



Утверждаю:

Проректор по научной работе
ФГБОУ ВО ЯрГУ им. П.Г. Демидова
кандидат биологических наук, доцент

Е. А. Флерова

«29» апреля 2026 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова» на диссертацию Беловой М.В. «Алгебраические инварианты для обыкновенных дифференциальных уравнений: теория и приложения», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

1. Актуальность темы диссертационной работы

Диссертация Беловой М.В. посвящена проблеме построения инвариантных алгебраических многообразий полиномиальных дифференциальных систем. Инвариантные многообразия играют большую роль при изучении качественного поведения траекторий систем, а также при исследовании существования первых интегралов определенных функциональных классов. Также инвариантные многообразия могут использоваться для построения и классификации точных решений дифференциальных уравнений. В связи с этим разработка методов построения инвариантов, применимых к широким классам уравнений и систем, является важной задачей.

2. Структура диссертационной работы и обзор ее содержания

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

Введение содержит обоснование актуальности темы, формулировки цели и задач, научной новизны, выносимых на защиту результатов, теоретической и практической значимости и т.п.

Первая глава посвящена проблеме построения инвариантных алгебраических многообразий автономных обыкновенных дифференциальных

уравнений и соответствующих им систем уравнений. Получено необходимое и достаточное условие существования таких инвариантов. Дано подробное описание метода рядов Пюизе, позволяющего находить такие инварианты. В основе метода лежит разложение инвариантов на линейные множители в кольцах многочленов над рядами Пюизе с фиксированными центрами. Исследованы свойства единственности алгебраических инвариантов. Для дифференциальных уравнений, обладающих свойством конечности, доказана разрешимость проблемы Пуанкаре в классической постановке. Проблема Пуанкаре состоит в поиске верхних оценок на степени неприводимых инвариантов. В качестве примера найдены все неприводимые алгебраические инварианты для модифицированного уравнения Кортвега – де Фриза в переменных бегущей волны. В явном виде получены точные решения этого уравнения. Некоторые из них были ранее неизвестны.

Вторая глава посвящена теории интегрируемости двумерных полиномиальных дифференциальных систем. Приводятся основные положения теории интегрируемости Дарбу, предназначенной для построения первых интегралов в классе функций Дарбу и Лиувилля. Предложена новая теория интегрируемости, обобщающая теорию интегрируемости Дарбу. В рамках новой теории происходит отказ от полиномиальной зависимости инвариантов относительно одной из переменных. Предполагается, что коэффициенты инвариантов являются рядами Пюизе. Дается вывод необходимых и достаточных условий существования формальных интегрирующих множителей специального вида. Новая теория интегрируемости может упрощать исследование интегрируемости по Дарбу и Лиувиллю, а также находить дифференциальные системы с первыми интегралами, не являющимися функциями Лиувилля.

Третья глава посвящена исследованию интегрируемости и разрешимости полиномиальных дифференциальных систем Льенара. Получены представления неприводимых алгебраических инвариантов в кольцах многочленов над рядами Пюизе с центром в бесконечно удаленной точке. Доказано, что типичная нелинейная полиномиальная система Льенара не интегрируема по Лиувиллю. Установлено, что для любых степеней многочленов, параметризующих системы и удовлетворяющих определенному ограничению, существуют интегрируемые по Лиувиллю подсистемы. Найдены необходимые и достаточные условия интегрируемости по Лиувиллю для

полиномиальных систем Лъенара, не имеющих резонанса на бесконечности. Получены новые интегрируемые системы, содержащие известные интегрируемые подсистемы как частные случаи. Детально исследованы некоторые системы Лъенара, имеющие прикладное значение. В частности, в явном виде найдены все неприводимые алгебраические инварианты для систем, описывающих осцилляторы Гельмгольца – ван дер Поля и Дуффинга – ван дер Поля. Показано, что степени неприводимых алгебраических инвариантов осциллятора Гельмгольца – ван дер Поля зависят от коэффициентов системы. Для обобщенного осциллятора Дуффинга – ван дер Поля пятой степени решена проблема интегрируемости по Пуанкаре. Получены первые интегралы, не являющиеся функциями Лиувилля.

В четвертой главе рассматривается задача построения неавтономных инвариантных алгебраических многообразий и обобщенных первых интегралов Дарбу для двумерных неавтономных полиномиальных дифференциальных систем, коэффициенты которых являются мероморфными функциями. Показано, что метод рядов Пуанкаре может использоваться и в неавтономном случае. Проведена классификация неавтономных алгебраических инвариантов для систем, описывающих неавтономные осцилляторы Дуффинга и Дуффинга – ван дер Поля. Показано, что эти системы не интегрируемы с двумя независимыми обобщенными первыми интегралами Дарбу.

Пятая глава посвящена построению трансцендентных мероморфных решений автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений. Детально рассматриваются периодические мероморфные решения, названные W -мероморфными решениями. Дано описание особенностей метода рядов Пуанкаре в случае построения алгебраических инвариантов, порождающих мероморфные решения из исследуемого класса. Доказано, что трансцендентные мероморфные решения дифференциальных уравнений со свойством конечности в случае двух доминантных дифференциальных мономов специального вида исчерпываются W -мероморфными решениями. Метод рядов Пуанкаре применяется для построения решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков, имеющих физические приложения.

Заключение содержит перечисление основных результатов, полученных в диссертационной работе.

Список литературы состоит из 218 наименований.

Объем диссертации составляет 365 страниц, включая 16 рисунков и 11 таблиц.

3. Научная новизна

К достоинствам диссертационной работы относится большое число новых научных результатов. Среди них мы отметим следующие:

- Разработан метод построения алгебраических инвариантов первого порядка для полиномиальных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод позволяет находить все неприводимые инварианты широких классов уравнений. Также последний шаг метода состоит в решении алгебраических систем, что позволяет эффективно использовать пакеты символьных вычислений.
- Для двумерных полиномиальных дифференциальных систем предложена новая теория интегрируемости, обобщающая теорию интегрируемости Дарбу. Новая теория упрощает исследование существования первых интегралов в классе функций Лиувилля, а также позволяет находить системы с первыми интегралами, не являющимися функциями Лиувилля.
- Предложен метод построения инвариантных поверхностей для двумерных неавтономных дифференциальных систем. Метод может быть использован при построении обобщенных первых интегралов Дарбу.
- Разработан метод нахождения эллиптических и специальных просто-периодических мероморфных решений полиномиальных автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Эффективность метода продемонстрирована на большом числе примеров.
- Решена сложная классификационная задача поиска интегрируемых и разрешимых полиномиальных систем Льенара. Найдены ранее неизвестные интегрируемые системы Льенара, параметризованные произвольным многочленом.

4. Обоснованность и достоверность научных результатов диссертационной работы

Все результаты диссертационной работы обоснованы с помощью математического аппарата аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, асимптотических методов, комплексного анализа и математической физики. Классификационные результаты для прикладных дифференциальных систем подтверждаются вычислениями, проведенными с помощью пакетов символьных вычислений. Достоверность

результатов обеспечивается корректными доказательствами, правильным использованием математического языка и подтверждена публикациями в высокорейтинговых журналах, а также выступлениями на российских и международных конференциях и семинарах.

5. Теоретическая и практическая значимость результатов диссертационной работы, рекомендации по использованию

Результаты, полученные в диссертационной работе, вносят существенный вклад в развитие теории интегрируемости обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы построения инвариантов и точных решений, предложенные в работе, имеют широкую область применимости и могут использоваться при исследовании аналитических и качественных свойств решений многих прикладных дифференциальных систем. Результаты классификации инвариантов, первых интегралов и интегрируемых систем могут применяться при составлении справочников, а также для проверки работы вычислительных алгоритмов.

Теория интегрируемости по Пюизе, предложенная в диссертационной работе, может использоваться для построения неалгебраических инвариантов и поиска систем с первыми интегралами, не принадлежащими расширениям Лиувилля поля рациональных функций.

Полиномиальные дифференциальные системы Льенара являются эталонными моделями для описания многих колебательных процессов в различных областях науки. В связи с этим решения проблемы интегрируемости для таких систем, представленные в работе, представляют интерес для соответствующих областей науки.

6. Соответствие содержания диссертационной работы автореферату и заявленной специальности

В автореферате с достаточной полнотой и вполне корректно отражено содержание диссертации.

В диссертационной работе разрабатываются аналитические методы построения инвариантных многообразий нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Также большое внимание уделено нахождению явных представлений первых интегралов и точных решений. Диссертация по своему содержанию соответствует первому, шестому и восьмому пунктам паспорта специальности 1.1.2. – дифференциальные уравнения и математическая физика.

7. Публикации по теме диссертационной работы

Научные результаты диссертации в полной мере представлены в публикациях автора. Всего автору принадлежит более 70 статей, из которых 50 опубликованы в рецензируемых изданиях, индексируемых в базах данных научного цитирования Web of Science и Scopus. Все статьи посвящены теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Основные результаты диссертационной работы отражены в 14 статьях. В 11 статьях соискатель является единственным автором, 10 статей имеют квартиль Q_1 в год публикации хотя бы по одной из баз данных Web of Science и Scopus. Основные результаты работы доложены на всероссийских и международных научных конференциях.

8. Недостатки и замечания

По диссертации необходимо сделать следующие замечания:

1. Алгебраические инварианты, представленные в работе, получены с помощью пакетов символьных вычислений. Имело бы смысл включить в диссертационную работу приложение с кодом вычислений хотя бы для одного примера.

2. В разделе 1.4 проводится сравнение метода рядов Пюизе с другими методами построения алгебраических инвариантов. Следовало бы хотя бы кратко описать эти методы, в частности, метод Лагутинского и метод разложения векторного поля на весооднородные компоненты.

Указанные замечания несущественны и не ухудшают высокое качество диссертационной работы.

9. Заключение

Диссертация Беловой М.В. выполнена на высоком научном уровне, ее результаты обладают научной новизной, теоретической значимостью и практической применимостью. Их достоверность не вызывает сомнений. Можно утверждать, что результаты диссертации в совокупности являются научным достижением.

Диссертация в полной мере соответствует критериям Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 № 842 (в действующей редакции), а ее автор, Белова Мария Владимировна, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по научной специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

