ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Беловой Марии Владимировны «Алгебраические инварианты для обыкновенных дифференциальных уравнений: теория и приложения», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальностям 1.1.2. – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Актуальность темы диссертационной работы. Диссертационная работа Беловой М.В. посвящена проблеме интегрируемости и разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Эта проблема является классической и не теряет свою актуальность и в наше время. Разработка новых методов и подходов, применимых к тем уравнениям, которые не удается проинтегрировать известными методами, является важной задачей теории дифференциальных уравнений. Полиномиальные дифференциальные уравнения Льенара, которым уделено много внимания в диссертационной работе, встречаются в различных областях науки. В частности, эти уравнения описывают нелинейные осцилляторы, процессы реакции-конвекции-диффузии и т.п. Следовательно, поиск и классификация интегрируемых семейств представляет интерес с теоретической и практической точек зрения.

Анализ содержания диссертации с указанием новизны. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

Во введении автор обосновывает актуальность работы, определяет цель и задачи исследования, формулирует научную новизну, теоретическую и практическая значимость, а также основные положения диссертационной работы, выносимые на защиту.

В **первой главе** рассматривается задача построения алгебраических инвариантов первого порядка для автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений. Сформулирована и доказана теорема, определяющая необходимые и достаточные условия существования инвариантов. Эта теорема порождает новый метод поиска инвариантов. Метод основан на свойствах асимптотических рядов Пюизе, удовлетворяющих неавтономной редукции исходного уравнения. Последний шаг метода является алгебраическим, что делает возможным применением пакетов символьных вычислений при построении алгебраических инвариантов. Для широких классов дифференциальных уравнений разработанный метод позволяет решать проблему Пуанкаре о поиске оценок сверху для степеней неприводимых алгебраических инвариантов. В частности, в диссертационной работе доказана разрешимость проблемы Пуанкаре для уравнений, обладающих свойством конечности. В качестве иллюстрации, метод используется для нахождения всех неприводимых алгебраических инвариантов уравнения Курамото – Сивашинского и модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского в переменных бегущей волны. Найдены ранее неизвестные точные решения модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского.

Во **второй главе** исследуется применимость алгебраических инвариантов при построении первых интегралов и интегрирующих множителей Дарбу двумерных полиномиальных дифференциальных систем. Получено явное соотношение для собственных значений инвариантов. Это соотношение позволяет упростить поиск условий существования первых интегралов, являющихся функциями Дарбу или Лиувилля. Во второй главе предложена локальная теория инвариантов, в рамках которой рассматриваются полиномиальные инварианты относительно одной из переменных с коэффициентами, являющимися рядами Пюизе. Алгебраическая замкнутость полей рядов Пюизе позволяет работать с инвариантами первой степени. На основе этого подхода разработана новая теория интегрируемости, являющуюся локальным аналогом теории интегрируемости Дарбу. Новая теория, названная теорией интегрируемости по Пюизе, может быть использована для построения дифференциальных систем с первыми интегралами, не являющимися функциями Лиувилля. Также во второй главе рассматривается вопрос существования неавтономных первых интегралов и интегрирующих множителей специального вида. Доказано, что эти объекты могут быть найдены с помощью автономных алгебраических и экспоненциальных инвариантов.

Третья глава целиком посвящена полиномиальным дифференциальным системам Льенара. Показано, что эти системы можно разбить на три непересекающихся класса в зависимости от асимптотических свойств решений. Найдены собственные значения неприводимых алгебраических инвариантов. Доказано, что типичная нелинейная полиномиальная система Льенара не интегрируема по Лиувиллю, но при этом для любых степеней, входящих в систему многочленов, существуют интегрируемые по Лиувиллю подсистемы. В явном виде построены примеры таких подсистем. Получены их первые интегралы. Для одного из классов первые интегралы являются элементарными функциями. Два других класса могут иметь неэлементарные первые интегралы. Проведена классификация алгебраических инвариантов для систем, параметризованных многочленами первой, второй и третей степени. Доказано, что система Гельмгольца – ван дер Поля имеет неприводимые алгебраические инварианты неограниченных степеней при отсутствии условий на параметры системы. Найдены коэффициенты этих инвариантов. Решена проблема Пуанкаре для системы Дуффинга – ван дер Поля и обобщенной системы Дуффинга. Алгебраические инварианты этих систем построены в явном виде.

В **четвертой главе** рассматривается вопрос существования неавтономных инвариантных многообразий для двумерных неавтономных дифференциальных систем с мероморфными коэффициентами. Представлено обобщение метода, предложенного в первой главе, на неавтономный случай. Проведена классификация неавтономных инвариантных многообразий для неавтономных осцилляторов Дуффинга и Дуффинга – ван дер Поля. Доказана неинтегрируемость этих систем с двумя функционально независимыми обобщенными первыми интегралами Дарбу. При этом каждая из этих систем имеет значения параметров, при которых существует один первый интеграл в классе функций Дарбу. В случае неавтономного осциллятора Дуффинга этот первый интеграл позволяет найти общее решение.

В **пятой главе** рассматривается задача нахождения мероморфных решений из, так называемого, множества W. Это множество содержит трансцендентные мероморфные функции, обладающие теоремой сложения. С помощью теории Неванлинны доказано, что автономные полиномиальные обыкновенные дифференциальные уравнения с двумя доминантными дифференциальными мономами, обладающие свойством конечности, не могут иметь других трансцендентных мероморфных решений, кроме тех, которые принадлежат множеству W. Показано, что метод построения инвариантов, предложенный в диссертационной работе, может применяться и для нахождения и классификации точных решений из множества W.

В **заключении** диссертации перечислены основные результаты, полученные в диссертации, и сформулированы обобщающие их выводы.

Теоретическая и практическая значимость работы. Предложенный в диссертационной работе метод построения алгебраических инвариантов применим ко многим семействам дифференциальных уравнений и систем. Помимо непосредственного построения инвариантов, метод может быть также использован при решении проблемы интегрируемости и нахождении точных решений. Новая теория интегрируемости, разработанная в диссертации, может быть использована для поиска систем с первыми интегралами, не являющимися функциями Лиувилля. Эта теория обобщает теорию интегрируемости Дарбу и позволяет получать новые результаты для систем, интегрируемость которых не удается установить в рамках классического подхода. Полученные в диссертации явные выражения для инвариантов и первых интегралов могут быть полезными при изучении качественных свойств траекторий соответствующих систем.

Основные результаты диссертационной работы отражены в 14-ти статьях. Диссертант является единственным автором в 11-ти статьях. Все статьи опубликованы в высокорейтинговых рецензируемых журналах, индексируемых в системах цитирования WoS и (или) Scopus. Результаты диссертационной работы прошли апробацию на российских и международных конференциях и семинарах.

Вместе с тем, следует высказать следующие **замечания и вопросы.**

1. При построении автономных инвариантов автор рассматривает системы, в которых многочлены имеют все недоминантные мономы. При этом в неавтономном случае часть мономов опущено. С чем связан этот факт? Будет ли работать метод, если добавить опущенные мономы?

2. В работе недостаточно подробно представлены вычислительные аспекты применения метода рядов Пюизе для ряда систем, в частности, в разделах 3.6 и 3.7. Было бы полезно в явном виде выписать хотя бы наиболее простые уравнения алгебраических систем, получаемых с помощью метода рядов Пюизе.

Эти замечания не снижают научной ценности диссертации Беловой М.В. Диссертационная работа по актуальности выбранной темы, объему проведенных исследований, их новизне, теоретической и практической значимости, безусловно, заслуживает высокой оценки. Достоверность результатов, а также обоснованность основных положений, выносимых на защиту, не вызывает сомнений. Результаты диссертации представляют несомненный интерес для специалистов, работающих в области аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Автореферат соответствует диссертации и достаточно полно отражает содержание и основные результаты.

Диссертационная работа Беловой М. В. «Алгебраические инварианты для обыкновенных дифференциальных уравнений: теория и приложения» является завершенной научно-квалификационной работой, выполненной на высоком научном уровне по актуальной тематике. Работа полностью удовлетворяет требованиям Положения «О присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842 (в действующей редакции), предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор Белова Мария Владимировна заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Официальный оппонент:
Доктор физико-математических наук
(01.01.02. – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление),
профессор кафедры высшей математики № 1
НИУ МИЭТ
Алфимов Георгий Леонидович
Телефон: +7(916)947-10-01
E-mail: galfimov@yahoo.com ______________ /Алфимов Г. Л./

«07 » апреля 2026 г

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники», 124498, г. Москва, г. Зеленоград, площадь Шокина, дом 1, (499) 731-44-41.

Подпись д.ф.-м.н., проф. Алфимова Г. Л.
заверяю:

Ученый секретарь Ученого совета
НИУ МИЭТ
К.т.н., доцент ______________ /А.В. Козлов/