На правах рукописи

БЕЛОВА Мария Владимировна

Алгебраические инварианты для обыкновенных дифференциальных уравнений: теория и приложения

Специальность: 1.1.2. — *дифференциальные уравнения и математическая физика*

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Москва – 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».

Официальные оппоненты:

АЛФИМОВ Георгий Леонидович, доктор физико–математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники», профессор;

ЕФРЕМОВА Людмила Сергеевна, доктор физико–математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского», профессор;

СУЛЕЙМАНОВ Булат Ирекович, доктор физико–математических наук, старший научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, ведущий научный сотрудник;

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова».

Защита диссертации состоится 21 мая 2026 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета 24.1.224.02 при Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН) по адресу: 119333, Москва, ул. Вавилова д. 40, конференц–зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИЦ ИУ РАН по адресу 119333, Москва, ул. Вавилова д. 42, а также на сайте
https://www.frccsc.ru/diss-council/00207303/diss/list/belova_mv

Автореферат разослан "____" ________________ 2026 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета 24.1.224.02,
кандидат физико–математических наук В.И. Никонов

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена исследованию аналитических свойств решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Основное внимание уделено построению инвариантов и первых интегралов полиномиальных дифференциальных систем.

Актуальность темы диссертационной работы. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений является важнейшей задачей математики. Понятие интегрируемости можно рассматривать с различных точек зрения: алгебраической, аналитической или геометрической, локальной или глобальной, и т. д. В некоторых областях математики в понятие интегрируемости вкладывается разный смысл. Например, классическим является определение интегрируемости в квадратурах. Общее решение интегрируемого в квадратурах уравнения должно представляться в виде конечной последовательности суперпозиций операций интегрирования и алгебраических операций, применяемых к фиксированному классу функций. Также в научной литературе используется определение, согласно которому обыкновенное дифференциальное уравнение называют интегрируемым, если на некотором открытом подмножестве фазового пространства, имеющем ненулевую меру Лебега, существует достаточное число независимых сохраняющихся величин (первых интегралов). Это определение является абстрактным, поэтому на практике принято ограничивать классы функций, в рамках которых происходит поиск первых интегралов. К наиболее важным классам относятся полиномиальные, рациональные, мероморфные первые интегралы, а также первые интегралы, являющиеся функциями Дарбу и Лиувилля. Первые интегралы, задаваемые функциями Дарбу и Лиувилля, представляют большой интерес для приложений. В рамках современных обобщений часть независимых первых интегралов при определенных условиях может быть заменена инвариантными векторными полями или тензорными инвариантами[1,2].

Как только определение интегрируемости зафиксировано, дифференциальные уравнения можно классифицировать на интегрируемые и неинтегрируемые в рамках рассматриваемого подхода. Если дифференциальное уравнение не интегрируемо или его статус с точки зрения интегрируемости не известен,

[1] *Kozlov V. V.* The Euler–Jacobi–Lie integrability theorem // Regular and Chaotic Dynamics, 18(4):329–343, 2013.

[2] *Kozlov V. V.* Tensor invariants and integration of differential equations // Russ. Math. Surv., 74(1):111–140, 2019.

то ставится задача об исследовании частичной интегрируемости[3]. В широком смысле нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение называют частично интегрируемым или разрешимым, если оно обладает некоторым набором нетривиальных точных решений, независимых первых интегралов, тензорных инвариантов и других объектов, характерных для интегрируемых уравнений, при этом наличия этих объектов недостаточно для полной интегрируемости заданного уравнения.

В настоящее время в научной литературе нет универсальных методов, позволяющих найти или общее решение, или достаточное число независимых первых интегралов нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, групповые методы являются мощным средством исследования интегрируемости и построения точных решений, но эти методы применимы, только если дифференциальное уравнение обладает некоторым набором симметрий (классических или обобщенных). В частности, для интегрируемости обыкновенного дифференциального уравнения в квадратурах достаточно существования разрешимой алгебры Ли операторов симметрий, размерность которой совпадает с порядком уравнения[4,5]. В то же время, это условие не является необходимым. Целый ряд методов разработан в рамках дифференциальной теории Галуа[6,7,8]. Отметим, что дифференциальная теория Галуа может быть эффективно применена к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям, а также к нелинейным дифференциальным уравнениям, которые или могут быть преобразованы к линейным, или, например, допускают построение вариационных приближений в окрестности неравновесных решений[9]. В последние годы активно развивается мощный аппарат теории гамильтоновых систем[10,11]. Однако, существует большое количество важных с прикладной точки зрения дифференциальных уравнений и систем, которые или не могут быть представлены в виде гамильтоновой системы, или такое

[3] *Goriely A.* Integrability and Nonintegrability of Dynamical Systems. World Scientific, 2001.

[4] *Ovsyannikov L.V.* Group Analysis of Differential Equations. Moscow: Nauka, 1978.

[5] *Ibragimov N.H.* Groups of Transformations in Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1983.

[6] *Kolchin, E.R.* Differential algebra & algebraic groups // Academic press, 54, 1973.

[7] *Khovanskii A.G.* On solvability and unsolvability of equations in explicit form // Russ. Math. Surv., 59(4):661–736, 2004.

[8] *Khovanskii A.G.* Topological Galois theory. Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2015.

[9] *Morales-Ruiz, J.J.* Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems // Springer, 1999.

[10] *Kozlov V.V.* Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics // Russ. Math. Surv., 38(1):1–76, 1983.

[11] *Bolsinov A.V., Fomenko A.T.* Integrable Hamiltonian Systems. Geometry, Topology, Classification. Chapman and Hall/CRC. A CRC Press Company Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. USA, 2004.

представление заранее неизвестно. Таким образом, задача поиска методов, которые бы позволили исследовать интегрируемость и разрешимость дифференциальных уравнений в тех случаях, когда не применимы другие методы, чрезвычайно актуальна.

Степень разработанности темы диссертационной работы. Систематические исследования интегрируемости и разрешимости нелинейных двумерных дифференциальных систем были начаты еще в XIX веке в работах Ж. Г. Дарбу (J. G. Darboux)[12], А. Пуанкаре (H. Poincaré)[13], П. Пенлеве (P. Painlevé)[14]. В 1878 году Ж. Г. Дарбу (J. G. Darboux) предложил интересный и наглядный метод построения рациональных первых интегралов двумерных автономных полиномиальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений[12]. Ж.Г. Дарбу обнаружил, что для этих целей могут быть использованы инвариантные алгебраические кривые рассматриваемых систем. В 1992–1999 гг. М. Ф. Зингер (M.F. Singer) и К. Кристофер (C. Christopher) усовершенствовали метод Дарбу[15,16]. В рамках нового метода стало возможным находить не только рациональные первые интегралы, но и первые интегралы, являющиеся функциями Дарбу и Лиувилля.

М. Ф. Зингер и К. Кристофер доказали, что знание всех неприводимых инвариантных алгебраических кривых и экспоненциальных инвариантов позволяет получать необходимые и достаточные условия интегрируемости по Лиувиллю для заданной двумерной автономной полиномиальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Первые интегралы, являющиеся функциями Лиувилля, имеют большое практическое значение, поскольку функции Лиувилля не абстрактны, а могут быть получены с помощью конечной последовательности суперпозиций алгебраических функций, квадратур и экспоненциальных функций. Весомый вклад в изучение свойств двумерных полиномиальных систем, имеющих инвариантные алгебраические кривые, интегрирующие множители и первые интегралы Дарбу внесен М. В. Доловым и

[12] *Darboux G.* De l'emploi des solutions particuliéres algébriques dans l'intégration des systèmes d'équations différentielles algébriques // Acad. Sci. Paris C. R., 86:1012–1014, 1878.

[13] *Poincaré, H.* Sur l'integration algébrique des équations differentielles du 1-er ordre // Rend. Circ. Mat. Palermo, 11:193–239, 1891.

[14] *Painlevé, P.* Sur les intégrales algébriques des équations différentielles du premier ordre // CR Acad. Sci. Paris, 110:945–948, 1890.

[15] *Singer M.F.* Liouvillian first integrals of differential systems // Trans. Amer. Math. Soc., 333:673–688, 1992.

[16] *Christopher C. J.* Liouvillian first integrals of second order polynomial differential equations. Electron. J. Differential Equations, 49:1–7, 1999.

его учениками[17,18,19]. Отметим, что многие современные методы построения первых интегралов, отличные от метода Дарбу, на самом деле приводят к первым интегралам, являющимся функциями Дарбу или Лиувилля. Это такие методы, как метод локальных[20,21] или нелокальных преобразований[22,23], метод пар Лакса[3], методы λ–симметрий[24] и S–функций[25], а также некоторые другие методы. Перечисленные методы могут быть использованы для нахождения новых интегрируемых дифференциальных уравнений, а также для выявления интересных особенностей изучаемых уравнений, например, наличие явной или неявной линеаризации. Однако, в отличие от метода Дарбу, эти методы лишь в редких случаях позволяют находить все интегрируемые по Дарбу и Лиувиллю подсемейства для заданных многопараметрических дифференциальных уравнений и систем.

Понятие инвариантной алгебраической кривой можно обобщить на случай дифференциальных систем размерности выше второй и обыкновенных дифференциальных уравнений порядков выше второго[26,27]. В результате появляется задача поиска и классификации алгебраических инвариантов и алгебраически инвариантных решений для автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Алгебраические инварианты порождают автономные алгебраические обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, совместные с исходным уравнением. Мотивацией для исследования

[17] *Dolov M.V.* On the number of algebraic invariant curves of polynomial vector fields // Differ. Equ. 40(6):896–897, 2004.

[18] *Dolov M.V., Kosarev V.V.* Darboux first integrals and analytical structure of solutions of differential equations // Differ. Equ., 19(4):697–700, 1983.

[19] *Dolov M.V.* Algebraical limit cycles of polynomial vector fields on the plane // Differ. Equ., 37(9):1211–1216, 2001.

[20] *Lie S.* Klassifikation und integration von gewönlichen differentialgleichungen zwischen x, y, die eine gruppe von transformationen gestatten // Arch. für Math., 7:187–453, 1883.

[21] *Ibragimov N.H.* Group analysis of ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics (for the 150th anniversary of Sophus Lie) // Russ. Math. Surv., 47(4):89–156, 1992.

[22] *Berkovich L.M.* The method of an exact linearization of n-order ordinary differential equations // Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 3(3–4):341–350, 1996.

[23] *Nakpim W., Meleshko S.V.* Linearization of second-order ordinary differential equations by generalized Sundman transformations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA), 6:1–11, 2010.

[24] *Ruiz A., Muriel C.* On the integrability of Liénard I–type equations via λ symmetries and solvable structures // Appl. Math. Comput., 339:888–898, 2018.

[25] *Duarte L.G.S., da Mota L.A.C.P., Nunez E.* Finding first order differential invariants through the S-function // Computer Physics Communications, 207:542–544, 2016.

[26] *Conte R., Musette, M.* Solitary Waves of Nonlinear Nonintegrable Equations. Lect. Notes Phys. 661:373–406, 2005.

[27] *Gasull A., Giacomini H.* Explicit traveling waves and invariant algebraic curves // Nonlinearity, 28:1597–1606, 2015.

проблемы поиска и классификации алгебраических инвариантов для дифференциальных уравнений порядка выше второго является тот факт, что многие известные точные решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и многие «бегущие волны» автономных дифференциальных уравнений в частных производных являются на самом деле алгебраически инвариантными решениями[26,27,28]. Также наличие алгебраического инварианта с произвольным параметром можно использовать как необходимое условие алгебраической интегрируемости автономного обыкновенного дифференциального уравнения третьего или более или высокого порядка.

Задача построения всех неприводимых алгебраических инвариантов для заданного обыкновенного дифференциального уравнения является чрезвычайно сложной[27]. Основная трудность при построении неприводимых алгебраических инвариантов заключается в том, что их степени, как правило, заранее не известны. Проблему нахождения оценки сверху для степеней неприводимых алгебраических инвариантов в двумерном случае называют проблемой Пуанкаре[29]. Хорошо известно, что равномерная оценка, зависящая от степени векторного поля, соответствующего рассматриваемому семейству двумерных автономных полиномиальных дифференциальных систем, может не существовать[30]. Решения этой проблемы, справедливые при определенных ограничениях, накладываемых на особые точки дифференциальных систем и/или инвариантные алгебраические кривые, были получены Д. Серво (D. Cerveau) и А. Линс Нето (A. Lins Neto)[31], М. М. Карничером (M. M. Carnicer)[32], С. Валхером (S. Walcher)[33]. Например, найдены оценки при отсутствии на алгебраической кривой, задаваемой инвариантом, дикритических особых точек векторного поля[32]. К сожалению, подобные ограничения не выполняются для многих важных с прикладной точки зрения семейств уравнений и систем.

Еще одной задачей, тесно связанной с проблемой построения алгебраических инвариантов, является задача нахождения и классификации мероморфных решений автономных нелинейных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений произвольных порядков. Изучением существования, наличия явного представления, характеристик роста и других свойств меро-

[28] *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos, Solitons and Fractals, 24(5):1217–1231, 2005.

[29] *Ilyashenko Yu., Yakovenko S.* Lectures on Analytic Differential Equations, volume 86, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2008.

[30] *Zhang X.* Integrability of Dynamical Systems: Algebra and Analysis. Springer Singapore, 2017.

[31] *Cerveau D., Lins Neto A.* Holomorphic foliations in CP(2) having an invariant algebraic curve // Ann. Inst. Fourier, 41:883–903, 1991.

[32] *Carnicer M.M.* The Poincaré problem in the nondicritical case // Ann. Math., 140:289–294, 1994.

[33] *Walcher S.* On the Poincaré problem // J. Diff. Eqns., 166:51–78, 2000.

морфных решений занимались У. К. Хейман (W. K. Hayman), А. А. Гольдберг, Н. Штайнмец (N. Steinmetz), А. З. Мохонько, А. Э. Еременко, Р. Хальбурд (R. Halburd), Р. Конт (R. Conte), Т.-В. Нг (T.-W. Ng) и другие математики.

Трансцендентные мероморфные функции, являющиеся эллиптическими или рациональными с экспоненциальным аргументом, принято называть $\mathbb{W}$-мероморфными функциями в честь К. Вейерштрасса (K. Weierstrass). Хорошо известно, что любая $\mathbb{W}$-мероморфная функция удовлетворяет автономному алгебраическому обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка. Таким образом, проблема построения и классификации $\mathbb{W}$-мероморфных решений автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений может быть решена с использованием алгебраических инвариантов. Более того, известно, что обыкновенные дифференциальные уравнения с определенными свойствами не имеют трансцендентных мероморфных решений, отличных от $\mathbb{W}$-мероморфных функций.

С помощью теории Неванлинны А. Е. Еременко доказал, что все трансцендентные мероморфные решения обыкновенных дифференциальных уравнений с одним доминантным дифференциальным мономом и конечным числом локальных решений, заданных рядами Лорана в окрестности полюсов, являются $\mathbb{W}$-мероморфными функциями[34]. Для нахождения некоторых $\mathbb{W}$-мероморфных решений М. Мюзетт (M. Musette) и Р. Конт (R. Conte) предложили метод, получивший название метода вспомогательных уравнений[35]. К сожалению, этот метод не позволяет находить все $\mathbb{W}$-мероморфные решения обыкновенных дифференциальных уравнений с несколькими доминантными дифференциальными мономами или с бесконечным числом локальных решений, описываемых рядами Лорана в окрестности полюсов.

Теория интегрируемости Дарбу может быть обобщена на случай неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Не так давно было введено понятие обобщенного первого интеграла Дарбу для двумерных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений[36,37]. Как и в автономном случае, наибольшая трудность при исследовании интегрируемости по Дарбу неавтономных систем дифференциальных уравнений связана с классификацией инвариантных поверхностей[36]. Вопросы построения не только

[34] *Eremenko A.* Meromorphic traveling wave solutions of the Kuramoto–Sivashinsky equation // J. Math. Phys., Anal., Geom., 2(3):278–286, 2011.

[35] *Musette M., Conte R.* Analytic solitary waves of nonintegrable equations // Physica D, 181:70–79, 2003.

[36] *Gorbuzov V.N.* Construction of the first integrals and the last multipliers of polynomial autonomous multidimensional differential systems // Differential Equations, 34(4):564–566, 1998.

[37] *Blázquez-Sanz D., Pantazi Ch.* A note on the Darboux theory of integrability of non-autonomous polynomial differential systems // Nonlinearity, 25:2615–2624, 2012.

достаточных, но и необходимых условий интегрируемости по Дарбу неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений в научной литературе почти не рассматривались.

Отметим, что алгебраические инварианты и инвариантные поверхности чрезвычайно важны и с прикладной точки зрения. Прежде всего, это связано с тем, что они позволяют находить частные фазовые траектории рассматриваемых дифференциальных уравнений[38,39]. Например, предельные циклы динамических систем на плоскости могут являться овалами инвариантных алгебраических кривых. Также инварианты позволяют разбивать фазовое пространство рассматриваемой системы на области, в которых поведение траекторий может изучаться независимо.

В последние годы вопросы построения инвариантных кривых и поверхностей, а также первых интегралов, являющихся функциями Дарбу и Лиувилля, активно изучаются. Большой вклад в исследование подобных задач внесли Дж. П. Жуанолоу (J.P. Jouanolou), М. В. Долов, Л.А. Черкас, Дж. Ллибре (J. Llibre), К. Валлс (C. Valls), Дж. Чаваррига (J. Chavarriga), Х. Чжан (X. Zhang), Х. Жолондек (H. Żołądec), В.Г. Романовский, Дж. Жинне (J. Giné), А. Феррагут (A. Ferragut), Г. Джакомини (H. Giacomini).

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является исследование интегрируемости и разрешимости нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, встречающихся в различных областях физики, прикладной математики, экономики и т. п.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1. Разработать метод построения и классификации алгебраических инвариантов автономных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Разработать метод построения и классификации инвариантных алгебраических кривых и инвариантных поверхностей для автономных и неавтономных полиномиальных систем дифференциальных уравнений на плоскости.

3. Разработать метод нахождения мероморфных решений автономных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

[38] *Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A.G.* Qualitative Theory of Second–Order Dynamic Systems, Wiley, New York, 1973.

[39] *Zhang, X.* The 16th Hilbert problem on algebraic limit cycles // J. Diff. Eq., 251(7):1778–1789, 2011.

4. Применить предложенные методы для исследования интегрируемости и разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений, которые или ранее не изучались в рамках других подходов, или для которых в научной литературе нет исчерпывающих сведений об их интегрируемости или разрешимости.

Публикации. Автором диссертационной работы опубликовано более 70 научных работ в ведущих российских и зарубежных научных изданиях. Среди этих работ 50 индексируются в базах данных научного цитирования Web of Science и Scopus. Все публикации посвящены теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Список статей, отражающих основные результаты диссертации, приведен в конце настоящего автореферата.

Новизна и научная значимость. В ходе выполнения диссертационной работы впервые получены следующие результаты.

1. Разработан новый метод нахождения алгебраических инвариантов автономных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод основан на разложении многочленов, задающих инварианты, на множители над алгебраически замкнутым полем рядов Пюизе в окрестности бесконечно удаленной точки. Для широких классов обыкновенных дифференциальных уравнений метод позволяет находить решение проблемы Пуанкаре в тех случаях, когда не работают классические оценки. Метод может быть реализован с использованием компьютерных систем символьных вычислений, таких как Maple, Wolfram Mathematica, Matlab и т. д.

2. Предложен новый метод построения неавтономных алгебраических инвариантов и инвариантных поверхностей для двумерных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод допускает компьютерную реализацию в системах символьных вычислений.

3. Получено общее представление для мероморфных решений автономных обыкновенных дифференциальных уравнений с конечным числом локальных решений, описываемых рядами Лорана в окрестности полюсов, и двумя доминантными дифференциальными мономами вида $\lambda x^l\{x_t - \mu x\}$, где $\lambda\mu \neq 0$ и $l \in \mathbb{N}$.

4. Разработан метод классификации $\mathbb{W}$-мероморфных решений автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что данный метод позволяет находить все $\mathbb{W}$-мероморфные решения для

уравнений с бесконечным числом локальных решений, описываемых рядами Лорана в окрестности полюсов, и/или с нескольких доминантными дифференциальными мономами.

5. Установлена разрешимость проблемы Пуанкаре в классической постановке для семейств автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих свойством конечности.

6. Найдено явное представление для собственных значений инвариантных алгебраических кривых двумерных систем полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений.

7. Предложена локальная теория интегрируемости, названная интегрируемостью Пюизе. Эту теорию можно рассматривать как локальную теорию интегрируемости Дарбу. Разработанная теория позволяет находить необходимые условия существования первых интегралов Дарбу, Лиувилля, а также первых интегралов специального вида, не выражающихся через функции Лиувилля.

8. Получены следующие новые результаты для полиномиальных систем Льенара $x_t = y$, $y_t = -f(x)y - g(x)$ и соответствующих им обыкновенных дифференциальных уравнений $x_{tt} + f(x)x_t + g(x) = 0$:

   I. построены представления неприводимых алгебраических инвариантов в кольце многочленов с коэффициентами, являющимися рядами Пюизе в окрестности бесконечности;

   II. найдены явные представления для собственных значений инвариантных алгебраических кривых;

   III. доказано, что полиномиальные системы Льенара имеют не более одного неприводимого алгебраического инварианта всякий раз, когда степень многочлена $g(x)$ является четным числом и выполнено ограничение $\deg g > 2\deg f + 1$;

   IV. доказано, что полиномиальные системы Льенара одновременно имеют не более двух различных неприводимых алгебраических инвариантов при выполнении следующих условий

   - $\deg f < \deg g < 2\deg f + 1$,
   - $\deg g = 2\deg f + 1$ и старшие коэффициенты многочленов $f(x)$ и $g(x)$ не удовлетворяют резонансному условию;

V. доказано, что типичная нелинейная полиномиальная система Льенара не имеет алгебраических инвариантов и не интегрируема по Лиувиллю; при этом для любых степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющих условию $\deg f < \deg g$, существуют подсистемы, обладающие алгебраическими инвариантами и интегрируемые по Лиувиллю;

VI. установлено, что полиномиальные системы Льенара при выполнении условий $\deg g > \deg f$ и $\deg g \neq 2\deg f + 1$ не интегрируемы по Дарбу;

VII. получены достаточные условия интегрируемости по Лиувиллю; показано, что эти условия являются и необходимыми, если $\deg g \neq 2\deg f + 1$ или $\deg g = 2\deg f + 1$ и система является нерезонансной на бесконечности;

VIII. классифицированы полиномиальные системы Льенара, обладающие неавтономными первыми интегралами и последними множителями Якоби с зависящим от времени экспоненциальным множителем; эта классификация является полной при выполнении условия $\deg g \neq 2\deg f + 1$;

IX. найдены новые интегрируемые по Лиувиллю системы Льенара, параметризованные произвольными многочленами; получены явные выражения для первых интегралов.

9. Найдено необходимое условие существования экспоненциальных инвариантов с неполиномиальным аргументом.

10. Новые методы и теоретические наработки диссертационной работы использовались при получения следующих результатов для важных с прикладной точки зрения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

    I. классифицированы неприводимые алгебраические инварианты следующих автономных уравнений:

    - уравнение Гельмгольца – ван дер Поля,
    - обобщенное уравнение Дуффинга,
    - обобщенное уравнение Дуффинга – ван дер Поля,
    - уравнение Льенара пятой степени с линейной функцией, описывающей затухание;

II. доказано, что при определенных значениях параметров

   - уравнение Гельмгольца – ван дер Поля,
   - обобщенное уравнение Дуффинга – ван дер Поля,
   - уравнение Льенара пятой степени с линейной функцией, описывающей затухание,
   - уравнение Льенара четвертой степени с квадратичной функцией, описывающей затухание,

   имеют неприводимые алгебраические инварианты степеней выше второй относительно переменной $y = x_t$; этот результат показывает ошибочность некоторых научных работ, посвященных инвариантным алгебраическим кривым и первым интегралам дифференциальных уравнений Льенара;

III. показано, что проблема Пуанкаре в классической постановке не имеет решения для уравнений Гельмгольца – ван дер Поля; проведена классификация неприводимых алгебраических инвариантов, степени которых зависят от параметров исходных уравнений;

IV. найдены необходимые и достаточные условия интегрируемости по Лиувиллю для следующих автономных уравнений:

   - уравнение Гельмгольца – ван дер Поля,
   - обобщенное уравнение Дуффинга,
   - обобщенное уравнение Дуффинга – ван дер Поля,
   - уравнение Льенара пятой степени с линейной функцией, описывающей затухание,
   - уравнение Льенара четвертой степени с квадратичной функцией, описывающей затухание,
   - уравнение Льенара пятой степени с кубической функцией, описывающей затухание;

V. для обобщенного уравнения Дуффинга – ван дер Поля классифицированы неавтономные последние множители Якоби, являющиеся функциями Дарбу с зависящим от времени экспоненциальным множителем;

VI. решена проблема интегрируемости по Пюизе для уравнения Льенара пятой степени с кубической функцией, описывающей затухание, в явном виде найдены первые интегралы, не являющиеся функциями Лиувилля;

VII. доказано отсутствие алгебраических предельных циклов для уравнения Гельмгольца – ван дер Поля, обобщенного уравнения Дуффинга – ван дер Поля и уравнения Льенара пятой степени с линейной функцией, описывающей затухание;

VIII. классифицированы инвариантные поверхности для неавтономных уравнений Дуффинга и Дуффинга – ван дер Поля с произвольной вынуждающей силой;

IX. доказана неинтегрируемость по Дарбу неавтономного уравнения Дуффинга – ван дер Поля с произвольной вынуждающей силой;

X. проведена классификация алгебраических инвариантов обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, возникающих как редукции к переменным бегущей волны дисперсионного уравнения Курамото – Сивашинского и модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского, найдены новые алгебраически инвариантные решения модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского;

XI. найдены все $\mathbb{W}$-мероморфные решения семейства обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, эквивалентного системе Лоренца, построены ранее неизвестные мероморфные решения системы Лоренца;

XII. получены все $\mathbb{W}$-мероморфные решения семейства обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, возникающего при переходе к переменным бегущей волны в обобщенном уравнении Розенау – Кортевега – де Вриза и в уравнении Кортевега – де Вриза – Бюргерса пятого порядка.

Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы. Предложенные в диссертационной работе новые методы построения алгебраических инвариантов, инвариантных поверхностей, мероморфных решений имеют широкую область применимости. В автономном случае последний шаг метода является алгебраическим, что позволяет применять мощные алгоритмы алгебраической геометрии (базисы Гребнера, результанты и т. п.). Метод построения мероморфных решений обобщает ряд других методов, таких как методы подстановок и метод вспомогательных уравнений. Разработанные методы позволяют не только находить некоторые инварианты, но и проводить их классификацию. Для заданных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка метод построения алгебраических инвариантов может быть использован при решении проблемы Пуанкаре, а также при решении второй части 16-ой проблемы Гильберта в алгебраической постановке[39]. Вторая часть 16-ой проблемы Гильберта состоит в исследовании числа и взаимного расположения предельных циклов двумерных полиномиальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В рамках алгебраической постановки учитываются только предельные циклы, задаваемые овалами алгебраических кривых. Эффективность разработанных методов была продемонстрирована в диссертационной работе на большом количестве примеров, важных с практической точки зрения.

Явное представление для собственных значений инвариантных алгебраических кривых двумерных систем полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет находить необходимые условия интегрируемости по Дарбу и Лиувиллю до фактического построения инвариантов, что значительно упрощает исследование интегрируемости.

Теория локальной интегрируемости (интегрируемость по Пюизе), разработанная в диссертационной работе, может быть использована для построения глобальных необходимых условий существования алгебраических инвариантов и первых интегралов, являющихся функциями Лиувилля, а также более сложных первых интегралов.

В научной литературе встречаются работы, содержащие ошибки в классификации алгебраических инвариантов и первых интегралов. Применение разработанных методов позволило исправить некоторые из ошибок, а также получить новые интегрируемые и точно решаемые уравнения.

Результаты классификации интегрируемых и разрешимых полиномиальных систем Льенара могут быть использованы при исследовании качественных свойств моделей, возникающих во многих областях науки.

Методы, предложенные в диссертационной работе, могут быть в дальнейшем использованы для исследования других обыкновенных дифференциальных уравнений и систем.

Основные научные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения:

1. метод построения алгебраических инвариантов автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений;
2. метод построения неавтономных алгебраических инвариантов и связанных с ними инвариантных поверхностей для двумерных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений;

3. метод классификации $\mathbb{W}$-мероморфных решений автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений;
4. новые алгоритмы для теории интегрируемости Дарбу;
5. локальная теория интегрируемости Пюизе;
6. результаты классификации неприводимых алгебраических инвариантов для ряда обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, включая некоторые уравнения, важные с прикладной точки зрения: уравнение Дуффинга, уравнение Дуффинга – ван дер Поля, уравнение Гельмгольца – ван дер Поля и их обобщения;
7. свойства инвариантных алгебраических кривых и первых интегралов полиномиальных дифференциальных систем Льенара;
8. необходимые и достаточные условия интегрируемости по Лиувиллю для полиномиальных дифференциальных систем Льенара;
9. результаты классификации полиномиальных дифференциальных систем Льенара, обладающих неавтономными первыми интегралами и неавтономными последними множителями Якоби с зависящим от времени экспоненциальным множителем;
10. результаты классификации алгебраически инвариантных и $\mathbb{W}$-мероморфных решений для системы Лоренца и обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных при переходе к переменным бегущей волны в следующих уравнениях в частных производных: модифицированное уравнение Курамото – Сивашинского, обобщенное уравнения Розенау – Кортевега – де Вриза и уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса пятого порядка.

Достоверность, обоснованность и личный вклад автора. Теоретические результаты диссертационной работы получены с использованием методов, концепций и положений аналитической теории дифференциальных уравнений, алгебраической геометрии и асимптотического анализа. Все математические утверждения и теоремы имеют строгие доказательства. Классификационные результаты, полученные с привлечением символьных вычислений, были проверены или с помощью различных команд и пакетов, доступных в Maple, или с помощью нескольких систем символьных вычислений, включая Maple, Wolfram Mathematica и Matlab. Выносимые на защиту положения и результаты прошли рецензирование в международных высокорейтинговых журналах, а также докладывались и обсуждались на российских и международных конференциях и семинарах. К защите представлены четырнадцать статей, одиннадцать из которых написаны без соавторов. Из статей, написанных в соавторстве, на защиту выносятся результаты, полученные лично автором диссертационной работы. В статье (9) автором диссертационной работы получены результаты разделов 2, 3 и 5. В статье (11) автором диссертационной работы доказаны Теоремы 1.1 и 1.2, подпункт a. В статье (12) автором диссертационной работы доказаны Теоремы 2 и 3.

Апробация результатов диссертационной работы. Результаты диссертационного исследования представлялись на следующих конференциях и семинарах:

- Пленарный доклад *«Инвариантные алгебраические многообразия и интегрируемость обыкновенных дифференциальных уравнений»*, Четвертая конференция математических центров России, Санкт-Петербург, август 2024;
- Доклад *«Invariants and integrability of polynomial Liénard and Levinson–Smith differential systems»*, международная конференция «Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite–Dimensional Analysis», Долгопрудный, июль 2023;
- Лекция *«Invariant algebraic manifolds of ordinary differential equations»*, международный семинар «Online GSDUAB Seminar», организованный Автономным Университетом Барселоны, февраль 2023, on–line;
- Доклад *«Invariants and integrability of polynomial vector fields»*, международная конференция «Shilnikov Workshop 2022», Нижний Новгород, декабрь 2022;
- Доклад *«Теория интегрируемости Дарбу для полиномиальных дифференциальных систем на плоскости»*, Вторая конференция Математических центров России, Москва, ноябрь 2022;
- Доклад *«Algebraic and geometric aspects of the Darboux theory of integrability»*, международная конференция «Conference on Dynamics of Differential Equations», организованная Китайско-Российским Математическим Центром (Sino-Russia Mathematics Center), Сычуаньский Университет, Китай, август 2022, on–line;

- Доклад *«The Darboux theory of integrability for polynomial Liénard differential systems»*, международная конференция «The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations», Москва, июль 2022;

- Лекция *«Алгебраические инварианты и теория интегрируемости Дарбу»*, Общегородской семинар им. А. М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, апрель 2022, on–line;

- Доклад *«Darboux and Puiseux integrability for polynomial vector fields in the plane»*, международная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения (Банное 2022)», Южный Урал, Якты–Куль (озеро Банное), март 2022;

- Доклад *«W-meromorphic solutions of autonomous ordinary differential equa- tions and related topics»*, международная конференция «Mathematical Phy- sics, Dynamical Systems and Infinite–Dimensional Analysis», Долгопрудный, июнь–июль 2021, on–line;

- Доклад *«From Puiseux series to algebraic invariants»*, международная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения (Банное 2021)», Южный Урал, Якты–Куль (озеро Банное), март 2021;

- Лекция *«Algebraic invariants, integrability, and meromorphic solutions»*, международный семинар «CAvid: Complex Analysis video seminar», организованный профессором Лондонского университетского колледжа Р. Хальбурдом (R. Halburd), февраль 2021, on–line;

- Доклад *«The Poincaré problem and algebraic invariants»*, международная конференция «Formal and Analytic Solutions of Diff.-Equations on the Internet (FASnet20)», организованная Университетом Алькала, Испания, июнь 2020, on–line;

- Доклад *«Puiseux series, invariant algebraic curves and integrability of planar polynomial dynamical systems»*, международная конференция «Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov Workshop», Нижний Новгород, декабрь 2019;

- Доклад *«Дробно-степенные ряды и интегрируемость алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка»*, научный семинар «Перспективные математические технологии», Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова НИУ ВШЭ, ноябрь 2019;

- Доклад *«Ряды Пюизё, алгебраические инварианты и интегрируемость полиномиальных динамических систем на плоскости»*, научный семинар по аналитической теории дифференциальных уравнений, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, октябрь 2019;
- Доклад *«Liouvillian integrability of polynomial dynamical systems in the plane»*, международная конференция «Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite–Dimensional Analysis», Долгопрудный, июнь 2019;
- Доклад *«Finding algebraic invariants and algebraically invariant solutions»*, международная конференция «Partial Differential Equations and Applications in Memory of Professor B.Yu. Sternin», Москва, ноябрь 2018;
- Доклад *«Invariant algebraic curves and Liouvillian first integrals for polynomial dynamical systems in the plane»*, 7-ая международная конференция «Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling», Москва, июнь 2018.

Дополнительная информация. Исследования, представленные в настоящей диссертационной работе, поддержаны грантом Российского Научного Фонда 19–71–10003 «Алгебраические и аналитические методы теории нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их приложения к исследованию конечномерных динамических систем», 2019 г. – 2024 г., руководителем которого являлся автор диссертационной работы.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Диссертационная работа содержит 365 страницы, 16 рисунков и 11 таблиц. Список литературы состоит из 218 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** дается краткая характеристика диссертационной работы, обосновывается ее актуальность, формулируются цель и задачи диссертационного исследования, описаны предметная область и степень разработанности темы, перечислены основные положения выносимые на защиту, отмечена научная новизна, достоверность и практическая значимость результатов, указаны основные используемые подходы и методы исследования, отмечен личный вклад автора, приведена апробация основных положений диссертационной работы.

Глава 1 посвящена теории инвариантных алгебраических многообразий и алгебраических инвариантов автономных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. В разделах 1.1 и 1.2 Главы 1 даются основные определения и приводятся общие сведения теории инвариантных многообразий. В разделе 1.1 рассматривается двумерный случай, в разделе 1.2 – многомерный. Подмногообразие в фазовом пространстве k-мерной дифференциальной системы вида

$$x_{j,t} = X_j(x), \qquad 1 \leq j \leq k, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_k)$ и $X_1(x)$, …, $X_k(x)$ – многочлены с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$, называют инвариантным многообразием этой системы, если оно инвариантно относительно фазового потока системы. Другими словами, орбиты, которые начинаются на инвариантном многообразии, остаются на нем. Инвариантное многообразие является алгебраическим инвариантным многообразием коразмерности m, если оно лежит на пересечении m алгебраических поверхностей, где $m \in \mathbb{N}$ и $m < k$. Инвариантные алгебраические многообразия коразмерности $k - 1$ представляют собой инвариантные алгебраические кривые исследуемой системы.

Инвариантные многообразия играют большую роль при описании динамики систем обыкновенных дифференциальных уравнений[30]. Знание инвариантных алгебраических многообразий коразмерности 1 позволяет исследовать интегрируемость по Дарбу[40] дифференциальных систем вида (1). Также инвариантные многообразия широко используются и в теории уравнений в частных производных[41].

Если исследуемой системе (1) методом исключения переменных или с помощью обратимых преобразований можно поставить в соответствие полиномиальное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка k, то для построения инвариантных алгебраических многообразий удобно использовать концепцию совместных дифференциальных уравнений. Полиномиальное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $l \in \mathbb{N}$, $l < k$ назовем совместным с рассматриваемым уравнением порядка k, если любое

[40] *Llibre J., Zhang X.* On the Darboux integrability of polynomial differential systems // Qualitative theory of dynamical systems. 11:129–144, 2012.

[41] Habibullin I. T., Khakimova A. R. Invariant manifolds and Lax pairs for integrable nonlinear chains // Theoretical and Mathematical Physics. 191(3):369–388, 2017.

непостоянное решение уравнения меньшего порядка также удовлетворяет уравнению большего порядка. Порядок l совместного дифференциального уравнения связан с коразмерностью m соответствующего инвариантного алгебраического многообразия с помощью равенства $m = k - l$. Символом $\mathbb{C}[s_1, \ldots, s_n]$ обозначим кольцо многочленов от $n \in \mathbb{N}$ переменных с комплекснозначными коэффициентами. Неприводимый многочлен $F(x, y_1, \ldots, y_l) \in \mathbb{C}[x, y_1, \ldots, y_l] \setminus \mathbb{C}[x]$, определяющий совместное обыкновенное дифференциальное уравнение $F\left(x, x_t, \ldots x_t^{(l)}\right) = 0$, назовем *алгебраическим инвариантом* порядка l исходного дифференциального уравнения или системы. Здесь $x_t^{(j)}$ – это производная функции $x(t)$ порядка j. Любое непостоянное решение дифференциального уравнения $F\left(x, x_t, \ldots x_t^{(l)}\right) = 0$, где $F(x, y_1, \ldots, y_l)$ – алгебраический инвариант, назовем *алгебраически инвариантным решением* исследуемого дифференциального уравнения или системы. Алгебраический инвариант $F(x, y_1, \ldots, y_l)$ неприводим, если соответствующий многочлен $F(x, y_1, \ldots, y_l)$ неприводим в кольце $\mathbb{C}[x, y_1, \ldots, y_l]$. Также предполагаем, что алгебраические инварианты, связанные преобразованием $F \mapsto cF$, где $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, принадлежат одному и тому же классу эквивалентности. Нас будет интересовать только один представитель из каждого класса. В диссертационной работе детально исследуется задача построения всех неприводимых алгебраических инвариантов порядка 1. Далее упоминание порядка и нижний индекс у переменной y_1 будут опущены.

Алгебраические инварианты и соответствующие им обыкновенные дифференциальные уравнения возникают в некоторых областях математики под различными именами: полуинварианты, вспомогательные уравнения, простейшие уравнения и т. д. Алгебраически инвариантные решения автономных уравнений в частных производных в переменных бегущей волны при выполнении некоторых дополнительных условий были названы алгебраическими бегущими волнами[27] в работе А. Гасулла (A. Gasull) и Х. Джакомини (H. Giacomini).

В разделах 1.3 и 1.4 Главы 1 представлен новый метод нахождения алгебраических инвариантов обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$E\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}, \frac{d^k x}{dt^k}\right) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{2}$$

В этом выражении E является неприводимым многочленом от нескольких переменных с комплекснозначными коэффициентами. Независимая переменная t также является комплекснозначной. Предложенный метод основан на разложении алгебраических инвариантов на множители над алгебраически замкнутыми полями рядов Пюизе. Дробно-степенные ряды или ряды Пюизе являются обобщениями рядов Лорана. Ряд Пюизе с центром в точке $x_0 \in \mathbb{C}$ выглядит следующим образом

$$y(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} c_l (x - x_0)^{\frac{n_0+l}{n_1}}, \quad c_0 \neq 0, \tag{3}$$

где $n_0 \in \mathbb{Z}$ и $n_1 \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности можно считать, что число n_1 является взаимно простым с наибольшим общим делителем чисел $\{n_0 + l : c_l \neq 0,\ l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Аналогично, ряд Пюизе с центром в точке $x = \infty$ имеет вид

$$y(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} b_l x^{\frac{n_0-l}{n_1}}, \quad b_0 \neq 0, \tag{4}$$

где $n_0 \in \mathbb{Z}$ и $n_1 \in \mathbb{N}$. Опять предполагаем, что число n_1 является взаимно простым с наибольшим общим делителем чисел $\{n_0 - l : b_l \neq 0, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Число n_1 называют индексом ветвления соответствующего ряда. Множество всех формальных рядов Пюизе вида (3) или (4) образует алгебраически замкнутое поле, которое обозначим символом $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ или $\mathbb{C}_\infty\{x\}$ соответственно. Также будем рассматривать кольца многочленов от одной переменной, коэффициенты которых лежат в поле $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ или $\mathbb{C}_\infty\{x\}$. Для соответствующих колец введем обозначения $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ или $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$. Поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ и $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, снабженные операторами дифференцирования $(\partial_x)^j$, $j \in \mathbb{N}$: $\mathbb{C}_{x_0}\{x\} \to \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, где $x_0 \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, становятся дифференциальными полями. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ оператор дифференцирования $(\partial_x)^j$ определяется как формальный оператор со стандартными свойствами, сходными с теми, которые справедливы для сходящихся рядов Пюизе.

Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Будем говорить, что два ряда Пюизе $y_1(x)$ и $y_2(x)$ из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ различны, если выполнено соотношение $y_1(x) - y_2(x) \neq O_{x_0}$, где O_{x_0} – нулевой элемент поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$. Предположим, что $S(x, y)$ является элементом кольца $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$. Введем два оператора проектирования, действующих в этом кольце. Первый оператор $\{S(x, y)\}_+$ дает сумму мономов $S(x, y)$ с неотрицательными целыми степенями. Другими словами, $\{S(x, y)\}_+$ определяет полиномиальную часть элемента $S(x, y)$. Аналогично, проекция $\{S(x, y)\}_- = S(x, y) - \{S(x, y)\}_+$ задает неполиномиальную часть выражения $S(x, y)$. Легко убедиться, что эти проекции являются линейными операторами.

Дифференциальное уравнение (2) является автономным. Следовательно, его порядок можно понизить с помощью новой зависимой функции $y(x)$, определяемой соотношением $x_t = y(x)$. Такая подстановка позволяет рассматривать следующее неавтономное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $k-1$:

$$H\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}\right) = 0. \tag{5}$$

В этом выражении H представляет собой многочлен своих аргументов. Используя алгебраическую замкнутость поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, в Главе 1 доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Неприводимый многочлен $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}[x]$ степени $N \in \mathbb{N}$ относительно переменной y является алгебраическим инвариантом уравнения (2) тогда и только тогда, когда существуют многочлен $\mu(x) \in \mathbb{C}[x]$ и попарно различные ряды Пюизе $y_{1,\infty}(x)$, …, $y_{N,\infty}(x)$ из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, которые удовлетворяют уравнению (5), такие, что справедливо представление*

$$F(x,y) = \left\{\mu(x) \prod_{n=1}^{N} \{y - y_{n,\infty}(x)\}\right\}_+ \tag{6}$$

и условие

$$\left\{\mu(x) \prod_{j=1}^{N} \{y - y_{\infty,j}(x)\}\right\}_- = 0. \tag{7}$$

Более того, степень N многочлена $F(x,y)$ относительно переменной y не превосходит числа различных рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющих уравнению (5), если это число конечно.

Из Теоремы 1 следует, что уравнение (2) не имеет алгебраических инвариантов, если не существует рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющих его неавтономной редукции (5).

Далее в разделе 1.3 Главы 1 рассматривается задача поиска коэффициента $\mu(x) \in \mathbb{C}[x]$ алгебраического инварианта $F(x,y)$, стоящего при старшей степени относительно переменной y. Нули многочлена $\mu(x)$ могут быть определены с использованием рядов Пюизе с центрами в конечных точках, которые имеют отрицательные показатели степеней в доминантных членах и удовлетворяют уравнению (5).

Теорема 1 лежит в основе метода построения алгебраических инвариантов, названного методом рядов Пюизе. Кратко опишем основные шаги этого метода.

На *первом шаге* следует найти все ряды Пюизе с центрами в конечных точках и на бесконечности, которые являются формальными решениями уравнения (5).

На *втором шаге* используется Теорема 1 для того, чтобы записать разложение на множители неприводимого алгебраического инварианта в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$, см. соотношение (6). Допустимые нули многочлена $\mu(x)$ могут быть получены с помощью рядов Пюизе с центрами в конечных точках $x_0 \in \mathbb{C}$, имеющих отрицательные показатели степеней в доминантных мономах. Если ряд Пюизе с индексом ветвления больше 1 появляется в представлении (6), то все сопряженные ряды Пюизе

$$y^{(m)}(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} (\varepsilon_{n_1})^{m(n_0-l)} b_l x^{\frac{n_0-l}{n_1}}, \quad m = 0, \ldots, n_1 - 1, \tag{8}$$

которые могут быть получены друг из друга в результате обхода точки $x = \infty$, должны также присутствовать в представлении (6). Символ ε_{n_1} в выражении (8) обозначает примитивный корень степени n_1 из единицы. Далее необходимо потребовать, чтобы выполнялось следующее условие

$$\left\{ \mu(x) \prod_{j=1}^{N} \{y - y_{\infty,j}(x)\} \right\}_- = 0, \tag{9}$$

которое порождает алгебраическую систему, состоящую, вообще говоря, из бесконечного числа уравнений. Теорема Гильберта о базисе позволяет работать с конечными подсистемами.

Третий шаг состоит в решении некоторой конечной алгебраической подсистемы и проведении проверки. Требуется убедиться, что совместны дифференциальное уравнение (5) и алгебраическое уравнение $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ определяется формулой (6).

Приводимая ниже теорема позволяет извлекать алгебраические уравнения системы из условия (9).

Теорема 2. *Многочлен $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}[x]$ степени $N \in \mathbb{N}$ относительно переменной y является алгебраическим инвариантом уравнения* (2) *тогда и только тогда, когда существует N рядов Пюизе $y_{1,\infty}(x)$, …, $y_{N,\infty}(x)$ из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, которые удовлетворяют уравнению* (5) *и соотношениям*

$$\left\{ \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} w_{k-j}(x) S_j(y_{1,\infty}(x), \ldots, y_{N,\infty}(x)) \right\}_- = 0, \quad 1 \le k \le N, \tag{10}$$

где многочлены $\{w_m(x) \in \mathbb{C}[x], 1 \le m \le N\}$ *определяются следующим образом*

$$w_m(x) = \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} w_{m-j}(x) S_j(y_{1,\infty}(x), \ldots, y_{N,\infty}(x)) \right\}_+ \qquad (11)$$

и $w_0(x) = \mu(x)$. *Многочлен* $\mu(x) \in \mathbb{C}[x]$ *является коэффициентом алгебраического инварианта* $F(x, y)$*, стоящим при старшей степени относительно переменной* y.

Соотношения (10) представляют собой необходимые и достаточные условия существования алгебраических инвариантов. После того как проведена классификации рядов Пюизе, удовлетворяющих уравнению (5), вычисление алгебраических инвариантов становится полностью алгебраическим.

Также в разделе 1.3 Главы 1 рассматриваются свойства единственности алгебраических инвариантов. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. *Предположим, что ряд Пюизе* $y_{x_0}(x)$*, принадлежащий полю* $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ *при некотором* $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$*, имеет фиксированные коэффициенты и показатели степеней, а также удовлетворяет уравнению* (5). *Тогда существует не более одного неприводимого алгебраического инварианта* $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}[x]$ *уравнения* (2)*, такого что ряд* $y_{x_0}(x)$ *является решением уравнения* $F(x, y) = 0$.

Теорема 4. *Если при некотором* $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ *число различных рядов Пюизе из поля* $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$*, удовлетворяющих уравнению* (5)*, конечно, то уравнение* (2) *имеет конечное число неприводимых алгебраических инвариантов. Более того, число попарно различных неприводимых алгебраических инвариантов не превышает числа различных рядов Пюизе из поля* $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$*, которые удовлетворяют уравнению* (5).

В разделе 1.4 Главы 1 рассматривается вопрос поиска решений алгебраических систем, возникающих при использовании метода рядов Пюизе, если в представлении (6) появляются ряды Пюизе с произвольными коэффициентами. Произвольные коэффициенты возникают вследствие наличия неотрицательных рациональных показателей Ковалевской в асимптотических рядах Пюизе, удовлетворяющих уравнению (5). Следующая теорема, доказанная разделе 1.4 Главы 1, может применяться при построении и исследовании единственности алгебраических инвариантов, когда все ряды Пюизе в представлении (6) обладают произвольными коэффициентами.

Теорема 5. *Рассмотрим систему алгебраических уравнений вида*

$$\sum_{j=1}^{M} (\beta_j)^k = M\varrho_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_M \in \mathbb{C}$, $M \in \mathbb{N}$ *— неизвестные величины, а* $\{\varrho_k\}$ *— заданные комплексные числа. Пусть при некотором* $M_0 \in \mathbb{N}$ *эта система имеет решение* $(\beta_1, \ldots, \beta_{M_0})$*, для которого выполнено* $\beta_{j_1} \neq \beta_{j_2}$ *при* $j_1 \neq j_2$*. Тогда другие решения системы существуют лишь при следующих значениях параметра:* $M = lM_0$*, где* $l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$*. При этом решения состоят из* l *повторений для каждого элемента из кортежа* $(\beta_1, \ldots, \beta_{M_0})$*. Кортежи, полученные друг из друга перестановкой элементов, считаются эквивалентными. Мы учитываем только одного представителя из каждого класса эквивалентности.*

Поиск оценки сверху для степеней неприводимых инвариантных алгебраических кривых двумерных полиномиальных дифференциальных систем называют *проблемой Пуанкаре*[29]. В разделе 1.5 Главы 1 приводится обобщение проблемы Пуанкаре с двумерного случая на случай алгебраических инвариантов и автономных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольных порядков. Рассмотрим множество обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2), параметризованное некоторым набором коэффициентов. Проблему нахождения оценки сверху для степеней неприводимых алгебраических инвариантов уравнений (2) из заданного множества будем называть проблемой Пуанкаре для рассматриваемого множества уравнений. В Главе 1 показано, что если уравнения из этого множества обладают определенными свойствами конечности, то задача Пуанкаре имеет решение.

Автору неизвестны методы, отличные от метода рядов Пюизе, позволяющие находить не некоторые, а все неприводимые алгебраические инварианты для широких классов автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка выше второго ($k > 2$). Сравним метод рядов Пюизе с другими методами построения алгебраических инвариантов для полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка ($k = 2$) и двумерных полиномиальных дифференциальных систем. Напомним, что алгебраические инварианты порождают инвариантные алгебраические кривые соответствующей системы дифференциальных уравнений. Наиболее часто используемыми методами являются метод неопределенных коэффициентов, метод Лагутинского[42] и алгоритм, основанный на разложении векторного поля, связанного с исходной системой, на весооднородные компоненты[3]. Метод Лагутинского требует вычисления некоторых полиномиальных определителей, которые, как правило, являются очень громоздкими. Этот метод получил дальнейшее развитие в работах[43,44,45]. Метод неопределенных коэффициентов и метод Лагутинского не позволяют провести классификацию неприводимых алгебраических инвариантов за исключением некоторых тривиальных случаев. Действительно, эти методы требуют априорную информацию о верхней оценке для степеней неприводимых алгебраических инвариантов. Метод разложения векторного поля на весооднородные компоненты приводит к бесконечной последовательности уравнений в частных производных. Не существует хорошо проработанного алгоритма поиска полиномиальных решений таких систем, если изучаемая дифференциальная система и соответствующее ей неавтономное обыкновенное дифференциально уравнение первого порядка не обладают свойствами конечности. В то же время метод рядов Пюизе сводит рассматриваемую задачу к решению алгебраической системы, что является значительным преимуществом предлагаемого в диссертационной работе метода. Еще одним достоинством метода рядов Пюизе является тот факт, что для многих дифференциальных систем он позволяет определять значения степеней неприводимых алгебраических инвариантов без выполнения сложных вычислений. Это сравнение показывает, что метод рядов Пюизе является мощным инструментом поиска и классификации инвариантных алгебраических кривых и соответствующих алгебраических инвариантов.

Наконец, несколько примеров применения метода рядов Пюизе приведены в разделе 1.6 Главы 1. В частности, выполнена классификация неприводимых алгебраических инвариантов для следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$x_{ttt} + \sigma x_{tt} + \alpha x_t - 60x^2 + \beta = 0, \tag{13}$$

$$x_{ttt} + \sigma x_{tt} + \alpha x_t - 40x^3 + v_0 x + \beta = 0. \tag{14}$$

[42] *Лагутинский М. Н.* О некоторых полиномах и связи их с алгебраическим интегрированием обыкновенных дифференциальньных алгебраических уравнений // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. 1912. Т. 13. С. 200–224.

[43] *Christopher C., Llibre J., Pereira J. V.* Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields // Pacific J. of Math., 229:63–117, 2007.

[44] *Малых М. Д.* Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М. Н. Лагутинского // Вестник НИЯУ МИФИ. 5(24): 327–336, 2016.

[45] *Malykh M. D., Sevastianov L. A., Ying Yu.* On algebraic integrals of a differential equation // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. 27(2): 105–123, 2019.

Эти уравнения возникают в результате перехода к переменным бегущей волны в дисперсионном уравнении Курамото – Сивашинского и в модифицированном уравнении Курамото – Сивашинского соответственно. Найдены ранее неизвестные точные решения уравнения (14).

Символом D обозначим открытое подмножество в $\mathbb{C}^2$, имеющее ненулевую меру Лебега. Непостоянную функцию $I(x,y)$: $D \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ называют первым интегралом системы дифференциальных уравнений (15) и связанного с системой векторного поля $\mathcal{X} = P(x,y)\partial_x + Q(x,y)\partial_y$ на $D \subset \mathbb{C}^2$, если эта функция постоянна на всех интегральных кривых $(x(t), y(t))$ системы, содержащихся в D.

В **<u>Главе 2</u>** рассматривается задача поиска первых интегралов, заданных функциями Дарбу или Лиувилля, для двумерных систем вида

$$x_t = P(x,y), \quad y_t = Q(x,y), \quad P(x,y), Q(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \tag{15}$$

и связанных с ними обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x,y)y_x - Q(x,y) = 0 \tag{16}$$

возникает в результате понижения порядка в системе (15) и выступает в роли уравнения (5) при построении алгебраических инвариантов.

Раздел 2.1 Главы 2 посвящен описанию теории интегрируемости Дарбу. Хорошо известно, что в некоторой окрестности неособой точки система (15) всегда имеют голоморфный первый интеграл. С геометрической точки зрения векторное поле $\mathcal{X}$, соответствующее системе (15), в окрестности неособой можно выпрямить[46,47]. Существование формальных и аналитических первых интегралов в окрестностях особых точек может быть изучено с помощью теории нормальных форм[48,49]. Однако, эти результаты носят локальный характер и, как правило, не могут быть непосредственно использованы для построения глобальных первых интегралов в явном виде, если последние существуют на некотором открытом подмножестве фазового пространства, имеющем ненулевую меру Лебега. Систем вида (15) и соответствующее ей векторное поле

[46] *Arnold V. I., Ilyashenko Yu. S.* Ordinary differential equations, volume 1, Results of science and technology. Series Modern problems of Mathematics. Fundamental directions, 1985.

[47] *Arnold V. I.* Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Second edition. SpringerVerlag, New York, 1988

[48] *Dulac H.* Points singuliers des équations differéntielles. Mem. Sci. Math., 61, 1934.

[49] *Bruno A. D.* Local methods in nonlinear differential equations. Part I. The local method of nonlinear analysis of differential equations. Part II. The sets of analyticity of a normalizing transformation, volume 86. Springer Series in Soviet Mathematics, 1989.

$\mathcal{X}$ называются *интегрируемыми по Дарбу (по Лиувиллю)*, если они имеют первый интеграл, являющийся функцией Дарбу (Лиувилля). Теория интегрируемости Дарбу для заданного множества систем вида (15) позволяет находить интегрируемые по Дарбу и Лиувиллю подсистемы, когда известны все алгебраические и экспоненциальные инварианты систем из рассматриваемого множества[15,16]. *Экспоненциальным инвариантом* дифференциальной системы (15) и соответствующего ей векторного поля $\mathcal{X}$ называют функцию вида $E(x,y)=\exp[g(x,y)/f(x,y)]$, где $g(x,y)$ и $f(x,y)$ взаимно простые многочлены из кольца $\mathbb{C}[x,y]$, если для некоторого многочлена $\varrho(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$ выполнено соотношение $\mathcal{X}E=\varrho(x,y)E$.

Область определения операторов проектирования $\{S(x,y)\}_+$ и $\{S(x,y)\}_-$ может быть расширена на кольцо рядов Пюизе с центром в точке $y=\infty$, коэффициенты которых принадлежат полю $\mathbb{C}_\infty\{x\}$. Обозначим это кольцо символом $\mathbb{C}_\infty\{x\}[\{y\}]$. Справедливо соотношение $\{S(x,y)\}_+\in\mathbb{C}[x,y]$, где $S(x,y)\in\mathbb{C}_\infty\{x\}[\{y\}]$.

Собственным значением алгебраического инварианта $F(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$ дифференциальной системы (15) и соответствующего ей векторного поля $\mathcal{X}$ называют многочлен $\lambda(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$, для которого выполнено соотношение $\mathcal{X}F=\lambda(x,y)F$. Следующее явное представление для собственного значения $\lambda(x,y)$ неприводимого алгебраического инварианта $F(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]\setminus\mathbb{C}[x]$ получено в разделе 2.1 Главы 2:

$$\begin{gathered}\lambda(x,y)=\left\{\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{N}\frac{\{Q(x,y)-P(x,y)\partial_x y_{j,\infty}\}(y_{j,\infty})^m}{y^{m+1}}\right.\\ \left.+P(x,y)\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{L}\frac{\nu_l x_l^m}{x^{m+1}}\right\}_+ .\end{gathered}\tag{17}$$

В этом выражении $y_{1,\infty}(x)$, …, $y_{N,\infty}(x)$ – попарно различные ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, появляющиеся в представлении (6), x_1, …, x_L — попарно различные нули многочлена $\mu(x)\in\mathbb{C}[x]$ с кратностями ν_1, …, $\nu_L\in\mathbb{N}$ соответственно и $L\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Отметим, что представление (17) чрезвычайно полезно в теории интегрируемости Дарбу. Действительно, оно позволяет находить необходимые условия интегрируемости по Дарбу или Лиувиллю до фактического построения алгебраических инвариантов.

В разделе 2.1 Главы 2 дается вывод важного для приложений необходимого условия существования экспоненциальных инвариантов с неполиномиальным аргументом. Это условие может быть использовано при доказательстве отсутствия таких экспоненциальных инвариантов для многих прикладных дифференциальных систем.

Изучение автономных первых интегралов и автономных интегрирующих множителей может ограничивать общность, даже если рассматривается автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений. В разделе 2.2 Главы 2 показано, что существование неавтономных первых интегралов и последних множителей Якоби вида $G(x,y)\exp(\omega t)$, где $G(x,y)$ – функция Дарбу и $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, тесно связано с существованием и свойствами алгебраических и экспоненциальных инвариантов.

В разделах 2.3 и 2.4 Главы 2 предложены новые локальная теория инвариантов и локальная теория интегрируемости соответственно. Алгебраическая замкнутость каждого из полей рядов Пюизе $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ позволяет работать с локальными инвариантами, являющимися многочленами не выше первой степени относительно переменной y. Коэффициенты этих инвариантов представляют собой ряды Пюизе из заданного поля. На основе локальной теории инвариантов вводится в рассмотрения локальная теория интегрируемости, названная интегрируемостью по Пюизе. Если система вида (15) интегрируема по Лиувиллю, то она интегрируема и по Пюизе в окрестности любой прямой $\{(x_0,y),\, y \in \overline{\mathbb{C}}\}$, где $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Обратное, вообще говоря, не верно. Новая теория позволяет находить и классифицировать дифференциальные системы (15) с первыми интегралами, не являющимися функциями Лиувилля.

В **Главе 3** изучается интегрируемость и разрешимость полиномиальных дифференциальных систем Льенара

$$x_t = y, \quad y_t = -f(x)y - g(x), \quad f(x),\ g(x) \in \mathbb{C}[x], \quad f(x)g(x) \not\equiv 0 \qquad (18)$$

и связанных с ними обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка $x_{tt} + f(x)x_t + g(x) = 0$. Дифференциальные системы Льенара (18) описывают осцилляторы с трением и восстанавливающей силой, определяемыми многочленами $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Также системы (18) возникают при моделировании различных явлений в физике, химии, биологии, экономике и других областях науки. Теорема 6, доказанная в разделе 3.1 Главы 3, позволяет находить необходимые и достаточные условия существования конечных инвариантных алгебраических кривых и соответствующих неприводимых алгебраических инвариантов.

Теорема 6. *Многочлен $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}$ степени $N > 0$ относительно переменной y определяет инвариантную алгебраическую кривую $F(x,y) = 0$ системы вида (18) тогда и только тогда, когда существует N рядов Пюизе $y_{1,\infty}(x)$, …, $y_{N,\infty}(x)$ из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющих уравнению*

$yy_x + f(x)y + g(x) = 0$ *и условиям*

$$\left\{\sum_{j=1}^{N} y_{j,\infty}(x)\right\}_{-} = 0. \tag{19}$$

Степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ обозначим символами $\deg g$ и $\deg f$ соответственно. К. Одани (K. Odani) доказал[50], что полиномиальные системы Льенара при условиях $\deg f \geq \deg g$, $f(x)g(x) \not\equiv 0$ и $f(x) \not\equiv \alpha g(x)$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ не имеют инвариантных алгебраических кривых. Дж. Либре (J. Llibre) и К. Валлс (C. Valls) показали, что системы (18) при ограничении $\deg g \leq \deg f$ не интегрируемы по Лиувиллю за исключением тривиальных случаев[51]. Соответственно, в Главе 3 исследуются системы (18), удовлетворяющие условию $\deg g > \deg f$. В разделе 3.1 Главы 3 показано, что аналитические свойства алгебраических инвариантов, а также первых интегралов Дарбу и Лиувилля существенно различаются в следующих трех случаях:

(A) $\deg f < \deg g < 2\deg f + 1;$

(B) $\deg g = 2\deg f + 1;$

(C) $\deg g > 2\deg f + 1.$

В разделе 3.1 Главы 3 также получены общие представления алгебраических инвариантов и их собственных значений в кольце $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}[y]$. В разделе 3.2 Главы 3 полностью решена проблема интегрируемости по Лиувиллю, если коэффициенты старших степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$ не удовлетворяют резонансному условию. Резонансное условие может возникать лишь для систем из семейства (B). В разделе 3.2 Главы 3 доказано, что полиномиальные системы Льенара не интегрируемы по Дарбу, за исключением некоторых подсемейств, удовлетворяющих условию (B). Также установлено, что типичные нелинейные системы Льенара, не имеют алгебраических инвариантов и не интегрируемы по Лиувиллю. Однако, для любых степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющих условию $\deg f < \deg g$, существуют полиномиальные системы Льенара, обладающие алгебраическими инвариантами и интегрируемые по Лиувиллю. Найдены ранее неизвестные интегрируемые по Лиувиллю системы Льенара, параметризованные произвольными многочленами. Функции Лиувилля, определяющие первые интегралы, получены в явном виде.

[50] *Odani K.* The limit cycle of the van der Pol equation is not algebraic. Journal of Differential Equations, 115(1):146–152, 1995.

[51] *Llibre J., Valls C.* Liouvillian first integrals for generalized Liénard polynomial differential systems. Adv. Nonlinear Stud., 13:819–829, 2013.

Кроме того, в разделе 3.2 Главы 3 исследуется существование неавтономных первых интегралов Дарбу и неавтономных последних множителей Якоби с экспоненциальным множителем, зависящим от времени.

В разделах 3.3–3.8 Главы 3 подробно рассматриваются некоторые полиномиальные системы Льенара, представляющие большой интерес с прикладной точки зрения. Детально изучаются следующие системы:

1. система Гельмгольца – ван дер Поля
$$x_t = y, \quad y_t = -(\zeta x + \alpha)y - (\varepsilon x^2 + \sigma x + \delta), \quad \zeta\varepsilon \neq 0; \tag{20}$$
2. обобщенная система Дуффинга – ван дер Поля
$$x_t = y, \quad y_t = -(\zeta x^2 + \beta x + \alpha)y - (\varepsilon x^3 + e x^2 + \sigma x + \delta), \quad \zeta\varepsilon \neq 0; \tag{21}$$
3. обобщенная система Дуффинга
$$x_t = y, \quad y_t = -\alpha y - \varepsilon x^n - \sigma x, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad \varepsilon \neq 0; \tag{22}$$
4. система Льенара пятой степени с линейной функцией, описывающей трение,
$$\begin{aligned} x_t = y, \quad y_t = -(\alpha x + \beta)y - (\varepsilon x^5 + r x^4 + \nu x^3 \\ + e x^2 + \sigma x + \delta), \quad \alpha\varepsilon \neq 0; \end{aligned} \tag{23}$$
5. система Льенара четвертой степени с квадратичной функцией, описывающей трение,
$$\begin{aligned} x_t = y, \quad y_t = (\zeta x^2 + \beta x + \alpha)y - (\varepsilon x^4 + \xi x^3 \\ + e x^2 + \sigma x + \delta), \quad \zeta\varepsilon \neq 0; \end{aligned} \tag{24}$$
6. система Льенара пятой степени с кубической функцией, описывающей трение,
$$\begin{aligned} x_t = y, \quad y_t = -(\zeta x^3 + \eta x^2 + \beta x + \alpha)y - (\varepsilon x^5 + \mu x^4 + \xi x^3 \\ + e x^2 + \sigma x + \delta), \quad \zeta\varepsilon \neq 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Заметим, что классическая система Дуффинга – ван дер Поля имеет вид (21) при $\beta = 0$, $e = 0$ и $\delta = 0$. Аналогично классическая система Дуффинга представляется выражением (22) при $n = 3$. Классическая система Гельмгольца принимают вид (22), где $n = 2$. Без потери общности зафиксированы значения некоторых параметров в рассматриваемых системах. А именно: $\zeta = 2$, $\alpha = 0$ в системе (20), $\zeta = 3$, $e = 0$ в системе (21), $\alpha = 5$, $\varepsilon = -3$, $r = 0$ в системе (23), $\zeta = 3$, $\varepsilon = -3$, $\beta = 0$ в системе (24) и $\zeta = 4$, $\varepsilon = -4$, $\eta = 0$ в системе (25). Действительно, такие нормировки можно получить подходящими преобразованиями сдвига, подобия и поворота.

В разделе 3.3 Главы 3 доказана приводимая ниже теорема.

Теорема 7. *Система Гельмгольца – ван дер Поля* (20)*, где* $\zeta = 2$ *и* $\alpha = 0$*, имеет неприводимые алгебраические инварианты неограниченных степеней при условии отсутствия ограничений на коэффициенты уравнения. Справедливы следующие утверждения:*

1. *если* $\delta = -(\varepsilon^2 + 4\sigma)\varepsilon/16$*, то существует неприводимый алгебраический инвариант степени* 1*;*
2. *если* $\sigma = -\varepsilon^2$*, то существует неприводимый алгебраический инвариант степени* 2*;*
3. *если* $\delta = -(2N-3)(2N+1)\varepsilon^3/16$*, то существует неприводимый алгебраический инвариант степени* $2N-1$*, где* $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Нет других неприводимых алгебраических инвариантов, кроме описанных выше. Не более двух неприводимых алгебраических инвариантов существует одновременно.

Таким образом, система Гельмгольца – ван дер Поля (20) является примером семейства дифференциальных систем, для которых степени неприводимых алгебраических инвариантов зависят от коэффициентов системы. Система Гельмгольца – ван дер Поля, по-видимому, является первым примером «физического» (не искусственно построенного) семейства дифференциальных систем с таким свойством.

В разделе 3.4 Главы 3 доказана следующая теорема.

Теорема 8. *Обобщенная система Дуффинга – ван дер Поля* (21) *при* $\zeta = 3$ *и* $e = 0$ *имеет девять неприводимых алгебраических инвариантов. Эти инварианты существуют при определенных условиях, связывающих параметры уравнения. Степени неприводимых алгебраических инвариантов ограничены числом* 7*. Не более двух неприводимых алгебраических инвариантов существует одновременно.*

Алгебраические инварианты системы Дуффинга (22) классифицированы в разделе 3.5 Главы 3.

Теорема 9. *Обобщенная система Дуффинга* (22) *обладает неприводимыми алгебраическими инвариантами тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*

$$\begin{aligned} &n = 2, \quad \sigma = \pm\frac{6\alpha^2}{25},\\ &n > 2, \quad \sigma = \frac{2\alpha^2(n+1)}{(n+3)^2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Степени этих инвариантов ограничены числом $n + 1$.

Раздел 3.6 Главы 3 посвящен системе Льенара (23).

Теорема 10. *Система Льенара пятой степени* (23) *при* $\alpha = 5$, $\varepsilon = -3$ *и* $r = 0$ *имеет шесть неприводимых алгебраических инвариантов. Эти инварианты существуют при определенных ограничениях на параметры уравнения, их степени ограничены числом* 9. *Не более двух неприводимых алгебраических инвариантов существует одновременно.*

Все алгебраические инварианты, описанные в теоремах 8, 9 и 10, представлены в диссертационной работе в явном виде. В некоторых научных статьях утверждается, что дифференциальные системы Льенара при выполнении условия $\deg g \neq 2\deg f + 1$ не имеют неприводимых алгебраических инвариантов степеней 3 и выше относительно переменной y. Системы (20), (21), (23) и классификации их алгебраических инвариантов являются контрпримерами для подобных утверждений. В разделах 3.3 – 3.6 Главы 3 дается вывод необходимых и достаточных условий интегрируемости по Лиувиллю рассматриваемых систем.

Теорема 11. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *система Гельмгольца – ван дер Поля* (20) *при* $\zeta = 2$ *и* $\alpha = 0$ *интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда* $\sigma = -\varepsilon^2$ *и* $\delta = -(2K-3)(2K+1)\varepsilon^3/16$, *где* $K \in \mathbb{N}$;

2. *обобщенная система Дуффинга – ван дер Поля* (21) *при* $\zeta = 3$ *и* $e = 0$ *интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда параметры* $(\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \sigma)$ *принимают вид* $(4\varepsilon/3,\ 0,\ 0,\ \varepsilon^2/3)$;

3. обобщенная система Дуффинга (22) *интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда* $\alpha = 0$ *или параметр* σ *задается соотношением* (26)*;*

4. система Льенара пятой степени (23) *при* $\alpha = 5$*,* $\varepsilon = -3$ *и* $r = 0$ *интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда параметры* $(\beta,\, \delta,\, \sigma,\, e)$ *принимают вид* $(0,\, 0,\, (\nu^2 - 9)/12,\, 0)$*.*

Также в разделах 3.7 и 3.8 Главы 3 решены проблемы интегрируемости по Лиувиллю для системы Льенара четвертой степени с линейной функцией, описывающей трение, и для системы Льенара пятой степени с кубической функцией, описывающей трение. В разделе 3.8 Главы 3 с помощью теории интегрируемости Пюизе для системы (25) построены первые интегралы, не являющиеся функциями Лиувилля.

В разделе 3.9 Главы 3 рассматривается вопрос существования алгебраических предельных циклов для систем Льенара (20), (21) и (23). Пусть многочлены $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в системе (15) имеют вещественные коэффициенты. *Предельным циклом* системы дифференциальных уравнений (15) называют изолированную периодическую траекторию на фазовой плоскости этой системы. Символом $\mathbb{R}[x, y]$ обозначим кольцо многочленов от двух переменных с коэффициентами из поля $\mathbb{R}$. Предельный цикл является алгебраическим, если он задан овалом неприводимой инвариантной алгебраической кривой, определяемой многочленом из кольца $\mathbb{R}[x, y]$.

Вторая часть знаменитой 16-*ой проблемы Гильберта* состоит в нахождении взаимного расположения и числа предельных циклов системы дифференциальных уравнений на плоскости вида (15) с коэффициентами из поля $\mathbb{R}$. Поскольку метод рядов Пюизе позволяет выполнять классификацию неприводимых инвариантных алгебраических кривых, то данный метод может быть использован для решения этой проблемы в алгебраической постановке. Алгебраическая постановка второй части 16-ой проблемы Гильберта заключается в поиске взаимного расположения и числа алгебраических предельных циклов. В настоящее время верхние оценки для числа алгебраических предельных циклов получены при определенных ограничениях на исследуемую дифференциальную систему или инвариантные алгебраические кривые, содержащие предельные циклы. Например, Х. Чжан (X. Zhang) нашел верхнюю оценку при условии, что исследуемая системы (15) имеет инвариантные алгебраические кривые, особые точки которых исчерпываются узловыми точками[52].

[52] *Zhang X.* The 16th Hilbert problem on algebraic limit cycles // J. Differential Equations, 251(7):1778–1789,

Более подробно подобные результаты обсуждаются в обзоре[53]. Согласно теореме Гарнака, число связных компонент вещественной алгебраический кривой ограничено числом $(m-1)(m-2)/2+1$, где m – это степень неприводимого многочлена, порождающего кривую. М. В. Долов и В. В. Косарев показали[18], что число попарно различных неприводимых инвариантных алгебраических кривых, определяющих предельные циклы полиномиальной системы (15) ограничено числом $d(d+1)/2$. Здесь число d представляет собой степень рассматриваемой системы. Следовательно, если для некоторого семейства систем вида (15) мы можем решить проблему Пуанкаре, т.е. ограничить сверху степени неприводимых инвариантных алгебраических кривых, то мы можем решить 16-ю проблему Гильберта в алгебраической постановке, по крайней мере в части поиска числа алгебраических предельных циклов. Стоит отметить, что изучение топологии многопараметрических алгебраических кривых высоких степеней и, в частности, изучение существования и взаимного расположения овалов является очень сложной задачей.

Дивергенция векторного поля обобщенной системы Дуффинга (22) постоянна. Прямым следствием критерия Бендиксона является отсутствие предельных циклов у соответствующей системы. Что касается остальных исследуемых систем Льенара, то в разделе 3.9 Главы 3 доказано, что дифференциальные системы (20), (21) и (23) не имеют алгебраических предельных циклов.

Глава 4 посвящена неавтономным системам обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x_t = P(x,y,t),\ y_t = Q(x,y,t), \quad P(x,y,t),\, Q(x,y,t) \in \mathbb{M}[x,y], \tag{27}$$

где $\mathbb{M}[x,y]$ – кольцо многочленов двух переменных с коэффициентами из поля мероморфных функций $\mathbb{M}$. В разделе 4.1 Главы 4 даются определение неавтономных алгебраических и экспоненциальных инвариантов.

Символом $\mathbb{A}$ обозначим поле алгеброидных функций, представляющее собой алгебраическое замыкание поля мероморфных функций $\mathbb{M}$. Исключим из $\mathbb{C}$ полюсы коэффициентов многочленов $P(x,y,t)$ и $Q(x,y,t)$ и зададим в $\mathbb{C}^2 \times D$ векторное поле

$$\mathcal{X} = \frac{\partial}{\partial t} + P(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y,t)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{28}$$

связанное с системой (27). Здесь D – открытое подмножество в $\mathbb{C}$, полученное после удаления полюсов мероморфных коэффициентов многочленов $P(x,y,t)$

2011.

[53] *Llibre J., Zhang X.* A survey on algebraic and explicit non-algebraic limit cycles in planar differential systems. J. Differential Equations, 39(1):48–61, 2021.

и $Q(x,y,t)$. Многочлен $F(x,y,t)$ из кольца $\mathbb{A}[x,y]$ назовем *неавтономным алгебраическим инвариантом* системы дифференциальных уравнений (27), если выполнено соотношение

$$F_t + P(x,y,t)F_x + Q(x,y,t)F_y = \lambda(x,y,t)F, \tag{29}$$

где $\lambda(x,y,t) \in \mathbb{A}[x,y]$ – также многочлен, называемый *собственным значением* неавтономного инварианта $F(x,y,t)$. Заметим, что множество $F(x,y,t) = 0$ представляет собой инвариантное многообразие системы (27).

В разделе 4.2 Главы 4 сформулирован метод построения и классификации неавтономных алгебраических инвариантов для систем вида (27). Этот метод является обобщением метода рядов Пюизе, описанного выше. Неавтономные алгебраические инварианты играют ключевую роль при изучении интегрируемости систем (27) с обобщенными первыми интегралами Дарбу[36, 37], имеющими вид

$$I(x,y,t) = f_1^{d_1}(x,y,t)\dots f_K^{d_K}(x,y,t)\exp\left[\frac{r(x,y,t)}{s(x,y,t)}\right], \tag{30}$$

где $f_1(x,y,t)$, $\dots$, $f_K(x,y,t)$, $r(x,y,t)$, $s(x,y,t) \in \mathbb{A}[x,y]$, d_1, $\dots$, $d_K \in \mathbb{C}$, $K \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

В качестве примера в разделах 4.3 и 4.4 Главы 4 классифицированы неавтономные алгебраические инварианты для неавтономной системы Дуффинга

$$x_t = y, \quad y_t = -\alpha y - \varepsilon x^3 - \sigma x - h(t), \quad h(t) \in \mathbb{M}, \quad \alpha\varepsilon \neq 0. \tag{31}$$

и неавтономной системы Дуффинга – ван дер Поля

$$x_t = y, \quad y_t = -(3x^2+\alpha)y - \varepsilon x^3 - \sigma x - h(t), \quad h(t) \in \mathbb{M}, \quad \varepsilon \neq 0. \tag{32}$$

Эти системы описывают нелинейные осцилляторы при наличии внешней вынуждающей силы, кубической восстанавливающей силы и трения, задаваемого константой или квадратичной функцией в случае системы (31) или (32) соответственно. В разделе 4.4 Главы 4 доказано, что система (32) не имеет двух независимых обобщенных первых интегралов Дарбу.

В **Главе 5** исследуется проблема нахождения мероморфных решений автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2). Изучение аналитического продолжения решений, определяемых теоремой о локальном существовании и единственности, является одной из важнейших задач аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Если область существования может быть продолжена на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ за исключением, быть может, счетного числа точек, являющихся полюсами однозначного решения, то соответствующее решение — мероморфная функция. Хорошо известно, что во многих случаях важные с прикладной точки зрения решения дифференциальных уравнений являются мероморфными функциями. Более того, для большого числа дифференциальных уравнений все известные точные решения мероморфны[26].

Раздел 5.1 Главы 5 посвящен предварительному описанию проблемы построения мероморфных решений автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Любое обыкновенное дифференциальное уравнение вида (2) можно представить в виде суммы дифференциальных мономов:

$$\sum_j \alpha_j x^{j_0} \left\{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right\}^{j_1} \cdots \left\{\frac{\mathrm{d}^K x}{\mathrm{d}t^K}\right\}^{j_K} = 0, \tag{33}$$

где $j = (j_0, \ldots, j_K)$ – это мульти-индекс и $\alpha_j \in \mathbb{C}$. Число $j_0 + j_1 + \cdots + j_K$ определяет *степень* соответствующего дифференциального монома. Дифференциальный моном, имеющий наибольшую степенью среди всех дифференциальных мономов рассматриваемого дифференциального уравнения, назовем *доминантным дифференциальным мономом.* Следующее свойство является ключевым во многих работах, посвященных изучению мероморфных решений автономных обыкновенных дифференциальных уравнений[34].

Свойство конечности. Число попарно различных рядов Лорана вида

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{k-p}, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{34}$$

удовлетворяющих уравнению (2), конечно.

Вслед за А. Е. Еременко определим $\mathbb{W}$ как множество, состоящее из трансцендентных мероморфных функций, которые являются либо эллиптическими, либо просто-периодическими вида $R(\exp[\beta t])$, где $R(s)$ – рациональная функция и $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Это название дано в честь К. Вейерштрасса (K. Weierstrass). Если уравнение (2) со свойством конечности имеет один доминантный дифференциальный моном, тогда все его трансцендентные мероморфные решения являются $\mathbb{W}$-мероморфными функциями. Этот результат получен А. Е. Еременко[21]. В разделе 5.2 Главы 5 показано, что аналогичная теорема справедлива и для уравнений (2), обладающих свойством конечности и двумя доминантными дифференциальными мономами вида $\lambda x^l\{x_t - \mu x\}$, где $\lambda\mu \neq 0$ и $l \in \mathbb{N}$. Основными инструментами при выводе общих представлений мероморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений со свойством конечности являются лемма Клюни и другие результаты теории Неванлинны.

Множество $\mathbb{W}$ обладает двумя важными свойствами. Во-первых, для любой функции $x(t)$ из множества $\mathbb{W}$ справедлива алгебраическая теорема сложения. Во-вторых, любая функция $x(t)$ из множества $\mathbb{W}$ удовлетворяет автономному полиномиальному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка $F(x, x_t) = 0$, где $F(x, y)$ – неприводимый многочлен из кольца $\mathbb{C}[x, y]$. Таким образом, решения уравнения (2) из множества $\mathbb{W}$ являются алгебраически инвариантными решениями. Следовательно, мы можем использовать метод рядов Пюизе при построении и классификации $\mathbb{W}$-мероморфных решений уравнения (2). В разделе 5.3 Главы 5 доказана следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть $x(t)$ является $\mathbb{W}$-мероморфным решением уравнения* (2). *Тогда существуют неприводимый в кольце $\mathbb{C}[x, y]$ многочлен $F(x, y)$ и число $N \in \mathbb{N}$ такие, что $x(t)$ удовлетворяет алгебраическому обыкновенному дифференциальному уравнению $F(x, x_t) = 0$, где многочлен $F(x, y)$ имеет вид*

$$F(x, y) = \left\{ \prod_{j=1}^{N} \{y - y_{j,\infty}(x)\} \right\}_+ . \tag{35}$$

В этом выражении $y_{1,\infty}(x)$, ..., $y_{N,\infty}(x)$ — попарно различные ряды Пюизе с центром в точке $x = \infty$. При этом эти ряды

(A): являются решениями уравнения (5)*;*

(B): имеют доминантное поведение $b_0^{(j)} x$ или $b_0^{(j)} x^{(p_j+1)/p_j}$, где $b_0^{(j)} \neq 0$ и $p_j \in \mathbb{N}$ — порядок полюса функции $x(t)$;

(C): удовлетворяют условиям

$$\left\{ \sum_{j=1}^{N} (y_{j,\infty}(x))^k \right\}_- = 0, \quad 1 \leq k \leq N. \tag{36}$$

В разделе 5.3 Главы 5 описан метод нахождения $\mathbb{W}$-мероморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка $F(x, x_t) = 0$. Хорошо известно, что если уравнение $F(x, x_t) = 0$ интегрируется в $\mathbb{W}$-мероморфных функциях, то род алгебраических кривых $F(x, y) = 0$ равен 0 или 1. В основе метода лежат представления Эрмита. Просто–периодические $\mathbb{W}$-мероморфные решения имеют вид

$$x(t) = \omega \left\{ \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{p_m} \frac{(-1)^{k-1} a_{p_m-k}^{(m)}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \right\} \coth\left(\omega\{t-t_m\}\right) + \sum_{k=K_1}^{K_2} h_k \exp\left[2\omega k t\right], \tag{37}$$

где K_1, $K_2 \in \mathbb{Z}$ и коэффициенты $\left\{a_{p_m-k}^{(m)},\ k=1,\ldots,p_m\right\}$ определяются главными частями рядов Лорана в окрестности полюсов $\{t_m \in \mathbb{C},\ m=1,\ldots,M\}$ порядков $\{p_m \in \mathbb{N},\ m=1,\ldots,M\}$. Эти ряды Лорана выглядят следующим образом:

$$x^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{(m)} (t-t_m)^{k-p_m}, \quad p_m \in \mathbb{N} \tag{38}$$

и удовлетворяют уравнению $F(x, x_t) = 0$. Без ограничения общности считаем, что выполнены неравенства $K_1 \leq 0$ и $K_2 \geq 0$. Целая часть

$$h(t) = \sum_{k=K_1}^{K_2} h_k \exp\left[2\omega k t\right] \tag{39}$$

в выражении (37) отлична от константы тогда и только тогда, когда в представлении (35) многочлена $F(x,y)$ встречается по крайней мере один ряд Пюизе с доминантным поведением $b_0^{(j)} x$. Ряды Пюизе, отвечающие за целую часть, имеют вид

$$\begin{aligned} y_{j_1,\infty}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} b_k^{(j_1)} x^{\frac{|K_1|-k}{|K_1|}}, \quad b_0^{(j_1)} = 2\omega K_1, \quad j_1 = 1,\ldots,|K_1|,\ K_1 \neq 0, \\ y_{j_2,\infty}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} b_k^{(j_2)} x^{\frac{K_2-k}{K_2}}, \quad b_0^{(j_2)} = 2\omega K_2, \quad j_2 = 1,\ldots,K_2,\ K_2 \neq 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Эллиптические решения выглядят следующим образом:

$$x(t) = \sum_{m=1}^{M} a_{p_m-1}^{(m)} \zeta(t-t_m) + \left\{ \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=2}^{p_m} \frac{(-1)^k a_{p_m-k}^{(m)}}{(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{dz^{k-2}} \right\} \wp(t-t_m) + h_0, \tag{41}$$

где $h_0 \in \mathbb{C}$ — некоторая постоянная, $\zeta(t) = \zeta(t; g_2, g_3)$ — дзета-функция Вейерштрасса и $\wp(z) = \wp(z; g_2, g_3)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению

$$(\wp_z)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3. \tag{42}$$

Заметим, что для существования эллиптических решений вида (41) должно выполняться дополнительное условие, связывающее вычеты в полюсах:

$$\sum_{m=1}^{M} a_{p_m-1}^{(m)} = 0. \tag{43}$$

Аналогично предыдущему случаю коэффициенты $\left\{a_{p_m-k}^{(m)},\, k = 1, \ldots, p_m\right\}$ в выражении (41) определяются главными частями рядов Лорана в окрестности полюсов (38), которые удовлетворяют уравнению $F(x, x_t) = 0$. Далее в разделе 5.3 Главы 5 описан алгоритм, позволяющий находить решения, определяемые выражениями (37) и (41).

В разделах 5.4–5.6 Главы 5 рассматриваются примеры. В частности, классифицированы $\mathbb{W}$-мероморфные решения следующих уравнений:

$$\begin{gathered} w^2 w_{ttt} - w\{2w_t - (1+\beta+\sigma)w\}w_{tt} + w_t^3 - \left(1+\sigma+\frac{\beta}{2}\right) w w_t^2 \\ +w^2\{w + \beta(\sigma+1)\}w_t + 2\sigma w^4 + 2\beta\sigma(1-r)w^3 = 0, \end{gathered} \tag{44}$$

$$x_{tttt} + \varepsilon x_{ttt} + \sigma x_{tt} + \delta x_t - 840x^2 + \alpha = 0. \tag{45}$$

Первое семейство уравнений возникает при исследовании знаменитой системы Лоренца. Отметим, что зависимая переменная обозначается как w, поскольку переменная x является одной из зависимых функций в соответствующей системе. Второе семейство уравнений может быть получено при переходе к переменным бегущей волны в обобщенном уравнении Розенау – Кортевега – де Вриза и уравнении Кортевега – де Вриза – Бюргерса пятого порядка. Получены новые мероморфные решения уравнений (44) и (45).

В **Заключении** проводится анализ результатов диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Перечислим наиболее важные теоретические результаты диссертационной работы.

1. Предложен метод нахождения и классификации алгебраических инвариантов автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Разработан метод построения неавтономных алгебраических инвариантов и инвариантных поверхностей для двумерных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Предложен метод построения $\mathbb{W}$-мероморфных решений автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Найден общий вид мероморфных решений автономных обыкновенных дифференциальных уравнений с конечным числом локальных решений, описываемых рядами Лорана в окрестности полюсов, и двумя доминантными дифференциальными мономами вида $\lambda x^l\{x_t - \mu x\}$, где $\lambda\mu \neq 0$ и $l \in \mathbb{N}$.

5. Доказана разрешимость проблемы Пуанкаре в классической постановке для семейств автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих свойством конечности.

6. Получено явное представление для собственных значений инвариантных алгебраических кривых двумерных систем полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений.

7. Предложена локальная теория интегрируемости, названная интегрируемостью по Пюизе.

8. Доказано, что типичная нелинейная полиномиальная система Льенара $x_t = y$, $y_t = -f(x)y - g(x)$ не имеет конечных инвариантных алгебраических кривых и не интегрируема по Лиувиллю при выполнении условия $\deg g > \deg f$.

9. Решена проблема интегрируемости по Лиувиллю для полиномиальных систем Льенара $x_t = y$, $y_t = -f(x)y - g(x)$ и для соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений $x_{tt} + f(x)x_t + g(x) = 0$ при выполнении условия $\deg g \neq 2\deg f + 1$. Аналогичные результаты получены и в случае $\deg g = 2\deg f + 1$ для нерезонансных на бесконечности систем.

10. Найдено необходимое условие существования экспоненциальных инвариантов с неполиномиальным аргументом.

Новые методы, разработанные в диссертационной работе, используются для решения проблемы интегрируемости и для классификации решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в физике, биологии, экономике и других областях науки. Перечислим основные результаты, полученные для уравнений, важных с прикладной точки зрения.

1. Классифицированы алгебраические инварианты для уравнений Дуффинга, Дуффинга – ван дер Поля, Гельмгольца – ван дер Поля и их обобщений. Найдены новые алгебраически инвариантные решения уравнений Дуффинга – ван дер Поля.

2. Решена проблема интегрируемости по Лиувиллю для уравнений Дуффинга, Дуффинга – ван дер Поля, Гельмгольца – ван дер Поля и их обобщений.

3. Доказано, что проблема Пуанкаре в классической постановке не имеет решения для уравнений Гельмгольца – ван дер Поля.

4. Классифицированы инвариантные поверхности для неавтономных уравнений Дуффинга и Дуффинга – ван дер Поля при наличии произвольной вынуждающей силы.

5. Найдены новые семейства интегрируемых по Лиувиллю полиномиальных дифференциальных систем Льенара $x_t = y$, $y_t = -f(x)y - g(x)$. Эти семейства параметризованы производными многочленами.

6. Классифицированы алгебраические инварианты для обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, возникающих при переходе к переменным бегущей волны в дисперсионном уравнении Курамото – Сивашинского и модифицированном уравнении Курамото – Сивашинского. Получены новые алгебраически инвариантные решения модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского.

7. Найдены все $\mathbb{W}$-мероморфные решения для семейства обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, связанного с системой Лоренца, построены ранее неизвестные мероморфные решения системы Лоренца.

8. Получены все $\mathbb{W}$-мероморфные решения для семейства обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, возникающего при переходе к переменным бегущей волны в обобщенном уравнении Розенау – Кортевега – де Вриза и в уравнении Кортевега – де Вриза – Бюргерса пятого порядка.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Maria V. Demina. Integrability and solvability of polynomial Liénard differential systems // *Studies in Applied Mathematics*. 2023. Vol. 150. No. 3. P. 755-817; Q_1 Web of Science, Q_1 Scopus.

   doi.org/10.1111/sapm.12556

2. Maria V. Demina. Meromorphic solutions of autonomous ordinary differential equations without the finiteness property // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2022. Vol. 516. No. 2. P. 126516; Q_1 Web of Science, Q_1 Scopus.

   doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126516

3. Maria V. Demina. The method of Puiseux series and invariant algebraic curves // *Communications in Contemporary Mathematics*. 2022. Vol. 24. No. 3. P. 2150007; Q_1 Web of Science, Q_1 Scopus.

   doi.org/10.1142/S0219199721500073

4. Maria V. Demina. Necessary and sufficient conditions for the existence of invariant algebraic curves // *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. 2021. Vol. 48. P. 1–22; Q_2 Web of Science, Q_3 Scopus.

   doi.org/10.14232/ejqtde.2021.1.48

5. Maria V. Demina. Classifying algebraic invariants and algebraically invariant solutions // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. Vol. 140. P. 110219; Q_1 Web of Science, Q_1 Scopus.

   doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110219

6. Maria V. Demina. Classification of meromorphic integrals for autonomous nonlinear ordinary differential equations with two dominant monomials // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2019. Vol. 479. No. 2. P. 1851–1862; Q_1 Web of Science, Q_1 Scopus.

   doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.07.026

7. Maria V. Demina. Liouvillian integrability of the generalized Duffing oscillators // *Analysis and Mathematical Physics*. 2021. Vol. 11. No. 1. P. 25; Q_1 Web of Science, Q_2 Scopus.

   doi.org/10.1007/s13324-020-00459-z

8. Maria V. Demina. Invariant surfaces and Darboux integrability for non-autonomous dynamical systems in the plane // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2018. Vol. 51. No. 50. P. 505202; Q_1 Web of Science, Q_1 Scopus.

   10.1088/1751-8121/aaecca

9. Maria V. Demina, Jaume Giné and Claudia Valls. Puiseux integrability of differential equations // *Qualitative Theory of Dynamical Systems*. 2022. Vol. 21 No. 2. P. 1–35; Q_3 Web of Science, Q_3 Scopus.

   doi.org/10.1007/s12346-022-00565-2

10. Maria V. Demina. Invariant algebraic curves for Liénard dynamical systems revisited // *Applied Mathematics Letters*. 2018. Vol. 84. P. 42–48; Q_1 Web of Science, Q_1 Scopus.

    doi.org/10.1016/j.aml.2018.04.013

11. Maria V. Demina and Claudia Valls. On the Poincaré problem and Liouvillian integrability of quadratic Liénard differential equations // *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A*. 2020. Vol. 150. No. 6. P. 3231–3251; Q_2 Web of Science, Q_1 Scopus.

    doi.org/10.1017/prm.2019.63

12. Maria V. Demina and Claudia Valls. Classification of invariant algebraic curves and nonexistence of algebraic limit cycles in quadratic systems from family (I) of the Chinese classification // *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 2020. Vol. 30. No. 4. P. 2050056; Q_2 Web of Science, Q_1 Scopus.

    doi.org/10.1142/S021812742050056X

13. Maria V. Demina. Novel algebraic aspects of Liouvillian integrability for two-dimensional polynomial dynamical systems // *Physics Letters A*. 2018. Vol. 382. No. 20. P. 1353–1360; Q_2 Web of Science, Q_2 Scopus.

    doi.org/10.1016/j.physleta.2018.03.037

14. Maria V. Demina. Integrability and Jacobi Last Multipliers of Cubic Lienard Differential Equations with Quadratic Damping // *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. 2020. Vol. 9. No. 4. P. 499–507; Q_4 Scopus.

    10.5890/DNC.2020.12.002