



УТВЕРЖДАЮ

Проректор Национального
исследовательского университета
«Высшая школа экономики»

к.э.н., доцент Рощин Сергей Юрьевич

2023 г.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ
федерального государственного автономного
образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Диссертация Беловой Марии Владимировны на тему: «Алгебраические инварианты для обыкновенных дифференциальных уравнений: теория и приложения» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2. «Дифференциальные уравнения и математическая физика» выполнена в департаменте прикладной математики Московского института электроники и математики им. А.Н. Тихонова федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».

В период подготовки диссертации соискатель ученой степени Белова Мария Владимировна работала в департаменте прикладной математики Московского института электроники и математики им. А.Н. Тихонова федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» в должности доцента с 01.09.2018 по настоящее время.

В 2007 г. окончила Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский инженерно-физический институт (государственный университет)» по специальности «Прикладная математика и информатика».

В 2010 г. окончила очную аспирантуру федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».

В 2009 г. решением диссертационного совета, созданного на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», от 16 декабря 2009 г. № 3 присуждена ученой степени кандидата физико-математических наук и выдан диплом ДКН № 105034 от 12 марта 2010 г.

В 2016 году на основании свидетельства о браке V-МЮ № 818747 Белова Мария Владимировна меняла фамилию, прежняя фамилия Демина.

Подготовка диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук осуществлялась по основному месту работы.

По итогам обсуждения принято следующее заключение.

Актуальность темы

Диссертационная работа посвящена исследованию нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений является важнейшей задачей математики. Понятие интегрируемости можно рассматривать с различных точек зрения: алгебраической, аналитической или геометрической, локальной или глобальной, и т. д. В различных областях математики в понятие интегрируемости часто вкладывается разный смысл. Например, классическим является определение интегрируемости в квадратурах. Общее решение интегрируемого в квадратурах уравнения должно представляться в виде конечной последовательности суперпозиций операций интегрирования и алгебраических операций, применяемых к фиксированному классу функций. В теории уравнений Пенлеве под интегрируемостью понимают наличие определенных свойств у общего решения. При этом само общее решение может не иметь явного представления и не выражаться через классические функции. Достаточно часто в научной литературе используется определение, согласно которому обыкновенное дифференциальное уравнение называют интегрируемым, если на некотором связном подмножестве фазового пространства, имеющем ненулевую меру Лебега, существует достаточное число независимых сохраняющихся величин (первых интегралов). Это определение является абстрактным, поэтому на практике принято ограничивать классы функций, в рамках которых ищутся первые интегралы. Наиболее интересны для приложений первые интегралы, являющиеся функциями Дарбу и Лиувилля. Также в рамках современных обобщений часть независимых первых интегралов может заменяться инвариантными векторными полями или тензорными инвариантами. Как только определение интегрируемости зафиксировано, дифференциальные уравнения можно классифицировать на интегрируемые и неинтегрируемые в рамках рассматриваемого подхода. Если дифференциальное уравнение не интегрируемо или его статус с точки зрения интегрируемости не известен, то ставится задача об исследовании частичной интегрируемости. В широком смысле нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение называют частично интегрируемым или разрешимым, если оно обладает некоторым набором нетривиальных точных решений, независимых первых интегралов, множителей Якоби и других объектов, характерных для интегрируемых

уравнений, при этом наличия этих объектов недостаточно для полной интегрируемости заданного уравнения. Универсальных методов, позволяющих найти или общее решение, или достаточное число независимых первых интегралов нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, не существует. Следовательно, задача поиска методов, которые бы позволили исследовать интегрируемость и разрешимость дифференциальных уравнений в тех случаях, когда не применимы другие методы, чрезвычайно актуальны.

Обоснованность научных положений

Все математические утверждения и теоремы имеют строгие доказательства. Выносимые на защиту результаты прошли рецензирование в международных высокорейтинговых журналах, а также докладывались и обсуждались на российских и международных конференциях и семинарах.

Личное участие соискателя ученой степени в получении результатов, изложенных в диссертации

Все изложенные в диссертации результаты получены соискателем самостоятельно. Среди статей, представленных к защите, одиннадцать написаны без соавторов. Из статей, написанных в соавторстве, на защиту выносятся результаты, полученные лично соискателем.

Степень достоверности результатов проведенных соискателем ученой степени исследований

Достоверность результатов исследования подтверждается тем, что, во-первых, все результаты базируются на строгих, логически выверенных посылах; во-вторых, корректно применен математический аппарат; в-третьих, проведены анализ и сравнение с известными результатами исследований других авторов, работающих в этой области. Кроме того, в качестве обоснования результатов выступают публикации в высокорейтинговых журналах и выступления на научных семинарах и конференциях.

Научная новизна работы

1. Разработан новый метод нахождения алгебраических инвариантов автономных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод основан на разложении многочленов, задающих инварианты, на множители над алгебраически замкнутым полем рядов Пуанкаре в окрестности бесконечно удаленной точки. Для заданных обыкновенных дифференциальных уравнений метод позволяет находить решение проблемы Пуанкаре в тех случаях, когда не работают классические оценки. Более того, метод может быть реализован с использованием компьютерных систем символьных вычислений, таких как Maple, Wolfram Mathematica, Matlab и т. д.

2. Разработан новый метод построения инвариантных поверхностей для неавтономных систем дифференциальных уравнений на плоскости. Метод допускает компьютерную реализацию в системах символьных вычислений.

3. Получен общий вид мероморфных решений автономных обыкновенных дифференциальных уравнений с конечным числом локальных решений, описываемых рядами Лорана в окрестности подвижных полюсов, и двумя доминантными дифференциальными мономами специального вида.

4. Показано, что метод нахождения алгебраических инвариантов может применяться для построения и классификации мероморфных решений автономных обыкновенных дифференциальных уравнений с бесконечным числом локальных решений, описываемых рядами Лорана в окрестности подвижных полюсов, и с несколькими доминантными дифференциальными мономами.

5. Найдено явное представление для кофакторов инвариантных алгебраических кривых систем полиномиальных дифференциальных уравнений на плоскости.

6. Установлена разрешимость проблемы Пуанкаре в классической постановке для семейств автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих свойством конечности.

7. Предложена новая локальная теория интегрируемости, названная интегрируемостью по Пюизе. Эту теорию можно рассматривать как локальную теорию интегрируемости Дарбу. Разработанный подход позволяет находить необходимые условия существования первых интегралов Дарбу, Лиувилля, а также первых интегралов специального вида, не выражающихся через функции Лиувилля.

8. Выведено новое необходимое условие существования экспоненциальных инвариантов с неполиномиальным аргументом для полиномиальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости.

9. Впервые найдены необходимые и достаточные условия интегрируемости по Лиувиллю нерезонансных на бесконечности полиномиальных дифференциальных систем Льенара.

10. Доказано, что типичная нелинейная полиномиальная система Льенара не имеет конечных инвариантных алгебраических кривых и не интегрируема по Лиувиллю.

Теоретическая значимость

Предложенные в диссертационной работе новые методы построения алгебраических инвариантов, инвариантных поверхностей, мероморфных решений имеют широкую область применимости. В автономном случае последний шаг метода является алгебраическим, что позволяет применять мощные методы алгебраической геометрии (базисы Гребнера, результаты и т. п.). Метод построения мероморфных решений обобщает ряд других методов, таких как методы подстановок и методы вспомогательных уравнений. Разработанные методы могут быть использованы не только для нахождения некоторых инвариантов, но и для их

классификации. Метод построения алгебраических инвариантов для заданных обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет решать проблему Пуанкаре, а также вторую часть 16-ой проблемы Гильберта в алгебраической постановке. Вторая часть 16-ой проблемы Гильберта состоит в исследовании числа и взаимного расположения предельных циклов систем обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости. В рамках алгебраической постановки учитываются только предельные циклы, задаваемые овалами алгебраических кривых. Эффективность разработанных методов была продемонстрирована в диссертационной работе на большом количестве примеров, важных с практической точки зрения.

Явное представление для кофакторов инвариантных алгебраических кривых систем полиномиальных дифференциальных уравнений на плоскости позволяет находить необходимые условия интегрируемости по Дарбу и Лиувиллю до фактического построения инвариантов.

В научной литературе встречаются работы, содержащие ошибки в классификации алгебраических инвариантов и первых интегралов. Применение разработанных методов позволило исправить некоторые из ошибок, а также получить новые интегрируемые и точно решаемые уравнения.

Практическая значимость результатов проведенных соискателем ученой степени исследований

Точные решения нелинейных дифференциальных уравнений, которые позволяют находить предложенные в диссертационной работе методы, могут быть использованы при проверке результатов численного моделирования. Разработанные в диссертационной работе методы и алгоритмы могут применяться при исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений, важных с прикладной точки зрения.

Апробация работы

Результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- Лекция «Инвариантные алгебраические многообразия для обыкновенных дифференциальных уравнений», международный семинар «Online GSDUAB Seminar», организованный Автономным Университетом Барселоны, февраль 2023, on-line (на английском);
- Доклад «Инварианты и интегрируемость полиномиальных векторных полей», международная конференция «Shilnikov Workshop 2022», Нижний Новгород, декабрь 2022, on-line (на английском);
- Доклад «Теория интегрируемости Дарбу для полиномиальных дифференциальных систем на плоскости», вторая конференция Математических

центров России, Москва, ноябрь 2022;

- Доклад «Алгебраические и геометрические аспекты теории интегрируемости Дарбу», международная конференция «Conference on Dynamics of Differential Equations», организованная Китайско-Российским Математическим Центром (Sino-Russia Mathematics Center), Сычуаньский Университет, Китай, август 2022, on-line (на английском);
- Доклад «Теория интегрируемости Дарбу для полиномиальных дифференциальных систем Льенара», международная конференция «The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations», Москва, июль 2022;
- Лекция «Алгебраические инварианты и теория интегрируемости Дарбу», общегородской семинар им. А. М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, апрель 2022, on-line;
- Доклад «Интегрируемость по Дарбу и Пуанкаре для полиномиальных векторных полей на плоскости», международная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения (Банное 2022)», Южный Урал, Якты-Куль (озеро Банное), март 2022;
- Доклад W-мероморфные решения автономных обыкновенных дифференциальных уравнения и связанные вопросы, международная конференция «Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis», Долгопрудный, июнь-июль 2021, on-line (на английском);
- Доклад «От рядов Пуанкаре к алгебраическим инвариантам», Международная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения (Банное 2021)», Южный Урал, Якты-Куль (озеро Банное), март 2021;
- Лекция «Алгебраические инварианты, интегрируемость и мероморфные решения», семинар по комплексному анализу «CAvid: Complex Analysis video seminar», организованный профессором лондонского университетского колледжа Родом Халбурдом (Rod Halburd), февраль 2021, on-line (на английском);
- Доклад «Проблема Пуанкаре и алгебраические инварианты», Международная конференция «Formal and Analytic Solutions of Diff. Equations on the Internet (FASnet20)», организованная университетом аАкала, Испания, июнь 2020, on-line (на английском);
- Доклад «Ряды Пуанкаре, инвариантные алгебраические кривые и интегрируемость полиномиальных динамических систем на плоскости», Международная конференция «Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov workshop», Нижний Новгород, декабрь 2019 (на английском);
- Доклад «Дробно-степенные ряды и интегрируемость алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка», научный семинар

«Перспективные математические технологии», МИЭМ НИУ ВШЭ, ноябрь 2019;

- Доклад «Ряды Пуанкаре, алгебраические инварианты и интегрируемость полиномиальных динамических систем на плоскости», научный семинар по аналитической теории дифференциальных уравнений, Математический институт имени В. А. Стеклова РАН, октябрь 2019;

- Доклад «Интегрируемость по Лиувиллю полиномиальных динамических систем на плоскости», Международная конференция «Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis», Долгопрудный, июнь 2019 (на английском);

- Доклад «Построение алгебраических инвариантов и алгебраически инвариантных решений», Международная конференция «Partial Differential Equations and Applications in Memory of Professor V.Yu. Sternin», Москва, ноябрь 2018 (на английском);

- Доклад «Инвариантные алгебраические кривые и первые интегралы Лиувилля для систем обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости», 7-ая международная конференция «Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling», Москва, июнь 2018.

Полнота изложения материалов диссертации в публикациях

Беловой Марией Владимировной опубликовано более 65 научных работ в ведущих российских и зарубежных научных изданиях. Среди этих работ 45 индексируются в базах данных научного цитирования Web of Science и Scopus. Все публикации посвящены теории обыкновенных дифференциальных уравнений и математической физике. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 14 работах общим объемом 25 п.л.; личный вклад автора составляет 23,1 п.л.

Научная публикация	Личный вклад	Публикация входит в		
		международные базы данных и системы цитирования (Web of Science/ Scopus/ MathSciNet ...)	Список рекомендованных журналов НИУ ВШЭ	Перечень рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК
1. Demina M.V. Integrability and solvability of polynomial	6 п.л.	Q1 Web of Science, Q1 Scopus	да	да

Liénard differential systems // Studies in Applied Mathematics. 2023. Vol. 150. No. 3. P. 755-817				
2. Demina M.V. Meromorphic solutions of autonomous ordinary differential equations without the finiteness property // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2022. Vol. 516. No. 2. P. 126516	1,5 п.л.	Q1 Web of Science, Q1 Scopus	да	да
3. Demina M.V. Puiseux integrability of differential equations // Qualitative Theory of Dynamical Systems / Demina M.V., Giné J and Valls C. 2022. Vol. 21 No. 2. P. 1-35	в соавт., личный вклад – 2 п.л	Q3 Web of Science, Q3 Scopus	да	да
4. Demina M.V. The method of Puiseux series and invariant algebraic curves // Communications in Contemporary Mathematics. 2022. Vol. 24(3). P. 2150007	2 п.л.	Q1 Web of Science, Q1 Scopus	да	да
5. Demina M.V. Necessary and sufficient conditions for the existence of invariant algebraic curves // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2021. Vol. 48. P. 1-22	2 п.л.	Q2 Web of Science, Q3 Scopus	да	да
6. Demina M.V. Classifying algebraic invariants and algebraically invariant solutions // Chaos, Solitons and Fractals. 2020. Vol. 140. P. 110219	1 п.л.	Q1 Web of Science, Q1 Scopus	да	да
7. Demina M.V. Classification of	1,1 п.л.	Q1 Web of Science, Q1	да	да

meromorphic integrals for autonomous nonlinear ordinary differential equations with two dominant monomials // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2019. Vol. 479. No. 2. P. 1851–1862.		Scopus		
8. Demina M.V. Liouvillian integrability of the generalized Duffing oscillators // Analysis and Mathematical Physics. 2021. Vol. 11. №. 1. P. 25	1,7 п.л.	Q1 Web of Science, Q2 Scopus	да	да
9. Demina M.V. Invariant surfaces and Darboux integrability for non-autonomous dynamical systems in the plane // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2018. Vol. 51. №. 50. P. 505202.	1,8 п.л.	Q1 Web of Science, Q2 Scopus	да	да
10. Demina M.V. Invariant algebraic curves for Liénard dynamical systems revisited // Applied Mathematics Letters. 2018. Vol. 84. P. 42–48.	0,7 п.л.	Q1 Web of Science, Q1 Scopus	да	да
11. Demina M.V. On the Poincaré problem and Liouvillian integrability of quadratic Liénard differential equations / Demina M.V. and Valls C. // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A. 2020. Vol. 150. №. 6. P. 3231–3251.	в соавт., личный вклад – 1 п.л.	Q2 Web of Science, Q1 Scopus	да	да
12. Demina M.V. Classification of invariant algebraic curves and nonexistence of algebraic limit cycles in quadratic	в соавт., личный вклад – 0,5 п.л.	Q2 Web of Science, Q1 Scopus	да	да

systems from family (I) of the Chinese classification / Demina M.V. and Valls C. // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2020. Vol. 30. №. 4. P. 2050056.				
13. Demina M.V. Novel algebraic aspects of Liouvillian integrability for two-dimensional polynomial dynamical systems // Physics Letters A. 2018. Vol. 382. №. 20. P. 1353– 1360	0,9 п.л.	Q2 Web of Science, Q2 Scopus	да	да
14. Demina M.V. Integrability and Jacobi Last Multipliers of Cubic Lienard Differential Equations with Quadratic Damping // Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. 2020. Vol. 9. №. 4. P. 499–507.	0,9 п.л.	Q4 Scopus	да	да

Публикации полностью соответствуют теме диссертационного исследования и раскрывают её основные положения.

Ценность научных работ соискателя ученой степени

Ценность научных работ соискателя подтверждается их теоретической и практической значимостью. Разработаны новые методы исследования интегрируемости и разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Эти методы применялись для исследования важных с прикладной точки зрения моделей. Получены новые фундаментальные знания об инвариантах и первых интегралах полиномиальных дифференциальных систем Льева, а также ряда других систем.

Диссертация Беловой Марии Владимировны на тему: «Алгебраические инварианты для обыкновенных дифференциальных уравнений: теория и приложения» – это законченная научно-квалификационная работа, которая соответствует требованиям пунктов 9, 10, 14 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842, а также Паспорту научной специальности 1.1.2. «Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Диссертация Беловой Марии Владимировны на тему: «Алгебраические инварианты для обыкновенных дифференциальных уравнений: теория и приложения» рекомендуется к защите на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2. «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Заключение принято на заседании департамента прикладной математики Московского института электроники и математики им. А. Н. Тихонова федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» 11 апреля 2023 г., протокол № 64.

Присутствовало на заседании 16 человек, в голосовании принимали участие 15 человек.

Результаты голосования: «за» – 15 человек, «против» – 0 человек, «воздержались» – 0 человек.

Доцент департамента
прикладной математики
МИЭМ НИУ ВШЭ
к. т. н., PhD



Акसेнов Сергей Алексеевич

Подпись заведующего
СПЕЦИАЛИСТ ПО ПЕРСОНАЛУ
УПРАВЛЕНИЯ ПЕРСОНАЛА
ПРОКОПЕНКО А. И.



22.05.2023