (x_c, 0, 0)$ в момент времени $t_c = 0$, то индуцированное частицей возмущение \tilde{q} моды m можно выразить интегралом (3.4), в котором коэффициент восприимчивости берётся в точке столкновения \mathbf{x}_c и может быть представлен в аналитическом виде [67]. В данном случае эйконал возмущения S , определённый в подразделе 3.1 как интеграл от точки потери устойчивости x_0 , должен рассчитываться от точки соударения x_c .

Если сечение наблюдения x расположено достаточно далеко от точки соударения, $x \gg x_c$, то $|S| \gg 1$ и интеграл (3.4) вновь можно оценить с помощью метода перевала, как это сделано в подразделе 3.1.1. Следуя введённым ранее обозначениям, для амплитуды горба возмущения, оцененного с помощью метода перевала, можно записать

$$q'(\omega_s, \beta_s, x) = C_{recept} C_{disp} e^{N(x_c, x)}, \quad (7.7)$$

$$C_{recept} = R_p^2 |D_m(\omega_s, \beta_s) \hat{q}_m(\omega_s, \beta_s, x)|, \quad (7.8)$$

$$C_{disp} = \frac{1}{\pi} \left| \frac{\partial^2 S}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \omega \partial \beta} \right)^2 \right|_{(\omega_s, \beta_s)}^{1/2}, \quad (7.9)$$

$$N(x_c, x) = - \int_{x_c}^x \alpha_{m,i}(\omega_s, \beta_s, \tilde{x}) d\tilde{x}. \quad (7.10)$$

В данном разделе рассматривается первая неустойчивая мода по терминологии Мэка [45], то есть нижний индекс m обозначает первую моду. Собственные значения $\alpha_m(\omega, \beta, x)$ рассчитываются с учётом непараллельности пограничного слоя по методу многих масштабов [55; 56; 179]. Так как в общем случае $x_c \neq x_0$, то инкремент нарастания преобладающего возмущения в точке соударения отличен от нуля, $-\alpha_{m,i}(\omega_s, \beta_s, x_c) > 0$. Поэтому коэффициент восприимчивости (7.8) должен вычисляться при комплексных значениях α_m . Для этого используется теоретическое решение [67] в предположении, что $|\alpha_{m,i}| \ll \alpha_{m,r}$ при $x = x_c, \omega = \omega_s, \beta = \beta_s$, которое предполагает слабую зависимость коэффициента восприимчивости от расстояния между точкой потери устойчивости и точкой столкновения. Предварительные расчёты показали, что это ограничение выполняется для рассматриваемого ниже случая.

Следует отметить, что коэффициент C_{disp} есть половина выражения, представленного в [67]. Для первой неустойчивой моды имеется две перевальные точки $(\omega_s, \pm\beta_s)$, где $\omega_s > 0, \beta_s > 0$ (см. главу 3). Поэтому в дальнем поле возмущение расщепляется на два волновых пакета. Траектории их горбов $z_s(x_s)$ на поверхности клина симметричны по отношению к плоскости $z = z_c$, проходящей через точку столкновения (x_c, z_c) .

7.3. Выделение моды из численного решения

Возмущения, порождённые частицей, содержат все моды дискретного и непрерывного спектров. Так как теоретическое решение (7.7) – (7.10) учитывает только первую моду, для корректного сравнения теоретических и численных результатов следует выделить волновой пакет первой моды из возмущения, рассчитанного в ПЧМ. Эта процедура осуществляется методом разложения по биортогональной системе собственных функций [5; 178]. В некотором сечении x_0 вниз по потоку от

точки столкновения x_c рассчитывается спектральная плотность вектора возмущения ПЧМ (3.1), который обозначим через $\mathbf{a}_{\text{ПЧМ}}$

$$\widehat{\mathbf{a}}_{\text{ПЧМ}}(x_0, y, \beta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dt [\mathbf{a}_{\text{ПЧМ}}(x_0, y, z, t) \cdot e^{i\beta z - i\omega t}] .$$

Спектральная плотность первой моды, заключённая в возмущении ПЧМ, есть

$$\widehat{\mathbf{a}}_R(x_0, y, \beta, \omega) = \frac{\langle \mathbf{H}_2 \widehat{\mathbf{a}}_{\text{ПЧМ}}, \widehat{\mathbf{b}}_m \rangle}{\langle \mathbf{H}_2 \widehat{\mathbf{a}}_m, \widehat{\mathbf{b}}_m \rangle} \widehat{\mathbf{a}}_m,$$

где $\widehat{\mathbf{a}}_m$ и $\widehat{\mathbf{b}}_m$ — собственные функции прямой и сопряжённой задач устойчивости, соответственно. Скалярное произведение определяется как

$$\langle \mathbf{H}_2 \widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}} \rangle = \int_0^{\infty} (\mathbf{H}_2 \widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}}) dy,$$

где (\cdot, \cdot) — эрмитово скалярное произведение. Явный вид матрицы \mathbf{H}_2 рассчитывается в соответствии с [178].

Пакет первой моды, выделенный из решения ПЧМ, рассчитывается как обратное преобразование Фурье

$$\mathbf{a}_R(x_0, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dt [\widehat{\mathbf{a}}_R(x_0, y, \beta, \omega) \cdot e^{-i\beta z + i\omega t}] .$$

7.4. Численная модель частицы

Для валидации теоретического решения (7.7) – (7.10) проведём численное интегрирование полных уравнений Навье — Стокса с учётом источников, моделирующих влияние частицы. Для этого:

1. рассчитаем невозмущённое поле течения;
2. рассчитаем траекторию частицы в соответствии с моделью (7.1) и силой сопротивления (7.3);
3. предложим модель дискретизации частицы на расчётной сетке;
4. смоделируем напрямую задачу восприимчивости пограничного слоя к падающей на него частице;

5. изучим вопросы сеточной сходимости;
6. оценим применимость предложенного подхода путём перекрёстной валидации решений ЛТУ и ПЧМ.

7.4.1. Траектория

Сначала в двумерной постановке на тестовой сетке рассчитывается полное невозмущённое поле течения. Рассматривая частицу как точечный источник ($R_p \ll 1$), можно пренебречь её влиянием на окружающий поток и рассчитать силу сопротивления (7.3) лишь с помощью невозмущённого течения. Задача (7.1) – (7.3) интегрируется численно с начальными условиями: $\mathbf{r}_p(0) = \mathbf{r}_{p0}$, $\mathbf{u}_p(0) = \mathbf{u}_{p0} = (1, 0, 0)^T$, где точка \mathbf{r}_{p0} расположена в набегающем потоке перед головным скачком. Для интегрирования применяется простая схема низкого порядка аппроксимации

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{p,n+1} = \mathbf{u}_{p,n} + \mathbf{f}\Delta t, \\ \mathbf{r}_{p,n+1} = \mathbf{r}_{p,n} + 0.5 (\mathbf{u}_{p,n+1} + \mathbf{u}_{p,n}) \Delta t. \end{cases}$$

Расчёт траектории ведётся в интервале времени $0 < t \leq t_c$ до момента столкновения частицы с поверхностью клина в точке $\mathbf{x}_p(t_c) = (x_c, 0, 0)$ (см. рис. 7.1). При $t > t_c$ индуцированные частицей источники члены (7.5) равны нулю. В настоящей главе рассматриваются относительно тяжёлые частицы ($\rho_p^*/\rho_\infty^* > 10^4$), которые летят по практически прямолинейным траекториям в ударном слое.

Далее тестовая сетка уточняется возле траектории частицы. Поле течения вновь устанавливается на новой сетке и далее служит для окончательного расчёта траектории частицы — траектория сохраняется в файл как функция от времени с желаемым временным шагом, а именно: положение частицы \mathbf{r}_p , её скорость \mathbf{u}_p и интенсивность источников $R_p^2 \bar{\mathbf{F}}_p$.

С целью экономии вычислительных ресурсов задача восприимчивости решается в подобласти, которая целиком расположена под головным скачком уплотнения и не включает начальную часть траектории частицы. Влияние такого подхода на возбуждение возмущений пограничного слоя незначительно и обсуждается далее. В расчёте ПЧМ частица начинает движение вблизи входной границы подобласти и

движется строго вдоль предрасчитанной траектории. Индуцированные частицей источники не конфликтуют с граничными условиями.

7.4.2. Точечный источник

Источниковые члены (7.5) описывают вклад от точечного источника объёмной силы и мощности и пропорциональны дельта-функции Дирака

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) = \delta(x - x_p) \cdot \delta(y - y_p) \cdot \delta(z - z_p),$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) d\mathbf{r} = 1. \quad (7.11)$$

Эту функцию можно аппроксимировать колоколообразной поверхностью функции Гаусса

$$\delta_h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) = \begin{cases} \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^3} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|^2}{2\sigma^2}\right), & |\mathbf{r} - \mathbf{r}_p| < 4\sigma, \\ 0, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}_p| \geq 4\sigma; \end{cases} \quad (7.12)$$

Дискретный точечный источник имеет ограниченный носитель (сфера радиуса 4σ), что очень удобно с вычислительной точки зрения. Величина отброшенного хвоста функции Гаусса приводит к незначительному уменьшению ΔI интегрального вклада точечного источника (7.11); таким уменьшением можно пренебречь:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta_h(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) d\mathbf{r} = 1 - \Delta I \approx 0.9998.$$

Источник с большим носителем (большие значения σ) легче разрешить на расчётной сетке. Однако размер источника должен оставаться малым по сравнению с толщиной пограничного слоя в области столкновения, чтобы обеспечить корректное моделирование физического процесса.

7.4.3. Тестовая задача

Рассмотрим конфигурацию течения из [67]: клин с полууглом раскрытия 14° помещён в сверхзвуковой поток под нулевым углом атаки. Параметры набегающего потока соответствуют стандартной атмосфере на высоте 20 км и приведены в табл. 7.1 вместе с параметрами потока за косым скачком на клине (нижний индекс 2), которые близки к параметрам на границе пограничного слоя. Температура стенки постоянна и близка к адиабатической температуре

$$T_w \approx T_r = T_2 \left(1 + \sqrt{Pr} \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right).$$

Параметры сферической частицы приведены в табл. 7.2. Поверхность частицы находится в тепловом равновесии с окружающим газом, то есть частица не является источником тепла и $\bar{Q}_p = 0$. Траектория частицы практически прямолинейна (частица очень тяжёлая, $\rho_p \gg 1$) и лежит в плоскости симметрии $z = 0$, поэтому $z_c = z_p \equiv 0$. Траектория частицы сохранена с временным шагом $dt = 8 \cdot 10^{-5}$, который соответствует временному шагу интегрирования уравнений Навье — Стокса.

Как показано на рис. 7.2а, в рассматриваемой тестовой постановке частица прилетает на верхнюю границу пограничного слоя при числе Маха $M_p \approx 0.76$ и числе Рейнольдса $Re_p \approx 52.9$ относительно местного невозмущённого течения и ударяется о поверхность при $M_p \approx 2$, $Re_p \approx 51.1$. Число Re_p заметно изменяется внутри пограничного слоя. Такие параметры допустимы для применения корреляции для коэффициента сопротивления [258].

Величины, пропорциональные источниковым членам в уравнении импульсов (7.6), рассчитаны для невозмущённого течения и представлены на рис. 7.2б. Следует отметить, что соответствующие проекции проиллюстрированы в общей декартовой системе координат (см. рис. 7.1). Как видно, внутри пограничного слоя

Таблица 7.1 — Параметры набегающего потока и на границе пограничного слоя

M_∞	M_2	$Re_{\infty,L}$	$L^*, \text{ м}$	$T_\infty, \text{ К}$	$T_2^*, \text{ К}$	$P_\infty, \text{ Па}$	$\rho_\infty^*, \text{ кг/м}^3$	T_w
4	3	$7.381 \cdot 10^6$	1	216.7	324.9	5530	0.0889	3.8

Таблица 7.2 — Параметры частицы и столкновения

$\rho_p^*, \text{ кг/м}^3$	ρ_p	$R_p^*, \text{ мкм}$	\mathbf{r}_{p0}	x_c	z_c	$\delta_{99}(x_c)$
1000	11248.6	10	$(0.029, 0.016, 0)^T$	0.067	0	$6.4 \cdot 10^{-4}$

величина $\bar{F}_{p,r1}$ испытывает наибольшее изменение и, по-видимому, вносит основной вклад в динамическое возбуждение волнового пакета внутри пограничного слоя.

Теоретический анализ выполнен для автомодельного сжимаемого пограничного слоя с параметрами на границе, взятыми из прямого расчёта (табл. 7.1). Следует отметить, что параметр вязко-невязкого взаимодействия $\chi = M_e^3 Re_{e,x}^{-0.5} (\mu_w T_e / (\mu_e T_w))^{0.5} < 0.03$ при $x > x_c$, что указывает на то, что взаимодействие слабое и автомодельный профиль близок к профилю ПЧМ. Прямое сравнение профилей $U(y)$ и $T(y)$ в различных сечениях $x = const$ показало, что имеется незначительное различие лишь в профилях температуры. Проверочные теоретические расчёты восприимчивости с использованием профилей пограничного слоя из ПЧМ при $x = x_c$ показали, что расхождение коэффициентов восприимчивости (7.8) со случаем автомодельного пограничного слоя не превышает 2.5%.

7.4.4. Расчётная сетка

Основные особенности трёхмерной расчётной сетки показаны на рис. 7.3. Полёт частицы моделируется в подобласти, граница которой показана жирной линией на рис. 7.3а. Сетка в подобласти разделена на три зоны: область столкновения (ниж-

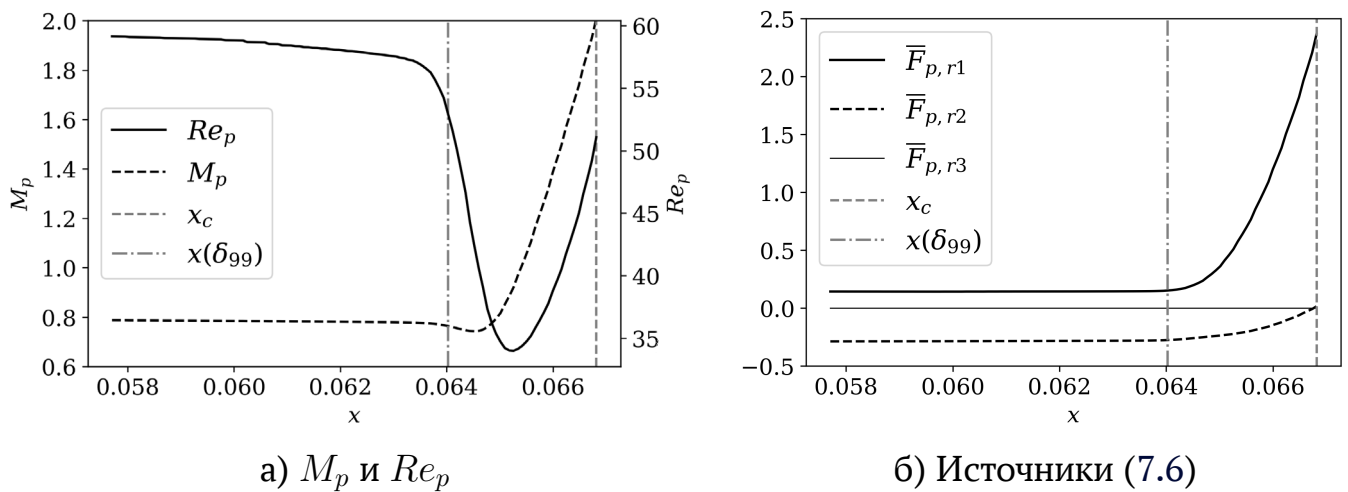


Рисунок 7.2 — Параметры вдоль траектории частицы

Верхняя граница подобласти расположена при $\Delta y(x_{cL}) \approx 8\delta_{99}(x_c)$ и удаляется от стенки с ростом x .

Описанная расчётная сетка в подобласти далее упоминается как *базовая*. Её параметры даны в табл. 7.3.

Полная сетка сгущена в области острой кромки при $x < x_{le}$ (см. рис. 7.3б) таким образом, что ячейки у самой кромки оказываются квадратными в плоскости xOy . Сеточные линии сгущены вблизи скачка и у стенки. Поперёк пограничного слоя приходится 140 – 150 узлов. При $x > x_{cL}$ пристенная ячейка сетки покрывает диапазон $5 \leq y_1^+ \leq 9$ в пристенных единицах $y_1^+ = \rho_w^* U_\tau^* y_1^* / \mu_w^* = y_1 \sqrt{\rho_w Re_{\infty,L} (\partial u / \partial \mathbf{n})_w} / \mu_w$. В случае $\sigma = 5 \cdot 10^{-5}$, который в совокупности с базовой сеткой далее упоминается как *базовый*, на частицу-источник приходится примерно 6 сеточных точек (pps) в направлениях x и z : $pps_x \approx 6\sigma/dx_c = 6$, $pps_z \approx 6\sigma/dx_z = 6$. В большинстве тестовых случаев рассматривается комбинация различных значений σ и сеточного разрешения, которые дают определённое значение pps . При анализе влияния определённого параметра остальные параметры соответствуют базовому случаю, если не указано иное.

Следует отметить, что граничное условие симметрии при $z = 0$ выставляется напрямую в соответствии с формулой (1.7); комментарии даны в подразделе 1.1.2. Поэтому возможная численная диссипация из-за недостаточного сеточного разрешения возмущений вблизи плоскости симметрии $z = 0$ также рассматривается при исследовании сеточной сходимости ниже.

7.4.5. Верификация

Рассмотрим отпечаток волнового пакета на стенке — возмущение давления $p'_w(x, z)$ в момент времени $t = 0.24$, когда волновой пакет уже хорошо развит и полностью расположен внутри расчётной области. Во всех рассматриваемых далее случаях форма отпечатка не изменяется, а амплитуда может меняться. Она характеризуется, например, максимумом огибающей p'_w в плоскости симметрии $z = 0$, который может быть найден с помощью преобразования Гильберта \mathcal{H}

$$p'_{w,max}{}^{sym} = \max_x |\mathcal{H}_x(p'_w(x, 0))|.$$

Таблица 7.3 — Параметры базовой расчётной сетки

x_{cL}	x_{cR}	x_{WP}	z_c	L_x	L_z	dx_c	dz_c	dx_{WP}	dz_{WP}	N_x	N_y	N_z
0.0515	0.0721	0.1879	0.004	0.27	0.03	$5 \cdot 10^{-5}$	dx_c	$16dx_c$	$6dx_c$	625	211	251

Далее будем сопоставлять относительные отклонения этой величины

$$\Delta p_{w,max}^{sym} \equiv \frac{p_{w,max}^{sym} - p_{w,max,ref}^{sym}}{p_{w,max,ref}^{sym}}, \quad (7.15)$$

где нижний индекс *ref* обозначает результат для опорного случая (по-умолчанию, это базовый случай).

На рис. 7.4 показан отпечаток волнового пакета, полученный в базовом случае в момент времени $t = 0.24$. В нём преобладают наклонные волны с углами фронтов $65^\circ - 75^\circ$ по отношению к оси Oz . Такие волны соответствуют первой неустойчивой моде, что согласуется с результатами ЛТУ: так как число Маха на внешней границе пограничного слоя относительно мало, $M_e \approx 3$, а температура поверхности близка адиабатической, в пограничном слое существует единственная неустойчивая мода — первая мода. Однако ЛТУ предсказывает, что линия максимума (траектория горба волнового пакета) должна удаляться от плоскости симметрии, а на рис. 7.4 максимум достигается при $z = 0$. Это обусловлено тем, что волновой пакет ещё не в достаточной мере удалился от области столкновения и помимо возмущений первой моды включает и другие возмущения, которые асимптотически затухают в дальнем поле.

Расчёты при различных значениях σ и фиксированных $pps_x = pps_z = 6$ показывают, что относительные отклонения (по отношению к базовому случаю $\sigma = 5 \cdot 10^{-5}$) малы: $\Delta p_{w,max}^{sym} = -9.7\%$ при $\sigma = 10^{-4}$ и 0.3% при $\sigma = 2.5 \cdot 10^{-5}$. Это отчасти подтверждает, что гауссова аппроксимация дельта-функции применима и универсальна для рассматриваемой задачи восприимчивости. Рисунок 7.5 иллюстрирует быструю сходимость распределения $p_w^{sym}(x)$ по величине σ . Таким образом, частицу-источник с размером $\sigma = 5 \cdot 10^{-5}$ можно рассматривать как точечный источник несмотря на то, что его диаметр (оценённый как $\approx 2\sigma\sqrt{2}$) составляет примерно 22% толщины пограничного слоя $\delta_{99}(x_c) = 6.4 \cdot 10^{-4}$ в точке столкновения.

Рассмотрим влияние продольного dx_c и бокового dz_c сеточного разрешения волнового пакета, индуцированного частицей, а также влияние граничного условия симметрии при $z = 0$, которое накладывается напрямую (см. подраздел 1.1.2). Случаи $\sigma = 5 \cdot 10^{-5}$ и $\sigma = 10^{-4}$ демонстрируют похожие результаты, обобщённые в табл. 7.4 и 7.5. Неожиданно малое превышение $p_{w,max}^{sym}(x)$ наблюдается в случае без условия симметрии при грубом разрешении $pps_x \times pps_z = 3 \times 3$, когда частица полностью погружена в расчётную область.

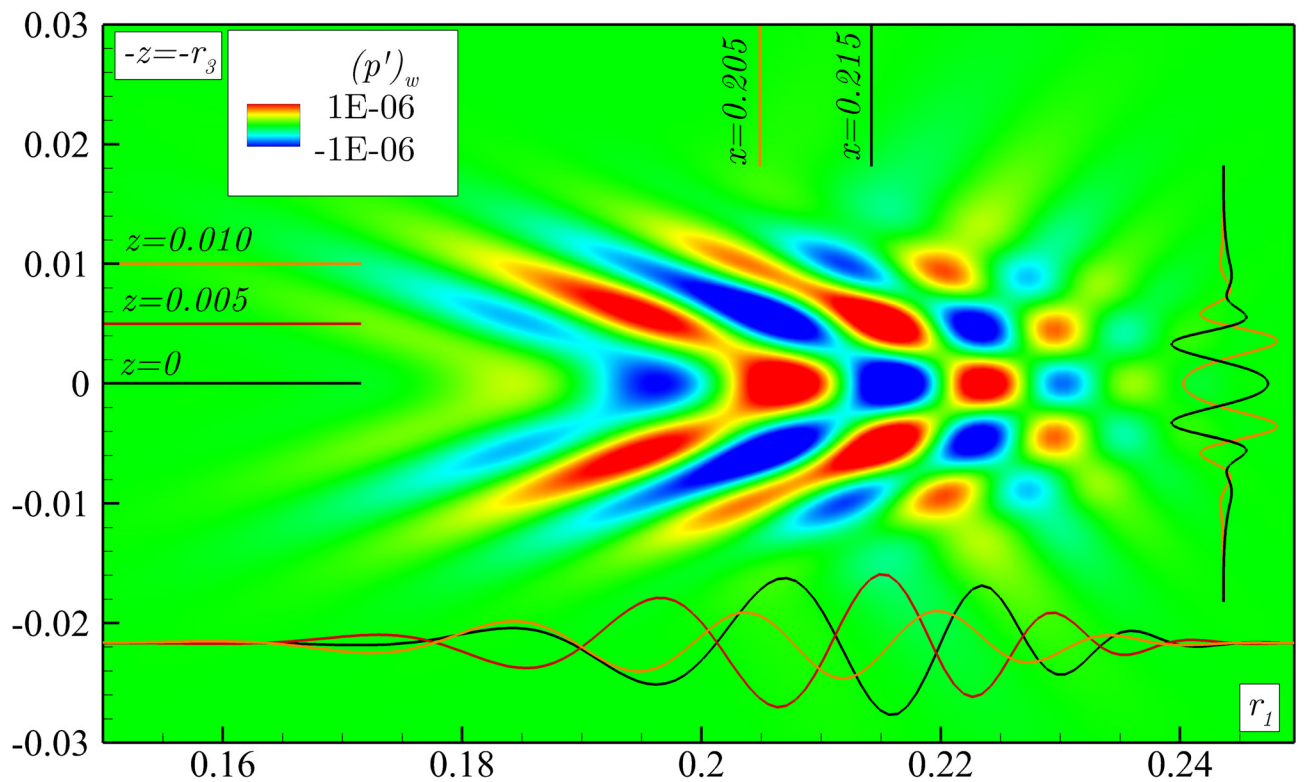


Рисунок 7.4 — Отпечаток волнового пакета на поверхности при $t = 0.24$, базовый случай. Отпечаток отражён относительно $z = 0$ для наглядности

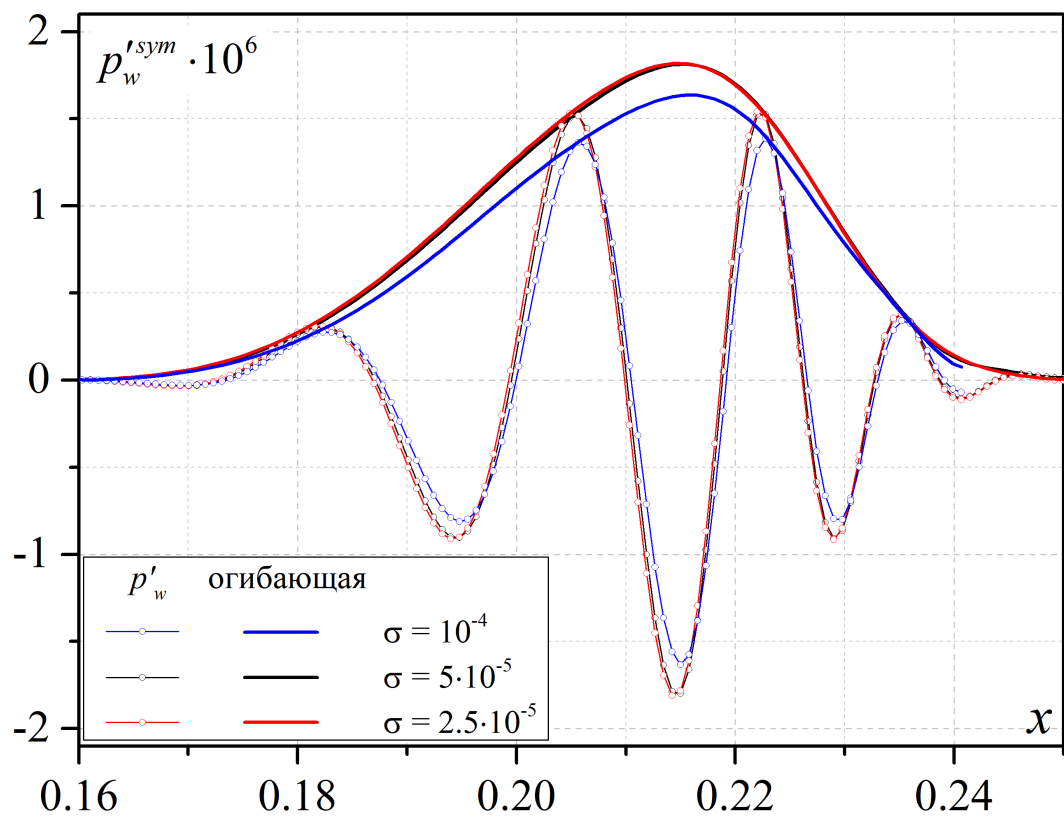


Рисунок 7.5 — Влияние величины σ на возмущение давления на стенке в плоскости симметрии $z = 0$ при $t = 0.24$

Таблица 7.4 — Результаты исследования сеточной сходимости при $\sigma = 5 \cdot 10^{-5}$ при различном сеточном разрешении частицы-источника; «ns» — без условия симметрии при $z = 0$; «ref» — опорный случай (см. (7.15))

	$pps_x = 3$	6	12
$pps_z = 3$	+3.2% (ns)		
6	+3.2%	0.0% (ref) +0.6% (ns)	+0.1%
12		−1.5% +0.5% (ns)	+2.1% 0.0% (ns)

Таблица 7.5 — То же, что и в табл. 7.4, но при $\sigma = 10^{-4}$

6×6	12×12	24×24
0.0% (ref) +1.5% (ns)	−0.7%	+0.5%

Рассмотрим эффект сеточного разрешения на эволюцию волнового пакета. Сетка спроектирована таким образом, что разрешение преобладающей волновой компоненты в боковом направлении всегда оказывается более подробным, чем в продольном направлении (см. 7.13 – 7.14). Поэтому сосредоточимся на эффекте dx . В зоне столкновения сетка имеет избыточное продольное разрешение. За ней шаг плавно увеличивается в переходной зоне до величины dx_{WP} и остаётся постоянным в зоне волнового пакета при $x > x_{WP}$. Чтобы оценить эффект dx_{WP} , расчётная область расширена до $L_x = 0.6$ и $L_z = 0.05$ с сохранением шага dx_{WP} и dz_{WP} . Развитие волнового пакета рассчитано до момента времени $t = 0.7$, когда горб пакета в плоскости симметрии добирается до точки $x_{w,max}^{sym} \approx 0.53$.

На рис. 7.6 показано влияние измельчения сетки на относительное отклонение (7.15) относительно случая с наиболее подробной сеткой $dx_{WP,ref} = 0.25dx_{WP}$. В базовом случае, dx_{WP} , влияние сетки наиболее выражено в ближнем поле непосредственно за областью столкновения. В поле возмущения значительную роль играют мелкомасштабные структуры, которые лучше разрешены на подробной сетке с шагом dx_c . По мере распространения пакета вниз по потоку эти возмущения затухают, а отклонение уменьшается до 6–7% к началу зоны волнового пакета, где на длину доминирующей волны приходится около 25 точек. Отклонение достигает локального максимума 8% при $(t, x_{w,max}^{sym}) = (0.3, 0.26)$ и затем монотонно уменьшается до 6.3% при $(t, x_{w,max}^{sym}) = (0.7, 0.53)$. Тенденция к уменьшению отклонения связана с дисперсией волнового пакета, которая приводит к увеличению количества

сеточных точек на длину волны преобладающего в пакете возмущения. Аналогичное поведение наблюдается в случае подробной сетки, $0.5dx_{WP}$, но отклонения оказываются на порядок ниже, чем в базовом случае. Таким образом, на наиболее подробной сетке достигнуто практически сошедшееся нестационарное решение.

Следует отметить, что функциональная зависимость $dx(x)$ для базовой сетки качественно отличается от двух оставшихся сеток в переходной области⁴. Отличие не является критичным, так как оно влияет преимущественно в области ближнего поля, где преобладают мелкомасштабные возмущения. Эти возмущения малы в области ниже по потоку, где исследуется волновой пакет. Таким образом, базовая сетка позволяет моделировать распространение волнового пакета с ошибкой не более 6.3% в области $x > 0.53$, где количество сеточных точек на доминирующую длину волны больше, чем 35.

Временное разрешение было исследовано только в двухмерном случае (результаты тестирования не приводятся). Было обнаружено, что отклонение $\Delta p'_{w,max}^{2D}$ мало, если поперёк пограничного слоя имеется по крайней мере 25 временных точек. Влияние временного разрешения при развитии волнового пакета таково,

⁴Откровенно говоря, не доглядели... Такое случается редко. Обычно приходится всё исправлять, преодолевать врождённую лень. Известно, что верификационные расчёты придают мало вдохновения [260]. Поэтому глупо не попытаться найти разумное оправдание и ничего не переделывать. К счастью, в данном случае такое оправдание нашлось.

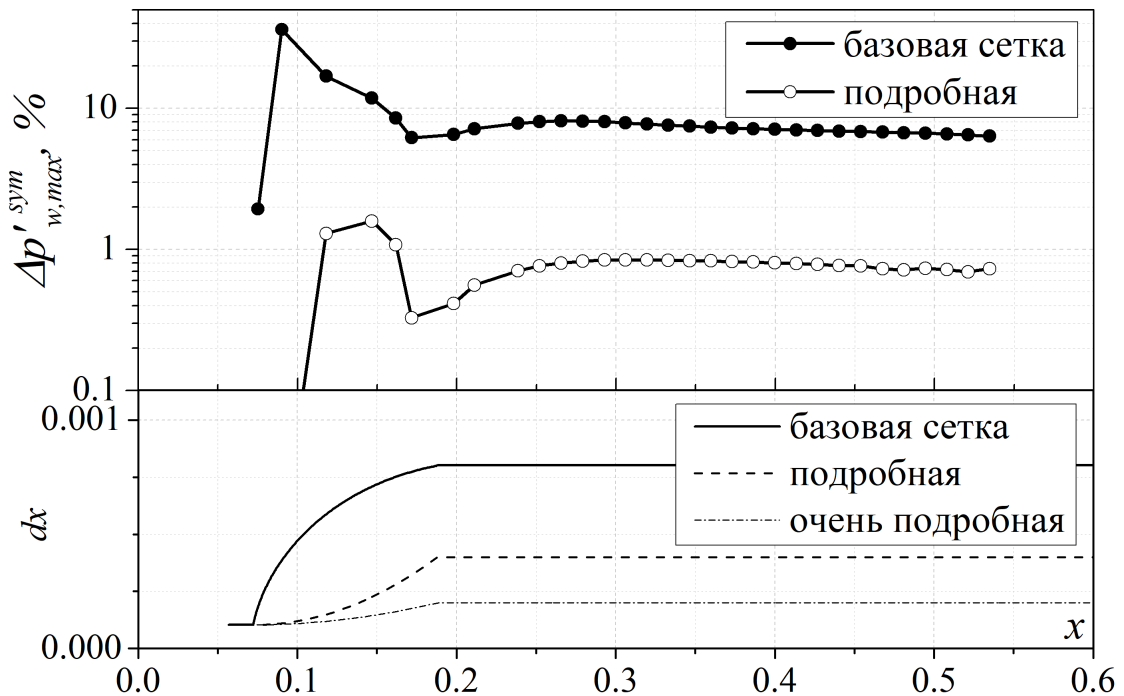


Рисунок 7.6 — Сходимость по сеточному разрешению зоны волнового пакета. Базовая сетка расширена по x и z

что ошибка становится незначительной, если на период преобладающей волны приходится более 60 временных точек (см. раздел 2.1). Последнее ограничение оказывается менее строгим, так как время пролёта частицей пограничного слоя мало по сравнению с периодом преобладающего возмущения. В проведённых трёхмерных расчётах временной шаг постоянен, $dt = 8 \cdot 10^{-5}$. Он соответствует 35 временным точкам на полёт частицы внутри пограничного слоя и 450 временным точкам на период преобладающего при $t = 0.24$ возмущения.

Также проведены трёхмерные расчёты с частицей, которая запущена вблизи верхней границы пограничного слоя. В этом случае амплитуда волнового пакета $p_{w,max}^{sym}$ меньше соответствующей амплитуды в базовом случае на 0.3% при $t = 0.24$. Таким образом, внешняя часть траектории слабо влияет на возбуждение возмущений в пограничном слое.

Обобщим полученные результаты верификационного исследования. Процесс восприимчивости моделируется с ошибкой $p_{w,max}^{sym} < 2.4\%$, если: точечный источник от частицы моделируется гауссовой формой (7.12) с характерным диаметром $2\sigma\sqrt{2}$, который не превышает 22% толщины пограничного слоя в месте столкновения; сетка разрешает источник от частицы не менее, чем $6 \times 6 \times 6$ точками, если граничное условие симметрии моделируется напрямую. Если источник моделируется без наложения симметрии как граничного условия (частица полностью погружена в расчётную область), ошибка становится меньше 1% и не превосходит 3.2% даже в случае сеточного разрешения $3 \times 3 \times 3$ точек. Развитие волнового пакета моделируется с ошибкой $p_{w,max}^{sym} < 6.3\%$, если сетка равномерна по x и на длину преобладающей волны приходится по крайней мере 25–30 сеточных точек. Так как внешняя часть траектории частицы слабо влияет на процесс восприимчивости, полёт частицы необходимо моделировать с высокой точностью лишь внутри пограничного слоя.

7.5. Результаты

В данном разделе проводится перекрёстная валидация теоретической [67] и предложенной выше численной модели. Для этого эволюция волнового пакета рассматривается в расширенной области: $L_x \approx 1.21$, $L_z = 0.085$. Сеточные ячейки

дополнительно разрежены в боковом направлении при $0.93 < z/L_z < 1$, чтобы подавить нефизичное отражение возмущений границы $z = z_{max}$. Остальные особенности базовой сетки сохранены.

7.5.1. Эволюция волнового пакета

Развиваясь вниз по потоку, волновой пакет растёт в пространстве и усиливается, как показано на рис. 7.7. В нём преобладает пара наклонных волн, которые симметричны относительно плоскости $z = 0$, формируются в головной части пакета и медленно затухают в его хвостовой части. Пакет развивается самоподобным образом, наращивая число волновых фронтов по мере удаления от места возбуждения $x = x_c$. В силу симметрии достаточно рассматривать только часть волнового пакета $z > 0$.

Рисунок 7.8 иллюстрирует теоретическую и численную траектории (x_{max}, z_{max}) горба волнового пакета, который, в соответствии с предсказанием теории, должен удаляться от плоскости симметрии. Теоретическая кривая рассчитывается с помощью (7.7) как

$$z_{max} = \left| \frac{\partial S_r}{\partial \beta}(\beta_s, \omega_s, x_{max}) \right|.$$

Численная кривая рассчитывается по отпечатку возмущения давления на поверхности, $p'_w(x, z, t)$ следующим образом. В каждой фиксированной точке (x_0, z_0) рассматривается осциллограмма пульсаций давления $p'_w(t) \equiv p'_w(x_0, z_0, t)$. С помощью преобразования Гильберта \mathcal{H} строится огибающая осциллограммы и определяется максимум огибающей. Положение (x_{max}, z_{max}) и амплитуда $p'_{w,max}$ горба пакета в точке $x = x_{max}$ определяются как максимум полученной величины по размаху z :

$$p'_{w,max}(x) = \max_z \max_t |\mathcal{H}_t[p'_w(x, z, t)]|. \quad (7.16)$$

Данный максимум достигается в момент времени t_{max} , который также находится при расчёте $p'_{w,max}$.

В случае $x_c = 0.067$ (рис. 7.8a) при $x_c < x \lesssim 0.35$ горб пакета, рассчитанного в ПЧМ, движется вдоль плоскости симметрии $z = 0$. Далее при $x \gtrsim 0.4$ ($N(x_c, x) > 4$ в соответствии с [67]) его траектория быстро отклоняется и достигает теоретической асимптотической кривой, а затем плавно линейно отклоняется от неё и вновь

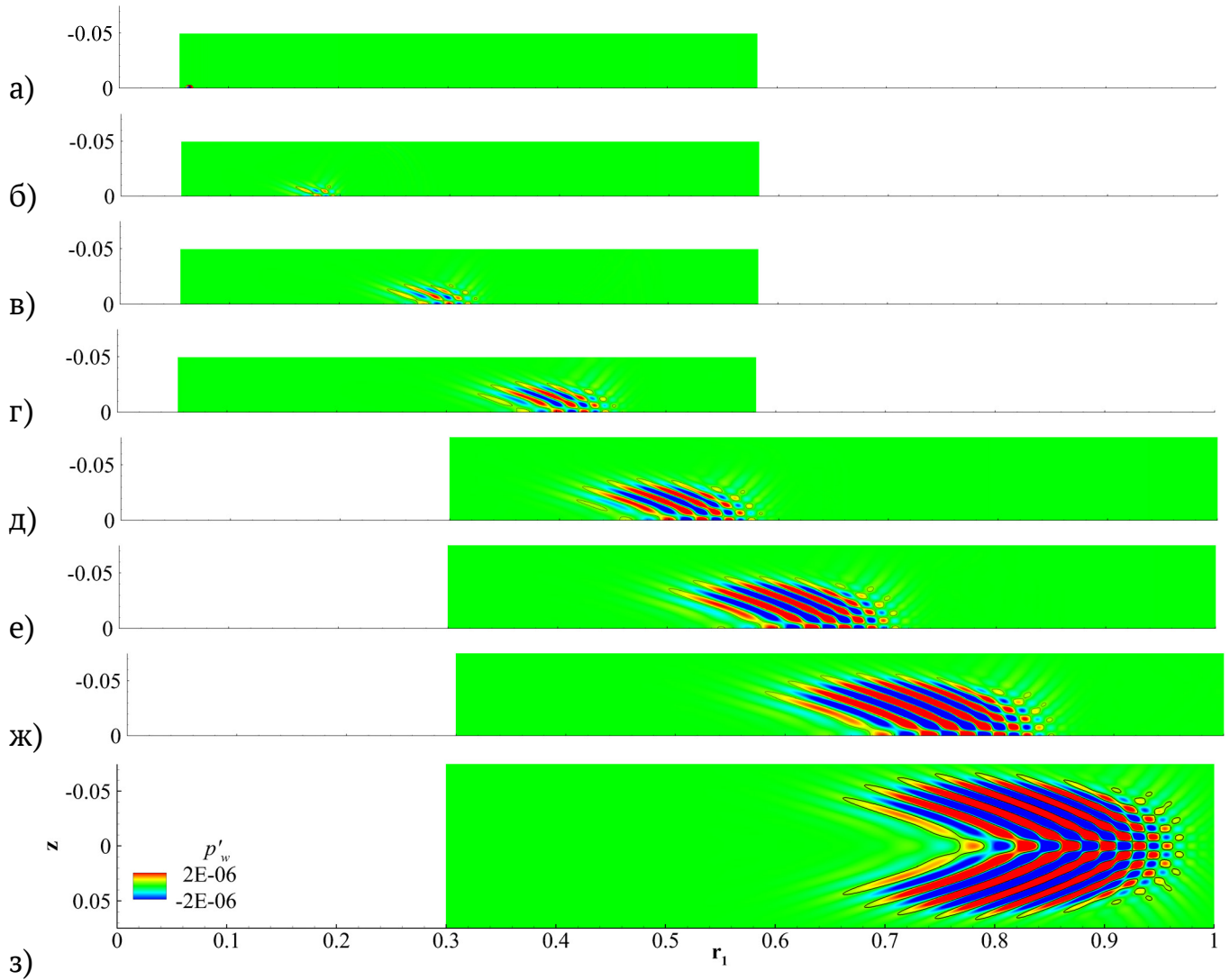


Рисунок 7.7 — Возмущение давления на стенке $p'_w(x, z)$ и изолинии $p'_w = 5 \cdot 10^{-7}$ в случае $\sigma = 5 \cdot 10^{-5}$ в равноотстоящие моменты времени $t = 0.01$ (а), 0.19 (б), 0.37 (в), 0.55 (г), 0.73 (д), 0.91 (е), 1.09 (ж), 1.27 (з). Момент столкновения частицы со стенкой — $t_c \approx 0.009$

возвращается к ней. Такое поведение объясняется наличием нескольких слабо отличающихся локальных максимумов по z , каждый из которых преобладает над остальными в определённом интервале по x . При этом выражение (7.16) отслеживает лишь наибольший из этих максимумов. Асимптотическая форма волнового пакета имеет единственный максимум. Появление нескольких максимумов в ПЧМ, по-видимому, связано со сложностью начального спектра волнового пакета, возбуждённого в пограничном слое (обсуждается далее). По мере продвижения вниз по потоку отклонение численной траектории от асимптотической уменьшается, а участки между «перескоками» с максимума на максимум удлиняются. Это свидетельствует о постепенном приближении численного решения к асимптотическому

виду волнового пакета в дальнем поле. В случае $x_c = 0.134$ (рис. 7.8б) поведение волнового пакета аналогично.

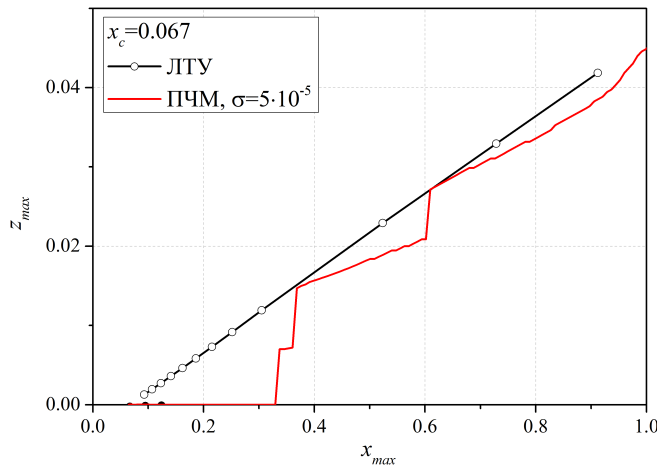
На рис. 7.9 сопоставляются углы наклона волновых фронтов $\psi = \arctg(\beta/\alpha)$ для преобладающей в пакете гармонике в зависимости от x_{max} . Теоретическое распределение соответствует величинам $\beta = \beta_s(x_{max})$ и $\alpha = \alpha_{ТШ,r}(\omega_s, \beta_s, x_{max})$, где $\alpha_{ТШ}$ — собственное значение первой моды. Численная кривая (ПЧМ) строится с помощью двумерного преобразования Фурье для момента времени $t_{max}(x_{max})$. Каждое поле амплитуды Фурье имеет единственный хорошо выраженный максимум в точке $(\alpha_{max}, \beta_{max})$, что позволяет однозначно рассчитать угол ψ .

Размер вертикальных штрихов $\Delta\psi$ на рис. 7.9 определяется с помощью формулы Тейлора для функции $\psi(\alpha, \beta)$ с шагами $\Delta\alpha = 2\pi/(L_x - x_{cL})$ и $\Delta\beta = \pi/L_z$ в частотно-волновом диапазоне дискретного преобразования Фурье для точки $(\alpha, \beta) = (\alpha_{max}, \beta_{max})$:

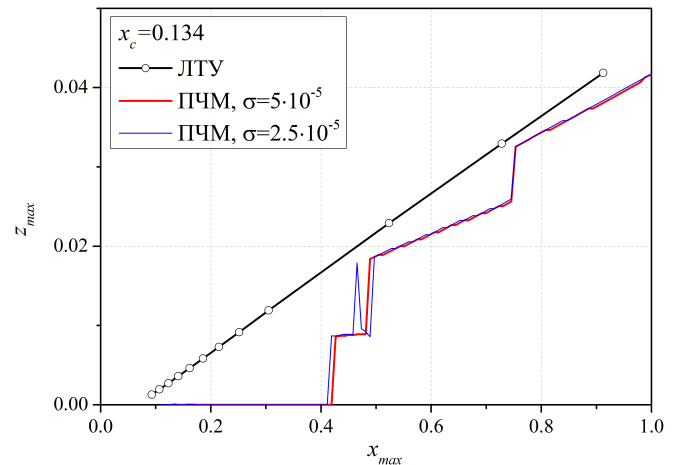
$$\Delta\psi = \pm \frac{\beta/\alpha}{1 + (\beta/\alpha)^2} \left(\frac{|\Delta\alpha|}{\alpha} + \frac{|\Delta\beta|}{\beta} \right).$$

Как видно, теория завышает результаты ПЧМ менее, чем на 5% при $x_{max} \approx 0.5$. Рассогласование уменьшается вниз по потоку до 3% при $x_{max} \approx 0.9$.

На рис. 7.10а сопоставляются амплитуды горба волнового пакета, возбуждённого при $x_c = 0.067$. Теоретическое значение рассчитывается по формуле (7.7) при $x = x_{max}$. По мере удаления точки наблюдения x_{max} от точки столкновения x_c теоретическая и численная кривые медленно расходятся. Однако судя по кривизне кривых, тенденция к расхождению монотонно уменьшается. К концу расчётной области кривые развиваются практически параллельно друг другу, а наибольшее



а) $x_c = 0.067$



б) $x_c = 0.134$

Рисунок 7.8 — Траектория горба волнового пакета

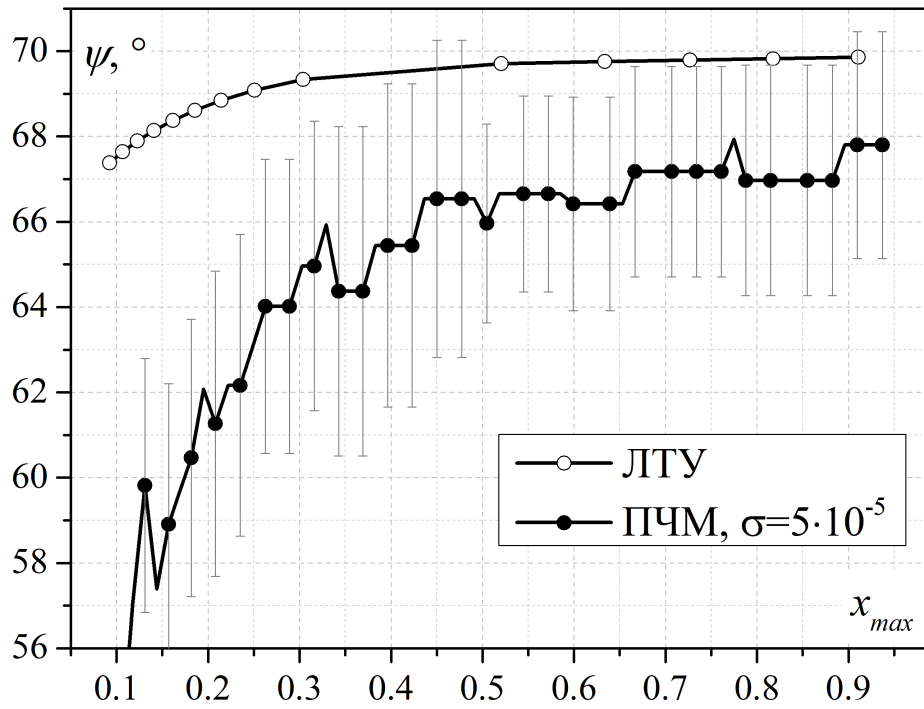
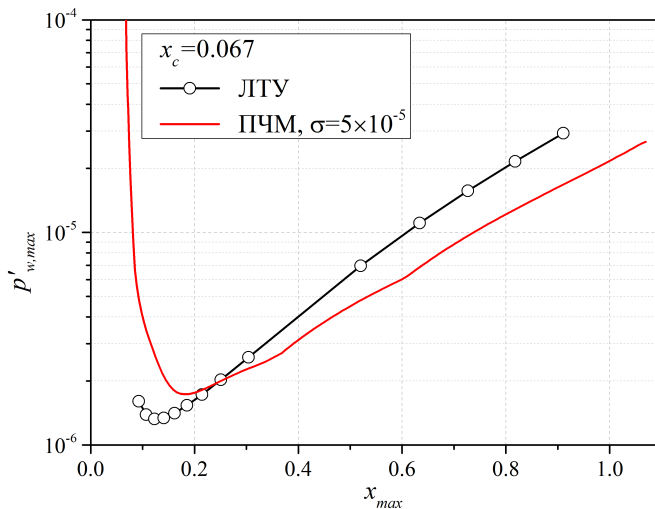


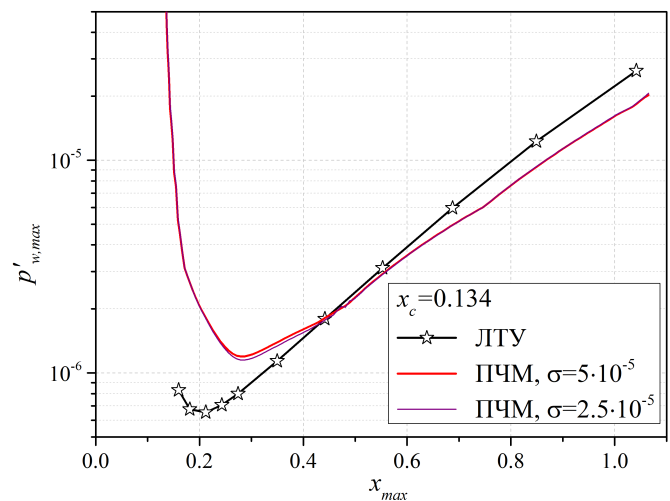
Рисунок 7.9 — Угол наклона волновых фронтов преобладающей гармоники, $x_c = 0.067$

расхождение при $x = 0.9$ составляет около 42% по отношению к теоретическому уровню.

Наблюдаемое расхождение можно отнести к нарушению теоретического ограничения $\lambda_s/x_c \ll 1$, где $\lambda_s = 2\pi/\alpha_{\text{ТШ},r}(\omega_s, \beta_s, x_c)$ — длина волны в точке столкновения x_c для возмущения, которое преобладает в сечении наблюдения x_{max} . В этом случае хвост амплитудной функции первой моды $\hat{q}_m(x_c, y, \omega_s, \beta_s)$ проникает во внешнее невязкое течение на большое расстояние от стенки (экспоненциальное



а) $x_c = 0.067$



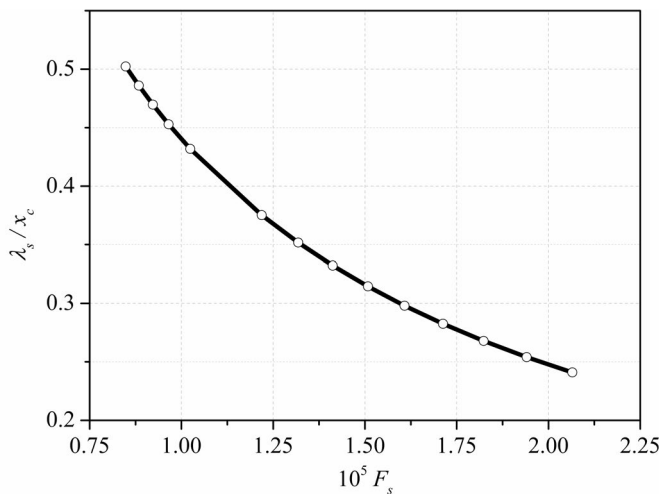
б) $x_c = 0.134$

Рисунок 7.10 — Амплитуда горба волнового пакета

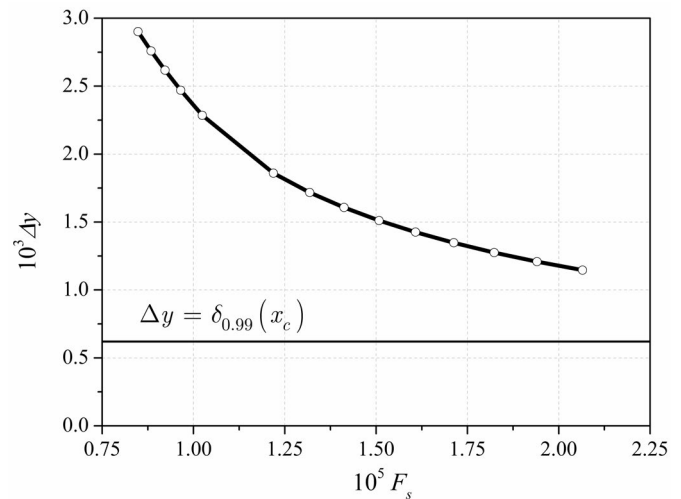
затухание слабое), как показано на рис. 7.11б. Глубину проникновения Δy можно оценить как $\Delta y = \kappa_{r,min}^{-1}$, где $\kappa_{r,min}$ — действительная часть минимального темпа роста в векторе собственных функций, который во внешнем невязком течении пропорционален $e^{-\kappa y}$. На рис. 7.11а показана зависимость отношения λ_s/x_c от частотного параметра $F_s = \omega_s^* \nu_e^* / U_e^{*2}$. В области низких частот, соответствующих дальним сечениям рис. 7.10а, это отношение не является малым: $\lambda_s/x_c \approx 0.5$. Чтобы проверить данное предположение о причине рассогласования по амплитуде горба волнового пакета, дополнительно рассмотрен случай соударения частицы ниже по потоку, при $x_c = 0.134$. Как показано на рис. 7.10б, рассогласование в сечении $x_{max} = 0.9$ уменьшилось практически вдвое, до 24% по отношению к теории. При этом численный размер частицы (величина σ) практически не влияет на амплитуду горба пакета в дальнем поле, что свидетельствует о сошедшемся численном решении по σ .

Другой причиной рассогласования может быть низкая точность асимптотической аппроксимации интеграла (3.4), которая основана на методе наискорейшего спуска и предполагает, что селективное усиление пограничного слоя сильное, а восприимчивость пограничного слоя слабо зависит от ω и β . Соответствующие математические ограничения следующие:

$$N(\omega_s, \beta_s) \gg 1,$$



а) Отношение λ_s/x_c



б) Глубина проникновения

Рисунок 7.11 — Характерные величины из ЛТУ в зависимости от частотного параметра $F_s = \omega Re_{\infty,L}^{-1}$

$$\varepsilon_\beta = \frac{\left| \frac{\partial_\beta f(\omega_s, \beta_s)}{f(\omega_s, \beta_s)} \right|}{\beta_s \left| \partial_{\beta\beta}^2 N(\omega_s, \beta_s) \right|} \ll 1,$$

$$\varepsilon_\omega = \frac{\left| \frac{\partial_\omega f(\omega_s, \beta_s)}{f(\omega_s, \beta_s)} \right|}{\omega_s \left| \partial_{\omega\omega}^2 N(\omega_s, \beta_s) \right|} \ll 1,$$

где $f(\omega, \beta) = D_m(\omega, \beta, x_c) \hat{q}_m(x, y, \beta, \omega)$ в (3.4). Как показано на рис. 7.12, параметры ε_ω и ε_β уменьшаются медленно с ростом x . При $x = 0.9$ имеем параметры $\varepsilon_\omega \sim \varepsilon_\beta \approx 10\%$, которые не являются малыми; фактор $N < 7.5$ также не является большим. Это обстоятельство подтверждается тем, что асимптотическое положение горба волнового пакета в спектральной области (ω_s, β_s) отличается от полученного из расчётов ПЧМ (см. рис. 7.13), а также имеется небольшое систематическое расхождение в наклоне волновых фронтов (рис. 7.9).

7.5.2. Модальный состав возмущения

Спектральный состав возмущения, возбуждённого в пограничном слое микро-частицей, также может стать причиной наблюдаемого рассогласования. В ПЧМ начальное возмущение пограничного слоя состоит из всех мод дискретного и непрерывного спектров, а теоретическое решение (7.7) – (7.10) состоит только

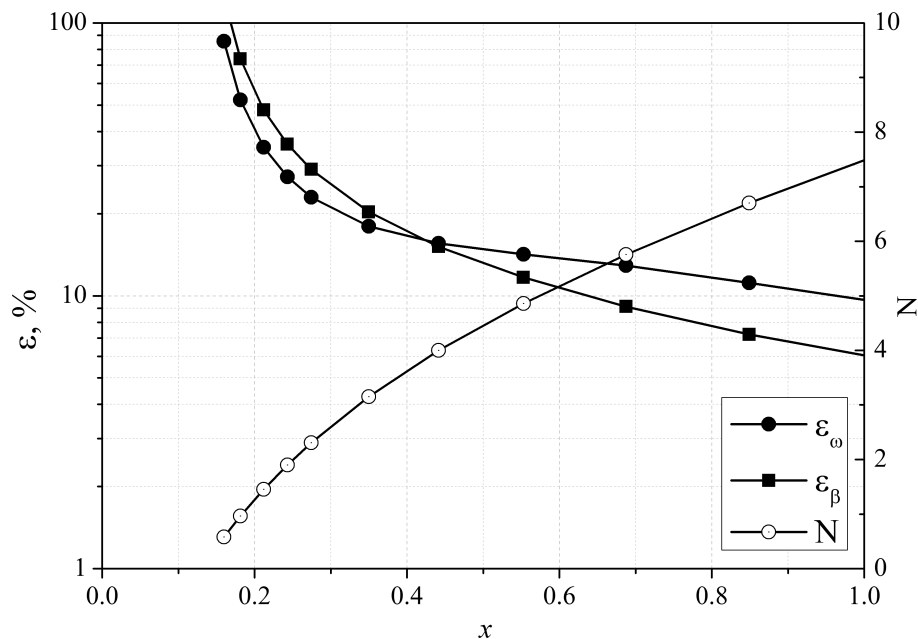


Рисунок 7.12 — Распределение величин ε_ω , ε_β и N -фактора на клине

из первой моды. Рассмотрим спектральный и модальный состав возмущений из ПЧМ в случае $x_c = 0.134$ в двух сечениях: в ближнем поле при $x = 0.2$, которое расположено прямо за точкой столкновения; в дальнем поле $x = 0.6$, где фактор интегрального усиления (7.10) составляет $N(x_c, 0.6) \approx 5$.

Для проведения дискретного преобразования Фурье поле возмущений $p'_w(z, t)$ рассматривается на равномерной сетке. Шаг сетки по времени соответствует временному шагу расчётов $dt = 4 \cdot 10^{-4}$, $t \in [0, 1.754]$. В направлении z проведена интерполяция данных на равномерную сетку с шагом $dz = 2 \cdot 10^{-4}$. На рис. 7.13 показан модуль спектральной амплитуды возмущения давления на стенке.

В ближнем поле (рис. 7.13а) волновой пакет ПЧМ имеет сложный спектральный состав. Селективное усиление возмущений первой моды приводит к тому, что спектральная форма волнового пакета существенно упрощается в дальнем поле, как показано на рис. 7.13б — выделяется единственный максимум, положение которого медленно приближается к предсказанию линейной теории устойчивости при удалении от точки столкновения x_c .

Чтобы подтвердить, что в дальнем поле волновой пакет состоит преимущественно из волн первой моды, на рис. 7.14 представлены результаты выделения первой моды из поля возмущений ПЧМ (см. раздел 7.3). Исходное поле возмущения от частицы быстро переходит в волновой пакет первой моды и уже слабо отличается от него при $x = 0.6$ (рис. 7.14б). Таким образом, рассогласование чис-

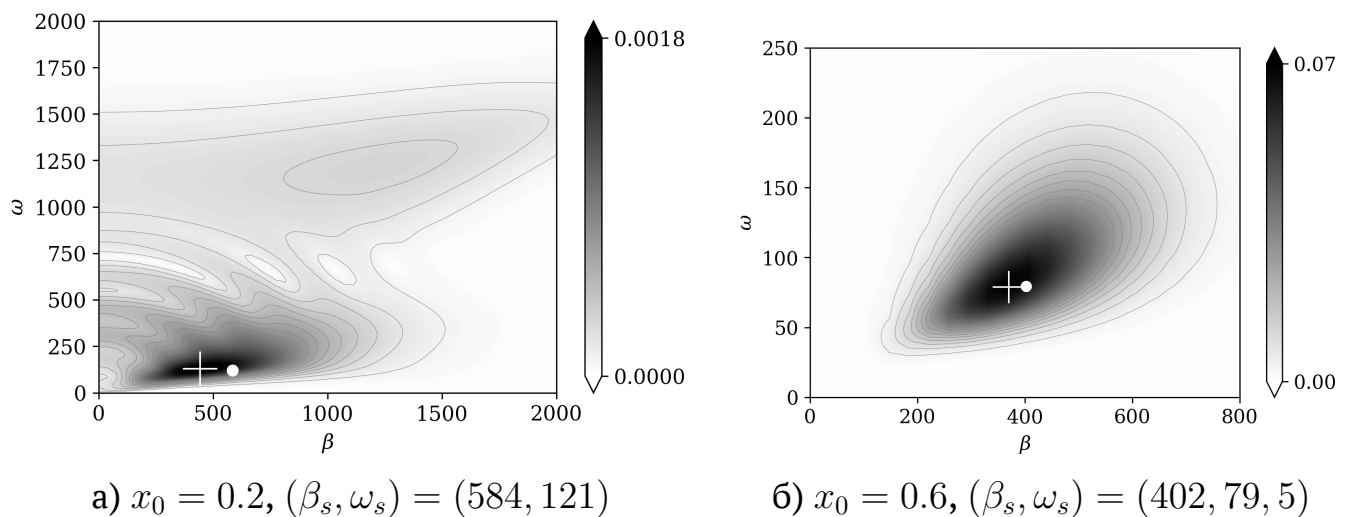


Рисунок 7.13 — Амплитудный спектр волнового пакета от частицы в различных сечениях $x = x_0$. Крестиком показано положение максимума из ПЧМ, а кружком — теоретический максимум (β_s, ω_s) преобладающего возмущения, предсказанный в ЛТУ

ленных и теоретических результатов на рис. 7.10 не связано с присутствием других мод пограничного слоя.

7.5.3. О постановке эксперимента

В главном приближении теоретическое решение не зависит от того, падает ли частица на поверхность или удаляется от неё после абсолютно упругого столкновения. Иными словами, коэффициент восприимчивости (7.8) удовлетворяет условию $|C_{recept}(v_p)| = |C_{recept}(-v_p)|$, где v_p — составляющая вектора скорости частицы по нормали к поверхности (по y). Чтобы проверить этот результат, выполнено численное моделирование запуска частицы с поверхности клина из точки $(x, y, z)_{pw} = (x_c - \Delta x, 0, 0)$, $x_c = 0.067$ с начальной скоростью, которая соответствует скорости упругого отскока падающей частицы от поверхности. Сдвиг точки запуска $\Delta x = \delta_{99}(x_c) / \tan(14^\circ)$ добавлен для того, чтобы частица взаимодействовала с тем же участком пограничного слоя, что и падающая частица в базовом случае. Расчёты показали, что отклонение результатов от базового случая мало, $\Delta p'_{w,max}{}^{sym} \approx -4.3\%$, что согласуется с предсказанием ЛТУ.

Этот результат указывает на возможность постановки контролируемого эксперимента по восприимчивости к микрочастицам. Выстреливая калиброванные микрочастицы с поверхности и синхронизируя измерение возмущений в пограничном слое с моментом выстрела, можно определить коэффициент восприимчивости.

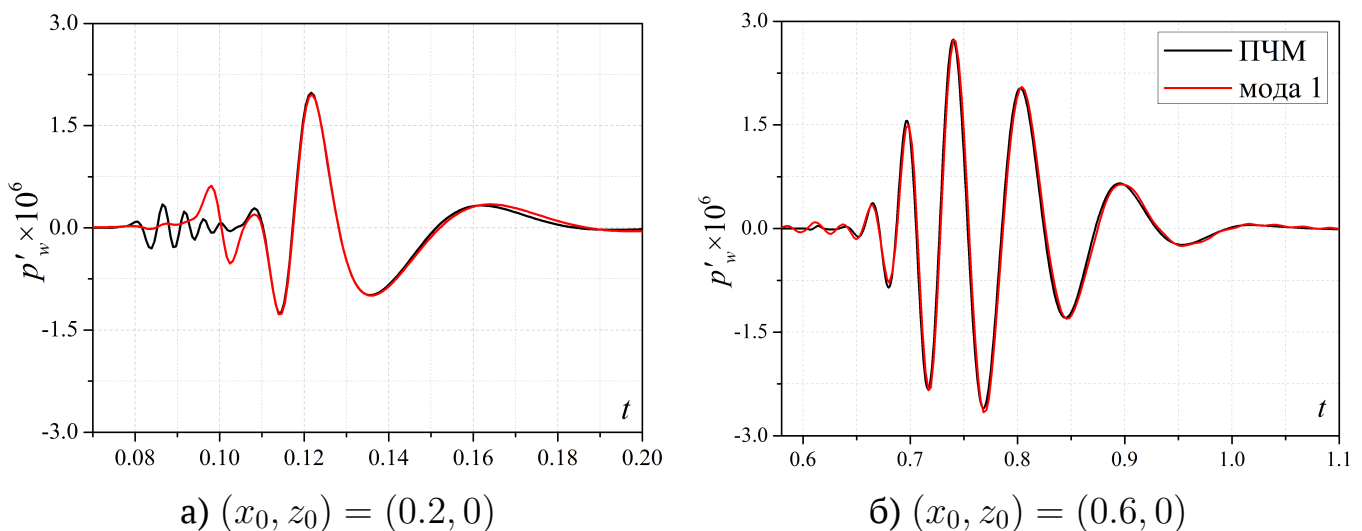


Рисунок 7.14 — Осциллограмма давления в точке (x_0, z_0)

7.6. Статистическая модель ЛТП

Моделируя возбуждение волнового пакета от одной микрочастицы, можно определить начальную амплитуду волнового пакета первой моды, который далее развивается в соответствии с линейной теорией устойчивости. Результаты единичных расчётов можно использовать для построения статистической модели ламинарно-турбулентного перехода, вызванного взвешенными в атмосфере микрочастицами.

Предположим, в неподвижной среде имеются частицы с концентрацией C^* м⁻³, распределённые по объёму случайно с постоянной функцией распределения. Через среду пролетает клин с полууглом раскрытия θ , и частицы сталкиваются с его поверхностью, порождая волновые пакеты. Если рассматривать достаточно тяжёлые частицы, $\rho_p \gg 1$, то их траектория практически прямолинейна. В этом случае средняя удельная частота столкновений частиц с поверхностью — количество столкновений в единицу времени на единицу площади поверхности — постоянна на всей поверхности клина и равна

$$\nu^* = C^* U_\infty^* \cdot \sin \theta.$$

Это среднестатистическая удельная частота рождения волновых пакетов на поверхности клина.

Для построения статистической модели сделаем несколько допущений:

1. Так как столкновение частиц с поверхностью случайно, возбуждаемые волновые пакеты не являются когерентными. Тогда среднеквадратичная амплитуда возмущений в дальнем поле с учётом перекрытия пакетов определяется путём сложения их интенсивностей (квадратов амплитуды).
2. Каждая частица формирует пакет с широким начальным спектром. Восприимчивость слабо зависит от координаты x вдоль поверхности. Поэтому каждая частица генерирует при соударении идентичные начальные пакеты вне зависимости от места столкновения. — Начальная амплитуда волновых пакетов ε постоянна.
3. Собственные функции возмущений не зависят от x .
4. В дальнем поле $x \gg x_0$ каждый волновой пакет имеет гауссову форму. Переход к турбулентности также начинается в дальнем поле.

5. Характерный масштаб, на котором изменяется амплитуда возмущений, значительно больше соответствующего колебательного масштаба (коротковолновое приближение).

Пусть x — точка наблюдения, а x' — точка падения частицы на поверхность. В точке наблюдения преобладает гармоника (ω_s, β_s) , которой соответствует точка потери устойчивости $x_0 = x_0(\omega_s, \beta_s)$. Из анализа линейной устойчивости известна зависимость фактора интегрального усиления $N_s(x) = N(\omega_s, \beta_s, x)$, в том числе в точке $x' \in [0, x]$; $N_s(0) = 0$. Тогда к сечению наблюдения x фактор интегрального усиления преобладающей гармоники составит $N_s(x) - N_s(x')$.

Асимптотическая форма волнового пакета в дальнем поле (3.15) подразумевает, что он возбуждается с некоторой характерной амплитудой ε , которая является постоянной (допущение 2). При расчёте среднеквадратичной амплитуды возмущений $I = \langle \Psi_{\pm}^{3D} \cdot \Psi_{\pm}^{3D} \rangle$ колебательный множитель даёт вклад в интенсивность волнового пакета $1/2$, а амплитудная огибающая пакета получается выделением действительной части подэкспоненциального выражения

$$2 \cdot \frac{1}{2i} \left(\frac{S_{\beta\beta} (t - t_s)^2 + 2S_{\omega\beta} (t - t_s) (z \mp z_s) + S_{\omega\omega} (z \mp z_s)^2}{S_{\omega\omega} S_{\beta\beta} - S_{\omega\beta}^2} \right).$$

Эти части можно выписать в явном виде. При Δt^2 :

$$B_{tt} = - \frac{|S_{\beta\beta}|^2 S_{\omega\omega,i} + S_{\beta\beta,i} (S_{\omega\beta,r}^2 - S_{\omega\beta,i}^2) + S_{\beta\beta,r} \cdot 2S_{\omega\beta,r} S_{\omega\beta,i}}{|S_{\omega\omega} S_{\beta\beta} - S_{\omega\beta}^2|};$$

при Δz^2 :

$$B_{zz} = - \frac{|S_{\omega\omega}|^2 S_{\beta\beta,i} + S_{\omega\omega,i} (S_{\omega\beta,r}^2 - S_{\omega\beta,i}^2) + S_{\omega\omega,r} \cdot 2S_{\omega\beta,r} S_{\omega\beta,i}}{|S_{\omega\omega} S_{\beta\beta} - S_{\omega\beta}^2|};$$

при $\Delta t \Delta z$:

$$B_{tz} = \frac{|S_{\omega\beta}|^2 S_{\omega\beta,i} - S_{\omega\beta,r} (S_{\omega\omega,r} S_{\beta\beta,i} + S_{\omega\omega,i} S_{\beta\beta,r}) + S_{\omega\beta,i} (S_{\omega\omega,r} S_{\beta\beta,r} - S_{\omega\omega,i} S_{\beta\beta,i})}{|S_{\omega\omega} S_{\beta\beta} - S_{\omega\beta}^2|}.$$

В предположении двумерного волнового пакета второй моды, для которой $S_{\omega\beta} \equiv 0$, эти выражения сводятся, соответственно, к $-|S_{\beta\beta}|^2 S_{\omega\omega,i}$, $-|S_{\omega\omega}|^2 S_{\beta\beta,i}$ и 0.

Количество волновых пакетов, рождаемых за время dt на элементе поверхности $dx' dz$, составляет $\nu dx' dz dt$. Таким образом, среднеквадратичная интенсивность

волнового пакета без учёта нормированных волновых функций $\hat{\mathbf{A}}_s$ запишется следующим образом

$$I(x) = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^x \nu dx' d(\Delta t) d(\Delta z) \left[e^{2(N_s(x) - N_s(x'))} \cdot e^{B_{tt}\Delta t^2 + 2B_{tz}\Delta t\Delta z + B_{zz}\Delta z^2} \right]$$

$$= \frac{\nu\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{B_{tt}B_{zz} - B_{tz}^2}} \int_0^x e^{2(N_s(x) - N_s(x'))} dx',$$

где интегралы по Δt и Δz сходятся при условии $B_{tt}B_{zz} > B_{tz}^2$, $B_{tt} < 0$, $B_{zz} < 0$.

Интеграл по x можно оценить, если как-либо аппроксимировать зависимость $N_s(x)$. Наиболее простой способ — кусочно-линейная аппроксимация

$$N_s(x') = N_s(x) \cdot \frac{|x' - x_0|}{x - x_0}.$$

В этом случае

$$\int_0^x e^{2(N_s(x) - N_s(x'))} dx' = \frac{e^{2N_s(x)}}{2N_s(x)} (x - x_0) \cdot \left[2 - e^{-2N_s(x)} - e^{-2N_s(x) \cdot \frac{x_0}{x - x_0}} \right].$$

Таким образом, построена простая статистическая модель развития возмущений от столкновения со случайно взвешенными в атмосфере микрочастицами. Вместе с амплитудным критерием данная модель позволяет оценивать положение ламинарно-турбулентного перехода, вызванного микрочастицами. Эту модель можно обобщить на более реалистичный случай, когда частицы распределены по радиусу с известной функцией распределения.

Выявление амплитудного критерия и анализ применимости предложенной статистической модели перехода выходят за рамки настоящей диссертации и являются предметом будущих исследований автора.

7.7. Выводы по главе

Разработан вычислительный подход для численного моделирования влияния сферических микрочастиц на окружающее течение. Подход пригоден для моделирования возбуждения волновых пакетов сферическими микрочастицами, пересекающими сверхзвуковой пограничный слой. Для этого аналитическое решение

[67] заменено численным интегрированием уравнений Навье — Стокса с дополнительными источниковыми членами, адаптированными из оригинальной работы [67]. Перекрёстная валидация теоретической и численной моделей выполнена на примере безградиентного сверхзвукового пограничного слоя над острым клином. Показано, что процесс восприимчивости к микрочастице моделируется с погрешностью $\Delta p'_{w,max}{}^{sym} < 1\%$, если:

- индуцированный частицей точечный источник моделируется гауссовой формой с шириной σ , для которой характерный диаметр $2\sigma\sqrt{2}$ не превосходит 22% от толщины пограничного слоя δ_{99} в сечении столкновения (*критерий точечного источника*);
- сетка разрешает источник по крайней мере $6 \times 6 \times 6$ точками вдоль траектории полёта частицы, в том числе и в области столкновения, где разрешение в направлении y значительно выше, чем в остальных направлениях; ошибка возрастает до 3% при использовании сеточного разрешения $3 \times 3 \times 3$ (*критерий сеточного разрешения*);
- на пересечение пограничного слоя приходится по крайней мере 25 временных шагов (*критерий временного разрешения*).

Сопоставление численного и теоретического решений показывает, что:

- траектория волнового пакета отклоняется от плоскости симметрии и медленно приближается к асимптотической траектории, предсказанной линейной теорией устойчивости для дальнего поля от места соударения с частицей, где фактор интегрального усиления возмущений $N(x_c, x) \gtrsim 4$;
- в дальнем поле теория переоценивает амплитуду горба волнового пакета, что, по-видимому, связано с нарушением теоретического ограничения $\lambda_s/x_c \ll 1$ и низкой точностью асимптотической аппроксимации (7.7) двойного интеграла (3.4).

Численные эксперименты подтвердили теоретические выводы [67] о том, что восприимчивость к микрочастицам сосредоточена внутри пограничного слоя в малой окрестности точки столкновения и не зависит от того, падает ли частица на поверхность или удаляется от неё. Это открывает возможность постановки контролируемого эксперимента по восприимчивости сверхзвуковых пограничных слоёв к микрочастицам, где измерительное оборудование будет синхронизировано с моментом выстрела микрочастицы с поверхности. Идея такого эксперимента предложена в [67] со ссылкой на методику выстрела микрочастиц, которая успешно применялась ранее в [251].

Разработанная численная модель может применяться для расчёта восприимчивости в сильно непараллельных градиентных течениях, например, в окрестности носка обтекаемого тела, где теоретическая модель восприимчивости не работает. На базе предложенной численной модели и асимптотического анализа в рамках линейной теории устойчивости и амплитудного метода построена статистическая модель для предсказания начала ламинарно-турбулентного перехода, вызванного микрочастицами.

* * *

Теоретические исследования роли микрочастиц в процессе ламинарно-турбулентного перехода были начаты А. В. Фёдоровым летом 2010го года. Тогда же наш Жуковский был окутан смогом от природных пожаров на подмосковных торфяниках, и новая теория рождалась в условиях повышенной задымлённости: концентрация взвешенных в атмосфере твёрдых микрочастиц превышала предельно допустимую норму в шестнадцать раз. Воистину удивительное совпадение! Эти исследования увенчались теоретической моделью восприимчивости [67]. Далее в течение нескольких лет (2015 – 2019) разрабатывалась численная модель частицы, итоговый пространственный вариант которой описан выше и опубликован в 2019 году. В настоящее время разработанный численный подход применяется к существенно непараллельным пограничным слоям (см. перечень публикаций автора на стр. 329). В заключение данной главы следует отметить, что интерес научного сообщества к роли микрочастиц в проблеме ЛТП возрастает в последние годы [261–267].

Заключение

По результатам представленной диссертационной работы можно сделать следующие общие выводы.

1. На ряде модельных задач изучены свойства используемого неявного численного метода сквозного счёта и сформулированы критерии его применимости при расчёте возмущённых сверхзвуковых пограничных слоёв. Обоснована возможность моделирования различных стадий ЛТП (восприимчивость, устойчивость, нелинейное взаимодействие) с помощью данного метода.
 - а) Предложен подход к расчётному исследованию диссипативных свойств численного метода применительно к развитию возмущений в сверхзвуковых течениях. Подход заключается в анализе затухания элементарных монохроматических волн, распространяющихся в однородном потоке. Для этой задачи имеется теоретическое решение, которое следует использовать для валидации численного метода.
 - б) Исследовано появление численных аномалий, связанных с недостаточным разрешением профиля ударной волны на расчётной сетке при моделировании взаимодействия малых возмущений с ударной волной. Получен критерий сеточного разрешения скачка, который гарантирует подавление аномальных нефизичных эффектов; указаны способы его достижения. Показано, что по мере уменьшения интенсивности скачка численные аномалии монотонно ослабевают и исчезают в пределе нулевой интенсивности скачка. Поэтому проверка сеточной сходимости для скачка при исследовании нестационарных течений около тонких тел под нулевым углом атаки, таких как пластина и конус, не требуется.
2. Предложен вычислительный подход, который позволяет исключить протяжённую линейную стадию развития возмущений в пограничном слое из численного моделирования и за счёт этого сократить суммарное время расчёта до четырёх раз. Для этого исследовано асимптотическое поведение волнового пакета в дальнем поле от места его возбуждения. Асимптотика опирается на расширенную информацию из линейной теории устойчивости и сводится к нестационарному граничному условию на входной границе расчётной области. Применимость данного подхода подтверждена в случае преобладания первой и второй неустойчивой моды.

3. Расчётным путём продемонстрировано, что вторая мода сверхзвукового пограничного слоя над достаточно сильно охлаждённой поверхностью может излучать акустические волны во внешнее невязкое течение. Этот эффект, известный как спонтанное излучение звука, вызван синхронизацией второй моды с непрерывным спектром медленных акустических волн. Уносимая акустическая мощность незначительна, и существенное влияние спонтанного излучения на процесс перехода к турбулентности маловероятно.
4. С помощью линейной теории устойчивости и прямого численного моделирования исследован механизм стабилизации сверхзвукового пограничного слоя из-за резкого расширения потока над углом разрежения. Полученные результаты качественно совпадают в случае первой и второй неустойчивой моды. Показано следующее.
 - а) Резкое утолщение сверхзвукового пограничного слоя над углом приводит к пропорциональной перестройке неустойчивости в область низких частот. Поэтому высокочастотные волновые пакеты (линейный режим), нараставшие перед углом, экспоненциально затухают за ним.
 - б) Турбулентные пятна (существенно нелинейный режим) не подавляются за углом, а лишь испытывают небольшую задержку в развитии на масштабе порядка 20-50 толщин местного пограничного слоя. Это отражается на вкладе турбулентного пятна в сопротивление трения. Поэтому экспериментальные картины пониженного теплового потока за углами разрежения не обязательно указывают на реламинаризацию сверхзвукового турбулентного пограничного слоя и могут свидетельствовать лишь о временном ослаблении влияния турбулентности на теплообмен к поверхности.
5. В рамках метода e^N линейной теории устойчивости исследовано обтекание аэродинамически гладкого прямого крыла с тонким параболическим профилем, типичным для сверхзвукового пассажирского самолёта. Обнаружено, что, начиная с некоторой пороговой толщины профиля, на профиле появляется точка максимума интегрального усиления возмущений, за которой возмущения из всего спектрального диапазона *не могут* достичь более высокой амплитуды, чем та, что уже была достигнута в этой точке. Данное наблюдение подтверждено в рамках прямого численного моделирования и ведёт к двум практически важным выводам:

- а) существует пороговый уровень начальных амплитуд волн неустойчивости, ниже которого точка начала перехода должна резко сдвигаться вниз по потоку, и вся поверхность профиля должна обтекаться в ламинарном режиме (такой скачок к ламинарному обтеканию можно наблюдать в трубном эксперименте и относительно легко реализовать в натуральных условиях);
 - б) ламинаризация рассматриваемого типа крыльев может проводиться не для всего крыла, а лишь до точки максимума, положение которой надёжно предсказывает линейная теория устойчивости.
6. Наиболее вероятным источником перехода в сверхзвуковом пограничном слое на аэродинамически гладком прямом крыле с тонким параболическим профилем является акустический шум, излучаемый турбулентным пограничным слоем на передней части фюзеляжа. Микрочастицы и атмосферная турбулентность (даже в штормовых погодных условиях) являются маловероятным источником перехода. Эти выводы подтверждены в рамках прямого численного моделирования эволюции естественных возмущений вплоть до формирования турбулентных пятен. Предложены возможные подходы к ламинаризации прямых крыльев сверхзвуковых пассажирских самолётов, основанные на уменьшении интенсивности акустического шума:
- а) подбор формы фюзеляжа;
 - б) полировка поверхности фюзеляжа;
 - в) отсос пограничного слоя над фюзеляжем;
 - г) применение устройств, разрушающих когерентные турбулентные структуры над фюзеляжем.
7. Разработан подход для численного моделирования влияния сферических микрочастиц на окружающее течение. На базе предложенного подхода и асимптотического анализа построена статистическая модель ламинарно-турбулентного перехода, обусловленного хаотично распределёнными в атмосфере микрочастицами. В частности, показано следующее.
- а) Подход пригоден для моделирования возбуждения волновых пакетов микрочастицами, проникающими в сверхзвуковой пограничный слой. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с результатами теоретической модели восприимчивости при выполнении сделанных в ней предположений.

- б) Численные эксперименты подтвердили теоретические выводы о том, что восприимчивость к микрочастицам сосредоточена внутри пограничного слоя в малой окрестности точки столкновения и не зависит от того, падает ли частица на поверхность или удаляется от неё. Это открывает возможность постановки контролируемого физического эксперимента по восприимчивости сверхзвуковых пограничных слоёв к микрочастицам, где измерительное оборудование будет синхронизировано с моментом выстрела микрочастицы с поверхности.
- в) Разработанный подход пригоден для расчёта восприимчивости к микрочастицам в сильно непараллельных градиентных течениях, таких как ударный слой на носовой части обтекаемого тела, где теоретическая модель оказывается неприменима.

Представленная диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук соответствует требованиям Высшей аттестационной комиссии (ВАК), предъявляемым к докторской диссертации: она является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение; результаты диссертационной работы опубликованы в рецензируемых научных изданиях из списка ВАК в достаточном количестве.

Список сокращений и условных обозначений

- L^* характерная длина при обезразмеривании
- M число Маха
- N некоторое целое число (напр., размерность расчётной сетки в одном из направлений); фактор интегрального усиления возмущений, $-S_i$
- Pr число Прандтля
- Q второй скалярный инвариант градиента скорости, характеризующий границу вихря (Q -критерий)
- Re число Рейнольдса
- S эйконал возмущения, $S(x, \omega, \beta) = \int_{x_0}^x \alpha(\tilde{x}, \omega, \beta) d\tilde{x}$
- T статическая температура
- T_0 температура торможения
- $T_{aw} \equiv T_r$ температура теплоизолированной (адиабатически прогретой) стенки, или температура восстановления потока
- $\mathbf{U} \equiv \mathbf{V}$ вектор скорости
- c фазовая скорость
- c_p местный коэффициент давления; удельная теплоёмкость при постоянном давлении
- c_f местный коэффициент трения
- d_w расстояние до стенки
- f частота
- h пространственный шаг расчётной сетки (h_x — в направлении x)
- i мнимая единица, $\sqrt{-1}$
- k модуль волнового вектора, $|\mathbf{k}|$
- \mathbf{k} волновой вектор
- l расстояние вдоль поверхности
- n некоторое постоянное число
- \mathbf{n} вектор нормали к поверхности
- p давление
- psd спектральная плотность мощности
- q некоторая газодинамическая величина (u, v, w, p, T)
- t время
- u, v, w декартовы компоненты вектора скорости

x, y, z декартовы координаты

$\mathbf{x} \equiv \mathbf{r}$ радиус-вектор в декартовых координатах, (x, y, z)

α собственное значение пространственной задачи устойчивости, $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$

α, β волновые числа в продольном (x) и боковом (z) направлениях

$\beta_{1/2}$ полуугол, в котором возмущения развиваются над поверхностью

γ показатель адиабаты (отношение удельных теплоёмкостей c_p^*/c_V^*)

$\delta, \delta_1, \delta_{99}$ толщина пограничного слоя, посчитана по критерию $u(\delta) = 0.99U_e$

δ_2, δ_1 толщина вытеснения пограничного слоя

δ амплитуды элементарных возмущений ($\delta u, \delta T, \dots$)

Δ приращение величины относительно некоторого уровня (напр., $\Delta t = t - t_0$)

Δt временной шаг численного интегрирования

∂ частная производная по направлению, $\partial_x \equiv \partial/\partial x$

ε величина угла разрежения; мощность диссипации кинетической энергии турбулентности

ε, ϵ задаваемая амплитуда возмущений (генератора, элементарной волны, ...)

η автомодельная переменная, выражающая расстояние до стенки,
 $y^*/\sqrt{\mu_\infty^* x^*/\rho_\infty^* U_\infty^*} \equiv y\sqrt{Re_{\infty,L}/x}$

η_k масштаб Колмогорова

θ угол атаки волнового вектора элементарного возмущения

λ длина волны; коэффициент теплопроводности

μ динамическая вязкость

ν кинематическая вязкость

ρ плотность

σ инкремент нарастания возмущения, $-\alpha_i$; ширина численной аппроксимации точечного источника-частицы

τ безразмерная толщина параболического профиля

$\boldsymbol{\tau}$ тензор вязких напряжений, τ_{ij}

ϕ угол, характерный для рассматриваемой конфигурации

φ сдвиг фазы в элементарной волне

ψ угол скольжения волнового вектора элементарного возмущения

ω круговая частота, $2\pi f$

$\Re[\cdot], \Im[\cdot]$ действительная и мнимая части комплексной величины

Верхние индексы

\cdot^* размерная величина

- ' возмущение величины (разница между текущим значением и невозмущённым значением в момент времени $t = 0$)
- ^ Фурье-образ; амплитудная функция собственного возмущения пограничного слоя

Нижние индексы

- _{пу} в точке потери устойчивости
- _S в точке ветвления медленных акустических волн, $c_S = 1 - 1/M_\infty$
- _c в декартовых координатах; основная (центральная) характеристика генератора возмущений; в точке соударения микрочастицы с поверхностью; в точке излома поверхности; в центре приложения избыточной силы вязкого трения в турбулентном пятне
- _{cr} критическое значение
- _e на границе пограничного слоя
- _i мнимая часть комплексной величины
- _k в точке излома траектории фазовой скорости
- _p величина, присущая микрочастице
- _r действительная часть комплексной величины
- _s на теоретическом горбе волнового пакета, предсказанном методом перевала
- _w на твёрдой обтекаемой поверхности
- _∞ значение в невозмущённом набегающем потоке

Аббревиатуры

- 2D** двумерный
- 3D** трёхмерный, пространственный
- ВЧ** высокочастотный
- ЛТП** ламинарно-турбулентный переход
- ЛТУ** линейная теория устойчивости
- ЛТУ+Н** линейная теория устойчивости с поправкой на слабую нелинейность течения
- НЧ** низкочастотный
- ПЧМ** прямое численное моделирование
- ПС** пограничный слой
- ЕС** Expansion Corner, угол разрежения
- ЕС10** угол разрежения величиной $\varepsilon = 10^\circ$
- FP** flat plate, плоская пластина

TS turbulent spot, турбулентное пятно

WENO Weighted Essentially Non-Oscillatory, в основном не осциллирующая численная схема с весами

WP wave packet, волновой пакет

Список литературы

1. *Chernyshev S., Lyapunov S., Wolkov A.* Modern problems of aircraft aerodynamics // *Advances in Aerodynamics*. — 2019. — Dec. — Vol. 1, no. 7. — P. 1–15.
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — Наука, 1974.
3. Report of the Defense Science Board Task Force on the National Aerospace Plane (NASP) : tech. rep. / Defense Science Board. — Washington, D.C., 09/1988. — 48 p.
4. *Reynolds O.* XXIX. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels // *Philosophical transactions of the Royal Society of London A*. — 1883. — Vol. 174. — P. 935–982.
5. *Жигулёв В. Н., Тумин А. М.* Возникновение турбулентности. — Новосибирск : Наука, 1987.
6. *Reshotko E.* Boundary layer instability, transition and control // 32nd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (Reno, NV, USA, Jan. 10–13, 1994). — 1994. — AIAA paper: 1994-1.
7. *Федорченко А. М., Коцаренко Н. Я.* Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. — М. : Наука, 1981.
8. *Гущин В. Р., Федоров А. В.* Возбуждение и развитие неустойчивых возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // *Изв. АН СССР. МЖГ*. — 1990. — № 3. — С. 21–29.
9. *Bushnell D.* Notes on Initial Disturbance Fields for the Transition Problem // *Advances in Soil Science. Instability and Transition. ICASE/NASA LaRC Series.* / под ред. М. У. Hussaini, R. G. Voigt. — Springer New York, 1990. — С. 217–232.
10. *Кудеярова Е. Д., Скуратов А. С., Федоров А. В., Шогин Ю. Н.* Анализ летных и трубных данных по ламинарно-турбулентному переходу пограничного слоя на острых гладких и затупленных конусах : тех. отч. / Центральный аэрогидродинамический институт им. профессора Н.Е. Жуковского. — 1991. — Отчёт НПО-8 ЦАГИ №9002.

11. *Fedorov A., Tumin A.* Receptivity of High-Speed Boundary Layers to Kinetic Fluctuations // *AIAA Journal*. — 2017. — July. — Vol. 55, no. 7. — P. 2335–2348.
12. *Morkovin M. V., Reshotko E., Herbert T.* Transition in Open Flow Systems – A Reassessment // *Bulletin of the American Physical Society*. Vol. 39 (47th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics : Session CI: Boundary-Layer Instabilities I, Atlanta, Georgia, USA, Nov. 20–22, 1994). — 1994. — P. 1–31.
13. *Argrow B., Lawrence D., Barjatya A., Fritts D., Candler G.* Multidisciplinary University Research Initiatives (MURI) program: Atmospheric disturbances at high altitudes : tech. rep. / NASA Langley, AFOSR High Speed Aerodynamics Portfolio Overview. — 2017. — 88ABW-2017-3487.
14. *Pate S. R.* Effects of Wind Tunnel Disturbances on Boundary-Layer Transition with Emphasis on Radiated Noise: A Review // 11th Aerodynamic Testing Conference (Colorado Spring, Colorado, USA, Mar. 18–20, 1980). — 03/1980. — AIAA paper: 80-0431.
15. *Jewell J. S., Parziale N. J., Leyva I. A., Shepherd J. E.* Effects of Shock-Tube Cleanliness on Hypersonic Boundary Layer Transition at High Enthalpy // *AIAA Journal*. — 2017. — Jan. — Vol. 55, no. 1. — P. 332–338.
16. *Stetson K., Kimmel R.* On hypersonic boundary-layer stability // 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (Reno, Nevada, USA, Jan. 6–9, 1992). — 01/1992. — AIAA paper: 92-0737.
17. *Shubauer G. B., Skramstad H. K.* Laminar boundary-layer oscillations and transition on a flat plate : tech. rep. / National Advisory Committee for Aeronautics. — 1943. — 36 p. — NACA-TR-909. — NASA TRS: 19930092343.
18. *University T. A.* Klebanoff-Saric Wind Tunnel [Электронный ресурс]. — URL: <https://kswt.tamu.edu/> (дата обр. 03.08.2022).
19. *Gang D., Yi S., Lu X.* Design and performance of a hypersonic quiet wind tunnel at NUDT // 21st AIAA International Space Planes and Hypersonics Technologies Conference (Xiamen, China, Mar. 6–9, 2017). — 2017. — AIAA paper: 2017-2305.
20. *Borg M., Schneider S., Juliano T.* Inlet Measurements and Quiet Flow Improvements in the Boeing/AFOSR Mach-6 Quiet Tunnel // 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (Reno, Nevada, USA, Jan. 9–12, 2006). — 01/2006. — AIAA paper: 2006-1317.

21. *Huchel B., Mayer T., Chiang M., Meyer S.* New Purdue research building will offer a world's first in hypersonic testing, materials development [Электронный ресурс]. — 27.07.2021. — URL: <https://www.purdue.edu/newsroom/releases/2021/Q3/new-purdue-research-building-will-offer-a-worlds-first,-and-hypersonic-testing,-materials-development.html> (дата обр. 26.07.2022).
22. *Malik M., Zang T., Bushnell D.* Boundary layer transition in hypersonic flows // 2nd International Aerospace Planes Conference (Orlando, Florida, USA, Oct. 29–31, 1990). — 1990. — AIAA paper: 1990-5232.
23. *Arnal D.* Transition Prediction in Industrial Applications // Transition, Turbulence and Combustion Modelling: Lecture Notes from the 2nd ERCOFTAC Summerschool held in Stockholm, 10–16 June, 1998 / под ред. А. Ханифи, Р. Н. Альфредссон, А. В. Йоханссон, Д. С. Хеннингсон. — Dordrecht : Springer Netherlands, 1999. — С. 105–157.
24. *Mack L. M.* Transition and Laminar Instability : tech. rep. / Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology. — Pasadena, CA, USA, 1977. — 87 p. — NASA-CR-153203. — NASA TRS: 19770017114.
25. *Fedorov A.* Applications of the Mack amplitude method to transition predictions in high-speed flows : tech. rep. / AFOSR/NASA National Science Center for Research in Hypersonic LaminarTurbulent Transition. — 02/04/2012. — P. 6-1–6-30. 30 p. — NATO RTO-MP-AVT-200.
26. *Fedorov A., Tumin A.* The Mack's amplitude method revisited // AIAA Scitech 2021 Forum (VIRTUAL EVENT, Jan. 11–21, 2021). — 2021. — AIAA paper: 2021-0851.
27. *Rashad R., Zingg D. W.* Toward High-Fidelity Aerodynamic Shape Optimization for Natural Laminar Flow // 21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference (San Diego, CA, USA, June 24–27, 2013). — 2013. — AIAA paper: 2013-2583.
28. *Crouch J.* Modeling Transition Physics for Laminar Flow Control // 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit (Seattle, Washington, USA, June 23–26, 2008). — 2008. — AIAA paper: 2008-3832.

29. *Kachanov Y. S.* Physical Mechanisms of Laminar-Boundary-Layer Transition // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1994. — Jan. — Vol. 26, no. 1. — P. 411–482.
30. *Goldstein M. E., Hultgren L. S.* Boundary-Layer Receptivity to Long-Wave Free-Stream Disturbances // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1989. — Jan. — Vol. 21, no. 1. — P. 137–166.
31. *Maslov A. A., Shiplyuk A. N., Sidorenko A. A., Arnal D.* Leading-edge receptivity of a hypersonic boundary layer on a flat plate // Journal of Fluid Mechanics. — 2001. — Jan. — Vol. 426. — P. 73–94.
32. *Saric W. S., Reed H. L., Kerschen E. J.* Boundary-layer Receptivity to Freestream Disturbances // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2002. — Jan. — Vol. 34, no. 1. — P. 291–319.
33. *Fedorov A., Tumin A.* Initial-Value Problem for Hypersonic Boundary-Layer Flows // AIAA Journal. — 2003. — Mar. — Vol. 41, no. 3. — P. 379–389.
34. *Fedorov A., Tumin A.* High-Speed Boundary-Layer Instability: Old Terminology and a New Framework // AIAA Journal. — 2011. — Aug. — Vol. 49, no. 8. — P. 1647–1657.
35. *Reshotko E.* Transition Issues for Atmospheric Entry // Journal of Spacecraft and Rockets. — 2008. — Mar. — Vol. 45, no. 2. — P. 161–164.
36. *Fedorov A.* Transition and Stability of High-Speed Boundary Layers // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2011. — Jan. — Vol. 43, no. 1. — P. 79–95.
37. *Новиков А. В.* Численное моделирование устойчивости и ламинарно-турбулентного перехода в гиперзвуковом пограничном слое : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.02.05 / Новиков Андрей Валерьевич. — Жуковский : Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, 2017.
38. *Orr W. M.* The stability or instability of steady motions of a perfect liquid and a viscous liquid // Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences. — 1907. — No. 27. — P. 9–138.
39. *Sommerfeld A.* Ein Beitrag zur hydrodynamische Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen // Proceedings of the 4th International Congress of Mathematicians. Bd. 3 (Rome). — 1908. — S. 116–124.

40. *Heisenberg W.* Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen // *Annalen der Physik.* — 1924. — Jg. 379, Nr. 15. — S. 577–627.
41. *Линь Ц. Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. — М. : Ин. Лит., 1958.
42. *Гапонов С. А., Маслов А. А.* Развитие возмущений в сжимаемых потоках. — Новосибирск : Наука, 1980.
43. *Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я.* Возникновение турбулентности в пограничном слое. — Новосибирск : Наука, 1982.
44. *Lees L., Lin C. C.* Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid : tech. rep. / California Institute of Technology. — 09/1946. — 87 p. — NACA-TN-1115.
45. *Mack L. M.* Boundary layer stability theory. — (Doc. / JPL; 900-277, Rev. A). — Pasadena, 1969.
46. *Mack L. M.* Linear Stability Theory and the Problem of Supersonic Boundary-Layer Transition // *AIAA Journal.* — 1975. — Mar. — Vol. 13, no. 3. — P. 278–289.
47. *Demetriades A.* Hypersonic Viscous Flow over a Slender Cone, Part III: Laminar Instability and Transition // 7th Fluid and Plasma Dynamics Conference (Palo Alto, CA, USA, June 17–19, 1974). — 1974. — AIAA paper: 1974-535.
48. *Kendall J. M.* Wind Tunnel Experiments Relating to Supersonic and Hypersonic Boundary-Layer Transition // *AIAA Journal.* — 1975. — Mar. — Vol. 13, no. 3. — P. 290–299.
49. *Stetson K., Thompson E., Donaldson J., Siler L.* Laminar boundary layer stability experiments on a cone at Mach 8. Part I: Sharp cone // 16th Fluid and Plasmadynamics Conference (Danvers, MA, USA, July 12–14, 1983). — 1983. — AIAA paper: 1983-1761.
50. *Chokani N.* Nonlinear spectral dynamics of hypersonic laminar boundary layer flow // *Physics of Fluids.* — 1999. — Dec. — Vol. 11, no. 12. — P. 3846–3851.
51. *Шиплюк А. Н., Бунтин Д. А., Маслов А. А., Чокани Н.* Нелинейные механизмы начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода при гиперзвуковых скоростях // *Прикладная механика и техническая физика.* — 2003. — № 5. — С. 64–71.

52. *Kimmel R., Demetriades A., Donaldson J.* Space-time correlation measurements in a hypersonic transitional boundary layer // Fluid Dynamics Conference (San Diego, CA, USA, June 19–22, 1995). — 1995. — AIAA paper: 1995-2292.
53. *Lysenko V. I., Maslov A. A.* The effect of cooling on supersonic boundary-layer stability // Journal of Fluid Mechanics. — 1984. — Oct. — Vol. 147. — P. 39–52.
54. *Saric W. S., Nayfeh A. H.* Nonparallel stability of boundary-layer flows // Physics of Fluids. — 1975. — Vol. 18, no. 8. — P. 945–950.
55. *Гапонов С. А.* Влияние непараллельности течения на развитие возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1980. — № 2. — С. 26–31.
56. *Тумин А. М., Фёдоров А. В.* Об учёте влияния слабой неоднородности течения на характеристики его устойчивости // Учён. зап. ЦАГИ. — 1982. — Т. 13, № 6. — С. 91–96.
57. *Fedorov A. V., Khokhlov A. P.* Prehistory of Instability in a Hypersonic Boundary Layer // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. — 2001. — July. — Vol. 14, no. 6. — P. 359–375.
58. *Saric W., Reed H.* Crossflow Instabilities - Theory & Technology // 41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (Reno, Nevada, USA, Jan. 6–9, 2003). — 2003. — AIAA paper: 2003-771.
59. *Kocian T. S., Moyes A., Reed H. L., Craig S. A., Saric W. S., Schneider S. P., Edelman J.* Hypersonic Crossflow Instability // 2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting (Kissimmee, Florida, USA, Jan. 8–12, 2018). — 2018. — AIAA paper: 2018-0061.
60. *Borodulin V. I., Ivanov A. V., Kachanov Y. S., Mischenko D. A., Örlü R., Hanifi A., Hein S.* Experimental and theoretical study of swept-wing boundary-layer instabilities. Unsteady crossflow instability // Physics of Fluids. — 2019. — June. — Vol. 31, no. 6. — Paper number: 064101.
61. *Saric W. S.* Görtler Vortices // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1994. — Vol. 26, no. 1. — P. 379–409.
62. *Saric W. S., Reshotko E., Arnal D.* On some properties of reattaching laminar and transitional high speed flows. Тех. отч. / Von Karman Institute for Fluid Dynamics ; Brussels University. — Rhode–Saint–Genese, Belgium, 01.09.1969. — 72 с. — Technical note 53.

63. *Ginoux J. J.* Streamwise vortices in reattaching high-speed flows - A suggested approach // *AIAA Journal*. — 1971. — Apr. — Vol. 9, no. 4. — P. 759–760.
64. *Бражко В. Н.* Периодическая структура течения и теплопередачи в области присоединения сверхзвуковых потоков // *Ученые записки ЦАГИ*. — 1979. — Т. 10, № 2. — С. 113–118.
65. *Chuvakhov P. V., Radchenko V. N.* Effect of Görtler-like vortices of various intensity on heat transfer in supersonic compression corner flows // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. — 2020. — Apr. — Vol. 150. — Paper number: 119310.
66. *Пугач М. А., Рыжов А. А., Федоров А. В.* Оценка влияния турбулентных пульсаций и твердых частиц в атмосфере на ламинарно-турбулентный переход при гиперзвуковых скоростях полета // *Учёные записки ЦАГИ*. — 2016. — Т. 47, № 1. — С. 13–22.
67. *Fedorov A. V.* Receptivity of a supersonic boundary layer to solid particulates // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2013. — Nov. — Vol. 737. — P. 105–131.
68. *Poggie J., Kimmel R.* Disturbance evolution and breakdown to turbulence in a hypersonic boundary layer - Instantaneous structure // 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (Reno, NV, USA, Jan. 6–9, 1997). — 1997. — AIAA paper: 1997-556.
69. *Schneider S. P.* Effects of High-Speed Tunnel Noise on Laminar-Turbulent Transition // *Journal of Spacecraft and Rockets*. — 2001. — May. — Vol. 38, no. 3. — P. 323–333.
70. *Laufer J., Vrebalovich T.* Stability and transition of a Laminar boundary layer on a insulated flat plate // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1960. — Oct. — Vol. 9, no. 02. — P. 257–299.
71. *Косинов А. Д., Маслов А. А., Семёнов Н. В.* Метод введения искусственных возмущений в сверхзвуковой поток // *Препринт ИТПМ СО АН СССР*. — 1983. — № 34–83.
72. *Косинов А. Д., Маслов А. А., Шевельков С. Г.* Развитие пространственных волновых пакетов в сверхзвуковом пограничном слое // *ИТПМ СО АН СССР*. — 1985. — № 17–85.

73. Маслов А. А., Семёнов Н. В. Возбуждение собственных пульсаций пограничного слоя внешним акустическим полем // Изв. РАН. МЖГ. — 1986. — № 3. — С. 74–78.
74. Kosinov A. D., Semionov N. V., Shevel'kov S. G., Zinin O. I. Experiments on the Nonlinear Instability of Supersonic Boundary Layers // Nonlinear Instability of Nonparallel Flows (IUTAM Symposium, Potsdam, NY, USA, July 26–31, 1993). — 1994. — P. 196–205.
75. Kosinov A. D., Tumin A. Resonance Interaction of Wave Trains in Supersonic Boundary Layer // Nonlinear Instability and Transition in Three-Dimensional Boundary Layers (IUTAM Symposium, Manchester, U.K. July 17–20, 1995). — 1996. — P. 379–388.
76. Bountin D., Shiplyuk A., Maslov A. Evolution of nonlinear processes in a hypersonic boundary layer on a sharp cone // Journal of Fluid Mechanics. — 2008. — Aug. — Vol. 611. — P. 427–442.
77. Ladoon D., Schneider S. Measurements of controlled wave packets at Mach 4 on a cone at angle of attack // 36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (Reno, Nevada, USA, Jan. 12–15, 1998). — 1998. — AIAA paper: 1998-436.
78. Casper K., Beresh S., Schneider S. Pressure Fluctuations Beneath Turbulent Spots and Instability Wave Packets in a Hypersonic Boundary Layer // 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition (Orlando, Florida, USA, Jan. 4–7, 2011). — 01/2011. — AIAA paper: 2011-372.
79. Casper K., Beresh S., Schneider S. Characterization of Controlled Perturbations in a Hypersonic Boundary Layer // 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition (Nashville, Tennessee, USA, Jan. 9–12, 2012). — 2012. — AIAA paper: 2012-281.
80. Casper K. M., Beresh S. J., Schneider S. P. Pressure fluctuations beneath instability wavepackets and turbulent spots in a hypersonic boundary layer // Journal of Fluid Mechanics. — 2014. — Sept. — Vol. 756. — P. 1058–1091.
81. Chou A., Schneider S. P. Time-Frequency Analysis of Boundary Layer Instabilities Generated by Freestream Laser Perturbations // 45th AIAA Fluid Dynamics Conference (Dallas, Texas, USA, June 22–26, 2015). — 2015. — AIAA paper: 2015-3076.

82. *Jewell J., Parziale N., Leyva I., Shepherd J.* Turbulent Spot Observations within a Hypervelocity Boundary Layer on a 5-degree Half-Angle Cone // 42nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit (New Orleans, Louisiana, USA, June 25–28, 2012). — 2012. — AIAA paper: 2012-3062.
83. *Jewell J. S., Leyva I. A., Shepherd J. E.* Turbulent spots in hypervelocity flow // *Experiments in Fluids*. — 2017. — Mar. — Vol. 58, no. 4.
84. *Fiala A., Hillier R., Mallinson S. G., Wijesinghe H. S.* Heat transfer measurement of turbulent spots in a hypersonic blunt-body boundary layer // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2006. — May. — Vol. 555. — P. 81.
85. *Fiala A., Hillier R., Estruch-Samper D.* Roughness-induced turbulent wedges in a hypersonic blunt-body boundary layer // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2014. — July. — Vol. 754. — P. 208–231.
86. *Судаков В. Г.* Численное моделирование восприимчивости гиперзвукового пограничного слоя к энтропийным и вихревым волнам // *Учёные записки ЦАГИ*. — 2013. — Т. 44, № 2. — С. 25–32.
87. *Balakumar P.* Receptivity of Hypersonic Boundary Layers to Acoustic and Vortical Disturbances (Invited) // 49th AIAA Fluid Dynamics Conference (Dallas, Texas, USA, June 22–26, 2015). — 2015. — AIAA paper: 2015-2473.
88. *Fedorov A. V., Ryzhov A. A., Soudakov V. G., Utyuzhnikov S. V.* Receptivity of a high-speed boundary layer to temperature spottiness // *J. Fluid Mech.* — 2013. — Mar. — Vol. 722. — P. 533–553.
89. *Balakumar P., Chou A.* Transition Prediction in Hypersonic Boundary Layers Using Receptivity and Freestream Spectra // *AIAA Journal*. — 2018. — Jan. — Vol. 56, no. 1. — P. 193–208.
90. *Судаков В. Г.* Численное моделирование влияния угла наклона акустических волн на восприимчивость гиперзвукового пограничного слоя // *Ученые записки ЦАГИ*. — 2010. — Т. 41, № 3. — С. 31–41.
91. *Sivasubramanian J., Fasel H. F.* Direct numerical simulation of transition in a sharp cone boundary layer at Mach 6: fundamental breakdown // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2015. — Mar. — Vol. 768. — P. 175–218.
92. *Hader C., Fasel H. F.* Fundamental Resonance Breakdown for a Flared Cone at Mach 6 // 55th AIAA Aerospace Sciences Meeting (Grapevine, Texas, USA, Jan. 9–13, 2017). — 2017. — AIAA paper: 2017-0765.

93. *Mayer C. S. J., von Terzi D. A., Fasel H. F.* Direct numerical simulation of complete transition to turbulence via oblique breakdown at Mach 3 // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2011. — Jan. — Vol. 674. — P. 5–42.
94. *Fasel H., Thumm A., Bestek H.* Direct numerical simulation of transition in supersonic boundary layers: oblique breakdown // *Fluids Engineering Conference*. Vol. 151 (Washington, DC, USA, June 20–24, 1993). — 1993. — P. 77–92.
95. *Guo Y., Adams N. A., Sandham N. D., Kleiser L.* Numerical Simulation of Supersonic Boundary Layer Transition // *Application of Direct and Large Eddy Simulation to Transition to Turbulence*. Vol. 551 (74th Fluid Dynamics Symposium, Chania, Greece, Apr. 18–21, 1994). — 1994. — (AGARD Conference Proceedings). — NASA TRS: 19950014657.
96. *Jocksch A., Kleiser L.* Growth of turbulent spots in high-speed boundary layers on a flat plate // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. — 2008. — Dec. — Vol. 29, no. 6. — P. 1543–1557.
97. *Redford J., Sandham N., Roberts G.* Numerical simulations of turbulent spots in supersonic boundary layers: Effects of Mach number and wall temperature // *Progress in Aerospace Sciences*. — 2012. — July. — Vol. 52. — P. 67–79.
98. *Groskopf G., Kloker M. J.* Instability and transition mechanisms induced by skewed roughness elements in a high-speed laminar boundary layer // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2016. — Sept. — Vol. 805. — P. 262–302.
99. *Хотяновский Д. В., Кудрявцев А. Н.* Численное моделирование развития неустойчивых возмущений различных мод и начальных стадий ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое при числе Маха потока $M = 6$ // *Теплофизика и аэромеханика*. — 2016. — № 6. — С. 843–852.
100. *Егоров И. В.* Разработка квазиньютоновской технологии численного анализа уравнений Навье-Стокса и Рейнольдса для исследования сверхзвуковых отрывных течений : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.02.05 / Егоров Иван Владимирович. — Жуковский : Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, 2002.
101. *Hader C., Fasel H. F.* Towards simulating natural transition in hypersonic boundary layers via random inflow disturbances // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2018. — May. — Vol. 847.

102. *Moyes A., Kocian T. S., Mullen D., Reed H. L.* Effects of Initial Disturbance Amplitude on Hypersonic Crossflow Instability // 2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting (Kissimmee, Florida, USA, Jan. 8–12, 2018). — 2018. — AIAA paper: 2018-1820.
103. *Henderson R., Chynoweth B. C., Abney A. D., Ward C., Schneider S. P., Greenwood R., Moraru C. G.* Transition and Instability Measurements in a Mach 6 Quiet Wind Tunnel // 52nd Aerospace Sciences Meeting (National Harbor, Maryland, USA, Jan. 13–17, 2014). — 2014. — AIAA paper: 2014-0074.
104. *Fasel H. F.* Numerical Simulation of Transition in Hypersonic Boundary Layers : tech. rep. / University of Arizona, Department of Aerospace and Mechanical Engineering. — 02/2011. — 281 p. — AFRL-OSR-VA-TR-2012-0255. — DTIC: ADA563832.
105. *Zhong X., Wang X.* Direct Numerical Simulation on the Receptivity, Instability, and Transition of Hypersonic Boundary Layers // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2012. — Jan. — Vol. 44, no. 1. — P. 527–561.
106. *Joslin R. D.* Aircraft laminar flow control // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1998. — Jan. — Vol. 30, no. 1. — P. 1–29.
107. *Устинов М. В.* Ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое (обзор). Часть 2. Расчет положения перехода и методы ламинаризации обтекания крыла // Учёные записки ЦАГИ. — 2013. — Т. 45, № 6. — С. 3–27.
108. *Malmuth N., Fedorov A., Shalaev V., Cole J., Hites M., Williams D., Khokhlov A.* Problems in High Speed Flow Prediction Relevant to Control // 2nd AIAA Theoretical Fluid Mechanics Meeting (Albuquerque, NM, USA, June 15–18, 1998). — 1998. — AIAA paper: 1998-2695.
109. *Fedorov A. V., Malmuth N. D., Rasheed A., Hornung H. G.* Stabilization of Hypersonic Boundary Layers by Porous Coatings // AIAA Journal. — 2001. — Apr. — Vol. 39, no. 4. — P. 605–610.
110. *Rasheed A., Hornung H. G., Fedorov A. V., Malmuth N. D.* Experiments on Passive Hypervelocity Boundary-Layer Control Using an Ultrasonically Absorptive Surface // AIAA Journal. — 2002. — Mar. — Vol. 40, no. 3. — P. 481–489.

111. *Fedorov A., Shipliyuk A., Maslov A., Kozlov V., Sidorenko A., Burov E., Malmuth N.* Stability of Hypersonic Boundary Layer on Porous Wall with Regular Microstructure // 33rd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit (Orlando, Florida, USA, June 23–26, 2003). — 2003. — AIAA paper: 2003-4147.
112. *Фомин В. М., Фёдоров А. В., Шиплюк А. Н., Маслов А. А., Буров Е. В., Малмун Н. Д.* Стабилизация гиперзвукового пограничного слоя покрытиями, поглощающими ультразвук // Докл. АН. — 2002. — Т. 384, № 2. — С. 1–5.
113. *Fedorov A., Shipliyuk A., Maslov A., Burov E., Malmuth N.* Stabilization of a hypersonic boundary layer using an ultrasonically absorptive coating // Journal of Fluid Mechanics. — 2003. — Mar. — Vol. 479. — P. 99–124.
114. *Chokani N., Bountin D. A., Shipliyuk A. N., Maslov A. A.* Nonlinear Aspects of Hypersonic Boundary-Layer Stability on a Porous Surface // AIAA Journal. — 2005. — Jan. — Vol. 43, no. 1. — P. 149–155.
115. *Novikov A., Egorov I., Fedorov A.* Direct Numerical Simulation of supersonic Boundary Layer Stabilization Using Grooved Wavy Surface // 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition (Orlando, Florida, USA, Jan. 4–17, 2010). — 2010. — AIAA paper: 2010-1245.
116. *Bountin D., Chimitov T., Maslov A., Novikov A., Egorov I., Fedorov A., Utyuzhnikov S.* Stabilization of a Hypersonic Boundary Layer Using a Wavy Surface // AIAA Journal. — 2013. — May. — Vol. 51, no. 5. — P. 1203–1210.
117. *Fong K. D., Zhong X.* DNS and PSE study on the stabilization effect of hypersonic boundary layer waves using 2-D surface roughness // 46th AIAA Fluid Dynamics Conference (Washington, D.C., USA, June 13–17, 2016). — 2016. — AIAA paper: 2016-3347.
118. *Masad J. A., Nayfeh A. H., Al-Maaitah A. A.* Effect of Suction on the Stability of Supersonic Boundary Layers. Part II—First-Mode Waves // Journal of Fluids Engineering. — 1991. — Dec. — Vol. 113, no. 4. — P. 598–601.
119. *Al-Maaitah A. A., Nayfeh A. H., Masad J. A.* Effect of Suction on the Stability of Supersonic Boundary Layers. Part I—Second-Mode Waves // Journal of Fluids Engineering. — 1991. — Dec. — Vol. 113, no. 4. — P. 591–597.

120. *Balakumar P.* Control of Supersonic Boundary Layers Using Steady Suction // 36th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit (San Francisco, California, USA, June 5–8, 2006). — 2006. — AIAA paper: 2006-3058.
121. *Новиков А. В., Образ А. О., Тимохин Д. А.* Влияние выдува и отсоса газа на неустойчивость сверхзвукового пограничного слоя. — 2022 ; — Статья направляется в журнал Известия РАН. МЖГ на рецензию.
122. *Marshall L. A.* Boundary-Layer Transition Results from the F-16XL-2 Supersonic Laminar Flow Control Experiment : tech. rep. / NASA Dryden Flight Research Center. — Edwards, California, USA, 12/1999. — 55 p. — NASA/TM-1999-209013. — NASA TRS: 20000004345.
123. CFD General Notation System [Электронный ресурс]. — 2017. — URL: <http://cgns.org/> (дата обр. 25.01.2017).
124. *Звегинцев В. И.* Газодинамические установки кратковременного действия : в 2 т. — Новосибирск : Параллель, 2014.
125. *Чурихин А. В.* Течение конденсирующихся и запыленных сред в соплах аэродинамических труб. — М. : Физматлит, 2011. — 280 с.
126. *Лунёв В. В.* Течение реальных газов с большими скоростями. — М. : Физматлит, 2007. — 760 с.
127. *Дьяков С. П.* Взаимодействие ударных волн с малыми возмущениями. I // ЖЭТФ. — 1957. — Окт. — Т. 33, № 4. — С. 948–961.
128. *Дьяков С. П.* Взаимодействие ударных волн с малыми возмущениями. II // ЖЭТФ. — 1957. — Окт. — Т. 33, № 4. — С. 962–974.
129. *McKenzie J. F., Westphal K. O.* Interaction of Linear Waves with Oblique Shock Waves // Physics of Fluids. — 1968. — Jan. — Vol. 11, no. 11. — P. 2350–2362.
130. *Судаков В. Г.* Численное моделирование физических процессов восприимчивости, устойчивости и управления течением в высокоскоростном пограничном слое : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.02.05 / Судаков Виталий Георгиевич. — Жуковский : Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, 2017.
131. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М. : Наука, 1976.

132. *Roe P. L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // *Journal of Computational Physics*. — 1981. — Oct. — Vol. 43, no. 2. — P. 357–372.
133. *Jiang G.-S., Shu C.-W.* Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes // *Journal of Computational Physics*. — 1996. — June. — Vol. 126, no. 1. — P. 202–228.
134. *Soudakov V. G., Egorov I. V.* Numerical Study of Instability of High-Speed Boundary Layers Using WENO and TVD Schemes // 1st International Conference on Computational Methods for Thermal Problems (ThermaComp2009) (Napoli, Italy, Sept. 8–10, 2009). — 2009. — P. 187–190.
135. *Каримов Т. Х.* О некоторых итерационных методах решения нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве // Доклады АН СССР. — 1983. — Т. 269, № 5. — С. 1038–1042.
136. *Saad Y., Schultz M. H.* GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems // *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. — 1986. — July. — Vol. 7, no. 3. — P. 856–869.
137. *Wakam D. N., Pacull F.* Memory efficient hybrid algebraic solvers for linear systems arising from compressible flows // *Computers & Fluids*. — 2013. — July. — Vol. 80. — P. 158–167.
138. Discrete Fourier Transform (numpy.fft) [Электронный ресурс]. — 2022. — URL: <https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.fft.html> (дата обр. 12.04.2022).
139. *Hunt J. C. R., Wray A. A., Moin P.* Eddies, Stream, and Convergence Zones in Turbulent Flows // *Proceedings of the 1988 Summer Program (Center for Turbulence Research, Stanford University, CA, USA)*. — 1988. — P. 193–208. — NASA TRS: 19890015184.
140. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Гидродинамика. Т. 6. — 3-е изд. — М. : Наука, 1986.
141. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.-Л. : Гостехиздат, 1950. — С. 510–515.
142. *Zaide D. W.-M.* Numerical Shockwave Anomalies : PhD thesis Aerospace Engineering and Scientific Computing / Zaide Daniel Wei-Ming. — The University of Michigan, 2012. — 121 p.

143. *Barth T. J.* Some notes on shock resolving flux functions. Part I: Stationary characteristics : tech. rep. / NASA Ames Research Center Moffett Field, CA, United States. — 05/1989. — 21 p. — NASA TM 101087. — NASA TRS: 19890015500.
144. *Kitamura K., Roe P., Ismail F.* Evaluation of Euler Fluxes for Hypersonic Flow Computations // AIAA Journal. — 2009. — Jan. — Vol. 47, no. 1. — P. 44–53.
145. *Xie W., Li W., Li H., Tian Z., Pan S.* On numerical instabilities of Godunov-type schemes for strong shocks // Journal of Computational Physics. — 2017. — Dec. — Vol. 350. — P. 607–637.
146. *Roberts T. W.* The behavior of flux difference splitting schemes near slowly moving shock waves // Journal of Computational Physics. — 1990. — Dec. — Vol. 90, no. 1. — P. 141–160.
147. *Meadows K. R., Caughey D. A., Casper J.* Computing Unsteady Shock Waves for Aeroacoustic Applications // AIAA Journal. — 1994. — July. — Vol. 32, no. 7. — P. 1360–1366.
148. *Shu C.-W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II // Journal of Computational Physics. — 1989. — Vol. 83, no. 1. — P. 32–78.
149. *Lee S., Lele S. K., Moin P.* Interaction of isotropic turbulence with shock waves: effect of shock strength // Journal of Fluid Mechanics. — 1997. — T. 340. — C. 225–247.
150. *Lee S., Moin P., Lele S. K.* Interaction of Isotropic Turbulence with a Shock Wave / Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University. — Stanford, CA, USA, 03/1992. — TF-52.
151. *Lee S., Lele S. K., Moin P.* Direct numerical simulation of isotropic turbulence interacting with a weak shock wave // Journal of Fluid Mechanics. — 1993. — Vol. 251. — P. 533–562.
152. *Lele S. K., Larsson J.* Shock-turbulence interaction: What we know and what we can learn from peta-scale simulations // Journal of Physics: Conference Series. — 2009. — July. — Vol. 180. — Paper number: 012032.

153. *Jamme S., Cazalbou J.-B., Torres F., Chassaing P.* Direct Numerical Simulation of the Interaction Between a Shock Wave and Various Types of Isotropic Turbulence // *Flow, Turbulence and Combustion*. — 2002. — May. — Vol. 68. — P. 227–268.
154. *Mahesh K., Lele S. K.* The influence of entropy fluctuations on the interaction of turbulence with a shock wave // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2014. — Sept. — Vol. 334. — P. 353–379.
155. *Tian Y., Jaber F. A., Li Z., Livescu D.* Numerical study of variable density turbulence interaction with a normal shock wave // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2017. — Vol. 829. — P. 551–588.
156. *Ryu J., Livescu D.* Turbulence structure behind the shock in canonical shock-vortical turbulence interaction // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2014. — Oct. — Vol. 756. — Paper number: R1.
157. *Kara K., Balakumar P., Kandil O.* Receptivity of Hypersonic Boundary Layers Due to Acoustic Disturbances Over Blunt Cone // 28th AIAA Fluid Dynamics Conference (Reno, Nevada, USA, Jan. 8, 2007–Jan. 11, 2015). — 2007. — AIAA paper: 2007-945.
158. *Balakumar P., Kegerise M.* Receptivity of Hypersonic Boundary Layers to Acoustic and Vortical Disturbances // 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition (Orlando, Florida, USA, Jan. 4, 2007–Jan. 7, 2015). — 2011. — AIAA paper: 2011-371.
159. *Wan B., Luo J., Su C.* Response of a hypersonic blunt cone boundary layer to slow acoustic waves with assessment of various routes of receptivity // *Applied Mathematics and Mechanics - Engl. Ed.* — 2018. — Sept. — Vol. 39. — P. 1643–1660.
160. *Егоров И. В., Судаков В. Г., Фёдоров А. В.* Численное моделирование восприимчивости сверхзвукового пограничного слоя к акустическим возмущениям // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. — 2006. — № 1. — С. 42–53.
161. *Soudakov V., Fedorov A., Ryzhov A.* DNS and the theory of receptivity of a supersonic boundary layer to free-stream disturbances // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2011. — Dec. — Vol. 318. — Paper number: 032020.

162. *Egorov I. V., Fedorov A. V., Soudakov V. G.* Receptivity of a hypersonic boundary layer over a flat plate with a porous coating // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2008. — Vol. 601. — P. 165–187.
163. *Cerminara A.* Boundary-Layer Receptivity and Breakdown Mechanisms for Hypersonic Flow over Blunt Leading-Edge Configurations : PhD thesis Aerodynamics and Flight Mechanics / Cerminara Adriano. — Southampton, UK : University of Southampton, 06/2017. — 215 p.
164. *Кудрявцев А. Н., Овсянников А. Ю.* Численное исследование взаимодействия акустических волн со скачком уплотнения // *Учёные записки ЦАГИ*. — 2010. — Т. 41, № 1. — С. 37–43.
165. *Lee T. K., Zhong X.* Spurious Numerical Oscillations in Simulation of Supersonic Flows Using Shock-Capturing Schemes // *AIAA Journal*. — 1999. — Mar. — Vol. 37, no. 3. — P. 313–319.
166. *Khotyanovsky D. V., Kudryavtsev A. N., Ovsyannikov A. Y.* A Comparative Study of Accuracy of Shock Capturing Schemes for Simulation of Shock/Acoustic Wave Interactions // *International Journal of Aeroacoustics*. — 2014. — Июнь. — Т. 13, № 3/4. — С. 261–273.
167. *Ma Y., Zhong X.* Receptivity of a supersonic boundary layer over a flat plate. Part 3. Effects of different types of free-stream disturbances // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2005. — Vol. 532. — P. 63–109.
168. *Головизнин В. М., Карабасов С. А., Козубская Т. К., Максимов Н. В.* Схема "Кабаре" для численного решения задач аэроакустики: обобщение на линеаризованные уравнения Эйлера в одномерном случае // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2009. — Т. 49, № 12. — С. 2265–2280.
169. *Mayer C., Terzi D. von, Fasel H.* DNS of Complete Transition to Turbulence via Oblique Breakdown at Mach 3 // 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit (Seattle, Washington, USA, June 23–26, 2008). — 2008. — AIAA paper: 2008-4398.
170. *Mayer C., Terzi D. von, Fasel H.* DNS of Complete Transition to Turbulence via Oblique Breakdown at Mach 3: Part II // 39th AIAA Fluid Dynamics Conference (San Antonio, Texas, USA, June 22–25, 2009). — 2009. — AIAA paper: 2009-3558.

171. *Егоров И. В., Федоров А. В., Динь К. Х.* Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода при сверхзвуковом обтекании острой пластины // Учёные записки ЦАГИ. — 2010. — Т. 49, № 5. — С. 17–25.
172. *Егоров И. В., Нгуен Н. К., Нгуен Т. Ш., Чувахов П. В.* Моделирование ламинарно-турбулентного перехода с применением диссипативных численных схем // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2021. — Т. 61, № 2. — С. 268–280.
173. *Бородулин В. И.* Нелинейные механизмы порождения турбулентности в пограничных слоях : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.02.05 / Бородулин Владимир Иванович. — Новосибирск : Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, 2009.
174. *Косинов А. Д.* Экспериментальное исследование волновых явлений при ламинарно-турбулентном переходе сверхзвукового пограничного слоя : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.02.05 / Косинов Александр Дмитриевич. — Жуковский : Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича, 1998.
175. *White F. M.* Viscous Fluid Flow. — М. : McGraw-Hill, 1991. — 614 p. — (McGraw-Hill series in mechanical engineering).
176. *Forgoston E., Tumin A.* Initial-value problem for three-dimensional disturbances in a compressible boundary layer // Physics of Fluids. — 2005. — Aug. — Vol. 17, no. 8. — Paper number: 084106.
177. *Tumin A.* Multimode decomposition of spatially growing perturbations in a two-dimensional boundary layer // Physics of Fluids. — 2003. — July. — Vol. 15, no. 9. — P. 2525–2540.
178. *Tumin A.* Three-dimensional spatial normal modes in compressible boundary layers // Journal of Fluid Mechanics. — 2007. — Aug. — Vol. 586. — P. 295–322.
179. *Nayfeh A. H.* Stability of Three-Dimensional Boundary Layers // AIAA Journal. — 1980. — Apr. — Vol. 18, no. 4. — P. 406–416.
180. *Mack L. M.* Review of Linear Compressible Stability Theory // Stability of Time Dependent and Spatially Varying Flows. — Springer New York, 1987. — P. 164–187.

181. Тумин А. М., Федоров А. В. Пространственное развитие возмущения в пограничном слое сжимаемого газа // Прикладная механика и техническая физика. — 1983. — № 4. — С. 110–118.
182. Balakumar P., Malik M. R. Discrete modes and continuous spectra in supersonic boundary layers // Journal of Fluid Mechanics. — 1992. — June. — Vol. 239. — P. 631–656.
183. Chuvakhov P. V., Fedorov A. V., Obraz A. O. Numerical simulation of turbulent spots generated by unstable wave packets in a hypersonic boundary layer // Computers & Fluids. — 2018. — Jan. — Vol. 162. — P. 26–38.
184. Федорюк М. В. Метод перевала. — М. : Наука, 1977.
185. Bailey M., Tumin A. Asymptotic analysis of wave packets in high-speed boundary layers // AIAA Scitech 2022 Forum (San Diego, CA, USA Virtual, Jan. 3–7, 2022). — 2022. — AIAA paper: 2022-1707.
186. Bleistein N., Handelsman R. A. Asymptotic expansions of integrals. — New York : Dover, 1986.
187. Wong R. Asymptotic approximations of integrals. — Philadelphia : SIAM, 2001.
188. Федорюк М. В. Асимптотика, Интегралы и ряды. — М. : Наука, 1987.
189. Fedorov A., Malmuth N. Parametric Studies of Hypersonic Laminar Flow Control Using a Porous Coating of Regular Microstructure // 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit (Reno, Nevada, USA, Jan. 7–10, 2008). — 2008. — AIAA paper: 2008-588.
190. Salemi L., Fasel H. F. Numerical Investigation of Nonlinear Wave-packets in a Hypersonic High-Enthalpy Boundary-Layer on a 5 deg Sharp Cone // 45th AIAA Thermophysics Conference (Dallas, Texas, USA, June 22–26, 2015). — 06/2015. — AIAA paper: 2015-2318.
191. Fezer A., Kloker M. J. Direct Numerical Simulation of Transition Mechanisms at Mach 6.8 on the flat plate and the cone // Aerodynamics and Thermochemistry of High Speed Flows : EuroMech Colloquium 440 (EMC-440) (West East High Speed Flow Fields conference, Marseille, France, Sept. 16–19, 2002). — 2002.

192. *Sivasubramanian J., Fasel H.* Growth and Breakdown of a Wave Packet into a Turbulent Spot in a Cone Boundary Layer at Mach 6 // 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition (Nashville, Tennessee, USA, Jan. 9–12, 2012). — 01/2012. — AIAA paper: 2012-85.
193. *Bitter N. P., Shepherd J. E.* Stability of highly cooled hypervelocity boundary layers // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2015. — Aug. — Vol. 778. — P. 586–620.
194. *Sherman M. M., Nakamura T.* Flight test measurements of boundary-layer transition on a nonablating 22° cone // *Journal of Spacecraft and Rockets*. — 1970. — Feb. — Vol. 7, no. 2. — P. 137–142.
195. *Wright R., Zoby E.* Flight boundary layer transition measurements on a slender cone at Mach 20 // 10th Fluid and Plasmadynamics Conference (Albuquerque, New Mexico, USA, June 27–29, 1977). — 06/1977. — AIAA paper: 1977-719.
196. *Chang C.-L., Malik M., Hussaini M.* Effects of shock on the stability of hypersonic boundary layers // 21st Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference (Seattle, Washington, USA, June 18–20, 1990). — 1990. — AIAA paper: 1990-1448.
197. *Chang C.-L., Vinh H., Malik M.* Hypersonic boundary-layer stability with chemical reactions using PSE // 28th Fluid Dynamics Conference (Snowmass Village, CO, USA, June 29–July 2, 1990). — 1997. — AIAA paper: 1997-2012.
198. *Fedorov A. V., Soudakov V., Leyva I. A.* Stability analysis of high-speed boundary-layer flow with gas injection // 7th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference (Atlanta, Georgia, USA, June 16–20, 2014). — 2014. — AIAA paper: 2014-2498.
199. *Fedorov A., Brès G., Inkman M., Colonius T.* Instability of Hypersonic Boundary Layer on a Wall with Resonating Micro-Cavities // 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition (Orlando, Florida, USA, Jan. 4–7, 2011). — 2011. — AIAA paper: 2011-373.
200. *Brès G. A., Inkman M., Colonius T., Fedorov A. V.* Second-mode attenuation and cancellation by porous coatings in a high-speed boundary layer // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2013. — May. — Vol. 726. — P. 312–337.

201. *Unnikrishnan S., Gaitonde D. V.* Instabilities and transition in cooled wall hypersonic boundary layers // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2021. — Mar. — Vol. 915.
202. *Tumin A.* Wave Packets and Supersonic Second Modes in a High-Speed Boundary Layer // *AIAA Scitech 2020 Forum* (Orlando, Florida, USA, Jan. 6–10, 2020). — 2020. — AIAA paper: 2020-0106.
203. *Sun M.-B., Wang Z.-G., Liang J.-H., Geng H.* Flame Characteristics in Supersonic Combustor with Hydrogen Injection Upstream of Cavity Flameholder // *Journal of Propulsion and Power*. — 2008. — July. — Vol. 24, no. 4. — P. 688–696.
204. *Sun M. B., Gong C., Zhang S. P., Liang J. H., Liu W. D., Wang Z. G.* Spark ignition process in a scramjet combustor fueled by hydrogen and equipped with multicavities at Mach 4 flight condition // *Experimental Thermal and Fluid Science*. — 2012. — Nov. — Vol. 43. — P. 90–96.
205. *Wang H., Wang Z., Sun M., Wu H.* Combustion modes of hydrogen jet combustion in a cavity-based supersonic combustor // *International Journal of Hydrogen Energy*. — 2013. — Sept. — Vol. 38, no. 27. — P. 12078–12089.
206. *Wang Z.-g., Sun M.-b., Wang H.-b., Yu J.-f., Liang J.-h., Zhuang F.-c.* Mixing-related low frequency oscillation of combustion in an ethylene-fueled supersonic combustor // *Proceedings of the Combustion Institute*. — 2015. — Vol. 35, no. 2. — P. 2137–2144.
207. *Chapman D. R., Kuehn D. M., Larson H. K.* Investigation of Separated Flows in Supersonic and Subsonic Streams with Emphasis on the Effect of Transition : tech. rep. / National Advisory Committee for Aeronautics. — 1958. — 42 p. — NACA-TR-1356. — NASA TRS: 19930092343.
208. *Narasimha R., Vishwanath P. R.* Reverse Transition at an Expansion Corner in Supersonic Flow // *AIAA Journal*. — 1975. — May. — Vol. 13, no. 5. — P. 693–695.
209. *Mason W. H.* Fundamental issues in subsonic/transonic expansion corner aerodynamics // *31st Aerospace Sciences Meeting* (Reno, NV, USA, Jan. 11–14, 1993). — 1993. — AIAA paper: 1993-649.

210. *Леонтьев А. И., Обливин А. Н., Романенко П. Н.* Исследование сопротивления и теплообмена при турбулентном течении воздуха в осесимметричных каналах с продольным градиентом давления // Прикладная механика и техническая физика. — 1961. — Т. 2, № 5. — С. 16–25.
211. *Witte A. B., Harper E. Y.* Experimental Investigation of Heat Transfer Rates in Rocket Thrust Chambers // AIAA Journal. — 1963. — Feb. — Vol. 1, no. 2. — P. 443–451.
212. *Дейч М. Е., Лазарев Л. Я.* Исследование перехода турбулентного пограничного слоя в ламинарный // Инженерно-технический журнал. — 1964. — Т. 7, № 4. — С. 18–65.
213. *Гольдфельд М. А., Зиновьев В. Н., Лебига В. А.* Структура и пульсационные характеристики сжимаемого турбулентного пограничного слоя за веером волн разрежения // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1987. — С. 48–53.
214. *Gillis J. C., Johnston J. P.* Turbulent boundary-layer flow and structure on a convex wall and its redevelopment on a flat wall // Journal of Fluid Mechanics. — 1983. — Oct. — Vol. 135. — P. 123.
215. *Arnette S. A., Samimy M., Elliott G. S.* The effects of expansion on the turbulence structure of compressible boundary layers // Journal of Fluid Mechanics. — 1998. — July. — Vol. 367. — P. 67–105.
216. *Kim J.-H., Samimy M., Lee S.* Effects of Compression and Expansion on Turbulence Intensity in Supersonic Boundary Layers // AIAA Journal. — 2001. — June. — Vol. 39, no. 6. — P. 1071–1077.
217. *Butler C., Laurence S. J.* Interaction of Hypersonic Boundary-Layer Instability Waves with Axisymmetric Compression and Expansion Corners // AIAA Aviation 2020 Forum (Virtual Event, June 15–19, 2020). — 06/2020. — AIAA paper: 2020-3071.
218. *Humble R. A., Peltier S. J., Bowersox R. D. W.* Visualization of the structural response of a hypersonic turbulent boundary layer to convex curvature // Physics of Fluids. — 2012. — Oct. — Vol. 24, no. 10. — Paper number: 106103.
219. *Tichenor N. R., Humble R. A., Bowersox R. D. W.* Response of a hypersonic turbulent boundary layer to favourable pressure gradients // Journal of Fluid Mechanics. — 2013. — Mar. — Vol. 722. — P. 187–213.

220. Гольдфельд М. А., Нестуля Р. В., Шиплюк А. Н. Исследование реламинаризации турбулентного пограничного слоя при числе Маха $M_\infty = 4$ // ПМТФ. — 2002. — Т. 43, № 1. — С. 91–99.
221. Ноев А. Ю. Влияние единичной неровности на ламинарно-турбулентный переход при гиперзвуковом обтекании тела вращения с изломами поверхности // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики : сборник докладов (Казань, Россия, 20–24 авг. 2015). — 2015. — С. 2802–2803.
222. Fang J., Yao Y., Zheltovodov A. A., Li Z., Lu L. Direct numerical simulation of supersonic turbulent flows around a tandem expansion-compression corner // Physics of Fluids. — 2015. — Dec. — Vol. 27, no. 12. — Paper number: 125104.
223. Sun M.-b., Hu Z., Sandham N. D. Recovery of a supersonic turbulent boundary layer after an expansion corner // Physics of Fluids. — 2017. — July. — Vol. 29, no. 7. — Paper number: 076103.
224. Nguyen T., Behr M., Reinartz B., Hohn O., Gülhan A. Effects of Sidewall Compression and Relaminarization in a Scramjet Inlet // Journal of Propulsion and Power. — 2013. — May. — Vol. 29, no. 3. — P. 628–638.
225. Malik M. R., Balakumar P., Chang C.-L. Effect of adverse pressure gradient on the second mode instability in hypersonic boundary layer : tech. rep. — 12/1990. — HTC Report No. HTC-9006.
226. Franko K. J., Lele S. Effect of adverse pressure gradient on high speed boundary layer transition // Physics of Fluids. — 2014. — Feb. — Vol. 26, no. 2. — Paper number: 024106.
227. Kimmel R. L. The Effect of Pressure Gradients on Transition Zone Length in Hypersonic Boundary Layers // Journal of Fluids Engineering. — 1997. — Mar. — Vol. 119, no. 1. — P. 36–41.
228. Malik M. R. Prediction and control of transition in supersonic and hypersonic boundary layers // AIAA Journal. — 1989. — Nov. — Vol. 27, no. 11. — P. 1487–1493.
229. Zurigat Y. H., Nayfeh A. H., Masad J. A. Effect of pressure gradient on the stability of compressible boundary layers // AIAA Journal. — 1992. — Sept. — Vol. 30, no. 9. — P. 2204–2211.

230. *Masad J. A., Zurigat Y. H.* Effect of pressure gradient on first mode of instability in compressible boundary layers // *Physics of Fluids*. — 1994. — Dec. — Vol. 6, no. 12. — P. 3945–3953.
231. *Liu J., Xu J., Wang C., Yu P., Bai J.* Pressure gradient effects on the secondary instability of Mack mode disturbances in hypersonic boundary layers // *Physics of Fluids*. — 2021. — Jan. — Vol. 33, no. 1. — Paper number: 014109.
232. *Anderson J. D. J.* Oblique Shock and Expansion Waves // *Fundamentals in Aerodynamics*. — 6th ed. — New York : McGraw-Hill Education, 2017. — Chap. 9. P. 648–653.
233. *Fischer M. C.* Spreading of a Turbulent Disturbance // *AIAA Journal*. — 1972. — July. — Vol. 10, no. 7. — P. 957–959.
234. *Liebhards B., Lütjens K., Tracy R. R., Haas A. O.* Exploring the Prospect of Small Supersonic Airlines – A Case Study Based on the Aerion AS2 Jet // 17th AIAA Aviation Technology, Integration, and Operations Conference (Denver, Colorado, USA, June 5–9, 2017). — 06/2017. — AIAA paper: 2017-3588.
235. *Reshotko E.* Boundary-Layer Stability and Transition // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 1976. — Vol. 8, no. 1. — P. 311–349.
236. *Жигулев В. Н., Федоров А. В.* О восприимчивости пограничного слоя к акустическим возмущениям // *ПМТФ*. — 1987. — № 1. — С. 30–37.
237. *Fedorov A. V.* Receptivity of a high-speed boundary layer to acoustic disturbances // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2003. — Sept. — Vol. 491. — P. 101–129.
238. *Egorov I. V., Fedorov A. V., Novikov A. V., Chuvakhov P. V.* The Role of Receptivity in Prediction of High-Speed Laminar-Turbulent Transition // *IUTAM Laminar-Turbulent Transition*. Vol. 38 (9th IUTAM Symposium, London, UK, Sept. 2–6, 2019). — 2022. — P. 541–552. — (IUTAM bookseries).
239. *McMinn J.* Extension of a Kolmogorov atmospheric turbulence model for time-based simulation implementation // *Guidance, Navigation, and Control Conference* (New Orleans, LA, USA. Aug. 11–13, 1997). — 08/1997. — AIAA paper: 97-3532.
240. *Pao Y.-H.* Structure of Turbulent Velocity and Scalar Fields at Large Wavenumbers // *Physics of Fluids*. — 1965. — June. — Vol. 8, no. 6. — P. 1063.

241. *Balakumar P., King R.* Receptivity to Roughness, Acoustics, and Vortical Disturbances in Supersonic Boundary Layers Over Swept Wings // 41st AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit (Honolulu, Hawaii, USA, June 27–30, 2011). — 2011. — AIAA paper: 2011-3880.
242. *Адамьян Д. Ю., Стрелец М. Х., Травин А. К.* Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных rans-les подходов к расчету турбулентных течений // Математическое моделирование. — 2011. — Т. 23, № 7. — С. 3–19.
243. *Duan L., Choudhari M. M., Wu M.* Numerical study of acoustic radiation due to a supersonic turbulent boundary layer // Journal of Fluid Mechanics. — 2014. — Mar. — Vol. 746. — P. 165–192.
244. *Laufer J.* Some Statistical Properties of the Pressure Field Radiated by a Turbulent Boundary Layer // Physics of Fluids. — 1964. — Aug. — Vol. 7, no. 8. — P. 1191–1197.
245. *Hrubecky H. F.* An approximate analysis for the turbulent boundary layer thickness on a cone in supersonic flow // Applied Scientific Research. — 1963. — July. — Vol. 11, no. 4–6. — P. 441–450.
246. *Hader C., Fasel H. F.* Direct numerical simulations of hypersonic boundary-layer transition for a flared cone: fundamental breakdown // Journal of Fluid Mechanics. — 2019. — Apr. — Vol. 869. — P. 341–384.
247. *Turco R. P.* Upper-atmosphere Aerosols: Properties and Natural Cycles // The Atmospheric Effects of Stratospheric Aircraft: A First Program Report. — Los Angeles, California, USA : Springer New York, 01/1992. — Chap. 3B. P. 63–91. — NASA TRS: 19920009879 ; — NASA-RP-1272.
248. *Chuvakhov P. V., Fedorov A. V., Obraz A. O.* Numerical modelling of supersonic boundary-layer receptivity to solid particulates // Journal of Fluid Mechanics. — 2019. — Nov. — Vol. 859. — P. 949–971.
249. *Deepak A.* // Guide to Global Aerosol Models (GAM) (AIAA G-065-1999). — American Institute of Aeronautics, Astronautics (AIAA), 12/1999.
250. *Henderson C. B.* Drag Coefficients of Spheres in Continuum and Rarefied Flows // AIAA Journal. — 1976. — June. — Vol. 14, no. 6. — P. 707–708.

251. *Holden M., Duryea G., Gustafson G., Hudack L.* An experimental study of particle-induced convective heating augmentation // 9th Fluid and Plasma Dynamics Conference (San Diego, California, USA, July 14–16, 1976). — 1976. — AIAA paper: 1976-320.
252. *Hefner J., Bushnell D.* Application of stability theory to laminar flow control // 12th Fluid and Plasma Dynamics Conference (Williamsburg, Virginia, USA, July 23–25, 1979). — 07/1979. — AIAA paper: 1979-1493.
253. *Яненко Н. Н., Солоухин Р. И., Папырин А. Н., Фомин В. М.* Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. — Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1980. — 159 с.
254. *Сарычев Д. В., Трунев А. П., Фомин В. М.* Сверхзвуковое течение газозвеси около клина при наличии отраженных частиц // ПМТФ. — 1985. — № 5. — С. 102–110.
255. *Boiko V., Kiselev V., Kiselev S., Papyrin A., Poplavski S., Fomin V.* Shock wave interaction with a cloud of particles // Shock Waves. — 1997. — Oct. — Vol. 7. — P. 275–285.
256. *Brinich P. F.* Blunt Body Separation at Supersonic Speeds // Journal of the Aerospace Sciences. — 1958. — May. — Vol. 25, no. 5. — P. 336–337.
257. *Sposobin A., Reviznikov D.* Impact of High Inertia Particles on the Shock Layer and Heat Transfer in a Heterogeneous Supersonic Flow around a Blunt Body // Fluids. — 2021. — Nov. — Vol. 6. — P. 406.
258. *Crowe C. T.* Drag coefficient of particles in a rocket nozzle. // AIAA Journal. — 1967. — May. — Vol. 5, no. 5. — P. 1021–1022.
259. *Schneider S. P.* Effects of Roughness on Hypersonic Boundary-Layer Transition // Journal of Spacecraft and Rockets. — 2008. — Mar. — Vol. 45, no. 2. — P. 193–209.
260. По неофициальному мнению многих вычислителей.
261. *Browne O. M., Hasnine S. M. A., Russo V., Brehm C.* Fully-Resolved Particulate-Induced Transition Simulations for High-Speed Boundary-Layers with an Immersed Boundary Method // AIAA Scitech 2020 Forum (Orlando, Florida, USA, Jan. 6–10, 2020). — 2020. — AIAA paper: 2020-1795.

262. *Hasnine S. M. A. A., Russo V., Tumin A., Brehm C.* Three-Dimensional Spatio-Temporal Disturbance Flow Field Analysis of Particulate-Induced High-Speed Boundary-Layer Transition // AIAA Scitech 2021 Forum (Virtual Event, Jan. 11–21, 2021). — 2021. — AIAA paper: 2021-1657.
263. *Russo V., Hasnine S. M. A. A., Brehm C.* Particle-Impingement Simulations for a Blunt Cone in Hypersonic Flow // AIAA Scitech 2021 Forum (Virtual Event, Jan. 11–21, 2021). — 2021. — AIAA paper: 2021-0967.
264. *Hasnine S. M. A. A., Russo V., Brehm C.* Particle Impingement Simulations for First and Second Mode Dominated High-Speed Boundary Layers // AIAA Aviation 2021 Forum (Virtual Event, Aug. 2–6, 2021). — 2021. — AIAA paper: 2021-2909.
265. *Russo V., Hasnine S. M. A. A., Brehm C.* Towards Understanding Particle Cloud Interactions with High-Speed Boundary Layer Flows // AIAA Aviation 2021 Forum (Virtual Event, Aug. 2–6, 2021). — 2021. — AIAA paper: 2021-2829.
266. *Browne O. M., Hasnine S. M. A., Brehm C.* Numerical Method for Particulate-Induced High-Speed Boundary-Layer Transition Simulations // AIAA Journal. — 2021. — Apr. — Vol. 59, no. 4. — P. 1196–1213.
267. *Habeck J. B., Hogan C. J., Flaten J. A., Candler G. V.* Development of a calibration system for measuring aerosol particles in the stratosphere // AIAA Scitech 2022 Forum (San Diego, California, USA, Jan. 3–7, 2022). — 2022. — AIAA paper: 2022-1582.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях из списка ВАК РФ

1. *Egorov I. V., Fedorov A. V., Novikov A. V., Chuvakhov P. V.* The Role of Receptivity in Prediction of High-Speed Laminar-Turbulent Transition // IUTAM Laminar-Turbulent Transition. Vol. 38 (9th IUTAM Symposium, London, UK, Sept. 2–6, 2019). — 2022. — P. 541–552. — (IUTAM bookseries).
2. *Егоров И. В., Новиков А. В., Чувахов П. В.* Численное моделирование развития турбулентных пятен в сверхзвуковом пограничном слое на пластине // Математическое моделирование. — 2022. — Т. 34, № 7. — С. 63–72.
3. *Чувахов П. В., Погорелов И. О.* Источники турбулентности на прямом крыле сверхзвукового пассажирского самолёта // Математическое моделирование. — 2022. — Т. 34, № 8. — С. 19–37.
4. *Chuvakhov P. V.* Shock-Capturing Anomaly in the Interaction of Unsteady Disturbances with a Stationary Shock // AIAA Journal. — 2021. — May. — Vol. 59, no. 8. — P. 1–11.
5. *Chuvakhov P. V., Egorov I. V., Ilyukhin I. M., Obraz A. O., Fedorov A. V.* Boundary-Layer Instabilities in Supersonic Expansion Corner Flows // AIAA Journal. — 2021. — Apr. — Vol. 59, no. 9. — P. 1–8.
6. *Chuvakhov P. V., Fedorov A. V., Obraz.* Stabilization of supersonic boundary layers in the presence of favorable pressure gradient // 32th Congress of the International Council of Aeronautical Sciences (ICAS-2020) (Shanghai, China, Sept. 6–10, 2021). — 2021. — Paper number: 2020_0656.
7. *Chuvakhov P. V., Fedorov A. V., Obraz A. O., Ilyukhin I. M.* Disturbance evolution over an unswept wing in a Mach 3 flow // AIP Conference Proceedings. Vol. 2351 (20th International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR 2020), Novosibirsk, Russia, Nov. 1–7, 2020). — 2021. — Paper number: 030025.

8. *Chuvakhov P. V., Fedorov A. V., Obraz A. O., Pogorelov I. O.* Mechanisms of natural laminar-turbulent transition on an unswept wing in supersonic flight // 32th Congress of the International Council of Aeronautical Sciences (ICAS-2020) (Shanghai, China, Sept. 6–10, 2021). — 2021. — Paper number: 2020_0657.
9. *Chuvakhov P. V., Fedorov A. V., Pogorelov I. O.* Numerical simulation of boundary layer receptivity to solid particulates near a blunt leading edge // AIP Conference Proceedings. Vol. 2351 (20th International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR 2020), Novosibirsk, Russia, Nov. 1–7, 2020). — 2021. — Paper number: 030026.
10. *Егоров И. В., Нгуен Н. К., Нгуен Т. Ш., Чувахов П. В.* Моделирование ламинарно-турбулентного перехода с применением диссипативных численных схем // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2021. — Т. 61, № 2. — С. 268–280.
11. *Чувахов П. В., Егоров И. В.* Численное моделирование эволюции возмущений в сверхзвуковом пограничном слое над углом разрежения // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2021. — № 5. — С. 49–60.
12. *Chuvakhov P. V., Radchenko V. N.* Effect of Görtler-like vortices of various intensity on heat transfer in supersonic compression corner flows // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2020. — Apr. — Vol. 150. — Paper number: 119310.
13. *Василевский Э. Б., Ежов И. В., Чувахов П. В.* Экспериментальное исследование встречного выдува газа в высокоскоростной поток через несимметричную щель в передней кромке острого клина // Ученые записки ЦАГИ. — 2020. — Т. 51, № 6. — С. 28–39.
14. *Погорелов И. О., Чувахов П. В.* Влияние энтропийного слоя на турбулизацию сверхзвукового пограничного слоя в следе за изолированными неровностями // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2020. — № 5. — С. 21–27.
15. *Чувахов П. В.* Энтропийный эффект при ламинарно-турбулентном переходе сверхзвукового пограничного слоя в следе за изолированной неровностью // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2020. — № 1. — С. 64–75.
16. *Chuvakhov P. V., Fedorov A. V., Obraz A. O.* Numerical modelling of supersonic boundary-layer receptivity to solid particulates // Journal of Fluid Mechanics. — 2019. — Nov. — Vol. 859. — P. 949–971.

17. *Александров С., Александрова Е., Боровой В. Я. [и др.]. Влияние формы и толщины передней кромки пластины на ламинарно-турбулентный переход пограничного слоя в гиперзвуковом потоке // Ученые записки ЦАГИ. — 2019. — Т. 50, № 5. — С. 3–19.*
18. *Chuvakhov P. V. Controlled experiment on isolated roughness-induced transition in sharp flat plate hypersonic flows // AIP Conference Proceedings. Vol. 2027 (19th International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR 2018), Novosibirsk, Russia, Sept. 13–18, 2018). — 2018. — Paper number: 030160.*
19. *Chuvakhov P. V. Entropy layer effect on roughness-induced laminar-turbulent transition in supersonic flat plate flow // 31th Congress of the International Council of Aeronautical Sciences (ICAS-2018) (Belo Horizonte, Brazil, Sept. 9–14, 2018). — 2018. — Paper number: 2018-0701.*
20. *Chuvakhov P. V., Alexandrov S. V., Alexandrova E. A. Numerical comparison of steady disturbances in the wake of periodic blow-suction and roughness elements // 31th Congress of the International Council of Aeronautical Sciences (ICAS-2018) (Belo Horizonte, Brazil, Sept. 9–14, 2018). — 2018. — Paper number: 2018-0700.*
21. *Chuvakhov P. V., Fedorov A. V., Obraz A. O. Numerical simulation of turbulent spots generated by unstable wave packets in a hypersonic boundary layer // Computers & Fluids. — 2018. — Jan. — Vol. 162. — P. 26–38.*
22. *Chuvakhov P. V., Radchenko V. N., Alexandrova E. A., Borovoy V. Y. Effect of controlled periodic roughness on Goertler vortices in hypersonic compression ramp flow // 31th Congress of the International Council of Aeronautical Sciences (ICAS-2018) (Belo Horizonte, Brazil, Sept. 9–14, 2018). — 2018. — Paper number: 2018-0690.*
23. *Chuvakhov P. V., Egorov I. V., Ezhov I. V., Ezhov I. V., Novikov I. V., Vasilevskiy E. B. Tangential injection to a supersonic flow on a blunted nose // Progress in Flight Physics. Vol. 9 (6th European Conference for Aero-Space Sciences (EUCASS), Krakow, Poland, June 29–July 3, 2015). — 2017. — P. 265–282. — (EUCASS book series – Advances in AeroSpace Sciences).*

24. *Roghelia A., Chuvakhov P. V., Olivier H., Egorov I.* Experimental investigation of Görtler vortices in hypersonic ramp flows behind sharp and blunt leading edges // 47th AIAA Fluid Dynamics Conference (Denver, Colorado, USA, June 5, 2017–June 9, 2016). — 2017. — AIAA paper: 2017-3463.
25. *Roghelia A., Olivier H., Egorov I., Chuvakhov P.* Correction to: Experimental investigation of Görtler vortices in hypersonic ramp flows // *Experiments in Fluids*. — 2017. — Nov. — Vol. 58, no. 12. — Paper number: 169.
26. *Roghelia A., Olivier H., Egorov I., Chuvakhov P.* Experimental investigation of Görtler vortices in hypersonic ramp flows // *Experiments in Fluids*. — 2017. — Vol. 58, no. 10. — Paper number: 139.
27. *Чувахов П. В., Егоров И. В., Боровой В. Я., Радченко В. Н., Оливье Г., Рогелия А.* Влияние малого притупления на формирование вихрей Гёртлера при сверхзвуковом обтекании угла сжатия // *ПМТФ*. — 2017. — Т. 58, № 6. — С. 23–40.
28. *Chuvakhov P. V., Egorov I. V., Olivier H., Roghelia A.* Joint influence of high entropy layer and Goertler vortices on heat transfer in supersonic compression ramp flow // *Computational Thermal Sciences: An International Journal*. — 2016. — Vol. 8, no. 6. — P. 543–553.
29. *Chuvakhov P. V., Fedorov A. V.* Spontaneous radiation of sound by instability of a highly cooled hypersonic boundary layer // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2016. — Vol. 805. — P. 188–206.
30. *Chuvakhov P. V., Fedorov A. V.* Spontaneous radiation of sound by instability of a highly cooled hypersonic boundary layer // 8th AIAA Flow Control Conference (Washington, D.C., USA, June 13–17, 2016). — 2016. — AIAA paper: 2016-4245.
31. *Chuvakhov P. V.* Investigation of heat flux and effusion / film cooling efficiency over sharp cone surface at high supersonic speeds // 29th Congress of the International Council of Aeronautical Sciences (ICAS-2014) (St. Peterburg, Russia, Sept. 7–12, 2014). — 2014. — Paper number: 2014_0355.
32. *Chuvakhov P. V.* On a Riemann solver for three-dimensional RANS // *Computational Thermal Sciences: An International Journal*. — 2014. — Vol. 6, no. 5. — P. 369–381.

33. Чувахов П. В. Исследование эффективности заградительного охлаждения поверхности острого конуса при больших сверхзвуковых скоростях // Ученые записки ЦАГИ. — 2014. — Т. 45, № 1. — С. 41–56.
34. Чувахов П. В. Решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва для уравнений Рейнольдса // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Т. 54, № 1. — С. 126–138.

В прочих изданиях

35. Егоров И. В., Новиков А. В., Чувахов П. В. Прямое численное моделирование процессов ламинарно-турбулентного перехода при сверхзвуковых скоростях на суперкомпьютерах // Современные проблемы аэрогазодинамики силовых установок летательных аппаратов : Материалы Межотраслевой научно-технической конференции (Жуковский, 21–22 окт. 2021). — 2021. — С. 35–37.
36. Егоров И. В., Новиков А. В., Чувахов П. В. Численное моделирование развития турбулентных пятен в сверхзвуковом пограничном слое на пластине // Труды Центрального аэрогидродинамического института им. проф. Н.Е. Жуковского : сборник тезисов. Т. 2807 (Всероссийский аэроакустический форум. Восьмая российская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике», Геленджик, Россия, 20–25 сент. 2021). — 2021. — С. 165–167.
37. Илюхин И. М., Чувахов П. В., Образ А. О., Фёдоров А. В. Распространение возмущений в пограничном слое на прямом параболическом крыле при числе Маха 3 // XV Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» : тезисы докладов (Новосибирск–Шерегеш, Россия, 25 февр.–5 марта 2021). — 2021. — С. 93–94.
38. Погорелов И. О., Чувахов П. В. Моделирование возникновения турбулентности на прямом крыле сверхзвукового пассажирского самолёта // XVI Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Проблемы механики: теория,

- эксперимент и новые технологии» : тезисы докладов (Новосибирск, Россия, 14–17 марта 2022). — 2021. — С. 105–106.
39. Чувахов П. В., Погорелов И. О., Илюхин И. М., Федоров А. В. Источники турбулентности сверхзвукового пограничного слоя на прямом крыле с тонким параболическим профилем // Труды Центрального аэрогидродинамического института им. проф. Н.Е. Жуковского : сборник тезисов. Т. 2807 (Всероссийский аэроакустический форум. Восьмая российская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике», Геленджик, Россия, 20–25 сент. 2021). — 2021. — С. 198–199.
 40. Чувахов П. В., Погорелов И. О., Фёдоров А. В. Численное моделирование восприимчивости пограничного слоя над притупленной передней кромкой пластины к твёрдым микрочастицам // XV Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» : тезисы докладов (Новосибирск–Шерегеш, Россия, 25 февр.–5 марта 2021). — 2021. — С. 238–239.
 41. Чувахов П. В., Фёдоров А. В., Погорелов И. О. Численное решение задачи восприимчивости сверхзвукового пограничного слоя к возмущениям, порождаемым твёрдой частицей // Труды 64й Всероссийской научной конференции МФТИ : Аэрокосмические технологии (Москва – Долгопрудный – Жуковский, 29 нояб.–3 дек. 2021). — 2021. — С. 37–38.
 42. Шубин К. В., Чувахов П. В. Взаимодействие акустически возмущений со сверхзвуковым пограничным слоем на плоской пластине // Труды 64й Всероссийской научной конференции МФТИ : Аэрокосмические технологии (Москва – Долгопрудный – Жуковский, 29 нояб.–3 дек. 2021). — 2021. — С. 39–40.
 43. Илюхин И. М., Чувахов П. В. Распространение возмущений в пограничном слое над параболическим профилем при числе Маха 3 // Труды 63й Всероссийской научной конференции МФТИ : Аэрокосмические технологии (Москва – Долгопрудный – Жуковский, 23–29 нояб. 2020). — 2020. — С. 41–43.
 44. Чувахов П. В. Численное моделирование развития волнового пакета и турбулентного пятна над углом разрежения при числе Маха 6 // Труды 63й Всероссийской научной конференции МФТИ : Аэрокосмические техноло-

- гии (Москва – Долгопрудный – Жуковский, 23–29 нояб. 2020). — 2020. — С. 50–52.
45. Чувахов П. В., Погорелов И. О. Влияние энтропийного слоя на турбулизацию сверхзвукового пограничного слоя в следе за изолированными неровностями // XXIV Международная конференция «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность (НеЗаТеГиУс-2020)» : тезисы докладов (Звенигород, Россия, 31 марта–3 апр. 2020). — 2020. — С. 116.
 46. Чувахов П. В., Погорелов И. О. Проблемы при моделировании взаимодействия малых возмущений с ударными волнами // XIV Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» : тезисы докладов (Новосибирск–Шереметьево, Россия, 28 февр.–6 марта 2020). — 2020. — С. 200–201.
 47. Чувахов П. В., Фёдоров А. В., Погорелов И. О. Численное исследование возмущений гиперзвукового пограничного слоя, порождаемых твёрдой частицей // Труды 63й Всероссийской научной конференции МФТИ : Аэрокосмические технологии (Москва – Долгопрудный – Жуковский, 23–29 нояб. 2020). — 2020. — С. 43–45.
 48. Chuvakhov P. V., Obraz A. O., Alexandrova E. A., Fedorov A. V., Egorov I. V. Effect of pressure gradient on stability of small disturbances in supersonic boundary-layer flows // 8th European Conference for Aeronautics and Space Sciences (EUCASS) (Madrid, Spain, July 1–4, 2019). — 2019. — Paper number: 201.
 49. Chuvakhov P. V., Radchenko V. N., Alexandrova E. A. Experiments on Görtler vortices of controllable intensity in a hypersonic compression corner flow // 8th European Conference for Aeronautics and Space Sciences (EUCASS) (Madrid, Spain, July 1–4, 2019). — 2019. — Paper number: 200.
 50. Александров С. В., Александрова Е. А., Чувахов П. В. Расчёт теплообмена на поверхности угла сжатия с периодически возмущённой предотрывной зоной // Материалы XXX научно-технической конференции по аэродинамике (М.О., пос. Володарского, 25–26 апр. 2019). — 2019. — С. 26–27.

51. *Ежов И. В., Василевский Э. Б., Новиков А. В., Чувахов П. В.* Экспериментальные исследования встречного выдува газа через несимметричную щель в передней кромке острого клина в высокоскоростной поток // Сборник трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики в 4 томах : Механика жидкости и газа. Т. 2 (Уфа, республика Башкортостан, Россия, 19–24 авг. 2019). — 2019. — С. 454–456.
52. *Чувахов П. В.* Теплообмен в присутствии вихрей Гёртлера при гиперзвуковом обтекании угла сжатия // Труды Общероссийской научно-технической конференции «Восьмые уткинские чтения» (Санкт-Петербург, 13–14 нояб. 2018). — 2019. — С. 205–211. — (Сер. 55 Библиотека журнала «Военмех. Вестник БГТУ»).
53. *Чувахов П. В., Радченко В. Н., Александрова Е. А.* Теплообмен при гиперзвуковом обтекании угла сжатия в присутствии регулярных продольных вихрей типа Гёртлера // Сборник трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики в 4 томах : Механика жидкости и газа. Т. 2 (Уфа, республика Башкортостан, Россия, 19–24 авг. 2019). — 2019. — С. 454–456.
54. *Chuvakhov P. V., Radchenko V. N., Alexandrova E. A.* Controlled experiment on Goertler vortices of various intensity and heat transfer in a hypersonic compression corner flow // 19th International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR 2018) (Novosibirsk, Russia, Sept. 13–19, 2018). — 2018. — Paper number: 379.
55. *Chuvakhov P. V., Fedorov A. V.* Numerical studies of receptivity of a supersonic boundary layer to solid particulates // International Conference on High-Speed Vehicle Science Technology (HiSST) (Moscow, Russia, Nov. 26–29, 2018). — 2018.
56. *Александров С. В., Александрова Е. А., Чувахов П. В.* Расчёт теплообмена на поверхности угла сжатия в присутствии вихрей Гёртлера // Материалы XXIX научно-технической конференции по аэродинамике (М.О., пос. Володарского, 1–2 марта 2018). — 2018. — С. 24–25.
57. *Александров С. В., Александрова Е. А., Чувахов П. В.* Численное сравнение стационарных возмущений в следе за периодически распределёнными элементами неровности и вдува–отсоса // Труды 61й Всероссийской научной

- конференции МФТИ : Аэрокосмические технологии (Москва – Долгопрудный – Жуковский, 19–25 нояб. 2018). — 2018. — С. 245–247.
58. Чувахов П. В. Реверс ламинарно-турбулентного перехода гиперзвукового пограничного слоя в следе за изолированной шероховатостью поверхности // Труды 61й Всероссийской научной конференции МФТИ : Аэрокосмические технологии (Москва – Долгопрудный – Жуковский, 19–25 нояб. 2018). — 2018. — С. 272–274.
 59. Чувахов П. В., Фёдоров А. В. Моделирование восприимчивости сверхзвукового пограничного слоя к твёрдым микрочастицам // XXIII Международная конференция «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность (НеЗаТеГиУс-2018)» : тезисы докладов (Звенигород, Россия, 25 февр.–4 марта 2018). — 2018. — С. 118.
 60. Чувахов П. В. Влияние вихрей Гёртлера различной интенсивности на теплообмен при гиперзвуковом обтекании угла сжатия // Труды 60й Всероссийской научной конференции МФТИ : Аэрокосмические технологии (Москва – Долгопрудный – Жуковский, 20–26 нояб. 2017). — 2017. — С. 286–287.
 61. Чувахов П. В., Боровой В. Я., Егоров И. В., Радченко В. Н. Вихри Гёртлера при сверхзвуковом обтекании угла сжатия с притупленной передней кромкой // XLI Академические чтения по космонавтике : сборник тезисов (Москва, 24–27 янв. 2017). — 2017. — С. 126–127.
 62. Чувахов П. В., Федоров А. В. Специальное граничное условие на базе линейной теории устойчивости для численного моделирования формирования турбулентного пятна // Материалы XXVIII научно-технической конференции по аэродинамике (М.О., пос. Володарского, 20–21 апр. 2017). — 2017.
 63. Chuvakhov P. V., Fedorov A. V., Rudikov A. A. New effect of wall cooling on instability of a hypersonic boundary layer // 51st 3AF International Conference on Applied Aerodynamics (Strasbourg, France, Apr. 4–6, 2016). — 2016. — Paper number: FP06-2016-chuvakhov.
 64. Чувахов П. В. Метод решения задачи Римана о распаде разрыва для уравнений Рейнольдса, замкнутых двухпараметрической моделью турбулентности // Материалы Тринадцатой Международной школы-семинара «Модели и метода аэродинамики» (Евпатория, 4–13 июня 2013). — 2013. — С. 208–209.