ОТЗЫВ
официального оппонента Ефремовой Людмилы Сергеевны
на диссертацию Беловой Марии Владимировны
«Алгебраические инварианты для обыкновенных дифференциальных уравнений: теория и приложения»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.2 — дифференциальные уравнения и математическая физика

В диссертационной работе М.В. Беловой исследуются аналитические свойства решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Основное внимание в работе уделено изучению полиномиальных дифференциальных систем, для которых построены инварианты и первые интегралы.

Актуальность темы диссертации. Эти вопросы относятся к кругу наиболее актуальных задач интегрируемости различных классов дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений и поиска методов, позволяющих исследовать интегрируемость и разрешимость дифференциальных уравнений. Полученные в этом направлении результаты находят широкое применение в математической и теоретической физике.

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы; она содержит 365 страниц, 16 рисунков и 11 таблиц. Список литературы состоит из 218 наименований.

Первая глава посвящена теории инвариантных алгебраических многообразий и алгебраических инвариантов автономных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. В первых двух разделах главы 1 приведены основные определения и общие сведения теории алгебраических инвариантных многообразий (в том числе, алгебраических инвариантных кривых), алгебраических инвариантов и алгебраически инвариантных решений дифференциальных уравнений или систем. В третьем и четвертом разделах первой главы дано описание нового метода нахождения алгебраических инвариантов обыкновенного дифференциального уравнения специального вида

$$E(x,\ \frac{dx}{dt}, \ldots,\ \frac{d^k x}{dt^k}) = 0, \quad k \geq 2. \tag{1}$$

Здесь E – неприводимый многочлен от нескольких переменных с комплекснозначными коэффициентами. Метод основан на разложении алгебраических инвариантов на множители над алгебраически замкнутыми полями рядов Пюизе. Порядок уравнения (1) понижается с использованием новой функции $y(x)$, определяемой соотношением $x_t = y(x)$. Эта подстановка позволяет перейти от автономного уравнения (1) к неавтономному обыкновенному дифференциальному уравнению порядка $k-1$:

$$H\big(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}, \ldots,\ \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}\big) = 0. \tag{2}$$

Здесь H – многочлен своих аргументов.

Основным результатом первой главы (и одним из основных результатов диссертации) является теорема 1.1, дающая необходимые и достаточные условия, при выполнении которых некоторый неприводимый многочлен является алгебраическим инвариантом уравнения (1). Отметим, что одно из условий теоремы 1.1 сфомулировано в терминах рядов Пюизе с центром в точке ∞, удовлетворяющих уравнению (2). Теорема 1.1. лежит в основе метода построения инвариантов. Важно отметить, что метод рядов Пюизе позволяет находить все неприводимые алгебраические инварианты для широких классов автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка выше второго ($k > 2$). В завершающем главу 1 разделе 1.6 приведены содержательные примеры применения рядов Пюизе. Здесь приведена классификация неприводимых алгебраических инвариантов для некоторых обыкновнных дифференциальных уравнений 3-го порядка, возникающих в дисперсионном уравнении Курамото – Сивашинского и в модифицированном уравнении Курамото – Сивашинского.

Во второй главе рассмотрена задача поиска первых интегралов, заданных функциями Дарбу или Лиувилля, для двумерных систем вида

$$x_t = P(x, y), \quad y_t = Q(x, y), \quad P(x, y),\ Q(x, y) \in \mathbb{C}[x,\ y] \tag{3}$$

и связанных с ними дифференциальных уравнений второго порядка. Система вида (3) и соответствующее ей векторное поле называются интегрируемыми по Дарбу (по Лиувиллю), если они имеют первый интеграл, являющийся функцией Дарбу (Лиувилля). Теория интегрируемости Дарбу для заданного множества систем вида (3) позволяет находить интегрируемые по Дарбу и Лиувиллю подсистемы, когда известны все алгебраические и экспоненциальные инварианты систем из рассматриваемого множества. Наиболее важная роль в главе 2 принадлежит разделам 2.3 и 2.4, в которых рассматриваются локальная теория инвариантов и новая локальная теория интегрируемости по Пюизе. К числу наиболее важных результатов главы 2 (и диссертации в целом), по-видимому, следует отнести теорему 2.14, в которой приведены необходимые и достаточные условия новой локальной теории интегрируемости по Пюизе. В теореме 2.14 указан конкретный вид формального интегрирующего множителя системы (3). Новая теория позволяет находить и классифицировать дифференциальные системы (3) с первыми интегралами, не являющимися функциями Лиувилля.

В третьей главе изучается интегрируемость и разрешимость полиномиальных дифференциальных систем Льенара (прежде всего, описывающих осцилляторы с трением и восстанавливающей силой) и связанных с ними обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$x_{tt} + f(x)x_t + g(x) = 0.$$

Ключевую роль в рассмотрениях главы 3 играет теорема 3.1, содержащая необходимые и достаточные условия существования инвариантных алгебраических кривых и соответствующих неприводимых алгебраических инвариантов. Эти условия формулируются в терминах существования конечного числа рядов Пюизе с центром в точке ∞, обладающих определенными свойствами. В главе 3 изучаются дифференциальные системы Льенара в предположении о том, что степень $deg\, g$ полинома g больше степени $deg\, f$ полинома f (альтернативный случай рассматривался в статьях К. Одани; Дж. Ллибре и К. Валлса). В главе 3 полностью решена проблема интегрируемости по Лиувиллю, если коэффициенты старших степеней многочленов f и g не удовлетворяют резонансному условию, а в разделе 3.2 главы 3 доказано, что полиномиальные системы Льенара не интегрируемы по Дарбу, за исключением некоторых подсемейств, удовлетворяющих условию $deg\, g = 2deg\, f + 1$. Также установлено, что типичные (по мере Лебега в конечномерных пространствах) нелинейные системы Льенара, не имеют алгебраических инвариантов и не интегрируемы по Лиувиллю. Обратим внимание и на то, что в главе 3 найдены ранее неизвестные интегрируемые по Лиувиллю системы Льенара, параметризованные произвольными многочленами, причем функции Лиувилля, определяющие первые интегралы, получены в явном виде. Следует отметить, что в главе 3 рассматриваются некоторые полиномиальные системы Льенара, представляющие большой интерес с прикладной точки зрения, такие, как система Гельмгольца – ван дер Поля, обобщенная система Дуффинга – ван дер Поля, обобщенная система Дуффинга, некоторые системы Льенара 5-ой степени. В частности, в связи с обсуждением 2-ой части 16-ой проблемы Гильберта установлено, что система Гельмгольца – ван дер Поля, обобщенная система Дуффинга – ван дер Поля и система Льенара пятой степени с линейной функцией, описывающей трение, не имеют алгебраических предельных циклов.

Четвертая глава посвящена неавтономным системам обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x_t = P(x,\, y,\, t),\;\; y_t = Q(x,\, y,\, t),\quad P(x,\, y,\, t),\, Q(x,\, y,\, t) \in \mathbb{M}[x,\, y], \qquad (4)$$

где $\mathbb{M}[x,\, y]$ – кольцо многочленов двух переменных с коэффициентами из поля мероморфных функций $\mathbb{M}$. Дано определение неавтономных алгебраических и экспоненциальных инвариантов. Предложен метод построения и классификации неавтономных алгебраических инвариантов для систем вида (4), обобщающий метод рядов Пюизе. Неавтономные алгебраические инварианты играют важную роль в изучении интегрируемости систем (4) с обобщенными первыми интегралами Дарбу. В главе 4 дана классификация неавтономных алгебраических инвариантов для неавтономной системы Дуффинга и неавтономной системы Дуффинга – ван дер Поля.

В пятой главе рассмотрена проблема нахождения $\mathbb{W}$-мероморфных (то есть являющихся либо эллиптическими, либо просто-периодическими функциями вида $R(exp(\beta t))$, где $R(\cdot)$ – рациональная функция, а $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,) решений автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1), обладающих свойством конечности (числа рядов Лорана, удовлетворяющих уравнению (1)). Свойства множества $\mathbb{W}$-мероморфных функций позволяют использовать метод рядов Пюизе при построении и классификации $\mathbb{W}$-мероморфных решений уравнения (1). Основным результатом главы 5 (и одним из основных результатов диссертационной работы) является теорема 5.2, в которой дано описание всех трансцендентных мероморфных решений рассматриваемого класса автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений. В главе 5 приведена классификация $\mathbb{W}$-мероморфных решений семейств уравнений, одно из которых связано с системой Лоренца, а другое – с обобщенным уравнением Розенау – Кортевега – де Вриза и уравнением Кортевега – де Вриза – Бюргерса пятого порядка. Получены новые, неизвестные ранее, мероморфные решения исследованных уравнений.

Новизна, достоверность и значимость. Диссертационная работа имеет теоретический характер. В ходе ее выполнения были разработаны новые методы исследования и получены новые результаты. Перечислим некоторые из них:

1. разработан новый метод нахождения алгебраических инвариантов автономных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на разложении многочленов, задающих инварианты, на множители над алгебраически замкнутым полем рядов Пюизе в окрестности бесконечно удаленной точки, позволяющий находить решение проблемы Пуанкаре для широких классов обыкновенных дифференциальных уравнений;

2. предложен новый метод построения неавтономных алгебраических инвариантов и инвариантных поверхностей для двумерных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающий компьютерную реализацию в системах символьных вычислений;

3. получено общее представление для мероморфных решений автономных обыкновенных дифференциальных уравнений с конечным числом локальных решений, описываемых рядами Лорана в окрестности полюсов, и двумя доминантными дифференциальными мономами специального вида;

4. разработан новый метод классификации $\mathbb{W}$-мероморфных решений автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравне-

ний, позволяющий находить все $\mathbb{W}$-мероморфные решения для уравнений с бесконечным числом локальных решений, описываемых рядами Лорана в окрестности полюсов;

5. установлена разрешимость проблемы Пуанкаре в классической постановке для семейств автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений со свойством конечности;

6. найдено явное представление для собственных значений инвариантных алгебраических кривых двумерных систем полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений;

7. построена локальная теория интегрируемости Пюизе, позволяющая находить необходимые условия существования первых интегралов Дарбу, Лиувилля и первых интегралов специального вида, не выражающихся через функции Лиувилля;

Несомненным достоинством работы являются примеры важных, как с теоретической, так и с прикладной точек зрения классов дифференциальных уравнений (например, полиномиальных систем Льенара), на которых проиллюстрированы разработанные в диссертации методы и найдены новые, неизвестные ранее, решения.

Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Московском, Санкт-Петербургском, Нижегородском государственных университетах, в государственном университете "Высшая школа экономики" и ряде других научных и учебных центров.

Текст диссертации тщательно продуман и хорошо изложен. Все утверждения диссертации снабжены строгими и подробными доказательствами. Автором диссертационной работы опубликовано более 70 научных работ в ведущих российских и зарубежных научных изданиях, 50 из которых индексируются в базах научного цитирования Web of Science и Scopus. Основные результаты диссертации изложены в 14 статьях, опубликованы в высокорейтинговых изданиях (в основном, квартилей Q_1 или Q_2). Результаты работы неоднократно докладывались соискателем на представительных международных научных конференциях и семинарах как в России, так и за рубежом.

Достоверность результатов, а также обоснованность основных положений, выносимых на защиту, не вызывает сомнений. Автореферат полностью отражает содержание и основные результаты диссертации.

Замечания.

1. На стр. 76 диссертации (на стр. 28 автореферата) читаем: "Символом D обозначим открытое подмножество в $\mathbb{C}^2$, имеющее ненулевую меру Лебега". Слова "имеющее ненулевую меру Лебега" являются лишними, так как любое открытое множество в $\mathbb{C}^2$ измеримо (по Лебегу) и имеет положительную меру (Лебега).
2. В разделе 1.5 главы 1 рассматривается классическая проблема Пуанкаре для множества уравнений (1), состоящая в нахождении равномерной оценки сверху для степеней неприводимых алгебраических инвариантов, которая зависит только от степеней, порядков и обобщенных порядков дифференциальных мономов уравнений (2), полученных из (1) (и не зависит от коэффициентов). На стр. 64 сформулирована теорема 1.6 о том, что для множества уравнений (1), обладающих свойствами конечности, проблема Пуанкаре в классической постановке имеет решение. Но, если считать, что ∞ принадлежит множеству указанных выше верхних границ, то проблема Пуанкаре всегда имеет решение. Поэтому здесь следовало бы уточнить, что речь идет о *конечной* равномерной оценке сверху множества степеней неприводимых алгебраических инвариантов.
3. Например, на стр. 133 используется термин "типичная полиномиальная дифференциальная система". Обычно, термин "типичная"(система) связывают либо с категорией Бэра, либо с мерой Лебега на рассматриваемых конечнопараметрических семействах систем. Поэтому из-за неоднозначности понимания этого термина в диссертацию необходимо было включить и выделить соответствующие пояснения (например, придав этим пояснениям форму определения).

Однако приведенные отдельные замечания не умаляют значимость работы и не влияют на ее общую положительную оценку.

Заключение. Диссертация Беловой Марии Владимировны является завершенным научным исследованием, в котором получены новые значимые результаты в актуальной области теории дифференциальных уравнений, имеющей глубокие приложения к математической (и теоретической) физике. Диссертационная работа соответствует всем требованиям (в том числе п. 9) «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842 (в действующей редакции), предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор, Белова Мария Владимировна, безусловно, заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2 — дифференциальные уравнения и математическая физика.

Официальный оппонент
профессор Федерального государственного
автономного образовательного учреждения
высшего образования
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет
имени Н.И. Лобачевского»,
доктор физико-математических наук
(01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы
и оптимальное управление) Ефремова Людмила Сергеевна
Телефон: +7(831) 462-33-20
e-mail: ludmila.efremova@itmm.unn.ru

ПОДПИСЬ УДОСТОВЕРЯЮ /Ефремова Л.С./

ЗАМ. НАЧАЛЬНИКА УПРАВЛЕНИЯ

Почтовый адрес: 603022, г. Нижний Новгород,
проспект Гагарина, д. 23
Телефон: +7 (831) 462-30-03
Электронный адрес: unn@unn.ru

Подпись профессора Л.С. Ефремовой удостоверяю

29 апреля 2026 г.