

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу

Беловой Марии Владимировны

«Алгебраические инварианты для обыкновенных дифференциальных уравнений: теория и приложения»,

представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности **1.1.2. – дифференциальные уравнения и математическая физика**

Диссертация Беловой М.В. «Алгебраические инварианты для обыкновенных дифференциальных уравнений: теория и приложения» посвящена разработке общего теоретического подхода для исследования интегрируемости и разрешимости широких классов обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Актуальность темы

В диссертационной работе рассматривается проблема поиска и классификации инвариантных алгебраических многообразий для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Эта проблема является фундаментальной в общей теории дифференциальных уравнений и сохраняют свою актуальность и в настоящее время в связи с необходимостью исследования интегрируемости и разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым не применимы известные методы. Инвариантные многообразия используются при построении точных решений и первых интегралов.

Задача поиска инвариантных многообразий важна и с практической точки зрения, поскольку инвариантные многообразия позволяют анализировать динамику и бифуркации для дифференциальных систем, а также исследовать качественные свойства прикладных процессов и моделей математической физики, описываемых соответствующими системами.

В этой связи разработка эффективных методов построения алгебраических инвариантов представляет значительный научный интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения.

Структура и содержание диссертации

Объем диссертации составляет 365 страниц. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего 218 наименований.

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, формулируются цель работы и методология исследования, научная новизна основных результатов и их практическая значимость, перечисляются выносимые на защиту положения.

Первая глава посвящена построению алгебраических инвариантов для автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия их существования. Разработан метод, основанный на использовании рядов Пюизе, позволяющий эффективно находить инварианты и решать проблему Пуанкаре для дифференциальных уравнений, асимптотические решения которых обладают определенными свойствами.

Во **второй главе** исследуются вопросы интегрируемости двумерных полиномиальных дифференциальных систем. Развивается теория интегрируемости Дарбу и предлагается её обобщение — теория интегрируемости по Пюизе. Получены условия существования первых интегралов и интегрирующих множителей специального вида, которые не охватываются в классических подходах.

Третья глава посвящена анализу полиномиальных систем Льенара. Проведена их классификация, исследована интегрируемость, построены алгебраические инварианты и найдены новые интегрируемые случаи. Показано, что типичные системы не интегрируемы по Лиувиллю, однако существуют интегрируемые подсистемы при определенных ограничениях на параметры. В третьей главе проведено детальное исследование большого числа конкретных систем Льенара, имеющих прикладное значение.

В **четвертой главе** рассматриваются двумерные неавтономные дифференциальные системы с мероморфными коэффициентами. Обобщён метод построения инвариантов на неавтономный случай, проведена классификация ин-

вариантных многообразий и доказаны результаты о неинтегрируемости ряда систем. В частности, детально рассматриваются неавтономные осцилляторы Дуффинга и Дуффинга – ван дер Поля. Для этих осцилляторов найдены все неавтономные инварианты.

Пятая глава посвящена построению мероморфных решений, принадлежащих, так называемому, множеству W . Это множество состоит из трансцендентных мероморфных функций, обладающих теоремой сложения. С использованием теории Неванлинны показано, что трансцендентные мероморфные решения автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений определенного класса исчерпываются решениями из множества W . Разработанный в первой главе метод применяется для нахождения и классификации таких решений. Детально рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения второго, третьего и четвертого порядков, имеющие прикладное значение.

В **заключении** диссертации перечислены основные результаты работы.

Научная новизна

Результаты диссертационной работы значительно расширяют существующие методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. К числу наиболее значимых новых результатов относятся:

1. разработка метода построения алгебраических инвариантов первого порядка на основе рядов Пюизе;
2. решение проблемы Пуанкаре для дифференциальных уравнений, обладающих свойством конечности;
3. создание новой теории интегрируемости, обобщающей теорию интегрируемости Дарбу;
4. решение проблемы интегрируемости для полиномиальных систем Лье-нара, не имеющих резонанса на бесконечности;

5. разработка метода построения инвариантов для неавтономных двумерных дифференциальных систем с мероморфными коэффициентами;
6. разработка метода построения трансцендентных мероморфных решений, обладающих теоремой сложения.

Кроме того, имеются и целый ряд важных более частных конкретных результатов. Приведу здесь лишь два их примера:

а) впервые указано физически интересное дифференциальное уравнение (осциллятор Гельмгольца – Ван дер Поля), для которого проблема Пуанкаре в классической постановке, описанная в разделе 1.5 диссертации, неразрешима.

2) по-видимому, впервые указан первый интеграл для обобщённого уравнения Дюффинга в случае $\sigma = -6\alpha^2/25$.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты проведенных автором диссертации исследований являются важным научным достижением для аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Разработанные методы построения инвариантов применимы ко многим классам обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Также эти методы могут быть использованы при исследовании количественных и качественных свойств траекторий дифференциальных систем, встречающихся в различных областях науки. Теоретические положения теории интегрируемости по Пуанкаре открывают возможность для построения неалгебраических инвариантов и поиска дифференциальных систем с неллиувилевскими первыми интегралами. Классификации точных решений для прикладных дифференциальных систем, полученные в рамках диссертационной работы, находят применение при проверке результатов численных вычисле-

ний. Особу отмечу красоту используемых автором рассуждений, часто опирающихся на довольно абстрактные алгебраические факты.

Степень обоснованности и достоверность полученных результатов

Достоверность и обоснованность результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами, использованием современных методов аналитической теории дифференциальных уравнений, комплексного анализа, алгебраической геометрии и асимптотического анализа.

Все результаты подтверждены публикациями в высокорейтинговых рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах данных, а также апробированы на международных и российских научных конференциях и семинарах. Если говорить о диссертации в целом, то необходимо отметить высокий теоретический уровень работы, а также наличие большого числа примеров, иллюстрирующих разработанные методы. Личный вклад автора в основные результаты исследования не вызывает сомнения.

Замечания

Среди недостатков отмечу следующие:

1. На стр. 40 опечатка в формуле (1.15) вместо $u_{\infty, j}$ правильно $u_{j, \infty}$.
2. Стр. 40. В последнем предложении теоремы 1.1 оговорка «если это число конечно» не нужна, так как в противном случае степень многочлена, конечно, тоже меньше этого числа. Аналогичное замечание касается формулировки Теоремы 2.5 на стр. 84.
3. Стр. 49. Надо было привести ссылку на литературу касательно соотношений Ньютона для симметрических многочленов.
4. Стр. 74. Предпоследнее предложение первого абзаца в тексте диссертации не обосновано. Его предлагается принять на веру.
5. Стр. 75. Опечатка: вместо «таблицу 1.8» надо «таблицу 1.2».
6. Стр. 264. Поскольку речь здесь идёт о неавтономных уравнениях, то в формуле (4.2) вместо t правильно $t - t_0$.

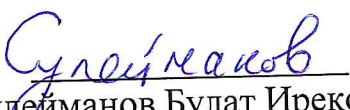
Указанные недостатки не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы и значимость результатов, выносимых на защиту.

Заключение

Диссертация Беловой М.В. «**Алгебраические инварианты для обыкновенных дифференциальных уравнений: теория и приложения**» представляет собой законченную научно-квалификационную работу. Автореферат правильно и достаточно полно отражает содержание диссертации. В опубликованных автором работах в полной мере представлены основные результаты и положения диссертации. Диссертационная работа обладает научной и практической значимостью.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертация «**Алгебраические инварианты для обыкновенных дифференциальных уравнений: теория и приложения**» удовлетворяет требованиям Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации №842 от 24 сентября 2013 г., предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор, **Белова Мария Владимировна**, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика.

Доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник,
Отдел дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения УФИЦ РАН, ведущий научный сотрудник


Сулейманов Булат Ирекович

Диссертация защищена по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Телефон: 89373184152

Электронная почта: bisul@mail.ru

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук»,
Республика Башкортостан, г. Уфа, проспект Октября, д. 71, 450054

Телефон: +7 (347) 284-56-52

Электронная почта: presid@anrb.ru

Отзыв составлен 23.04.2026

Подпись Сулейманова Б.И. заверяю

Главный секретарь УФИЦ РАН
Р.Х. Фаттахова

