Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Белова Мария Владимировна

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Специальность 1.1.2. — дифференциальные уравнения и математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2023

Содержание

Введение

Диссертационная работа посвящена исследованию аналитических свойств решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Основное внимание уделено построению инвариантов и первых интегралов полиномиальных дифференциальных систем.

Актуальность темы диссертационной работы. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений является важнейшей задачей математики. Понятие интегрируемости можно рассматривать с различных точек зрения: алгебраической, аналитической или геометрической, локальной или глобальной, и т. д. В некоторых областях математики в понятие интегрируемости вкладывается разный смысл. Например, классическим является определение интегрируемости в квадратурах. Общее решение интегрируемого в квадратурах уравнения должно представляться в виде конечной последовательности суперпозиций операций интегрирования и алгебраических операций, применяемых к фиксированному классу функций. Также в научной литературе используется определение, согласно которому обыкновенное дифференциальное уравнение называют интегрируемым, если на некотором открытом подмножестве фазового пространства, имеющем ненулевую меру Лебега, существует достаточное число независимых сохраняющихся величин (первых интегралов). Это определение является абстрактным, поэтому на практике принято ограничивать классы функций, в рамках которых происходит поиск первых интегралов. К наиболее важным классам относятся полиномиальные, рациональные, мероморфные первые интегралы, а также первые интегралы, являющиеся функциями Дарбу и Лиувилля. Первые интегралы, задаваемые функциями Дарбу и Лиувилля, представляют большой интерес для приложений. В рамках современных обобщений часть независимых первых интегралов при определенных условиях может быть заменена инвариантными векторными полями или тензорными инвариантами [1, 2].

Как только определение интегрируемости зафиксировано, дифференциальные уравнения можно классифицировать на интегрируемые и неинтегрируемые в рамках рассматриваемого подхода. Если дифференциальное уравнение не интегрируемо или его статус с точки зрения интегрируемости не известен, то ставится задача об исследовании частичной интегрируемости [3]. В широком смысле нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение называют частично интегрируемым или разрешимым, если оно обладает некоторым набором нетривиальных точных решений, независимых первых интегралов, тензорных инвариантов и других объектов, характерных для интегрируемых уравнений, при этом наличия этих объектов недостаточно для полной интегрируемости заданного уравнения.

В настоящее время в научной литературе нет универсальных методов, позволяющих найти или общее решение, или достаточное число независимых первых интегралов нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, групповые методы являются мощным средством исследования интегрируемости и построения точных решений, но эти методы применимы, только если дифференциальное уравнение обладает некоторым набором симметрий (классических или обобщенных). В частности, для интегрируемости обыкновенного дифференциального уравнения в квадратурах достаточно существования разрешимой алгебры Ли операторов симметрий, размерность которой совпадает с порядком уравнения [4, 5]. В то же время, это условие не является необходимым. Целый ряд методов разработан в рамках дифференциальной теории Галуа [6–8]. Отметим, что дифференциальная теория Галуа может быть эффективно применена к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям, а также к нелинейным дифференциальным уравнениям, которые или могут быть преобразованы к линейным, или, например, допускают построение вариационных приближений в окрестности неравновесных решений [9]. В последние годы активно развивается мощный аппарат теории гамильтоновых систем [10, 11]. Однако, существует большое количество важных с прикладной точки зрения дифференциальных уравнений и систем, которые или не могут быть представлены в виде гамильтоновой системы, или такое представление заранее не известно. Таким образом, задача поиска методов, которые бы позволили исследовать интегрируемость и разрешимость дифференциальных уравнений в тех случаях, когда не применимы другие методы, чрезвычайно актуальна.

Степень разработанности темы диссертационной работы. Систематические исследования интегрируемости и разрешимости нелинейных двумерных дифференциальных систем были начаты еще в XIX веке в работах Ж. Г. Дарбу (J. G. Darboux), П. Пенлеве (P. Painlevé), А. Пуанкаре (H. Poincaré), см. [12–15]. В 1878 году Ж. Г. Дарбу предложил интересный и наглядный метод построения рациональных первых интегралов двумерных автономных полиномиальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [12]. Ж.Г. Дарбу обнаружил, что для этих целей могут быть использованы инвариантные алгебраические кривые рассматриваемых систем. В 1992 – 1999 гг. М. Ф. Зингер (M.F. Singer) и К. Кристофер (C. Christopher) усовершенствовали метод Дарбу [16–18]. В рамках нового метода стало возможным находить не только рациональные первые интегралы, но и первые интегралы, являющиеся функциями Дарбу и Лиувилля.

М. Ф. Зингер и К. Кристофер доказали, что знание всех неприводимых инвариантных алгебраических кривых и экспоненциальных инвариантов позволяет получать необходимые и достаточные условия интегрируемости по Лиувиллю для заданной двумерной автономной полиномиальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Первые интегралы, являющиеся функциями Лиувилля, имеют большое практическое значение, поскольку функции Лиувилля не абстрактны, а могут быть получены с помощью конечной последовательности суперпозиций алгебраических функций, квадратур и экспоненциальных функций.

Весомый вклад в изучение свойств двумерных полиномиальных систем, имеющих инвариантные алгебраические кривые, интегрирующие множители и первые интегралы Дарбу внесен М. В. Доловым и его учениками [19–21]. Отметим, что многие современные методы построения первых интегралов, отличные от метода Дарбу, на самом деле приводят к первым интегралам, являющимся функциями Дарбу или Лиувилля. Это такие методы, как метод локальных [22, 23] или нелокальных преобразований [24, 25], метод пар Лакса [3], метод факторизации [24], методы λ–симметрий [26] и S–функций [27], а также некоторые другие методы. Перечисленные методы могут быть использованы для нахождения новых интегрируемых дифференциальных уравнений, а также для выявления интересных особенностей изучаемых уравнений, например, наличие явной или неявной линеаризации. Однако, в отличие от метода Дарбу, эти методы лишь в редких случаях позволяют находить все интегрируемые по Дарбу и Лиувиллю подсемейства для заданных многопараметрических дифференциальных уравнений и систем.

Понятие инвариантной алгебраической кривой можно обобщить на случай дифференциальных систем размерности выше второй и обыкновенных дифференциальных уравнений порядков выше второго [28, 29]. В результате появляется задача поиска и классификации алгебраических инвариантов и алгебраически инвариантных решений для автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Алгебраические инварианты порождают автономные алгебраические обыкновенные дифференциальные уравнения первого (или более высокого) порядка, совместные с исходным уравнением. Мотивацией для исследования проблемы поиска и классификации алгебраических инвариантов для дифференциальных уравнений порядка выше второго является тот факт, что многие известные точные решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и многие «бегущие волны» автономных дифференциальных уравнений в частных производных являются на самом деле алгебраически инвариантными решениями [28–32]. Также наличие алгебраического инварианта с произвольным параметром можно использовать как необходимое условие алгебраической интегрируемости автономного обыкновенного дифференциального уравнения третьего или более или высокого порядка.

Задача построения всех неприводимых алгебраических инвариантов для заданного обыкновенного дифференциального уравнения является чрезвычайно сложной [29]. Основная трудность при построении неприводимых алгебраических инвариантов заключается в том, что их степени, как правило, заранее не известны. Проблему нахождения оценки сверху для степеней неприводимых алгебраических инвариантов в двумерном случае называют проблемой Пуанкаре [33–35]. Хорошо известно, что равномерная оценка, зависящая от степени векторного поля, соответствующего рассматриваемому семейству двумерных автономных полиномиальных дифференциальных систем, может не существовать [36]. Решения этой проблемы, справедливые при определенных ограничениях, накладываемых на особые точки дифференциальных систем и/или инвариантные алгебраические кривые, были получены Д. Серво (D. Cerveau) и А. Линс Нето (A. Lins Neto) [37], М. М. Карничером (M. M. Carnicer) [38], С. Валхером (S. Walcher) [39]. Например, найдены оценки при отсутствии на алгебраической кривой, задаваемой инвариантом, дикритических особых точек векторного поля [38]. К сожалению, подобные ограничения не выполняются для многих важных с прикладной точки зрения семейств уравнений и систем.

Еще одной задачей, тесно связанной с проблемой построения алгебраических инвариантов, является задача нахождения и классификации мероморфных решений автономных нелинейных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений произвольных порядков. Изучением существования, наличия явного представления, характеристик роста и других свойств мероморфных решений занимались У. К. Хейман (W. K. Hayman), А. А. Гольдберг, Н. Штайнмец (N. Steinmetz), А. З. Мохонько, А. Э. Еременко, Р. Хальбурд (R. Halburd), Р. Конт (R. Conte), Т.-В. Нг (T.-W. Ng) и другие математики.

Трансцендентные мероморфные функции, являющиеся эллиптическими или рациональными с экспоненциальным аргументом, принято называть $\mathbb{W}$-мероморфными функциями в честь К. Вейерштрасса (K. Weierstrass). Хорошо известно, что любая $\mathbb{W}$-мероморфная функция удовлетворяет автономному алгебраическому обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка [40]. Таким образом, проблема построения и классификации $\mathbb{W}$-мероморфных решений автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений может быть решена с использованием алгебраических инвариантов [30, 41]. Более того, известно, что обыкновенные дифференциальные уравнения с определенными свойствами не имеют трансцендентных мероморфных решений, отличных от $\mathbb{W}$-мероморфных функций.

С помощью теории Неванлинны А. Е. Еременко доказал, что все трансцендентные мероморфные решения обыкновенных дифференциальных уравнений с одним доминантным дифференциальным мономом и конечным числом локальных решений, заданных рядами Лорана в окрестности полюсов, являются $\mathbb{W}$-мероморфными функциями [42]. Для нахождения некоторых

$\mathbb{W}$-мероморфных решений М. Мюзетт (M. Musette) и Р. Конт (R. Conte) предложили метод, получивший название метода вспомогательных уравнений [30]. К сожалению, этот метод не позволяет находить все $\mathbb{W}$-мероморфные решения обыкновенных дифференциальных уравнений с несколькими доминантными дифференциальными мономами и/или с бесконечным числом локальных решений, описываемых рядами Лорана в окрестности полюсов.

Теория интегрируемости Дарбу может быть обобщена на случай неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. Не так давно было введено понятие обобщенного первого интеграла Дарбу для двумерных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [43–46]. Как и в автономном случае, наибольшая трудность при исследовании интегрируемости по Дарбу неавтономных систем дифференциальных уравнений связана с классификацией инвариантных поверхностей [43]. Вопросы построения не только достаточных, но и необходимых условий интегрируемости по Дарбу неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений в научной литературе почти не рассматривались.

Отметим, что алгебраические инварианты и инвариантные поверхности чрезвычайно важны и с прикладной точки зрения. Прежде всего, это связано с тем, что они позволяют находить частные фазовые траектории рассматриваемых дифференциальных уравнений [47, 48]. Например, предельные циклы динамических систем на плоскости могут являться овалами инвариантных алгебраических кривых. Также инварианты позволяют разбивать фазовое пространство рассматриваемой системы на области, в которых поведение траекторий может изучаться независимо.

В последние годы вопросы построения инвариантных кривых и поверхностей, а также первых интегралов, являющихся функциями Дарбу и Лиувилля, активно изучаются. Большой вклад в исследование подобных задач внесли Дж. П. Жуанолоу (J.P. Jouanolou), М. В. Долов, Л.А. Черкас, Дж. Ллибре

(J. Llibre), Дж. Чаваррига (J. Chavarriga), Х. Чжан (X. Zhang), Х. Жолондек (H. Żołądec), Д. Шломюк (D. Schlomiuk), В.Г. Романовский, К. Валлс (C. Valls), Дж. Жинне (J. Giné), А. Феррагут (A. Ferragut), Г. Джакомини (H. Giacomini).

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является исследование интегрируемости и разрешимости нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, встречающихся в различных областях физики, прикладной математики, биологии, экономики и т. п.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1. Разработать метод построения и классификации алгебраических инвариантов автономных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Разработать метод построения и классификации инвариантных алгебраических кривых и инвариантных поверхностей для автономных и неавтономных полиномиальных систем дифференциальных уравнений на плоскости.

3. Разработать метод нахождения мероморфных решений автономных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Применить предложенные методы для исследования интегрируемости и разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений, которые или ранее не изучались в рамках других методов, или для которых в научной литературе нет исчерпывающих сведений об их интегрируемости или разрешимости.

Публикации. Автором диссертационной работы опубликовано более 70 научных работ в ведущих российских и зарубежных научных изданиях. Среди этих работ 50 индексируются в базах данных научного цитирования Web of Science и Scopus. Все публикации посвящены теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Список статей, отражающих основные результаты диссертации, приведен ниже.

(1) M. V. Demina. Integrability and solvability of polynomial Liénard differential systems // *Studies in Applied Mathematics*. 2023. Vol. 150. No. 3. P. 755-817; Q_1 Web of Science, Q_1 Scopus.

doi.org/10.1111/sapm.12556

(2) M. V. Demina. Meromorphic solutions of autonomous ordinary differential equations without the finiteness property // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2022. Vol. 516. No. 2. P. 126516; Q_1 Web of Science, Q_1 Scopus.

doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126516

(3) M. V. Demina. The method of Puiseux series and invariant algebraic curves // *Communications in Contemporary Mathematics*. 2022. Vol. 24. No. 3. P. 2150007; Q_1 Web of Science, Q_1 Scopus.

doi.org/10.1142/S0219199721500073

(4) M. V. Demina. Necessary and sufficient conditions for the existence of invariant algebraic curves // *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. 2021. Vol. 48. P. 1–22; Q_2 Web of Science, Q_3 Scopus.

doi.org/10.14232/ejqtde.2021.1.48

(5) M. V. Demina. Classifying algebraic invariants and algebraically invariant solutions // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. Vol. 140. P. 110219; Q_1 Web of Science, Q_1 Scopus.

doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110219

(6) M. V. Demina. Classification of meromorphic integrals for autonomous nonlinear ordinary differential equations with two dominant monomials // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2019. Vol. 479. No. 2. P. 1851–1862; Q_1 Web of Science, Q_1 Scopus.

doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.07.026

(7) M. V. Demina. Liouvillian integrability of the generalized Duffing oscillators // *Analysis and Mathematical Physics*. 2021. Vol. 11. No. 1. P. 25; Q_1 Web of Science, Q_2 Scopus.

doi.org/10.1007/s13324-020-00459-z

(8) M. V. Demina. Invariant surfaces and Darboux integrability for non-autonomous dynamical systems in the plane // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2018. Vol. 51. No. 50. P. 505202; Q_1 Web of Science, Q_1 Scopus.

10.1088/1751-8121/aaecca

(9) M. V. Demina, Jaume Giné and Claudia Valls. Puiseux integrability of differential equations // *Qualitative Theory of Dynamical Systems*. 2022. Vol. 21 No. 2. P. 1–35; Q_3 Web of Science, Q_3 Scopus.

doi.org/10.1007/s12346-022-00565-2

(10) M. V. Demina. Invariant algebraic curves for Liénard dynamical systems revisited // *Applied Mathematics Letters*. 2018. Vol. 84. P. 42–48; Q_1 Web of Science, Q_1 Scopus.

doi.org/10.1016/j.aml.2018.04.013

(11) M. V. Demina and Claudia Valls. On the Poincaré problem and Liouvillian integrability of quadratic Liénard differential equations // *Proceedings of the*

Royal Society of Edinburgh: Section A. 2020. Vol. 150. No. 6. P. 3231–3251; Q_2 Web of Science, Q_1 Scopus.

doi.org/10.1017/prm.2019.63

(12) M. V. Demina and Claudia Valls. Classification of invariant algebraic curves and nonexistence of algebraic limit cycles in quadratic systems from family (I) of the Chinese classification // *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*. 2020. Vol. 30. No. 4. P. 2050056; Q_2 Web of Science, Q_1 Scopus.

doi.org/10.1142/S021812742050056X

(13) M. V. Demina. Novel algebraic aspects of Liouvillian integrability for two-dimensional polynomial dynamical systems // *Physics Letters A*. 2018. Vol. 382. No. 20. P. 1353–1360; Q_2 Web of Science, Q_2 Scopus.

doi.org/10.1016/j.physleta.2018.03.037

(14) M. V. Demina. Integrability and Jacobi Last Multipliers of Cubic Lienard Differential Equations with Quadratic Damping // *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. 2020. Vol. 9. No. 4. P. 499–507; Q_4 Scopus.

10.5890/DNC.2020.12.002

Новизна и научная значимость. В ходе выполнения диссертационной работы впервые получены следующие результаты.

1. Разработан новый метод нахождения алгебраических инвариантов автономных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод основан на разложении многочленов, задающих инварианты, на множители над алгебраически замкнутым полем рядов Пюизе в окрестности бесконечно удаленной точки. Для широких классов обыкновенных дифференциальных уравнений метод позволяет находить решение

проблемы Пуанкаре в тех случаях, когда не работают классические оценки. Метод может быть реализован с использованием компьютерных систем символьных вычислений, таких как Maple, Wolfram Mathematica, Matlab и т. д.

2. Предложен новый метод построения неавтономных алгебраических инвариантов и инвариантных поверхностей для двумерных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод допускает компьютерную реализацию в системах символьных вычислений.

3. Получено общее представление для мероморфных решений автономных обыкновенных дифференциальных уравнений с конечным числом локальных решений, описываемых рядами Лорана в окрестности полюсов, и двумя доминантными дифференциальными мономами вида $\lambda x^l\{x_t - \mu x\}$, где $\lambda\mu \neq 0$ и $l \in \mathbb{N}$.

4. Разработан метод классификации $\mathbb{W}$-мероморфных решений автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что данный метод позволяет находить все $\mathbb{W}$-мероморфные решения для уравнений с бесконечным числом локальных решений, описываемых рядами Лорана в окрестности полюсов, и/или с нескольких доминантными дифференциальными мономами.

5. Установлена разрешимость проблемы Пуанкаре в классической постановке для семейств автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих свойством конечности.

6. Найдено явное представление для собственных значений инвариантных алгебраических кривых двумерных систем полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений.

7. Предложена локальная теория интегрируемости, названная интегрируемостью Пюизе. Эту теорию можно рассматривать как локальную теорию интегрируемости Дарбу. Разработанная теория позволяет находить необходимые условия существования первых интегралов Дарбу, Лиувилля, а также первых интегралов специального вида, не выражающихся через функции Лиувилля.

8. Получены следующие новые результаты для полиномиальных систем Льенара $x_t = y, y_t = -f(x)y - g(x)$ и соответствующих им обыкновенных дифференциальных уравнений $x_{tt} + f(x)x_t + g(x) = 0$:

    I. построены представления неприводимых алгебраических инвариантов в кольце многочленов с коэффициентами, являющимися рядами Пюизе в окрестности бесконечности;

    II. найдены явные представления для собственных значений инвариантных алгебраических кривых;

    III. доказано, что полиномиальные системы Льенара имеют не более одного неприводимого алгебраического инварианта всякий раз, когда степень многочлена $g(x)$ является четным числом и выполнено ограничение $\deg g > 2\deg f + 1$;

    IV. доказано, что полиномиальные системы Льенара одновременно имеют не более двух различных неприводимых алгебраических инвариантов при выполнении следующих условий

        - $\deg f < \deg g < 2\deg f + 1$,
        - $\deg g = 2\deg f + 1$ и старшие коэффициенты многочленов $f(x)$ и $g(x)$ не удовлетворяют резонансному условию;

    V. доказано, что типичная нелинейная полиномиальная система Льенара не имеет конечных инвариантных алгебраических кривых и не интегрируема по Лиувиллю; при этом для любых степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющих условию $\deg f < \deg g$, существуют подсистемы, обладающие конечными инвариантными алгебраическими кривыми и интегрируемые по Лиувиллю;

VI. установлено, что полиномиальные системы Льенара при выполнении условий $\deg g > \deg f$ и $\deg g \neq 2\deg f + 1$ не интегрируемы по Дарбу;

VII. получены достаточные условия интегрируемости по Лиувиллю; показано, что эти условия являются и необходимыми, если $\deg g \neq 2\deg f+1$ или $\deg g = 2\deg f+1$ и система является нерезонансной на бесконечности;

VIII. классифицированы полиномиальные системы Льенара, обладающие неавтономными первыми интегралами и последними множителями Якоби с зависящим от времени экспоненциальным множителем; эта классификация является полной при выполнении условия $\deg g \neq 2\deg f + 1$;

IX. найдены новые интегрируемые по Лиувиллю системы Льенара, параметризуемые произвольным многочленом; получены явные выражения для первых интегралов.

9. Найдено необходимое условие существования экспоненциальных инвариантов с неполиномиальным аргументом.

10. Новые методы и теоретические наработки диссертационной работы использовались при получения следующих результатов для важных с прикладной точки зрения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

    I. классифицированы неприводимые алгебраические инварианты следующих автономных уравнений:

- уравнение Гельмгольца – ван дер Поля,
- обобщенное уравнение Дуффинга,
- обобщенное уравнение Дуффинга – ван дер Поля,
- уравнение Льенара пятой степени с линейной функцией при первой производной;

II. доказано, что при определенных значениях параметров

- уравнение Гельмгольца – ван дер Поля,
- обобщенное уравнение Дуффинга – ван дер Поля,
- уравнение Льенара пятой степени с линейной функцией при первой производной,
- уравнение Льенара четвертой степени с квадратичной функцией при первой производной,

имеют неприводимые алгебраические инварианты степеней выше второй относительно переменной $y = x_t$; этот результат показывает ошибочность некоторых научных работ, посвященных инвариантным алгебраическим кривым и первым интегралам дифференциальных уравнений Льенара;

III. показано, что проблема Пуанкаре в классической постановке не имеет решения для уравнений Гельмгольца – ван дер Поля; проведена классификация неприводимых алгебраических инвариантов, степени которых зависят от параметров исходных уравнений;

IV. найдены необходимые и достаточные условия интегрируемости по Лиувиллю для следующих автономных уравнений:

- уравнение Гельмгольца – ван дер Поля,
- обобщенное уравнение Дуффинга,

- обобщенное уравнение Дуффинга – ван дер Поля,
- уравнение Льенара пятой степени с линейной функцией при первой производной,
- уравнение Льенара четвертой степени с квадратичной функцией при первой производной,
- уравнение Льенара пятой степени с кубической функцией при первой производной;

V. классифицированы неавтономные последние множители Якоби, являющиеся функциями Дарбу с зависящим от времени экспоненциальным множителем, для обобщенного уравнения Дуффинга – ван дер Поля;

VI. решена проблема интегрируемости по Пюизе для уравнения Льенара пятой степени с кубической функцией, описывающей затухание, в явном виде найдены первые интегралы, не являющиеся функциями Лиувилля;

VII. доказано отсутствие алгебраических предельных циклов для уравнения Гельмгольца – ван дер Поля, обобщенного уравнения Дуффинга – ван дер Поля и уравнения Льенара пятой степени с линейной функцией, описывающей затухание;

VIII. классифицированы инвариантные поверхности для неавтономных уравнений Дуффинга и Дуффинга – ван дер Поля с произвольной вынуждающей силой;

IX. доказана неинтегрируемость по Дарбу неавтономного уравнения Дуффинга – ван дер Поля с произвольной вынуждающей силой;

X. проведена классификация алгебраических инвариантов обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, возникающих как редукции к переменным бегущей волны дисперсионного уравнения Курамото – Сивашинского и модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского, найдены новые алгебраически инвариантные решения модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского;

XI. найдены все $\mathbb{W}$-мероморфные решения семейства обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, эквивалентного системе Лоренца, построены ранее неизвестные мероморфные решения системы Лоренца;

XII. получены все $\mathbb{W}$-мероморфные решения семейства обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, возникающего при переходе к переменным бегущей волны в обобщенном уравнении Розенау – Кортевега – де Вриза и в уравнении Кортевега – де Вриза – Бюргерса пятого порядка.

Теоретическая и практическая значимость диссертационной работы. Предложенные в диссертационной работе новые методы построения алгебраических инвариантов, инвариантных поверхностей, мероморфных решений имеют широкую область применимости. В автономном случае последний шаг метода является алгебраическим, что позволяет применять мощные алгоритмы алгебраической геометрии (базисы Гребнера, результанты и т. п.). Метод построения мероморфных решений обобщает ряд других методов, таких как методы подстановок и метод вспомогательных уравнений. Разработанные методы позволяют не только находить некоторые инварианты, но и проводить их классификацию. Для заданных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка метод построения алгебраических инвариантов может быть использован при решении проблемы Пуанкаре, а также при решении второй части 16-ой проблемы Гильберта в алгебраической постановке [48]. Вторая часть 16-ой проблемы Гильберта состоит в исследовании числа и взаимного расположения предельных циклов двумерных полиномиальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В рамках алгебраической постановки учитываются только предельные циклы, задаваемые овалами алгебраических кривых. Эффективность разработанных методов была продемонстрирована в диссертационной работе на большом количестве примеров, важных с практической точки зрения.

Явное представление для собственных значений инвариантных алгебраических кривых двумерных систем полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет находить необходимые условия интегрируемости по Дарбу и Лиувиллю до фактического построения инвариантов, что значительно упрощает исследование интегрируемости.

Теория локальной интегрируемости (интегрируемость по Пюизе), разработанная в диссертационной работе, может быть использована для построения глобальных необходимых условий существования алгебраических инвариантов и первых интегралов, являющихся функциями Лиувилля, а также более сложных первых интегралов.

В научной литературе встречаются работы, содержащие ошибки в классификации алгебраических инвариантов и первых интегралов. Применение разработанных методов позволило исправить некоторые из ошибок, а также получить новые интегрируемые и точно решаемые уравнения.

Методы, предложенные в диссертационной работе, могут быть в дальнейшем использованы для исследования других обыкновенных дифференциальных уравнений и систем.

Основные научные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения:

1. метод построения алгебраических инвариантов автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений;

2. метод построения неавтономных алгебраических инвариантов и связанных с ними инвариантных поверхностей для двумерных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений;
3. метод классификации $\mathbb{W}$-мероморфных решений автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений;
4. новые алгоритмы в теории интегрируемости Дарбу;
5. локальная теория интегрируемости Пюизе;
6. результаты классификации неприводимых алгебраических инвариантов для ряда обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, включая некоторые уравнения, важные с прикладной точки зрения: уравнение Дуффинга, уравнение Дуффинга – ван дер Поля, уравнение Гельмгольца – ван дер Поля и их обобщения;
7. свойства инвариантных алгебраических кривых и первых интегралов полиномиальных дифференциальных систем Льенара;
8. необходимые и достаточные условия интегрируемости по Лиувиллю для полиномиальных дифференциальных систем Льенара;
9. результаты классификации полиномиальных дифференциальных систем Льенара, обладающих неавтономными первыми интегралами и неавтономными последними множителями Якоби с зависящим от времени экспоненциальным множителем;
10. результаты классификации алгебраически инвариантных и $\mathbb{W}$-мероморфных решений для системы Лоренца и обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных при переходе к переменным бегущей волны в следующих уравнениях в частных производных: модифицированное уравнение Курамото – Сивашинского, обобщенное уравнения Розенау

– Кортевега – де Вриза и уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса пятого порядка.

Достоверность, обоснованность и личный вклад автора. Теоретические результаты диссертационной работы получены с использованием методов, концепций и положений аналитической теории дифференциальных уравнений, алгебраической геометрии и асимптотического анализа. Все математические утверждения и теоремы имеют строгие доказательства. Классификационные результаты, полученные с привлечением символьных вычислений, были проверены или с помощью различных команд и пакетов, доступных в Maple, или с помощью нескольких систем символьных вычислений, включая Maple, Wolfram Mathematica и Matlab. Выносимые на защиту положения и результаты прошли рецензирование в международных высокорейтинговых журналах, а также докладывались и обсуждались на российских и международных конференциях и семинарах. К защите представлены четырнадцать статей, одиннадцать из которых написаны без соавторов. Из статей, написанных в соавторстве, на защиту выносятся результаты, полученные лично автором диссертационной работы. В статье (9) автором диссертационной работы получены результаты разделов 2, 3 и 5. В статье (11) автором диссертационной работы доказаны Теоремы 1.1 и 1.2, подпункт a. В статье (12) автором диссертационной работы доказаны Теоремы 2 и 3.

Апробация результатов диссертационной работы. Результаты диссертационного исследования представлялись на следующих конференциях и семинарах:

- Доклад *«Invariants and integrability of polynomial Liénard and Levinson–Smith differential systems»*, международная конференция «Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite–Dimensional Analysis», Долгопрудный, июль 2023;

- Лекция *«Invariant algebraic manifolds of ordinary differential equations»*, международный семинар «Online GSDUAB Seminar», организованный Автономным Университетом Барселоны, февраль 2023, on–line;

- Доклад *«Invariants and integrability of polynomial vector fields»*, международная конференция «Shilnikov Workshop 2022», Нижний Новгород, декабрь 2022;

- Доклад *«Теория интегрируемости Дарбу для полиномиальных дифференциальных систем на плоскости»*, Вторая конференция Математических центров России, Москва, ноябрь 2022;

- Доклад *«Algebraic and geometric aspects of the Darboux theory of integrability»*, международная конференция «Conference on Dynamics of Differential Equations», организованная Китайско-Российским Математическим Центром (Sino-Russia Mathematics Center), Сычуаньский Университет, Китай, август 2022, on–line;

- Доклад *«The Darboux theory of integrability for polynomial Liénard differential systems»*, международная конференция «The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations», Москва, июль 2022;

- Лекция *«Алгебраические инварианты и теория интегрируемости Дарбу»*, Общегородской семинар им. А. М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, апрель 2022, on–line;

- Доклад *«Darboux and Puiseux integrability for polynomial vector fields in the plane»*, международная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения (Банное 2022)», Южный Урал, Якты–Куль (озеро Банное), март 2022;

- Доклад *«W-meromorphic solutions of autonomous ordinary differential equations and related topics»*, международная конференция «Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite–Dimensional Analysis», Долгопрудный, июнь–июль 2021, on–line;

- Доклад *«From Puiseux series to algebraic invariants»*, международная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения (Банное 2021)», Южный Урал, Якты–Куль (озеро Банное), март 2021;

- Лекция *«Algebraic invariants, integrability, and meromorphic solutions»*, международный семинар «CAvid: Complex Analysis video seminar», организованный профессором Лондонского университетского колледжа Р. Хальбурдом (R. Halburd), февраль 2021, on–line;

- Доклад *«The Poincaré problem and algebraic invariants»*, международная конференция «Formal and Analytic Solutions of Diff.-Equations on the Internet (FASnet20)», организованная Университетом Алькала, Испания, июнь 2020, on–line;

- Доклад *«Puiseux series, invariant algebraic curves and integrability of planar polynomial dynamical systems»*, международная конференция «Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov Workshop», Нижний Новгород, декабрь 2019;

- Доклад *«Дробно-степенные ряды и интегрируемость алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка»*, научный семинар «Перспективные математические технологии», МИЭМ НИУ ВШЭ, ноябрь 2019;

- Доклад *«Ряды Пюизё, алгебраические инварианты и интегрируемость полиномиальных динамических систем на плоскости»*, научный семинар по аналитической теории дифференциальных уравнений, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, октябрь 2019;

- Доклад *«Liouvillian integrability of polynomial dynamical systems in the plane»*, международная конференция «Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite–Dimensional Analysis», Долгопрудный, июнь 2019;
- Доклад *«Finding algebraic invariants and algebraically invariant solutions»*, международная конференция «Partial Differential Equations and Applications in Memory of Professor B.Yu. Sternin», Москва, ноябрь 2018;
- Доклад *«Invariant algebraic curves and Liouvillian first integrals for polynomial dynamical systems in the plane»*, 7-ая международная конференция «Problems of Mathematical Physics and Mathematical Modelling», Москва, июнь 2018.

Дополнительная информация. Исследования, представленные в настоящей диссертационной работе, поддержаны грантом Российского Научного Фонда 19–71–10003 «Алгебраические и аналитические методы теории нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их приложения к исследованию конечномерных динамических систем», 2019 г. – 2024 г., руководителем которого является автор диссертационной работы.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Диссертационная работа содержит 365 страниц, 16 рисунков и 11 таблиц. Список литературы состоит из 218 наименований.

1 Алгебраические инварианты и алгебраически инвариантные решения

1.1 Инвариантные алгебраические кривые двумерных полиномиальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Символом $\mathbb{C}[x,y]$ обозначим кольцо многочленов от двух переменных с комплекснозначными коэффициентами. Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$x_t = P(x,y), \qquad y_t = Q(x,y). \tag{1.1}$$

В этом выражении $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются взаимно простыми многочленами из кольца $\mathbb{C}[x,y]$. Будем интересоваться задачей нахождения траекторий системы (1.1), которые определяются множеством нулевого уровня некоторого многочлена $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$. Чтобы исключить тривиальные случаи, предположим, что эти траектории не являются особыми точками системы (1.1). Векторное поле, связанное с системой (1.1), выглядит следующим образом:

$$\mathcal{X} = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{1.2}$$

Нетрудно заметить, что производная многочлена $F(x,y)$ относительно переменной t остается неизменной вдоль кривой $F(x,y) = 0$. Этот факт позволяет дать следующее определение.

Определение 1.1. *Алгебраическую кривую $F(x, y) = 0$, заданную многочленом $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}$, будем называть инвариантной алгебраической кривой системы дифференциальных уравнений* (1.1) *и связанного с этой системой векторного поля $\mathcal{X}$, если выполнено следующее условие $F_t|_{F=0} = (PF_x + QF_y)|_{F=0} = 0$.*

Пусть многочлен $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}$, определяющий инвариантную алгебраическую кривую $F(x, y) = 0$, неприводим в кольце $\mathbb{C}[x, y]$. Тогда идеал, порожденный $F(x, y)$, является радикальным. Следовательно, существует элемент $\lambda(x, y)$ кольца $\mathbb{C}[x, y]$ такой, что $F(x, y)$ удовлетворяет уравнению в частных производных $P(x, y)F_x + Q(x, y)F_y = \lambda(x, y)F$. Многочлен $\lambda(x, y)$ называют *собственным значением (кофактором)* инвариантной алгебраической кривой $F(x, y) = 0$. Нетрудно показать, что степень собственного значения не превосходит числа $d - 1$, где d определяется как максимум между степенями многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Можно сделать вывод, что инвариантная алгебраическая кривая системы дифференциальных уравнений (1.1) образована траекториями последней. Некоторая траектория системы (1.1) имеет или пустое пересечение со множеством нулевого уровня многочлена $F(x, y)$, или полностью содержится во множестве $F(x, y) = 0$. Заметим, что в теории интегрируемости Дарбу многочлен $F(x, y)$, связанный с инвариантной алгебраической кривой $F(x, y) = 0$, известен как *многочлен Дарбу* системы (1.1) и векторного поля $\mathcal{X}$.

Будем говорить, что инвариантная алгебраическая кривая $F(x, y) = 0$ неприводима, если соответствующий многочлен $F(x, y)$ неприводим в кольце $\mathbb{C}[x, y]$. Рассмотрим приводимые инвариантные алгебраические кривые.

Лемма 1.1. *Пусть многочлен $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}$ следующим образом*

$$F(x, y) = f_1^{n_1}(x, y) \dots f_K^{n_K}(x, y), \quad n_1, \dots, n_K \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

раскладывается в произведение неприводимых сомножителей $f_1(x, y)$, …,

$f_K(x,y) \in \mathbb{C}[x,\ y]$. *Кривая* $F(x,y)=0$ *является инвариантной алгебраической кривой системы дифференциальных уравнений* (1.1) *и связанного с этой системой векторного поля* $\mathcal{X}$ *тогда и только тогда, когда для каждого* $k=1,\ldots,K$ *кривая* $f_k(x,y)=0$ *также является инвариантной алгебраической кривой системы дифференциальных уравнений* (1.1) *и векторного поля* $\mathcal{X}$. *Кроме того, справедливо следующее соотношение* $\lambda(x,y)=n_1\lambda_1(x,y)+\ldots+n_K\lambda_K(x,y)$, *связывающее собственное значение* $\lambda(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$ *инвариантной алгебраической кривой* $F(x,y)=0$ *и собственные значения* $\lambda_k(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$ *инвариантных алгебраических* $f_k(x,y)=0$, *где* $k=1$, $\ldots$, K.

Эта лемма доказана, например, в книге [36]. Предположим, что переменная y является зависимой, а переменная x – независимой, тогда функция $y(x)$ удовлетворяет следующему алгебраическому обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$P(x,y)y_x-Q(x,y)=0. \tag{1.4}$$

Решения уравнения (1.4), рассматриваемые как кривые на плоскости $\mathbb{C}^2$, определяют полиномиальное слоение. Запишем алгебраическое уравнение Пфаффа $\omega=0$, где $\omega=Q(x,y)dx-P(x,y)dy$ – это соответствующая 1-форма. Мы видим, что векторное поле $\mathcal{X}$ является касательным к листам слоения. Задача построения инвариантных алгебраических кривых векторного поля $\mathcal{X}$ эквивалентна задаче нахождения алгебраических листов соответствующего слоения. Более подробно теория полиномиальных слоений описана в книге [35]. Инвариантные алгебраические кривые порождают алгебраические решения соответствующих уравнений $Q(x,y)dx-P(x,y)dy=0$ и (1.4). Число d, определенное выше, назовем аффинной степенью 1-формы ω.

Отметим, что Определение 1.1 вводит в рассмотрение, так называемые, конечные инвариантные алгебраические кривые. Для того чтобы учесть поведение слоения на бесконечности, удобно провести расширение комплексной аффинной плоскости $\mathbb{C}^2$ до комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$. Проективная полиномиальная 1–форма, связанная с дифференциальной формой $\omega = Q(x, y)dx - P(x, y)dy$, может быть записана в виде [36]

$$\omega_{\mathbb{C}P^2} = z^d P\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)(zdy - ydz) + z^d Q\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)(xdz - zdx), \tag{1.5}$$

где мы ввели проективные координаты $(x : y : z)$. Пусть $P^{[h]}(x, y)$ и $Q^{[h]}(x, y)$ являются однородными компонентами старшей степени многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Точки (x_0, y_0), удовлетворяющие уравнению $yP^{[h]}(x, y) - xQ^{[h]}(x, y)$ $= 0$, называют бесконечно удаленными особыми точками системы (1.1). В проективных координатах $(x : y : z)$ эти точки лежат на бесконечно удаленной прямой L_∞: $z = 0$. Если выполнено условие $yP^{[h]}(x, y) - xQ^{[h]}(x, y) \not\equiv 0$, то бесконечно удаленная прямая $z = 0$ является бесконечной инвариантной алгебраической кривой системы (1.1). Отметим, что степень дифференциальной формы $\omega_{\mathbb{C}P^2}$ при выполнении условия $yP^{[h]}(x, y) - xQ^{[h]}(x, y) \equiv 0$ может быть понижена на единицу. В этом случае говорят, что соответствующая система (1.1) имеет вырожденную бесконечность. В проективных координатах аффинную кривую $F(x, y) = 0$ можно записать следующим образом: $z^m F(x/z, y/z) = 0$, где m – это степень многочлена $F(x, y)$. Условие инвариантности проективных алгебраических кривых может быть представлено в виде $d\mathcal{F} \wedge \omega_{\mathbb{C}P^2} = \mathcal{F} \cdot \lambda$, где собственное значение λ является однородной 2-формой в $\mathbb{C}^3$.

Обозначим через A_d множество полиномиальных слоений плоскости $\mathbb{C}^2$, определяемых полиномиальными 1-формами аффинной степени не выше d. В различных аффинных картах степени проективной 1-формы, соответствующей некоторому слоению комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, могут различаться. В связи с этим удобно ввести в рассмотрение множество B_d полиномиальных слоений комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, определяемых проективными полиномиальными 1-формами, аффинные степени которых во всех картах не превышают числа d. Справедливо следующее включение $A_d \subset B_{d+1} \subset A_{d+1}$. Свойства типичных слоений из множеств A_d и B_d описаны в обзоре [49], см. также [35,50]. В частности, множество полиномиальных слоений комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, не имеющих алгебраических листов (инвариантных алгебраических кривых), открыто [51] и плотно [52] во множестве B_d при $d \geq 2$. Однако, доказать что некоторая конкретная система (1.1), порождающая полиномиальное слоение, не имеет конечных инвариантных алгебраических кривых или, если такие инвариантные кривые существуют, провести их классификацию, чрезвычайно сложно. Основная трудность связана с отсутствием верхней оценки для степеней неприводимых многочленов, задающих инвариантные алгебраические кривые. Проблема нахождение такой оценки восходит к работам А. Пуанкаре и в настоящее время известна как проблема Пуанкаре [33,34]. Решения проблемы Пуанкаре получены лишь при определенных ограничениях, накладываемых на алгебраические инварианты или векторное поле [37–39]. Отметим, что равномерная верхняя оценка, зависящая только от степени соответствующей полиномиальной 1-формы, может не существовать. Пример физической системы, для которой верхняя оценка зависит от коэффициентов системы, будет приведен в Разделе 3.3. Хорошо известно, что инвариантные алгебраические кривые являются ключевыми объектами при исследовании интегрируемости двумерных полиномиальных систем вида (1.1). Проблема интегрируемости подробно будет рассматриваться в Разделе 2.1.

1.2 Инвариантные алгебраические многообразия обыкновенных дифференциальных уравнений произвольных порядков

Рассмотрим k-мерную полиномиальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x_{j,t} = X_j(x), \qquad 1 \le j \le k, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \tag{1.6}$$

где $X_1(x)$, …, $X_k(x)$ – многочлены с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$. Кольцо таких многочленов обозначим символом $\mathbb{C}[x]$, где $x = (x_1, \ldots, x_k)$. Пусть $x(t, s_0)$, $s_0 \in \mathbb{C}$ является решением системы (1.6), удовлетворяющим условию $x(0, s_0) = s_0$. Функция $x(t, s_0)$ задает фазовый поток рассматриваемой системы. Подмногообразие M в фазовом пространстве системы (1.6) называется *инвариантным многообразием* этой системы, если для любой точки $s_0 \in M$ выполнено $x(t, s_0) \in M$, где $t \in \mathbb{R}$.

Возьмем целое число m, такое что $1 \le m \le k - 1$. Будем говорить, что $M \subset \mathbb{C}^k$ является инвариантным алгебраическим многообразием коразмерности m системы (1.6), если M представляет собой инвариантное многообразие, лежащее на пересечении m функционально независимых алгебраических многообразий $\{F_j(x) = 0\}$, $1 \le j \le m$. Здесь $F_1(x)$, …, $F_m(x)$ – неприводимые многочлены из кольца $\mathbb{C}[x]$. Отметим, что многообразия $\{F_j(x) = 0\}$, $1 \le j \le m$ могут не быть инвариантными для системы (1.6), если $m > 1$. Основная трудность при классификации инвариантных алгебраических многообразий связана с тем, что степени многочленов $F_1(x)$, …, $F_m(x)$, как правило, заранее неизвестны. Инвариантные алгебраические кривые двумерных систем (1.1) представляют собой инвариантные алгебраические многообразия коразмерности 1.

Инвариантные многообразия играют большую роль при описании динамики систем обыкновенных дифференциальных уравнений [36]. Знание инвариантных алгебраических многообразий коразмерности 1 позволяет исследовать интегрируемость по Дарбу [53] дифференциальных систем вида (1.6). Также инвариантные многообразия широко используются и в теории уравнений в частных производных [54, 55].

Если исследуемой системе (1.6) методом исключения переменных или с помощью обратимых преобразований можно поставить в соответствие полиномиальное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка k, то для построения инвариантных алгебраических многообразий удобно использовать концепцию совместных дифференциальных уравнений. Полиномиальное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $l \in \mathbb{N}$, $l < k$ назовем совместным с рассматриваемым уравнением порядка k, если любое непостоянное решение уравнения меньшего порядка также удовлетворяет уравнению большего порядка. Порядок l совместного дифференциального уравнения связан с коразмерностью m соответствующего инвариантного алгебраического многообразия с помощью равенства $m = k - l$. Поясним сказанное на примере. Предположим, что система дифференциальных уравнений (1.1) имеет вид

$$x_t = y + R(x), \quad y_t = Q(x, y), \quad R(x) \in \mathbb{C}[x]. \tag{1.7}$$

Выражая переменную y из первого уравнения этой системы и подставляя результат во второе уравнение, мы получаем следующее автономное алгебраическое обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x_{tt} - R_x(x) x_t - Q(x, x_t - R(x)) = 0. \tag{1.8}$$

Система (1.7) обладает инвариантной алгебраической кривой вида $F(x, y) = 0$, где $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}[x]$ – неприводимый многочлен, тогда и только тогда, когда эта кривая определяет обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $F(x, x_t - R(x)) = 0$, совместимое с уравнением (1.8).

Далее рассмотрим автономное полиномиальное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка k

$$E\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}, \frac{d^k x}{dt^k}\right) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{1.9}$$

В этом выражении E является неприводимым многочленом от нескольких переменных с комплекснозначными коэффициентами. Независимая переменная t также является комплекснозначной. Символом $x_t^{(j)}$ будем обозначать производную порядка $j \in \mathbb{N}$ функции $x(t)$.

Определение 1.2. *Пусть l – целое число, для которого выполнено $1 \leq l \leq k-1$. Неприводимый многочлен $F(x, y_1, \ldots, y_l) \in \mathbb{C}[x, y_1, \ldots, y_l] \setminus \mathbb{C}[x]$ будем называть алгебраическим инвариантом порядка l дифференциального уравнения* (1.9), *если любая непостоянная функция $x(t)$, являющаяся решением дифференциального уравнения $F\left(x, x_t, \ldots x_t^{(l)}\right) = 0$, также удовлетворяет дифференциальному уравнению* (1.9). *Будем говорить, что функция $x(t)$ является алгебраически инвариантным решением порядка l уравнения* (1.9).

Алгебраические инварианты и соответствующие им обыкновенные дифференциальные уравнения возникают в некоторых областях математики под различными именами: полуинварианты, вспомогательные уравнения, простейшие уравнения и т. д. Алгебраически инвариантные решения порядка 1 автономных уравнений в частных производных в переменных бегущей волны при выполнении некоторых дополнительных условий были названы алгебраическими бегущими волнами [29] в работе А. Гасулла (A. Gasull) и Х. Джакомини (H. Giacomini). Весомый вклад в классификацию алгебраических бегущих волн для автономных уравнений в частных производных второго порядка сделан К. Валлс (C. Valls), см. [56–59]. Отметим, что все примеры, приводимые А. Гасуллом (A. Gasull), Х. Джакомини (H. Giacomini) и К. Валлс (C. Valls), относились к двумерным системам. Другими словами, рассматривались автономные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка [29, 56–59].

Большое количество работ в современной научной литературе посвящено проблеме нахождения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Огромной популярностью пользуются, так называемые, методы подстановок. Это такие методы, как метод тригонометрических и гиперболических функций, метод экспоненциальных функций, метод эллиптических функций Якоби и их различные обобщения и модификации [60–62]. Эти методы достаточно просты в использовании. Однако у них есть существенный недостаток: все решения вне априорно заданного выражения остаются не найденными. Более того, подобные методы нередко дают одни и те же семейства решений, но записанные по-разному. В результате может создаться впечатление, что найдено новое решение, в то время как это решение хорошо известно. Таким образом, проблема классификации точных решений представляет большой интерес. Можно отметить, что решения, полученные вышеупомянутыми методами, удовлетворяют не только исходному уравнению, но и обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, совместимому с рассматриваемым уравнением [28]. Следовательно, задача классификации может быть решена с помощью теории алгебраических инвариантов порядка 1.

В настоящей работе мы будем в основном рассматривать задачу построения алгебраических инвариантов порядка 1, поэтому далее упоминание порядка будем опускать. Также нижний индекс переменной y_1 в обозначении алгебраического инварианта $F(x, y_1)$ также использовать не будем. Заметим, что в Главе 4 будет исследоваться вопрос нахождения неавтономных инвариантов. Метод Главы 4 может быть обобщен и на случай алгебраических инвариантов более высоких порядков. Однако при повышением порядка инвариантов вычисления становятся гораздо более трудоемкими.

Алгебраический инвариант $F(x, y)$ будем называть неприводимым, если соответствующий многочлен $F(x,y)$ неприводим в кольце $\mathbb{C}[x,y]$. Поскольку алгебраически инвариантное решение непостоянно, мы видим, что $F_y \not\equiv 0$. Кроме того, мы предполагаем, что алгебраические инварианты, связанные преобразованием $F(x,y) \mapsto cF(x,y)$, где $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, принадлежат одному и тому же классу эквивалентности. В дальнейшем нас будет интересовать только один представитель из каждого класса. Два многочлена от двух переменных (например, два алгебраических инварианта) будем называть различными, если они принадлежат к разным классам эквивалентности.

1.3 Ряды Пюизе и алгебраические инварианты

Данный раздел посвящен теоретическим исследованиям проблемы построения неприводимых алгебраических инвариантов. Мы будем рассматривать алгебраические инварианты уравнения (1.9), предполагая, что это уравнение может, в частности, соответствовать системе дифференциальных уравнений (1.6).

Дифференциальное уравнение (1.9) является автономным. Следовательно, мы можем понизить его порядок с помощью новой зависимой функции $y(x)$, определяемой соотношением $x_t = y(x)$. Для производных более высоких порядков находим

$$x_{tt} = yy_x, \quad x_{ttt} = y^2 y_{xx} + yy_x^2, \quad \ldots \tag{1.10}$$

В результате приходим к следующему неавтономному обыкновенному дифференциальному уравнению порядка $k-1$:

$$H\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}\right) = 0. \tag{1.11}$$

В этом выражении H представляет собой многочлен своих аргументов. Уравнение (1.11) будет играть ключевую роль в дальнейшем анализе.

Дробно-степенные ряды или ряды Пюизе являются обобщениями рядов Лорана. Ряд Пюизе с центром в точке $x_0 \in \mathbb{C}$, выглядит следующим образом:

$$y(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} c_l (x - x_0)^{\frac{n_0+l}{n_1}}, \quad c_0 \neq 0, \tag{1.12}$$

где $n_0 \in \mathbb{Z}$ и $n_1 \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности предполагаем, что число n_1 является взаимно простым с наибольшим общим делителем чисел $\{n_0 + l : c_l \neq 0, \, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Аналогично, ряд Пюизе с центром в точке $x = \infty$, имеет вид

$$y(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} b_l x^{\frac{n_0-l}{n_1}}, \quad b_0 \neq 0, \tag{1.13}$$

где $n_0 \in \mathbb{Z}$ и $n_1 \in \mathbb{N}$. Опять считаем, что число n_1 является взаимно простым с наибольшим общим делителем чисел $\{n_0 - l : b_l \neq 0, \, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Число n_1 называют *индексом ветвления* соответствующего ряда.

Рассмотрим алгебраическое уравнение $F(x, y) = 0$, заданное многочленом $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}[x]$. Считая переменную y зависимой, а переменную x – независимой, мы можем локально представить решения этого уравнения сходящимися рядами Пюизе [63]. Это утверждение носит название теоремы Ньютона – Пюизе.

Множество всех формальных рядов Пюизе вида (1.12) или (1.13) образует алгебраически замкнутое поле, которое мы будем обозначать символом $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ или $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$ соответственно. Также мы будем работать с кольцами многочленов от одной переменной, коэффициенты которых лежат в поле $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ или $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$. Для соответствующих колец введем обозначения $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ или $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}[y]$.

Заметим, что мы не исследуем сходимость рядов Пюизе, удовлетворяющих алгебраическому обыкновенному дифференциальному уравнению. Поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ и $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$, снабженные операторами дифференцирования $(\partial_x)^j$, $j \in \mathbb{N}$: $\mathbb{C}_{x_0}\{x\} \to \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, где $x_0 \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, становятся дифференциальными полями. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ оператор дифференцирования $(\partial_x)^j$ определяется как формальный оператор со стандартными свойствами, сходными с теми, которые справедливы для сходящихся рядов Пюизе. Сходимость асимптотических рядов, удовлетворяющих обыкновенным дифференциальным уравнениям, изучалась в работах [64, 65]. Аналогично снабжаем кольца $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ и $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ операторами дифференцирования ∂_x и ∂_y. Будем считать, что следующие выражения $(\partial_x)^j y$ и $y_x^{(j)}$, где $y \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, эквивалентны.

Предположим, что $S(x, y)$ является элементом кольца $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$. Введем два оператора проектирования, действующих в этом кольце. Результатом действия оператора $\{S(x, y)\}_+$ будет являться сумма мономов $S(x, y)$ с неотрицательными целыми степенями. Другими словами, $\{S(x, y)\}_+$ определяет полиномиальную часть выражения $S(x, y)$. Аналогично, проекция $\{S(x, y)\}_- = S(x, y) - \{S(x, y)\}_+$ задает неполиномиальную часть выражения $S(x, y)$. Легко убедиться, что эти проекции являются линейными операторами.

Наша дальнейшая цель состоит в нахождении явного представления для алгебраических инвариантов.

Лемма 1.2. *Пусть* $y_{x_0}(x)$ *– ряд Пюизе, принадлежащий одному из полей* $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, *где* $x_0 \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. *Если ряд* $y_{x_0}(x)$ *удовлетворяет уравнению* $F(x, y(x)) = 0$ *и многочлен* $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}[x]$ *является алгебраическим инвариантом уравнения* (1.9), *то этот ряд также удовлетворяет уравнению* (1.11), *полученному из* (1.9) *с помощью преобразования* $y(x) = x_t$, $x = x(t)$.

Доказательство. Рассмотрим ряд Пюизе $y_{x_0}(x)$ из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, удовлетворяющий уравнению $F(x, y(x)) = 0$. Согласно определению алгебраических инвариантов уравнение, $F(x, x_t) = 0$ совместно с уравнением (1.9). Понижая порядок преобразованием $y(x) = x_t$, $x = x(t)$, мы получим еще одну пару совместных уравнений: $F(x, y(x)) = 0$ и (1.11). Таким образом, каждое решение уравнения $F(x, y(x)) = 0$ также удовлетворяет уравнению (1.11). Следовательно, и ряд $y_{x_0}(x)$ удовлетворяет уравнению (1.11).

$\square$

Рассмотрим некоторую точку x_0 расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Будем говорить, что два ряда Пюизе $y_{x_0}(x)$ и $\tilde{y}_{x_0}(x)$ из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ различны, если ряд $y_{x_0}(x) - \tilde{y}_{x_0}(x)$ не является нулевым элементом O_{x_0} поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$. Далее во всех утверждениях настоящей главы мы изучаем дифференциальные уравнения (1.9) и (1.11), связанные преобразованием $y(x) = x_t$, $x = x(t)$.

Теорема 1.1. *Неприводимый многочлен* $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}[x]$ *степени* $N \in \mathbb{N}$ *относительно переменной* y *является алгебраическим инвариантом уравнения* (1.9) *тогда и только тогда, когда существуют многочлен* $\mu(x) \in \mathbb{C}[x]$ *и попарно различные ряды Пюизе* $y_{1,\infty}(x)$, …, $y_{N,\infty}(x)$ *из поля* $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$, *которые удовлетворяют уравнению* (1.11), *такие, что справедливо представление*

$$F(x, y) = \left\{\mu(x) \prod_{n=1}^{N} \{y - y_{n,\infty}(x)\}\right\}_{+} \tag{1.14}$$

и условие

$$\left\{\mu(x) \prod_{j=1}^{N} \{y - y_{\infty,j}(x)\}\right\}_{-} = 0. \tag{1.15}$$

Более того, степень N *многочлена* $F(x, y)$ *относительно переменной* y *не превосходит числа различных рядов Пюизе из поля* $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$, *удовлетворяющих уравнению* (1.11), *если это число конечно.*

Доказательство. Докажем необходимость. Рассмотрим неприводимый алгебраический инвариант $F(x,\, y)$ уравнения (1.9). Поле $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$ алгебраически замкнуто [63]. Следовательно, существует единственным образом определенное множество элементов $\{y_{n,\infty}(x) \in \mathbb{C}_{\infty}\{x\}, n = 1, \ldots, N\}$, такое что справедливо следующее представление [63]:

$$F(x,y) = \mu(x) \prod_{n=1}^{N} \{y - y_{n,\infty}(x)\}, \tag{1.16}$$

где число N – это степень многочлена $F(x,y)$ относительно переменной y и $\mu(x) \in \mathbb{C}[x]$. Из Леммы 1.2 следует, что множество рядов Пюизе $\{y_{n,\infty}(x) \in \mathbb{C}_{\infty}\{x\}, n = 1, \ldots, N\}$, появляющееся в представлении (1.16), является подмножеством множества рядов, удовлетворяющих уравнению (1.11).

Из неприводимости многочлена $F(x,y)$ в кольце $\mathbb{C}[x,y]$ мы заключаем, что все ряды Пюизе в представлении (1.16) попарно различны. Предполагая противное, мы вычисляем дискриминант по отношению к переменной y для многочлена (1.16). Этот дискриминант, являясь элементом поля $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$, равен нулю. С другой стороны, дискриминант является и элементом кольца $\mathbb{C}[x]$. Многочлен $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ с нулевым дискриминантом приводим в кольце $\mathbb{C}[x,y]$.

Далее вспоминаем, что неполиномиальная часть выражения (1.16) должна обращаться в нуль, в силу того что многочлен $F(x,y)$ является элементом кольца $\mathbb{C}[x,y]$. В результате получаем представление (1.14) и условие (1.15). Также мы видим, что если число различных рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$, удовлетворяющих уравнению (1.11), конечно, то степень многочлена $F(x,y)$ по отношению к переменной y ограничена этим числом. Действительно, если степень многочлена $F(x,y)$ по отношению к переменной y больше числа различных рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$, то многочлен $F(x,y)$ приводим в кольце $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}[y]$ и, следовательно, это же свойство справедливо и в кольце $\mathbb{C}[x,y]$.

Перейдем к доказательству достаточности. Рассмотрим элемент кольца $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}[y]$, заданный равенством (1.16). Из представления (1.14) и условия (1.15), следует, что этот элемент является многочленом из кольца $\mathbb{C}[x,y]$. Далее, покажем что многочлен $F(x,y)$ является алгебраическим инвариантом уравнения (1.9). Рассмотрим непостоянное решение $x(t)$ уравнения

$F(x, x_t) = 0$. По построению любой ряд Пюизе $y_{j_0,\infty}(x)$ с центром в точке $x = \infty$, удовлетворяющий уравнению $f(x,\, y(x)) = 0$, совпадает с одним из формальных рядов, описанным в условии настоящей теоремы. Следовательно, все ряды Пюизе с центром в точке $x = \infty$, появляющиеся в факторизации многочлена $F(x, y)$ над полем $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяют уравнению (1.11). Более того, по теореме Ньютона – Пюизе каждый из этих рядов сходится в некоторой (проколотой) окрестности (с разрезом) точки $x = \infty$. Используя единственность аналитического продолжения, мы делаем вывод, что любое решение $y(x)$ уравнения $F(x,\, y(x)) = 0$ также удовлетворяет уравнению (1.11). Вспоминая связь уравнений (1.11) и (1.9), мы видим, что функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1.9).

$\square$

Следствие 1. Уравнение (1.9) не имеет алгебраических инвариантов, если не существует рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющих уравнению (1.11).

Далее рассмотрим задачу нахождения многочлена $\mu(x)$ в выражении (1.14). Этот многочлен является старшим коэффициентом по отношению к переменной y алгебраического инварианта $F(x, y)$.

Лемма 1.3. *Пусть* $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}[x]$ *— неприводимый алгебраический инвариант уравнения* (1.9)*. Если* $x_0 \in \mathbb{C}$ *является нулем многочлена* $\mu(x)$*, то существует по крайней мере один ряд Пюизе из поля* $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$*, удовлетворяющий уравнению* (1.11)*, такой, что в выражении* (1.12) *для числа* $n_0 \in \mathbb{Z}$ *выполнено* $n_0 < 0$*.*

Доказательство. Рассмотрим неприводимый алгебраический инвариант $F(x, y)$ уравнения (1.9). Поле $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ является алгебраически замкнутым [63]. Следовательно, существует единственным образом определенное множество элементов $\{y_{n,\,x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\},\, n = 1,\, \ldots, N\}$, такое что справедливо следующее представление [63]:

$$F(x,y)=\mu(x)\prod_{n=1}^{N}\{y-y_{n,\,x_0}(x)\}, \tag{1.17}$$

где N – это степень многочлена $F(x,y)$ относительно переменной y. В силу Леммы 1.2 ряды Пюизе $\{y_{n,\,x_0}(x)\in\mathbb{C}_{x_0}\{x\},\, n=1,\ldots,N\}$ образуют подмножество множества рядов, удовлетворяющих уравнению (1.11). Предполагая, что все ряды из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, являющиеся формальными решениями уравнения (1.11), имеют неотрицательные показатели степеней в доминантных членах, мы видим, что тем же свойством обладают ряды в представлении (1.17). Следовательно, алгебраические кривые $F(x,y)=0$ и $x-x_0=0$ имеют бесконечное число точек пересечения. Из теоремы Безу следует, что эти кривые имеют общую компоненту. Эта компонента имеет вид $x-x_0=0$. Таким образом, многочлен $F(x,y)$ с представлением (1.17) делится на многочлен $x-x_0$ в кольце $\mathbb{C}[x,y]$. Этот факт противоречит неприводимости многочлена $F(x,y)$. Лемма доказана. □

Следствие 1. Многочлен $\mu(x)$ в представлении (1.14) тождественно равен константе, всегда когда для любого $x_0\in\mathbb{C}$ каждый ряд Пюизе из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, удовлетворяющий уравнению (1.11), имеет неотрицательный показатель степени в ведущем члене.

Лемма 1.4. *Пусть* $F(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]\setminus\mathbb{C}[x]$ *— неприводимый алгебраический инвариант уравнения* (1.9) *такой, что соответствующий многочлен* $\mu(x)$ *имеет нуль в некоторой точке* $x_0\in\mathbb{C}$ *кратности* $m_0\in\mathbb{N}$. *Если число попарно различных рядов Пюизе из поля* $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, *удовлетворяющих уравнению* (1.11) *и имеющих отрицательные показатели степеней в доминантных мономах*

$$\begin{gathered}y_{j,x_0}(x)=c_0^{(j)}(x-x_0)^{-q_j}+o\left((x-x_0)^{-q_j}\right),\quad c_0^{(j)}\neq 0,\\ q_j\in\mathbb{Q},\quad q_j>0,\quad 1\leq j\leq L\in\mathbb{N},\end{gathered} \tag{1.18}$$

конечно, тогда справедливо следующее неравенство

$$m_0 \le \sum_{j=1}^{L} q_j. \tag{1.19}$$

Доказательство. Опять рассмотрим представление (1.17) инварианта $F(x, y)$ в кольце $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$. Используя Лемму 1.2, мы видим, что ряды Пюизе, появляющиеся в этом представлении, удовлетворяют уравнению (1.11). Многочлен $\mu(x)$ имеет вид $\mu(x) = (x - x_0)^{m_0}\tilde{\mu}(x)$, где многочлен $\tilde{\mu}(x) \in \mathbb{C}[x]$ не обращается в нуль в точке x_0: $\tilde{\mu}(x_0) \neq 0$. Анализируя поведение выражения (1.17) в точке x_0, мы приходим к заключению, что множитель $(x - x_0)^{m_0}$ должен компенсировать доминантные члены рядов Пюизе с отрицательными показателями степеней таким образом, чтобы получающийся многочлен был неприводим в кольце $\mathbb{C}[x, y]$. Предположим, что все ряды (1.18) присутствуют в представлении (1.17), а другие ряды Пюизе в этом представлении имеют ненулевой коэффициент при x^0. Отметим, что каждый ряд $y_{j,\,x_0}(x)$ является простым нулем элемента (1.17), в силу того что инвариант $F(x, y)$ неприводим в кольце $\mathbb{C}[x, y]$. В рассматриваемой ситуации кратность m_0 достигает своего максимума. Действительно, мы видим, что коэффициент при y^0 в выражении $(y - y_{1,\,x_0}(x)) \times \ldots \times (y - y_{N,\,x_0}(x))$ имеет доминантное представление $\alpha(x - x_0)^{-p}$, где $p = q_1 + \ldots + q_L$ и $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. На этом замечании мы заканчиваем доказательство.

□

Далее изучим связь между свойствами рядов Пюизе, удовлетворяющих уравнению (1.11), и проблемой единственности для алгебраических инвариантов уравнения (1.9).

Теорема 1.2. *Предположим, что ряд Пюизе* $y_{x_0}(x)$, *принадлежащий полю* $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ *при некотором* $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, *имеет фиксированные коэффициенты и показатели степеней, а также удовлетворяет уравнению* (1.11). *Тогда существует не более одного неприводимого алгебраического инварианта* $F(x, y) \in$

$\mathbb{C}[x,y]\backslash\mathbb{C}[x]$ *уравнения* (1.9)*, такого что ряд* $y_{x_0}(x)$ *является решением уравнения* $F(x,y)=0$.

Доказательство. Будем доказывать эту теорему методом от противного. Предположим, что уравнение (1.9) имеет по меньшей мере два различных неприводимых алгебраических инварианта $F_1(x,y)$, $F_2(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, для которых выполнено $F_1(x,y_{x_0}(x)) = O_{x_0}$ и $F_2(x,y_{x_0}(x)) = O_{x_0}$. Мы видим, что две алгебраические кривые $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$ пересекаются в бесконечном множестве точек, лежащих в области сходимости ряда $y_{x_0}(x)$. Из теоремы Безу следует, что существует многочлен, который делит оба многочлена $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$. Многочлен $F_1(x,y)$ неприводим. Следовательно, выполнено следующее соотношение $F_2(x,y) = h(x,y)F_1(x,y)$, где $h(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ — некоторый многочлен. Многочлен $F_2(x,y)$ также неприводим. Следовательно, $h(x,y)$ является константой и многочлены $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$ лежат в одном и том же классе эквивалентности. Мы пришли к противоречию.

□

Следующая теорема связывает число различных рядов Пюизе, удовлетворяющих уравнению (1.11), и число попарно различных неприводимых алгебраических инвариантов, которое уравнение (1.9) может иметь одновременно.

Теорема 1.3. *Если при некотором* $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ *число различных рядов Пюизе из поля* $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$*, удовлетворяющих уравнению* (1.11)*, конечно, то соответствующее уравнение* (1.9) *имеет конечное число неприводимых алгебраических инвариантов. Более того, число попарно различных неприводимых алгебраических инвариантов не превосходит числа различных рядов Пюизе из поля* $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$*, которые удовлетворяют уравнению* (1.11).

Доказательство. Воспользовавшись алгоритмом Ньютона – Пюизе [63] нахождения рядов Пюизе, удовлетворяющих алгебраическому уравнению $F(x,y) = 0$, мы видим, что многочлены, представляющие неприводимые алгебраические инварианты, не могут иметь произвольный параметр. Действительно, если бы такой параметр существовал, то он бы появлялся в коэффициентах хотя бы одного ряда Пюизе, включенного в представление (1.16). Но все эти ряды удовлетворяют уравнению (1.11) и не имеют произвольных параметров согласно утверждению теоремы. Отметим, что мы рассматриваем только один инвариант из класса эквивалентности $F \sim cF$. Следовательно параметр $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ можно не учитывать. Из предыдущих рассуждений и Теоремы 1.2 следует, что число попарно различных неприводимых алгебраических инвариантов конечно. Это число достигает своего максимума, если все ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$, удовлетворяющие уравнению (1.11), являются рядами Лорана и каждый из них порождает рациональное решение уравнения (1.11). В этом случае число попарно различных неприводимых алгебраических инвариантов равно числу различных рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$, удовлетворяющих уравнению (1.11).

□

Замечание 1. Число рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих уравнению (1.11), может оказаться конечным, если прямая $\{(x_0, y), \quad y \in \mathbb{C}\}$ целиком состоит из особых точек уравнения (1.11). Точку $(x_0, y_0) \in \overline{\mathbb{C}}^2$ называют особой точкой алгебраического обыкновенного дифференциального уравнения, если для этой точки нарушаются условия теоремы о локальном существовании, единственности и аналитичности решения [66], удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$.

Наконец, отметим, что в двумерном случае проблема нахождения верхних оценок для числа существующих одновременно различных инвариантных алгебраических кривых, рассматривалась М.В. Доловым и В.В. Косаревым [20], см. также [19]. Если число попарно различных неприводимых инвариантных алгебраических кривых дифференциальной системы (1.1) конечно, то как показано в статье [19], это число ограничено значением $(d^2 + d + 2)/2$. В случае $d = 2$ оценка является точной. Дифференциальная система (1.1) с бесконечным числом попарно различных неприводимых инвариантных алгебраических кривых всегда имеет рациональный первый интеграл.

1.4 Метод рядов Пюизе

Теорема 1.1 и Леммы 1.3, 1.4 лежат в основе следующего метода построения алгебраических инвариантов.

На *первом шаге* следует найти все ряды Пюизе с центрами в конечных точках и на бесконечности, которые являются формальными решениями уравнения (1.11). Алгоритмы классификации рядов Пюизе, удовлетворяющих алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений, приводятся в рамках степенной геометрии [67, 68] и теории уравнений Пенлеве [3, 69].

На *втором шаге* используется Теорема 1.1 для того, чтобы записать разложение на множители (1.14) неприводимого алгебраического инварианта в кольце $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}[y]$. Допустимые нули многочлена $\mu(x)$ могут быть получены с помощью рядов Пюизе в окрестности конечных точек $x_0 \in \mathbb{C}$, имеющих отрицательные показатели степеней в доминантных членах, см. Леммы 1.3 и 1.4. Заметим, что на этом шаге должны быть рассмотрены, всевозможные комбинации рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$, найденных на первом шаге, в том случае, когда требуется классифицировать неприводимые алгебраические инварианты. Если ряд Пюизе с индексом ветвления больше единицы появляется в представлении (1.14), то все сопряженные ряды Пюизе

$$y(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} (\varepsilon_{n_1})^{m(n_0-l)} b_l x^{\frac{n_0-l}{n_1}}, \quad m = 0, \ldots, n_1 - 1, \tag{1.20}$$

получающиеся друг из друга в результате обходов вокруг точки $x = \infty$, должны также появляться в этом представлении (1.14). Символом ε_{n_1} в выражении (1.20) обозначен примитивный корень степени n_1 из единицы. Далее необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие (1.15), которое порождает алгебраическую систему, состоящую, вообще говоря, из бесконечного числа уравнений.

Третий шаг состоит в решении некоторой конечной алгебраической подсистемы и проведении проверки. Требуется убедиться, что совместны дифференциальное уравнение (1.11) и алгебраическое уравнение $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ определяется формулой (1.14).

Проверка на третьем шаге метода рядов Пюизе может быть проведена следующим образом. Дифференцируя равенство $F(x, y(x)) = 0$ по переменной x и вычисляя производные y_x, y_{xx}, $\ldots$, проводится исключение из уравнения (1.11) всех дифференциальных мономов и степенных мономов вида y^{N+j-1}, где $j \in \mathbb{N}$. Напомним, что многочлен $F(x, y)$ неприводим. Следовательно, получающийся многочлен $U(x, y)$ степени $N - 1$ по переменной y должен иметь нулевые коэффициенты, если искомый алгебраический инвариант действительно существует. Заметим, что на этом шаге может возникнуть рациональная функция относительно переменных x и y. В этом случае нужно умножить эту функцию на знаменатель и работать с получающимся многочленом. Алгебраический инвариант $F(x, y)$ существует тогда и только тогда, когда все коэффициенты многочлена $U(x, y)$ тождественно обращаются в нуль. Если хотя бы один коэффициент не равен нулю и зависит от параметров, то необходимо вернуться к предыдущим шагам, вычислить последующие коэффициенты рядов Пюизе в окрестности бесконечности и добавить к рассматриваемой подсистеме дополнительные уравнения.

Далее рассмотрим задачу построения и решения алгебраической системы, возникающий из условия (1.15). На время забудем о зависимости элементов $y_{1,\infty}(x)$, $\ldots$, $y_{N,\infty}(x)$ из поля $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$ от переменной x и рассмотрим кольцо Sym $\subset \mathbb{C}[y_{1,\infty}, \ldots, y_{N,\infty}]$ симметрических многочленов от N переменных. Хорошо известно, что кольцо Sym порождается полем $\mathbb{C}$ и N генераторами. Наиболее часто в качестве генераторов используются элементарные симметрические многочлены:

$$s_k = \sum_{1\leq j_1<j_2<\ldots<j_k\leq N} y_{j_1,\infty} y_{j_2,\infty}\ldots y_{j_k,\infty}, \quad 1\leq k\leq N \tag{1.21}$$

и симметрические многочлены, заданные степенными суммами:

$$S_k = \sum_{j=1}^{N} y_{j,\infty}^k, \quad 1\leq k\leq N \tag{1.22}$$

Эти системы генераторов связаны соотношениями Ньютона вида

$$\begin{aligned} ks_k &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} s_{k-j} S_j, \quad 1\leq k\leq N;\\ S_k &= (-1)^{k-1} k s_k + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k+j-1} s_{k-j} S_j, \quad 1\leq k\leq N, \end{aligned} \tag{1.23}$$

где необходимо дополнительно положить $s_0 = 1$. Алгебраические свойства многочленов, определяющих инварианты, будем описывать с помощью симметрических многочленов.

Далее вспомним о зависимости рядов Пюизе от переменной x. Заметим, что, если параметр N заранее не известен, то найти коэффициенты рядов Пюизе, заданных элементарными симметричными многочленами $s_k(y_{1,\infty}(x), \ldots, y_{N,\infty}(x))$, является непростой задачей. Эта сложность связана с тем фактом, что коэффициенты рядов Пюизе, удовлетворяющих алгебраическому обыкновенному дифференциальному уравнению, определяются рекуррентными соотношениями. В то же время для вычисления коэффициентов симметрических многочленов $S_k(y_{1,\infty}(x), \ldots, y_{N,\infty}(x))$ несложно вывести рекуррентные формулы. Это наблюдение позволяет превратить условия (1.15) в удобные для работы соотношения, представленные в следующей теореме.

Теорема 1.4. *Многочлен* $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}[x]$ *степени* $N \in \mathbb{N}$ *относительно переменной* y *является алгебраическим инвариантом уравнения*

(1.9) *тогда и только тогда, когда существуют многочлен* $\mu(x) \in \mathbb{C}[x]$ *и* N *рядов Пюизе* $y_{1,\infty}(x)$, …, $y_{N,\infty}(x)$ *из поля* $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, *которые удовлетворяют уравнению* (1.11) *и соотношениям*

$$\left\{\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}w_{k-j}(x)S_j(y_{1,\infty}(x),\ldots,y_{N,\infty}(x))\right\}_{-} = 0, \quad 1 \le k \le N, \qquad (1.24)$$

где многочлены $\{w_m(x) \in \mathbb{C}[x], 1 \le m \le N\}$ *определяются следующим образом:*

$$w_m(x) = \left\{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}w_{m-j}(x)S_j(y_{1,\infty}(x),\ldots,y_{N,\infty}(x))\right\}_{+} \qquad (1.25)$$

и $w_0(x) = \mu(x)$. *При этом многочлен* $\mu(x)$ *является коэффициентом алгебраического инварианта* $F(x,y)$, *стоящим при старшей степени относительно переменной* y.

Доказательство. Докажем необходимость условий (1.24). Пусть многочлен $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]\setminus\mathbb{C}[x]$ является алгебраическим инвариантом уравнения (1.9). Раскладывая этот многочлен на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$, находим

$$F(x,y) = \mu(x)\prod_{j=1}^{N}\left\{y - y_{j,\infty}(x)\right\}, \qquad (1.26)$$

где в силу Леммы 1.2 ряды Пюизе $y_{1,\infty}(x)$, …, $y_{N,\infty}(x)$ удовлетворяют уравнению (1.11). Соотношение (1.26) переписываем следующим образом:

$$F(x,y) = \mu(x)\sum_{j=0}^{N}(-1)^j s_j(y_{1,\infty}(x),\ldots,y_{N,\infty}(x))y^{N-j}. \qquad (1.27)$$

Неполиномиальная часть выражения, стоящего в правой части этого равенства, должна обращаться в нуль. Следовательно, для любого целого m такого, что выполнены неравенства $0 \le m \le N$, элемент $\mu(x)s_m(y_{1,\infty}(x), \ldots, y_{N,\infty}(x))$ является многочленом. Этот многочлен совпадает с многочленом $w_m(x)$, задаваемым выражением (1.25). Рассматривая неполиномиальные коэффициенты при y^{N-j}, $1 \leq j \leq N$, мы приходим к соотношениям

$$\{\mu(x) s_j\left(y_{1,\infty}(x), \ldots, y_{N,\infty}(x)\right)\}_- = 0, \quad 1 \leq j \leq N. \tag{1.28}$$

Используя равенства (1.23), мы видим, что соотношения (1.28) и (1.24) эквивалентны.

Для доказательства достаточности условий (1.24), рассмотрим формальный элемент (1.26) и докажем, что он является многочленом из кольца $\mathbb{C}[x, y]$. Нам необходимо установить, что для каждого натурального k от 1 до N коэффициент при y^{N-k} в выражении (1.26) является многочленом из кольца $\mathbb{C}[x]$. Будем использовать метод математической индукции по k.

Если $k = 1$, то условие (1.24) можно переписать следующим образом: $\{\mu(x)S_1(y_{1,\infty}(x), \ldots, y_{N,\infty}(x))\}_- = 0$. Мы видим, что коэффициент при y^{N-1} в выражениях (1.26) и (1.27) является многочленом относительно переменной x, принимающем вид $-w_1(x)$, где $w_1(x) = \{\mu(x)S_1(y_{1,\infty}(x), \ldots, y_{N,\infty}(x))\}_+$. Предположим, что коэффициенты при y^{N-k}, $1 < k \leq l$ также является многочленом относительно переменной x. Обозначим эти многочлены как $(-1)^k w_k(x)$. Несложно убедиться, что эти многочлены определяются соотношением (1.25), где $1 < k \leq l$. Коэффициент при $y^{N-(l+1)}$ в выражении (1.26) равен $(-1)^{l+1}\mu(x)s_{l+1}(y_{1,\infty}(x), \ldots, y_{N,\infty}(x))$. Используя соотношение (1.23), мы находим

$$\mu(x)s_{l+1}(y_{1,\infty}(x), \ldots, y_{N,\infty}(x)) = \frac{1}{l+1}\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{j-1}\mu(x)s_{l+1-j}S_j. \tag{1.29}$$

В соответствии с предположением индукции, мы заключаем, что элементы $\mu(x)s_{l+1-j}$, $1 \leq j \leq l+1$ являются многочленами относительно переменной x, совпадающими с $w_{l+1-j}(x)$, $1 \leq j \leq l+1$. Следовательно, как следует из условия (1.24), где $k = l+1$, коэффициент при $y^{N-(l+1)}$ является многочленом относительно переменной x. В результате выражение (1.26) представляет собой многочлен $F(x, y)$ из кольца $\mathbb{C}[x, y]$.

В заключение установим, что многочлен $F(x,y)$ является алгебраическим инвариантом уравнения (1.9). Рассмотрим неприводимый множитель $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}[x]$ многочлена $F(x,y)$. Пусть $x(t)$ является непостоянным решением уравнения $f(x, x_t) = 0$. По построению любой ряд Пюизе $y_{j_0,\infty}(x)$ с центром в точке $x = \infty$, удовлетворяющий уравнению $f(x,\ y(x)) = 0$, совпадает с одним из формальных рядов, описанным в условии настоящей теоремы. Следовательно, все ряды Пюизе с центром в точке $x = \infty$, появляющиеся в факторизации многочлена $f(x,y)$ над полем $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяют уравнению (1.11). Более того, по теореме Ньютона – Пюизе каждый из этих рядов сходится в некоторой (проколотой) окрестности (с разрезом) точки $x = \infty$. Используя единственность аналитического продолжения, мы делаем вывод, что любое решение $y(x)$ уравнения $f(x,\ y(x)) = 0$ также удовлетворяет уравнению (1.11). Вспоминая связь уравнений (1.11) и (1.9), мы видим, что функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению (1.9). Тот же вывод справедлив и для всех неприводимых делителей многочлена $F(x,y)$.

$\square$

Предположим, что старший по отношению к переменной y коэффициент алгебраического инварианта $F(x,y)$ не зависит от переменной x, тогда без потери общности мы можем считать, что выполнено соотношение $\mu(x) = 1$. Повторяя доказательство Теоремы 1.4 для этого частного случая, убеждаемся в справедливости следующей леммы.

Лемма 1.5. *Многочлен* $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \backslash \mathbb{C}[x]$ *степени* $N \in \mathbb{N}$ *относительно переменной* y *и с единичным старшим коэффициентом по отношению к той же переменной* y *является алгебраическим инвариантом уравнения* (1.9) *тогда и только тогда, когда существует* N *рядов Пюизе* $y_{1,\infty}(x)$, …, $y_{N,\infty}(x)$ *из поля* $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, *которые удовлетворяют уравнению* (1.11) *и соотношениям*

$$\left\{ \sum_{j=1}^{N} y_j^k(x) \right\}_- = 0, \quad 1 \le k \le N. \tag{1.30}$$

Соотношения (1.24) и в частном случае (1.30) представляют собой необходимые и достаточные условия существования алгебраических инвариантов. Эти соотношения получены из условия (1.15) и могут использоваться на втором шаге метода при построении алгебраической системы.

Задача нахождения условий, которым удовлетворяет двумерная полиномиальная система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1), имеющая инвариантные алгебраические кривые, ранее рассматривалась Дж. Чаварригой (J. Chavarriga) и др., см. [70]. Метод работы [70] также использует локальные свойства решений системы (1.1) и связанного с ней уравнения (1.4). Условия, полученные Дж. Чаварригой (J. Chavarriga) и соавторами, являются необходимыми, но не достаточными. Отметим некоторые другие статьи [71–73], в которых рассматривались алгебраические функции, асимптотические ряды в приложении к задачам построения инвариантных алгебраических кривых и первых интегралов систем вида (1.1).

Рассмотрим доминантный баланс $W[y(x),x]$ уравнения (1.11) в точке $x=\infty$. Пусть этот баланс порождает ряд Пюизе вида (1.13), удовлетворяющий исследуемому уравнению. Напомним, что выражение $W[y(x),x]$ представляет собой сумму некоторых дифференциальных мономов уравнения (1.11). Методы выделения доминантных балансов алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений описаны в работах [3, 67, 68]. Также отметим, что доминантный член $b_0x^{n_0/n_1}$ рассматриваемого ряда Пюизе является решением уравнения $W[y(x),x]=0$. Производная по Гато баланса $W[y(x),x]$ на решении $y(x)=b_0x^r$, $r=n_0/n_1$ определяется соотношением

$$\frac{\delta W}{\delta y}[b_0x^r,x]=\lim_{s\to 0}\frac{W[b_0x^r+sx^{r-l},x]-W[b_0x^r,x]}{s}=U(l)x^{\tilde{r}}, \tag{1.31}$$

где $\tilde{r}\in\mathbb{Q}$ и $U(l)$ – это многочлен относительно l с коэффициентами, зависящими от b_0 и параметров баланса $W[y(x),x]$. Нули многочлена $U(l)$ называют *показателями Ковалевской* или *индексами Фукса* баланса $W[y(x),x]$ на функции $y(x)=b_0x^r$. Если многочлен $U(l)$ тождественно равен нулю, то необходимо в уравнении (1.11) сделать замену $y(x) = b_0x^r + w(x)$ и искать соответствующий баланс и показатели Ковалевской для получившегося уравнения. При выполнении условий совместности неотрицательные рациональные показатели Ковалевской порождают произвольные коэффициенты рассматриваемого ряда Пюизе [3,67,68]. Пусть ряд Пюизе имеет хотя бы один произвольный коэффициент. В этом случае мы будем говорить не об одном ряде Пюизе, а о семействе рядов Пюизе.

Если все ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющие уравнению (1.11), имеют единственным образом определенные показатели степеней и коэффициенты, то степени по отношению к переменной y неприводимых алгебраических инвариантов уравнения (1.9) ограничены числом попарно различных рядов Пюизе. Это утверждение было доказано ранее, см. Теорему 1.1. Следовательно, алгебраическая система, получаемая с помощью условий (1.24), включает только параметры исходного уравнения и, возможно, нули многочлена $\mu(x)$, которые также связаны с существованием рядов Пюизе из полей $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, $x_0 \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих уравнению (1.11) и обладающих определенными свойствами согласно Лемме 1.4. Далее рассмотрим гораздо более трудный случай. Пусть уравнению (1.11) удовлетворяет семейство рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, обладающих произвольными коэффициентами, связанными с наличием рациональных неотрицательных показателей Ковалевской. При этом предполагаем, что показатели степеней таких рядов определяются единственным образом. Заранее неизвестно, сколько раз это семейство появляется в представлении (1.14). Рассмотрим одно из таких семейств с произвольными коэффициентами b_{l_1}, …, b_{l_J}, $0 \leq l_1 < l_2 < \ldots < l_J$. Предположим, что в представлении (1.14) этот ряд встречается M раз, где $M \in \mathbb{N}$. Коэффициенты ($b_{l_1}^{(m)}$, …, $b_{l_J}^{(m)}$), $m \in \{1, \ldots, M\}$ будут присутствовать в алгебраической системе. Основная трудность состоит в том, что нужно найти не только эти коэффициенты, но и число M. Отметим, что кортежи ($b_{l_1}^{(m)}$, …, $b_{l_J}^{(m)}$), $m \in \{1, \ldots, M\}$

должны быть попарно различными, если алгебраический инвариант $F(x,y)$ неприводим в кольце $\mathbb{C}[x,y]$. В силу инвариантности многочлена $F(x,y)$ относительно перестановок рядов Пюизе $y_{1,\infty}(x)$, …, $y_{N,\infty}(x)$, мы заключаем, что многочлен $F(x,y)$ наследует инвариантность по отношению к перестановкам кортежей $(b_{l_1}^{(m)}$, …, $b_{l_J}^{(m)})$, $m \in \{1,\ldots,M\}$. Подставляя ряд Пюизе вида (1.13) в уравнение (1.11), несложно получить рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют его коэффициенты. Анализируя подобные соотношения, мы видим, что коэффициенты b_l, где $l \geq 2$, полиномиально зависят от коэффициентов b_1, …, b_{l-1}. Следовательно, в алгебраической системе, за исключением некоторых вырожденных случаев, можно перейти от неизвестных $(b_{l_1}^{(m)}$, …, $b_{l_J}^{(m)})$, $m \in \{1,\ldots,M\}$ к инвариантам

$$B_\alpha = \sum_{m=1}^{M} \prod_{k=1}^{J} \left(b_{l_k}^{(m)}\right)^{\alpha_k}, \tag{1.32}$$

где $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_K) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0^{K-1}$ – это мульти-индекс. Если $l_1 \neq 0$, то $\alpha_1 \in \mathbb{N}_0$. Вырожденные случаи, отмеченные выше, могут появляться только при выполнении условия $l_1 = 0$. Таким образом, переменные M и $\{B_\alpha\}$ должны быть добавлены к списку неизвестных. Далее необходимо изучить структуру полиномиального идеала, порожденного алгебраической системой в кольце многочленов по переменным, включающим параметры исходного уравнения, возможные нули многочлена $\mu(x)$, $\{B_\alpha\}$ и M. По построению следует отобрать решения, удовлетворяющие условию $M \in \mathbb{N}$. Если несколько семейств рядов Пюизе с центром в точке $x = \infty$, имеющих единственным образом определенные показатели степеней и произвольные коэффициенты, появляются в представлении (1.14), то переменные $\{B_\alpha\}$ и M должны быть введены для каждого такого семейства.

Ранее было доказано, см. Теорему 1.2, что не может существовать более одного неприводимого алгебраического инварианта уравнения (1.9) такого, что ряд Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, который удовлетворяет уравнению (1.11) и имеет единственным образом определенные показатели степеней и коэффициенты, появляется в разложении на множители многочлена $F(x, y)$ в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$. Следовательно, задача нахождения и классификации неприводимых алгебраических инвариантов с представлением (1.14), в котором все ряды Пюизе обладают коэффициентами, не определяемыми с помощью уравнения (1.11), является наиболее сложной. Следующая теорема может быть использована при практическом решении алгебраической системы в подобных случаях.

Теорема 1.5. *Рассмотрим систему алгебраических уравнений вида*

$$\sum_{m=1}^{M} (\beta_m)^k = M\varrho_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.33}$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_M \in \mathbb{C}$, $M \in \mathbb{N}$ *— неизвестные величины, а* $\{\varrho_k\}$ *— заданные комплексные числа. Пусть при некотором* $M_0 \in \mathbb{N}$ *эта система имеет решение* $(\beta_1, \ldots, \beta_{M_0})$*, для которого выполнено* $\beta_{m_1} \neq \beta_{m_2}$ *при* $m_1 \neq m_2$*. Тогда другие решения системы существуют лишь при следующих значениях параметра* M*:* $M = lM_0$*, где* $l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$*. При этом решения состоят из* l *повторений для каждого элемента из кортежа* $(\beta_1, \ldots, \beta_{M_0})$*. Кортежи, полученные друг из друга перестановкой элементов, считаются эквивалентными. Мы учитываем только одного представителя из каждого класса эквивалентности.*

Доказательство. Несложно убедиться, что для каждого решения с попарно различными элементами кортежа $(\beta_1, \ldots, \beta_{M_0})$ существует кратное решение. Покажем, что система (1.33) не может иметь других решений. Доказательство проведем методом от противного. Пусть при $M = M_1$ существует решение $(\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{M_1})$ такое, что или $M_1 \neq lM_0$, или $M_1 = lM_0$ и кортеж $(\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{M_1})$ не совпадает с кортежем, описанным в условии теоремы. Заметим, что величины, стоящие с левой стороны от знака равенства в системе (1.33), представляют собой степенные суммы переменных в кольце $\mathbb{C}[\beta_1, \ldots, \beta_M]$:

$$p_k = \sum_{m=1}^{M} (\beta_m)^k \,. \tag{1.34}$$

Хорошо известно, что элементарные симметрические многочлены

$$e_k = \sum_{1 \le m_1 < m_2 < \cdots < m_k \le M} \beta_{m_1} \beta_{m_2} \ldots \beta_{m_k}, \tag{1.35}$$

единственным образом выражаются через степенные суммы. Далее рассмотрим следующее алгебраическое уравнение степени $M_2 = M_0 M_1$:

$$\begin{gathered} s^{M_2} - e_1 (\beta_1, \ldots, \beta_{M_2})\, s^{M_2 - 1} + e_2 (\beta_1, \ldots, \beta_{M_2})\, s^{M_2 - 2} \\ + \cdots + (-1)^{M_2} e_{M_2} (\beta_1, \ldots, \beta_{M_2}) = 0. \end{gathered} \tag{1.36}$$

По построению это уравнение имеет два различных множества решений, а именно: M_1 кратных корней для каждого элемента кортежа $(\beta_1,\, \ldots,\, \beta_{M_0})$ и M_0 кратных корней для каждого элемента кортежа $(\tilde{\beta}_1,\, \ldots,\, \tilde{\beta}_{M_1})$. Множество решений алгебраического уравнения над полем $\mathbb{C}$ с одним неизвестным единственно. Это противоречие доказывает теорему.

□

После того как проведена классификации рядов Пюизе, удовлетворяющих уравнению (1.11), вычисление алгебраических инвариантов становится полностью алгебраическим. Мы видели, что такой подход дает бесконечную алгебраическую систему. Благодаря теореме Гильберта о базисе на практике достаточно рассмотреть лишь конечное число уравнений. Описанный в этом разделе метод будем называть *методом рядов Пюизе*.

Поясним на примере, как Теорема 1.5 используется при доказательстве единственности неприводимых алгебраических инвариантов. Предположим, что уравнению (1.11), связанному с исследуемым уравнением преобразованием $x_t = y(x)$, $x(t) = x$, удовлетворяет $p \in \mathbb{N}$ семейств рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$. Также предположим, что выполнены следующие условия:

1. доминантное поведение рядов определяется соотношением $y_{\infty}^{(l)}(x) = b_0^{(l)}$ $x^{n_0/p}$, где n_0 и p – взаимно простые натуральные числа, а коэффициенты $\{b_0^{(l)},\, l = 0, \ldots, p-1\}$ являются попарно различными решениями алгебраического уравнения $(b_0)^p - A = 0$, $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
2. рассматриваемые ряды имеют единственные положительный рациональный показатель Ковалевской: $l_0 = k_0/p$, где $k_0 \in \mathbb{N}$;
3. не существует рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$, отличных от $\{y_{\infty}^{(l)}(x),\, l = 0, \ldots, p-1\}$ и удовлетворяющих уравнению (1.11);
4. для любого $x_0 \in \mathbb{C}$ все ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, удовлетворяющие уравнению (1.11), имеют неотрицательные показатели степеней в доминантных членах.

С помощью Теоремы 1.1 и Леммы 1.3 мы представляем неприводимые алгебраические инварианты в виде

$$F(x, y) = \left\{ \prod_{m=1}^{M} \prod_{l=0}^{p-1} \left[y - y_{m,\infty}^{(l)}(x) \right] \right\}_{+}, \tag{1.37}$$

где введен дополнительный индекс m для того, чтобы различать ряды с различными коэффициентами $b_{k_0,m}^{(l)}$. Таким образом, ряды Пюизе $y_{m,\infty}^{(l)}(x)$, $l = 0, \ldots, p-1$ выглядят следующим образом:

$$y_{m,\infty}^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,m}^{(l)} x^{\frac{n_0 - n}{p}}, \quad l = 0, \ldots, p-1. \tag{1.38}$$

Ряды $\left\{ y_{m,\infty}^{(l)}(x), l = 0, \ldots, p-1 \right\}$ с фиксированным индексом m должны быть сопряжены по отношению к друг другу. Соответственно, произвольный коэффициент каждого ряда имеет вид

$$b_{k_0,m}^{(l)} = \beta_m \left(b_0^{(l)} \right)^{(n_0 + k_0) \mod p}, \quad \beta_m \in \mathbb{C}, \tag{1.39}$$

где символом $\mod$ обозначен оператор взятия остатка от деления. Отметим, что в явном виде мы не указываем индекс m для коэффициентов, одинаковых при всех значений m. Число $M \in \mathbb{N}$ заранее неизвестно. Оно может быть найдено следующим образом. Используя Лемму 1.5, мы приходим к условию

$$\left\{ \sum_{m=1}^{M} \sum_{l=0}^{p-1} \left[y_{m,\,\infty}^{(l)}(x) \right]^k \right\}_- = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.40}$$

Коэффициенты рядов Пюизе (1.38) зависят от β_m полиномиально. Следовательно, уравнения алгебраической системы, которые получаются из условия (1.40), имеют вид

$$\sum_{k=0}^{K} \delta_k C_k = 0, \tag{1.41}$$

где переменные $\{\delta_k\}$ зависят от параметров исходного уравнения и переменных $\{C_k\}$, определяемых соотношениями

$$C_k = \sum_{m=1}^{M} (\beta_m)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.42}$$

При этом справедливо равенство $C_0 = M$. Заметим, что определение (1.42) симметрических многочленов отличается от определения (1.32) на несущественный мультипликативный множитель. Поскольку каждый ряд Пюизе имеет лишь один произвольный коэффициент и нам нет смысла использовать два индекса, мы записываем индекс m снизу в выражении (1.42). Этот индекс является аналогом верхнего индекса m в выражении (1.32). Предположим, что при решении алгебраической подсистемы мы находим $C_1 = \varrho_1 M$ и $C_2 = \varrho_2 M$, где $\varrho_2 = \varrho_1^2$. При этом могут возникать ограничения на параметры исходного уравнения. Положим $\beta_1 = \varrho_1$ и вычислим многочлен $F(x, y)$ с помощью соотношения (1.37), содержащего p сопряженных рядов Пюизе $y_{1,\infty}^{(l)}(x)$, $l = 0, \ldots, p-1$. Далее предположим, что уравнение $F(x, y(x)) = 0$ совместно с уравнением (1.11). В этом случае мы находим

$$C_k = (\varrho_1)^k M, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.43}$$

Таким образом, алгебраическая система

$$\sum_{m=1}^{M}(\beta_m)^k = (\varrho_1)^k M, \quad k \in \mathbb{N} \tag{1.44}$$

имеет решение $M = 1$, $\beta_1 = \varrho_1$. Из Теоремы 1.5 следует, что нет других решений с попарно различными значениями переменных $\beta_1, \ldots, \beta_M$. Напомним, что переменные $\beta_1, \ldots, \beta_M$ должны принимать попарно различные значения в связи с тем, что тем же самым свойством обладают ряды Пюизе, появляющиеся в представлении (1.37). Следовательно, не существует других неприводимых алгебраических инвариантов кроме тех, которые задаются уравнением $F(x, y) = 0$, где $M = 1$.

Если уравнение $F(x, y(x)) = 0$ при $M = 1$ не совместно с уравнением (1.11) или выполнено следующее условие $\varrho_2 \neq \varrho_1^2$, то необходимо рассмотреть последующие алгебраические уравнения, которые возникают из условия (1.40) и не принадлежат идеалу, порождаемому рассмотренными ранее уравнениями. Предположим, что, решая новую алгебраическую подсистему, мы находим $C_1 = \varrho_1 M$, $C_2 = \varrho_2 M$ и $C_3 = \varrho_3 M$, где выполнены следующие ограничения

$$2\varrho_1 = \delta_1 + \delta_2, \quad 2\varrho_2 = \delta_1^2 + \delta_2^2, \quad 2\varrho_3 = \delta_1^3 + \delta_2^3 \tag{1.45}$$

и параметры δ_1 и δ_2 различны. Как и в предыдущем случае, мы проверяем совместность уравнений $F(x, y(x)) = 0$ и (1.11). Теперь в разложении многочлена $F(x, y)$ на множители стоят $2p$ попарно различных рядов Пюизе $y_{m,\infty}^{(l)}(w)$, $l = 0, \ldots, p-1$, $m = 1, 2$. Ряды Пюизе с одинаковым индексом j сопряжены друг другу. Параметры β_1 и β_2 равны δ_1 и δ_2 соответственно. При получении явного выражения для многочлена $F(x, y)$ мы используем оператор проектирования $\{\cdot\}_+$. Если совместное уравнение $F(x, y(x)) = 0$ существует, то мы получаем уравнения

$$C_k = \frac{1}{2}\left(\delta_1^k + \delta_2^k\right) M, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.46}$$

Изучая алгебраическую систему

$$\sum_{m=1}^{M}(\beta_m)^k = \frac{1}{2}\left(\delta_1^k + \delta_2^k\right) M, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.47}$$

мы видим, что она имеет следующее решение: $M = 2$, $\beta_1 = \delta_1$ и $\beta_2 = \delta_2$. В силу Теоремы 1.5 заключаем, что нет других решений при попарно различных значениях переменных $\beta_1, \ldots, \beta_M$. Таким образом, все неприводимые алгебраические инварианты определяются многочленом $F(x, y)$ при $M = 2$.

Далее вспомним, что число M конечно. Следовательно, продолжая вычисления по описанному выше алгоритму, мы можем найти все неприводимые алгебраические инварианты исследуемого уравнения.

Автору неизвестны методы, отличные от метода рядов Пюизе, позволяющие находить не некоторые, а все неприводимые алгебраические инварианты для широких классов автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка выше второго $(k > 2)$. Сравним метод рядов Пюизе с другими методами построения алгебраических инвариантов для алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка $(k = 2)$ и двумерных полиномиальных дифференциальных систем. Напомним, что алгебраические инварианты порождают инвариантные алгебраические кривые соответствующей системы дифференциальных уравнений. Наиболее часто используемыми методами являются метод неопределенных коэффициентов, метод Лагутинского [74] и алгоритм, основанный на разложении векторного поля, связанного с с исходной системой, на весооднородные компоненты [3]. Метод Лагутинского требует вычисления некоторых полиномиальных определителей, которые, как правило, являются очень громоздкими. Этот метод получил дальнейшее развитие в работах [75–77]. Метод неопределенных коэффициентов и метод Лагутинского не позволяют провести классификацию неприводимых алгебраических инвариантов за исключением некоторых тривиальных случаев. Действительно, эти методы требуют априорную информацию о верхней оценке для степеней неприводимых алгебраических инвариантов. Метод разложения векторного поля на весооднородные компоненты приводит к бесконечной последовательности уравнений в частных производных. Не существует хорошо проработанного алгоритма поиска полиномиальных решений таких систем, если изучаемая дифференциальная система и соответствующее ей неавтономное обыкновенное дифференциально уравнение первого порядка не обладают свойствами конечности. В то же время метод рядов Пюизе сводит рассматриваемую задачу к решению алгебраической системы, что является значительным преимуществом предлагаемого в диссертационной работе метода. Еще одним достоинством метода рядов Пюизе является тот факт, что для многих дифференциальных систем он позволяет определять значения степеней неприводимых алгебраических инвариантов без выполнения сложных вычислений. Это сравнение показывает, что метод рядов Пюизе является мощным инструментом поиска и классификации инвариантных алгебраических кривых и соответствующих алгебраических инвариантов.

Метод рядов Пюизе успешно применялся в работах [78–82].

1.5 Проблема Пуанкаре

Как и при построении инвариантных алгебраических кривых для полиномиальных систем дифференциальных уравнений вида (1.1), основная трудность при классификации алгебраических инвариантов заданного семейства уравнений (1.9) обусловлена отсутствием априорной информации о степенях неприводимых инвариантов. Напомним, что поиск оценки сверху для степеней неприводимых инвариантных алгебраических кривых двумерных полиномиальных дифференциальных систем называют проблемой Пуанкаре. Проблему Пуанкаре несложно обобщить с двумерного случая на случай алгебраических инвариантов и автономных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольных порядков. Рассмотрим множество обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1.9), параметризованное некоторым набором коэффициентов. Проблему нахождения оценки сверху для степеней неприводимых алгебраических инвариантов уравнений (1.9) из заданного множества будем называть *проблемой Пуанкаре* для рассматриваемого множества уравнений.

Многочлен H, стоящий слева от знака равенства в выражении (1.11), можно представить в виде суммы дифференциальных мономов вида

$$H = \sum_j M_j, \quad M_j[y(x), x] = \alpha_j x^{j_0} y^{j_1} \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^{j_2} \ldots \left\{ \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} \right\}^{j_k}. \tag{1.48}$$

В этом выражении символом $j = (j_0, \ldots, j_k) \in \mathbb{N}_0^{k+1}$ обозначен мульти–индекс и $\alpha_j \in \mathbb{C}$. Числа $g = j_1 + \ldots + j_k$, $\varkappa = j_2 + 2j_3 + \ldots + (k-1)j_k$ и $\tau = j_2 + 2j_3 + \ldots + (k-1)j_k - j_0$ называют степенью, порядком и обобщенным порядком дифференциального монома M_j соответственно. Будем говорить, что *классическая проблема Пуанкаре* для множества уравнений (1.9) заключается в поиске равномерной верхней оценки, зависящей только от степеней, порядков и обобщенных порядков дифференциальных мономов уравнений (1.11), полученных из исходных уравнений, и не зависящей от коэффициентов.

Пусть уравнение вида (1.11) обладает следующими свойствами конечности:

1. существует лишь конечное число рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющих заданному уравнению;
2. существует лишь конечное число комплексных чисел $x_0 \in \mathbb{C}$ и конечное число рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x_0\}$, удовлетворяющих заданному уравнению и имеющих отрицательные показатели степеней в доминантных мономах.

Символом $A_{f,f}$ обозначим множество автономных полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1.9) такое, что для каждого уравнения из этого множества приведенное уравнение (1.11) обладает указанными выше свойствами конечности.

Теорема 1.6. *Для дифференциальных уравнений* (1.9) *из множества* $A_{f,f}$ *проблема Пуанкаре в классической постановке имеет решение.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение (1.11), связанное преобразованием $y(x) = x_t$, $x = x(t)$ с некоторым автономным полиномиальным обыкновенным дифференциальным уравнением (1.9) из множества $A_{f,f}$. Для уравнения (1.11) построим многоугольники Ньютона в переменных (x, y) и $(x - x_0, y)$, где $x_0 \in \mathbb{C}$. Поскольку это уравнение обладает описанными выше свойствами конечности, мы заключаем, что доминантные члены всех рядов Пюизе вида (1.13) и (1.12), где $n_0 < 0$, удовлетворяющих уравнению (1.11), порождаются ребрами соответствующих многоугольников Ньютона. Это означает, что показатели степеней доминантных членов определяются степенями, порядками и обобщенными порядками дифференциальных мономов уравнения (1.11). Пусть многочлен $F(x, y)$ с факторизацией (1.14) является неприводимым алгебраическим инвариантом изучаемого уравнения. Используя Лемму 1.4, мы видим, что степень многочлена $\mu(x)$ в представлении (1.14) ограничена сверху числом, зависящим от показателей степеней доминантных членов соответствующих рядов Пюизе с центрами в конечных точках. Анализируя представление (1.14), мы можем заключить, что существует равномерная верхняя оценка для степеней неприводимых алгебраических инвариантов уравнения (1.9) и эта оценка зависит от степеней, порядков и обобщенных порядков дифференциальных мономов уравнения (1.11).

□

Необходимо подчеркнуть, что проблема Пуанкаре может не иметь реше-

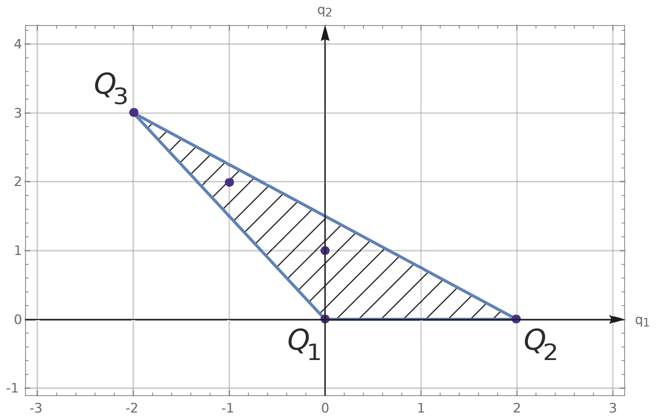


Рис. 1.1: Многоугольник Ньютона дифференциального уравнения (1.54) при $\beta \neq 0$.

ния для дифференциальных уравнений третьего и более высоких порядков. Например, многочлен $F(x,y) = y - x^l$, где $l \in \mathbb{N}$ – произвольный параметр, является неприводимым алгебраическим инвариантом следующего множества обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, состоящего из одного уравнения:

$$xx_t x_{ttt} - 2xx_{tt}^2 + x_t^2 x_{tt} = 0. \tag{1.49}$$

Таким образом, проблема Пуанкаре для уравнения (1.49) не разрешима как в классической, так и в общей постановке. Отметим, что многоугольники Ньютона уравнения (1.49) и его неавтономной редукции вырождаются в точки. Для дифференциальных уравнений второго порядка проблема Пуанкаре всегда имеет решение в предположении отсутствия рационального первого интеграла [36]. Если проблема Пуанкаре не разрешима в классической постановке, то верхняя оценка для степеней неприводимых алгебраических инвариантов зависит от коэффициентов уравнений. Пример такого множества уравнений будет приведен в Разделе 3.3.

1.6 Бегущие волны для уравнения Курамото – Сивашинского и его обобщения

В качестве примера найдем все неприводимые алгебраические инварианты в переменных бегущей волны для дисперсионного уравнения Курамото – Сивашинского

$$u_\tau + u_{ssss} + \sigma u_{sss} + \alpha u_{ss} - 120 u u_s = 0 \qquad (1.50)$$

и модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского

$$u_\tau + u_{ssss} + \sigma u_{sss} + \alpha u_{ss} - 120 u^2 u_s = 0. \qquad (1.51)$$

Уравнение Курамото – Сивашинского и его обобщения встречаются в различных областях науки. Эти уравнения описывают длинные волны на границе раздела двух вязких жидкостей, длинные волны на тонких пленках, дрейфовые волны в плазме, взаимодействие нелинейных импульсов в дисперсионно–диссипативных средах, системы реакции–диффузии [83–86] и т. д.

Выполняя подстановку $u(s,\tau) = x(t) + v_0/120$, $t = s + v_0\tau$ в уравнении (1.50) и интегрируя получившееся соотношение, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$x_{ttt} + \sigma x_{tt} + \alpha x_t - 60x^2 + \beta = 0. \qquad (1.52)$$

Аналогично после подстановки $u(s,\tau) = x(t)$, $t = s + v_0\tau$ в уравнение (1.51) находим

$$x_{ttt} + \sigma x_{tt} + \alpha x_t - 40x^3 + v_0 x + \beta = 0. \qquad (1.53)$$

В этих уравнениях параметр β появился в результате интегрирования. Все параметры и независимая переменная t предполагаются комплекснозначными. При этом физический интерес в первую очередь представляют вещественнозначные ограниченные на прямой $t \in \mathbb{R}$ решения. Отметим, что локальные

$\mathcal{N}$	*Алгебраический инвариант* $F(x,y), \quad y = x_t$	*Параметры*
1	$y^3 - \frac{27\alpha^2}{5776}x^2 + (\frac{27\alpha^4}{4170272} + \frac{27\alpha}{38}x^2)y - 27x^4$ $-\frac{27\alpha^3}{54872}x^2 - \frac{27\alpha^6}{12043745536}$	$\beta = -\frac{15\alpha^3}{27436}$, $\sigma = 0$
2	$y^3 - \frac{27\alpha^2}{5776}x^2 - (\frac{729\alpha^4}{4170272} - \frac{27\alpha}{38}x^2)y - 27x^4$ $+\frac{27\alpha^3}{2888}x^2 - \frac{8019\alpha^6}{12043745536}$	$\beta = \frac{165\alpha^3}{27436}$, $\sigma = 0$
3	$y^3 + (\frac{3\sigma}{4}x + \frac{\sigma^4}{4608})y^2 + (\frac{3\sigma^2}{16}x^2 + \frac{\sigma^5}{9216}x + \frac{\sigma^8}{63700992})y$ $-27x^4 - \frac{\sigma^3}{64}x^3 + \frac{\sigma^9}{764411904}x + \frac{\sigma^{12}}{5283615080448}$	$\alpha = \frac{47\sigma^2}{144}$, $\beta = \frac{5\sigma^6}{995328}$
4	$y^3 + (\frac{3\sigma}{4}x + \frac{141\sigma^4}{1048576})y^2 + (\frac{81\sigma^2}{512}x^2 + \frac{15\sigma^5}{262144}x$ $+\frac{711\sigma^8}{137438953472})y - 27x^4 - \frac{5\sigma^3}{5124}x^3 + \frac{3\sigma^6}{134217728}x^2$ $+\frac{45\sigma^9}{137438953472}x + \frac{2133\sigma^{12}}{72057594037927936}$	$\alpha = \frac{73\sigma^2}{256}$, $\beta = \frac{135\sigma^6}{67108864}$
5	$y^3 + (\frac{3\sigma}{4}x - \frac{3\sigma^4}{5120})y^2 - 27x^4 + \frac{7\sigma^3}{320}x^3 + (\frac{3\beta}{2} - \frac{3\sigma^6}{409600})x^2$ $+(\frac{3\sigma^9}{131072000} - \frac{3\beta\sigma^3}{1280})x + \frac{\beta\sigma^6}{409600} - \frac{\beta^2}{48} - \frac{7\sigma^{12}}{167772160000}$	$\alpha = \frac{\sigma^2}{16}$

Таблица 1.1: Неприводимые алгебраические инварианты $F(x,y)$ уравнения Курамото – Сивашинского (1.50) в переменных бегущей волны.

свойства решений уравнений (1.52) и (1.53) принципиально различны. Используя методы Пенлеве, мы видим, что существуют ряды Лорана в окрестности подвижных полюсов, удовлетворяющие уравнению (1.52). Наличие этого свойства является необходимым условием существования непостоянных мероморфных точных решений для уравнения (1.52). В то же время методы, описанные в работах [42, 87–93], показывают, что уравнение (1.53) не может иметь непостоянных мероморфных решений. Мероморфные решения уравнения (1.52) были найдены Ю. Курамото (Y. Kuramoto) [83] и Н.А. Кудряшовым [94]. А. Н. В. Хон (A. N. W. Hone) обосновал единственность эллиптических решений [95]. А.Э. Еременко доказал, что уравнение (1.52) не имеет других трансцендентных мероморфных решений, кроме решений, найденных ранее Ю. Курамото (Y. Kuramoto) и Н.А. Кудряшовым [42]. В этом разделе мы покажем, что все алгебраически инвариантные решения уравнения (1.52) являются мероморф-

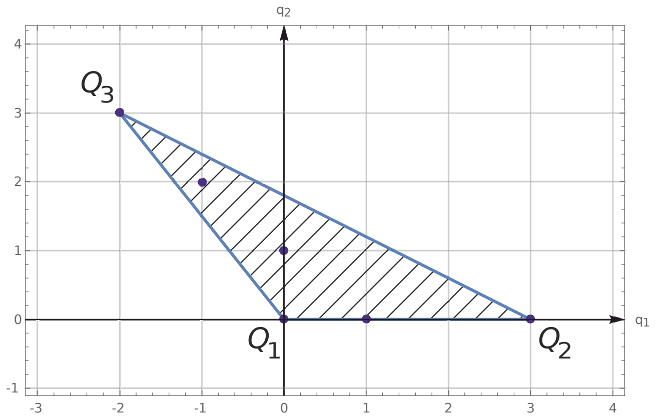


Рис. 1.2: Многоугольник Ньютона дифференциального уравнения (1.55) при $\beta \neq 0$.

ными функциями. Проблема построения точных решений уравнения (1.53) является гораздо более сложной. Ранее были найдены лишь некоторые семейства точных решений [96]. Мы проведем классификацию алгебраически инвариантных решений уравнения (1.53).

Подставляя соотношения (1.10) в уравнения (1.52) и (1.53), мы находим следующие неавтономные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$y^2 y_{xx} + y y_x^2 + \sigma y y_x + \alpha y - 60x^2 + \beta = 0, \tag{1.54}$$

$$y^2 y_{xx} + y y_x^2 + \sigma y y_x + \alpha y - 40x^3 + v_0 x + \beta = 0 \tag{1.55}$$

соответственно. Применим метод рядов Пюизе для нахождения всех неприводимых алгебраических инвариантов уравнений (1.52) и (1.53). Напомним, что алгоритмы нахождения рядов Пюизе, удовлетворяющих алгебраическим обыкновенным дифференциальным уравнениям, описаны в книгах [3, 32, 68]. Примеры построения и классификации асимптотических рядов Лорана и Пюизе приведены в работах [67, 97, 98].

Теорема 1.7. *Единственными неприводимыми алгебраическими инвариантами уравнения* (1.52) *являются многочлены, приведенные в Таблице 1.1.*

Доказательство. Будем искать доминантные балансы уравнения (1.54). Выполняя преобразование $x \mapsto x - x_0$, найдем доминантные балансы для точки $x_0 \in \mathbb{C}$. Эти балансы порождают следующие уравнения:

$$y^2 y_{xx} + y y_x^2 = 0;$$
$$y^2 y_{xx} + y y_x^2 + \beta - 60x_0^2 = 0, \quad \beta - 60x_0^2 \neq 0;$$
$$y^2 y_{xx} + y y_x^2 + \sigma y y_x + \alpha y - 120 x_0 (x - x_0) = 0, \beta - 60 x_0^2 = 0, x_0 \neq 0;$$
$$y^2 y_{xx} + y y_x^2 + \sigma y y_x + \alpha y = 0, \quad \beta = 0, \quad x_0 = 0;$$
$$\alpha y - 60x^2 = 0, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta = 0, \quad x_0 = 0;$$
$$\sigma y y_x - 60x^2 = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \sigma \neq 0, \quad x_0 = 0;$$
$$y^2 y_{xx} + y y_x^2 - 60x^2 = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \sigma = 0, \quad x_0 = 0.$$

Подставляя степенную функцию $y(x) = c_0 x^r$, где $c_0 \neq 0$, $r \in \mathbb{Q}$, в полученные уравнения, мы видим, что не существует степенных решений, для которых выполнено $r < 0$. Таким образом, для всех конечных точек $x_0 \in \mathbb{C}$ и рядов Пюизе вида (1.12), которые удовлетворяют уравнению (1.54), справедливо неравенство $n_0 \geq 0$. Из Леммы 1.3 следует, что, не ограничивая общности, многочлен $\mu(x)$ в представлении (1.14) может быть выбран в виде $\mu(x) = 1$.

Многоугольник Ньютона уравнения (1.54) приводится на Рисунке 1.5. Среди всех обобщенных граней этого многоугольника только ребру $[Q_2, Q_3]$ соответствует доминантный баланс, порождающий ряды Пюизе с центром в точке $x = \infty$. Соответствующее этому балансу уравнение уравнение и его степенные решения имеют вид

$$[Q_2, Q_3]: \quad y^2 y_{xx} + y y_x^2 - 60x^2 = 0, \quad y_{j,\infty}(x) = b_0^{(j)} x^{4/3}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.56}$$

где $b_0^{(1)}$, $b_0^{(2)}$ и $b_0^{(3)}$ являются различными корнями уравнения $b_0^3 - 27 = 0$. Вычисляя показатели Ковалевской, находим $l_{1,2} = (13 \pm \sqrt{-71})/6$. Следовательно, существуют ровно три различных ряда Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющие уравнению (1.54). Эти ряды выглядят следующим образом:

$$y_{j,\infty}(x) = b_0^{(j)} x^{\frac{4}{3}} + \sum_{l=1}^{\infty} b_l^{(j)} x^{\frac{4-l}{3}}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{1.57}$$

Используя Теорему 1.1, найдем общее представление для неприводимых алгебраических инвариантов уравнения (1.52). В результате получим

$$F(x,y) = \left\{ \prod_{j=1}^{3} \left(y - b_0^{(j)} x^{\frac{4}{3}} - o\left(x^{\frac{4}{3}}\right)\right)^{n_j} \right\}_+ . \tag{1.58}$$

Из неприводимости алгебраических инвариантов следуют равенства $n_j = 1$ или $n_j = 0$, $j = 1$, 2, 3. Поскольку все три сопряженных ряда должны присутствовать в разложении многочлена $F(x, y)$ на множители, мы приходим к единственному возможному варианту $n_j = 1$, $j = 1$, 2, 3. Далее вычислим тринадцать первых коэффициентов $b_k^{(j)}$, $1 \leq k \leq 13$ для каждого из рядов $y_{j,\infty}(x)$, $j = 1$, 2, 3. Требуя, чтобы коэффициенты при мономах $y^m x^l$, $m = 0$, 1, 2, $l < 0$, появляющихся в разложении многочлена $F(x, y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$, обращались в нуль, мы находим ограничения на параметры исходного уравнения, необходимые для существования алгебраических инвариантов. Эти ограничения приведены в третьем столбце Таблицы 1.1. Для нахождения явных выражения для алгебраических инвариантов используем формулу (1.58). Проверяя совместность уравнений (1.54) и $F(x, y(x)) = 0$, убеждаемся, что построенные алгебраические инварианты действительно существуют при найденных ограничениях. □

Алгебраически инвариантные решения, заданные алгебраическими инвариантами из Таблицы 1.1, являются мероморфными функциями. Все эти решения были найдены ранее [83, 94]. Из Теоремы 1.7 следует, что уравнение (1.52) не может иметь других алгебраически инвариантных решений.

Далее рассмотрим уравнение (1.53), возникающее как редукция модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского (1.51) к переменным бегущей волны.

$\mathcal{N}$	*Алгебраический инвариант* $F(x,y)$, $y=x_t$	*Параметры*
1	$y^3-\frac{72}{7}x^5+\frac{9v_0}{13}x^3+\frac{\sqrt{2730}v_0^{3/2}}{1690}x^2-\frac{21v_0^2}{1690}x$ $-\frac{21\sqrt{2730}v_0^{5/2}}{1098500}$	$\alpha=0,\ \beta=\frac{11\sqrt{2730}v_0^{3/2}}{15210}$, $\sigma=0$
2	$y^3-\frac{72}{7}x^5+\frac{9v_0}{13}x^3-\frac{\sqrt{2730}v_0^{3/2}}{1690}x^2-\frac{21v_0^2}{1690}x$ $+\frac{21\sqrt{2730}v_0^{5/2}}{1098500}$	$\alpha=0,\ \beta=-\frac{11\sqrt{2730}v_0^{3/2}}{15210}$, $\sigma=0$
3	$y^3-\frac{72}{7}x^5+\frac{3\sigma}{5}xy^2+(\frac{27\sigma^2}{25}x^2+\frac{672\sigma^5}{3125})y$ $-\frac{391\sigma^3}{125}x^3-\frac{672\sigma^6}{3125}x$	$\alpha=\frac{11\sigma^2}{5},\ \beta=0,$ $v_0=-\frac{21\sigma^3}{5}$
4	$y^3-\frac{72}{7}x^5+\frac{3\sigma}{5}xy^2-\frac{4\sigma^3}{125}x^3$	$\alpha=\frac{2\sigma^2}{25},\ \beta=0,$ $v_0=-\frac{8\sigma^3}{125}$
5	$y^3-\frac{72}{7}x^5+\frac{3\sigma}{5}xy^2+\frac{3\sigma^2}{25}x^2y+\frac{\sigma^3}{125}x^3$	$\alpha=\frac{71\sigma^2}{225},\ \beta=0,$ $v_0=\frac{7\sigma^3}{225}$
6	$y^3-\frac{72}{7}x^5+\frac{3\sigma}{5}xy^2+(\frac{4\sigma^2}{75}x^2+\frac{14\sigma^5}{2278125})y$ $-\frac{8\sigma^3}{3375}x^3-\frac{14\sigma^6}{102515625}x$	$\alpha=\frac{374\sigma^2}{2025},\ \beta=0,$ $v_0=-\frac{28\sigma^3}{6075}$

Таблица 1.2: Неприводимые алгебраические инварианты $F(x,y)$ модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского (1.51) в переменных бегущей волны.

Теорема 1.8. *Единственными неприводимыми алгебраическими инвариантами уравнения* (1.53) *являются многочлены, приведенные в Таблице 1.2.*

Доказательство. Действуя как и при доказательстве Теоремы 1.8, мы видим, что для всех конечных точек $x_0 \in \mathbb{C}$ и всех рядов Пюизе вида (1.12), удовлетворяющих уравнению (1.55), выполнено неравенство $n_0 \geq 0$. Используя Лемму 1.3, полагаем $\mu(x)=1$. Многоугольник Ньютона уравнения (1.55) приведен на Рисунке 1.6. Уравнение (1.55) имеет только один доминантный баланс, порождающий ряды Пюизе с центром в точке $x=\infty$. Этот баланс определяется ребром $[Q_2,Q_3]$. Соответствующее этому балансу уравнение и его степенные решения выглядят следующим образом:

$$[Q_2, Q_3]: \quad y^2 y_{xx} + y y_x^2 - 40x^3 = 0, \quad y_{j,\infty}(x) = b_0^{(j)} x^{5/3}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.59}$$

где $b_0^{(1)}$, $b_0^{(2)}$ и $b_0^{(3)}$ – различные корни алгебраического уравнения $7b_0^3 - 72 = 0$. Показатели Ковалевской $l_{1,2} = (17 \pm \sqrt{-131})/6$ являются комплекснозначными. Существует ровно три различных ряда Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющих уравнению (1.55). Эти ряды имеют вид

$$y_{j,\infty}(x) = b_0^{(j)} x^{\frac{5}{3}} + \sum_{l=1}^{\infty} b_l^{(j)} x^{\frac{5-l}{3}}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{1.60}$$

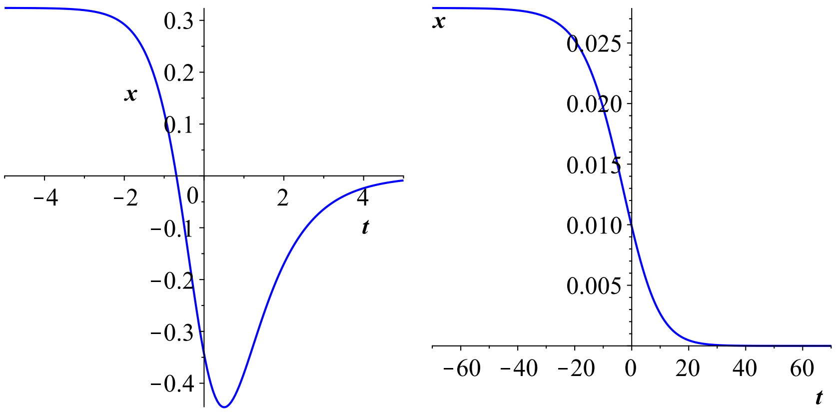
Теорема 1.1 позволяет записать общее представление для неприводимых алгебраических инвариантов уравнения (1.52). В результате получаем соотношение

$$F(x, y) = \left\{ \prod_{j=1}^{3} \left(y - b_0^{(j)} x^{\frac{5}{3}} - o\left(x^{\frac{5}{3}}\right) \right)^{n_j} \right\}_+ . \tag{1.61}$$

Как в случае уравнения (1.54), необходимо положить $n_j = 1$, $j = 1, 2, 3$. Далее составляем алгебраическую систему, требуя, чтобы коэффициенты при мономах $y^m x^l$, $m = 0, 1, 2$, $l < 0$, появляющихся в разложении многочлена $F(x, y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$, обращались в нуль. В результате решения алгебраической подсистемы находим ограничения на параметры исходного уравнения, необходимые для существования алгебраических инвариантов. Эти ограничения приведены в третьем столбце Таблицы 1.2. Явные выражения для алгебраических инвариантов могут быть получены с помощью формулы (1.58). В заключение проверяем совместность уравнений (1.55) и $F(x, y(x)) = 0$ при найденных ограничениях.

$\square$

Проинтегрируем обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, порождаемые алгебраическими инвариантами из Таблицы 1.2. Род соответствующих алгебраических кривых равен нулю. Опишем метод нахождения алгебраически инвариантных решений в таком случае. Известно, что



(a) Решение (1.62) при $\sigma = -1$ (b) Решение (1.64) при $\sigma = 1$

Рис. 1.3: Алгебраически инвариантные бегущие волны для модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского (1.51).

любая алгебраическая кривая $F(x, y) = 0$, $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}[x]$ нулевого рода имеет рациональные параметризации [66]. Другими словами, существуют непостоянные функции $X(s)$, $Y(s) \in \mathbb{C}(s)$ такие, что подстановка $x = X(s)$ и $y = Y(s)$ в уравнение $F(x, y) = 0$ обращает его в тождество. Символом $\mathbb{C}(s)$ мы обозначили поле рациональных функций над $\mathbb{C}$. Возьмем такую параметризацию. Далее положим $s = s(t)$ и найдем общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $X_s(s)s_t - Y(s) = 0$. Это уравнение является прямым следствием соотношений $y = x_t(t)$ и $x = x(t)$. Алгебраически инвариантные решения можно представить в виде $x(t) = X(s(t))$, где $s(t)$ – общее решение уравнения $X_s(s)s_t - Y(s) = 0$. Отметим, что получение явного представления для функции $s(t)$ может оказаться затруднительным. В этом случае удобно поменять роли переменных s и t. Будем считать переменную s независимой, а переменную t – зависимой. Для того чтобы найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Y(s)t_s - X_s(s) = 0$, необходимо проинтегрировать рациональную функцию $X_s(s)/Y(s)$. В результате мы можем получить параметрическое представление для алгебраически инвариантного решения $x(t)$: $x = X(s)$, $t = t(s)$.

Будем использовать описанный выше алгоритм для нахождения алгебраически инвариантных решений модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского в переменных бегущей волны (1.53). В случае $\beta = 0$ находим

$$\alpha = \frac{11\sigma^2}{5} : u(s,\tau) = \frac{\sqrt{-42\sigma^3}\exp(\sigma t)\{\exp(2\sigma t) - 4\}}{20\{\exp(2\sigma t) + 1\}^{3/2}}, t = s - \frac{21\sigma^3}{5}\tau; \quad (1.62)$$

$$\alpha = \frac{2\sigma^2}{25} : \quad u(s,\tau) = \frac{\sqrt{-210\sigma^3}\exp\left(\frac{\sigma t}{5}\right)}{100\left\{\exp\left(\frac{2\sigma t}{5}\right) + 1\right\}^{3/2}}, \quad t = s - \frac{8\sigma^3}{125}\tau; \quad (1.63)$$

$$\alpha = \frac{71\sigma^2}{225} : \quad u(s,\tau) = \frac{\sqrt{70}\sigma^{3/2}}{30\left\{\exp\left(\frac{2\sigma t}{15}\right) + 1\right\}^{3/2}}, \quad t = s + \frac{7\sigma^3}{225}\tau; \quad (1.64)$$

$$\alpha = \frac{374\sigma^2}{2025} : u(s,\tau) = \frac{\sqrt{-210\sigma^3}\exp\left(\frac{\sigma t}{45}\right)\left\{2\exp\left(\frac{2\sigma t}{45}\right) + 3\right\}}{2700\left\{\exp\left(\frac{2\sigma t}{45}\right) + 1\right\}^{3/2}}, t = s - \frac{28\sigma^3}{6075}\tau. \quad (1.65)$$

В этих выражениях могут быть взяты оба знака для корней. Произвольная постоянная $t_0 \in \mathbb{C}$, связанная с инвариантностью уравнения (1.53) относительно преобразования $t \mapsto t - t_0$, опущена. Решения (1.62), (1.63) и (1.65) вещественнозначны и ограничены на прямой $t \in \mathbb{R}$, если $\sigma < 0$. В то же время решение (1.64) вещественнозначно и ограничено на прямой $t \in \mathbb{R}$ при выполнении условия $\sigma > 0$. Графики построенных решений приводятся на Рисунке 5.3. Алгебраически инвариантные решения модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского в случае $\alpha = 0$, $\sigma = 0$, $\beta \neq 0$ и $v_0 \in \mathbb{R}$ не являются вещественнозначными и ограниченными на прямой $t \in \mathbb{R}$. Мы не будем приводить эти решения в явном виде.

Точные решения в переменных бегущей волны для модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского в случаях $(\alpha, \beta) = (2\sigma^2/25, 0)$ и $(\alpha, \beta) = (71\sigma^2/225, 0)$ были найдены в работе [96]. Решения, соответствующие другим алгебраическим инвариантам из Таблицы 1.2, по-видимому, приводятся впервые.

Заметим, что мы не получили ограничений на скорость бегущих волн в случае уравнения Курамото – Сивашинского (1.50). Другими словами, параметр v_0 является произвольным. Напомним, что скорость v_0 появляется в решениях посредством соотношений $u(s,\tau) = x(t) + v_0/120$, $t = s + v_0\tau$. При этом в случае модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского (1.51) алгебраически инвариантные решения существуют лишь при определенных ограничениях на скорость бегущих волн. Эти ограничения приведены в Таблице 1.8, где для удобства мы выразили параметр β через v_0 для первых двух алгебраических инвариантов и соответствующих решений. Но на самом деле мы можем представить параметр β как функцию скорости v_0.

Другие примеры применения метода рядов Пюизе для уравнений (1.9) порядков выше второго будут приведены в Разделах 5.5 и 5.6.

2 Инвариантные алгебраические кривые и интегрируемость двумерных автономных полиномиальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

2.1 Интегрируемость по Дарбу и Лиувиллю

В этом разделе нас будет интересовать следующая задача: найти все значения параметров, при которых заданная многопараметрическая система дифференциальных уравнений вида (1.1) имеет первый интеграл, представляющий собой функцию Дарбу или функцию Лиувилля, и построить эти первые интегралы в явном виде. Далее символом D обозначим открытое подмножество в $\mathbb{C}^2$, имеющее ненулевую меру Лебега.

Определение 2.1. *Непостоянную функцию* $I(x, y)$*:* $D \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *называют первым интегралом системы дифференциальных уравнений* (1.1) *и связанного с системой векторного поля* $\mathcal{X}$ *на* $D \subset \mathbb{C}^2$*, если эта функция постоянна на всех интегральных кривых* $(x(t), y(t))$ *системы, содержащихся в* D*.*

Пусть функция $I(x, y)$ принадлежит множеству непрерывно дифференцируемых на D функций $C^1(D)$. Несложно убедиться, что $I(x, y)$ является первым интегралом системы (1.1) тогда и только тогда, когда эта функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка $\mathcal{X}I = 0$.

Определение 2.2. *Функцию* $M(x,y)\colon D \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ *называют интегрирующим множителем (последним множителем Якоби) системы дифференциальных уравнений* (1.1) *и связанного с этой системой векторного поля* $\mathcal{X}$ *на* $D \subset \mathbb{C}^2$*, если дифференциальная форма* $M(x,y)(P(x,y)dy - Q(x,y)dx)$ *является точной в* D*. Другими словами, существует функция* $I(x,y)$ *из множества* $C^1(D)$ *такая, что выполнено следующее соотношение:* $M(x,y)(P(x,y)dy - Q(x,y)dx) = dI(x,y)$*.*

Если интегрирующий множитель $M(x,y)$ принадлежит множеству $C^1(D)$, то функция $M(x,y)$ является решением линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка $\mathcal{X}M = -\operatorname{div}\mathcal{X}M$, где символом $\operatorname{div}\mathcal{X}$ обозначена дивергенция векторного поля $\mathcal{X}$: $\operatorname{div}\mathcal{X} = P_x + Q_y$.

Хорошо известно, что в некоторой окрестности неособой точки система (1.1) и векторное поле $\mathcal{X}$ всегда имеют голоморфный первый интеграл. С геометрической точки зрения векторное поле $\mathcal{X}$ можно выпрямить в окрестности неособой точки [99,100]. Существование формальных и аналитических первых интегралов в окрестностях особых точек может быть изучено с помощью теории нормальных форм, предложенной А. Пуанкаре (H. Poincaré). Существенный вклад в развитие теории нормальных форм внесли А. Дюлак (H. Dulac) [101], А. Д. Брюно [102]. Некоторые современные обобщения представлены в книге [36], см. также [100]. Однако, эти результаты носят локальный характер и, как правило, не могут быть непосредственно использованы для построения глобальных первых интегралов в явном виде, если последние существуют на $D \subset \mathbb{C}^2$.

Дадим определение функции Лиувилля [7,16]. Дифференциальным полем (K, Δ) будем называть поле функций K характеристики нуль и множество коммутирующих операторов дифференцирования $\Delta = \{\delta_j\}$, определенных на K. Элементы $s \in K$ такие, что $\forall \delta \in \Delta \Rightarrow \delta s = 0$ образуют подполе, называем полем констант $C(K, \Delta)$.

Расширение дифференциального поля (K, Δ) определяется как дифференциальное поле $(\tilde{K}, \tilde{\Delta})$, для которого выполнены следующие свойства: $K \subset \tilde{K}$ и $\forall \tilde{\delta} \in \tilde{\Delta} \Rightarrow \tilde{\delta}|_K \in \Delta$. Символом $\tilde{K}/K$ обозначим дифференциальное расширение $(\tilde{K}, \tilde{\Delta})$ дифференциального поля (K, Δ). Рассмотрим дифференциальное расширение $\tilde{K}/K$. Элемент $s \in \tilde{K}$ называют алгебраическим элементом над K, если существует ненулевой многочлен w с коэффициентами из K такой, что $w(s) = 0$. В противном случае элемент $s \in \tilde{K}$ называют трансцендентным элементом над K. В свою очередь, расширение $\tilde{K}/K$ называют алгебраическим, если любой элемент $\tilde{K}$ алгебраичен над K. Пусть s является элементом дифференциального поля $\tilde{K}$. Символом $K(s)$ обозначим минимальное дифференциальное поле, содержащее K и s.

Далее будем предполагать, что $\Delta = \tilde{\Delta}$. Расширение L/K является расширением Лиувилля дифференциального поля (K, Δ), если существует конечная последовательность дифференциальных полей $K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_M = L$ такая, что $K_{j+1} = K_j(s)$ и выполнено одно из следующих условий:

1. s является алгебраическим элементом над K_j;
2. s является трансцендентным элементом над K_j, таким что $\forall \delta \in \Delta \Rightarrow \delta s \in K_j$;
3. s является трансцендентным элементом над K_j, таким что $\forall \delta \in \Delta \Rightarrow \dfrac{\delta s}{s} \in K_j$.

В качестве начального поля K выберем поле рациональных функций $K = \mathbb{C}(x, y)$ с обычными операторами дифференцирования $\Delta = \{\partial_x, \partial_y\}$. Рассмотрим расширение Лиувилля L/K этого дифференциального поля, такое что $C(L, \Delta) = \mathbb{C}$. Любой элемент поля L будем называть *функцией Лиувилля.*

Функция $G(x, y)$ называется *функцией Дарбу*, если ее можно представить в виде

$$G(x, y) = F_1^{d_1}(x, y) \ldots F_r^{d_r}(x, y) \exp\{R(x, y)\}, \tag{2.1}$$

где $F_1(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, …, $F_r(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, $R(x,y) \in \mathbb{C}(x,y)$, $d_1,\ldots,d_r \in \mathbb{C}$. Любая функция Дарбу является функцией Лиувилля. Обратное, вообще говоря, неверно.

Будем говорить, что система (1.1) и соответствующее ей векторное поле $\mathcal{X}$ *интегрируемы по Дарбу (Лиувиллю)*, если существует $D \subset \mathbb{C}^2$, такое что система (1.1) и векторное поле $\mathcal{X}$ имеют на $D \subset \mathbb{C}^2$ первый интеграл, являющийся функцией Дарбу (Лиувилля). Подобные первые интегралы будем называть первыми интегралами Дарбу (Лиувилля).

Рассматривая элементарные расширения поля рациональных функций $\mathbb{C}(x,y)$, мы можем определить элементарные первые интегралы. Элементарные расширения строятся аналогично расширениям Лиувилля. В данном случае мы добавляем алгебраические элементы или трансцендентные элементы, являющиеся результатом действия экспоненциальной или логарифмической функций на элементы полей предыдущих шагов [7]. Существует метод построения элементарных первых интегралов, называемый методом Прелля–Зингера [103]. Этот метод позволяет находить элементарный первый интеграл или доказывать его отсутствие для заданной системы вида (1.1), если известна оценка сверху для степеней неприводимых инвариантных алгебраических кривых. Поскольку любая элементарная функция является функцией Лиувилля, мы не будем отдельно рассматривать элементарные первые интегралы. Однако, ввиду физической значимости, мы будем выделять первые интегралы Дарбу в классе первых интегралов Лиувилля. При достаточно общих предположениях система (1.1), интегрируемая с элементарным первым интегралом, также имеет и первый интеграл Дарбу [104].

Исследование интегрируемости по Дарбу и Лиувиллю системы дифференциальных уравнений (1.1) и связанного с ней векторного поля $\mathcal{X}$ может быть сведено к задаче построения всех неприводимых инвариантных алгебраических кривых и всех экспоненциальных инвариантов с линейно независимыми собственными значениями [16, 17]. Далее подробно рассмотрим эту теорию, известную как теорию интегрируемости Дарбу.

Определение инвариантной алгебраической кривой было дано в Разделе 1.1. Многочлены, задающие инвариантные алгебраические кривые, будем называть алгебраическими инвариантами в соответствии с терминологией Раздела 1.2. Заметим, что теперь многочлены, не зависящие от переменной y, также могут являться алгебраическими инвариантами. Собственное значение $\lambda(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ инвариантной алгебраической кривой $F(x,y)=0$ будем называть собственным значением соответствующего алгебраического инварианта $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$. Лемма 1.1 позволяет сделать следующий вывод. Объединение множества всех существующих одновременно алгебраических инвариантов некоторой системы дифференциальных уравнений (1.1) и множества $\mathbb{C}$ образует коммутативную полугруппу относительно умножения.

Определение 2.3. *Функцию* $E(x,y) = \exp[g(x,y)/f(x,y)]$*, где* $g(x,y)$ *и* $f(x,y)$ *взаимно простые многочлены из кольца* $\mathbb{C}[x,y]$*, будем называть экспоненциальным инвариантом системы дифференциальных уравнений* (1.1) *и связанного с ней векторного поля* $\mathcal{X}$*, если выполнено условие* $\mathcal{X}E = \varrho(x,y)E$*, где* $\varrho(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$*.*

Многочлен $\varrho(x,y)$ называют *собственным значением (кофактором)* экспоненциального инварианта $E(x,y)$. Несложно убедиться в том, что произведение экспоненциальных инвариантов $E_1(x,y)$ и $E_2(x,y)$ с собственными значениями $\varrho_1(x,y)$ и $\varrho_2(x,y)$ соответственно является также экспоненциальным инвариантом, собственное значение которого равно $\varrho(x,y) = \varrho_1(x,y) + \varrho_2(x,y)$. В рамках теории интегрируемости можно рассматривать только такие экспоненциальные инварианты, для которых степень собственного значения $\varrho(x,y)$ не превосходит числа $d-1$, см. [18, 35]. Известно, что многочлен $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}$, стоящий в знаменателе экспоненциального инварианта $E(x,y) = \exp[g(x,y)/f(x,y)]$ системы дифференциальных уравнений (1.1) и связанного с ней векторного поля $\mathcal{X}$, является алгебраическим инвариантом рассматриваемой системы и векторного поля [17]. Более того, экспоненциальный инвариант $E(x,y) = \exp[g(x,y)/f(x,y)]$ по своему смыслу представляет собой кратный алгебраический инвариант. Действительно, предположим, что исследуемая система имеет два алгебраических инварианта вида $f(x,y) = 0$ и $f(x,y) + \varepsilon g(x,y) = 0$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$. Тогда мы находим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{f(x,y) + \varepsilon g(x,y)}{f(x,y)} \right]^{\frac{1}{\varepsilon}} = \exp \left[\frac{g(x,y)}{f(x,y)} \right]. \tag{2.2}$$

Некоторые дополнительные аспекты понятия кратности для алгебраических инвариантов и соответствующих инвариантных алгебраических кривых рассмотрены в работе [75].

Следующие теоремы лежат в основе современной теории интегрируемости Дарбу.

Теорема 2.1. *Полиномиальная система дифференциальных уравнений* (1.1) *и соответствующее векторное поле $\mathcal{X}$ интегрируемы по Дарбу тогда и только тогда, когда они имеют рациональный интегрирующий множитель.*

Необходимость существования рационального интегрирующего множителя [105] была установлена Дж. Чаваррригой (J. Chavarriga) с соавторами. Обратное утверждение [104] было доказано К. Кристофером (C. Christopher) с соавторами.

Теорема 2.2. *Полиномиальная система дифференциальных уравнений* (1.1) *и соответствующее векторное поле $\mathcal{X}$ интегрируемы по Лиувиллю тогда и только тогда, когда они имеют интегрирующий множитель, являющийся функцией Дарбу.*

Доказательство Теоремы 2.2 было проведено [16] М.Ф. Зингером (M.F. Singer).

Теорема 2.3. *Полиномиальная система дифференциальных уравнений* (1.1) *и соответствующее векторное поле* $\mathcal{X}$ *имеют первый интеграл Дарбу*

$$I(x,y)=\prod_{j=1}^{K}F_j^{d_j}(x,y)\exp\left\{\frac{S(x,y)}{T(x,y)}\right\},\quad d_1,\,\ldots,\,d_K\in\mathbb{C},\tag{2.3}$$

где $F_1(x,y)$, $\ldots$, $F_K(x,y)$ *– взаимно простые неприводимые многочлены из кольца* $\mathbb{C}[x,y]$, $S(x,y)$ *и* $T(x,y)$ *– взаимно простые многочлены из кольца* $\mathbb{C}[x,y]$, *тогда и только тогда, когда функция* $E(x,y)=\exp\{S(x,y)/T(x,y)\}$ *является экспоненциальным инвариантом системы* (1.1) *и многочлены* $F_1(x,$ $y)$, $\ldots$, $F_K(x,y)$ *являются алгебраическими инвариантами системы* (1.1) *такими, что тождественно выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{K}d_j\lambda_j(x,y)+\varrho(x,y)=0.\tag{2.4}$$

В этом выражении $\lambda_j(x,y)$ *– это собственное значение алгебраического инварианта* $F_j(x,y)$ *и* $\varrho(x,y)$ *– это собственное значение экспоненциального инварианта* $E(x,y)$.

Теорема 2.3 является следствием классической теории интегрируемости Дарбу, см. [3, 36, 106].

Теорема 2.4. *В предположениях Теоремы 2.3 функция Дарбу*

$$M(x,y)=\prod_{j=1}^{K}F_j^{d_j}(x,y)\exp\left\{\frac{S(x,y)}{T(x,y)}\right\},\quad d_1,\,\ldots,\,d_K\in\mathbb{C}\tag{2.5}$$

представляет собой интегрирующий множитель полиномиальной системы дифференциальных уравнений (1.1) *и соответствующего векторного поля* $\mathcal{X}$ *тогда и только тогда, когда функция* $E(x,y)=\exp\{S(x,y)/T(x,y)\}$ *является экспоненциальным инвариантом системы* (1.1) *и многочлены* $F_1(x,$ $y)$, $\ldots$, $F_K(x,y)$ *являются алгебраическими инвариантами системы* (1.1) *такими, что тождественно выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{K}d_j\lambda_j+\varrho(x,y)=-\mathrm{div}\mathcal{X}.\tag{2.6}$$

Теорема 2.4 была доказана [17] К. Кристофером (C. Christopher). На основе приведенных выше теорем был разработан следующий метод решения проблемы интегрируемости по Дарбу и Лиувиллю для заданной системы (1.1) и векторного поля $\mathcal{X}$:

1. на первом шаге необходимо построить все взаимно простые неприводимые алгебраические инварианты и все экспоненциальные инварианты с линейно независимыми собственными значениями;
2. на втором шаге необходимо найти или доказать отсутствие комплексных чисел d_1, …, d_K таких, что тождественно выполнено условие (2.4) или (2.6); многочлен $\varrho(x, y)$, появляющийся в соотношениях (2.4) и (2.6), равен сумме собственных значений экспоненциальных инвариантов, найденных на первом шаге.

Отметим, что в научной литературе существуют оценки для числа попарно различных инвариантов, обеспечивающих существование рациональных первых интегралов, а также первых интегралов Дарбу и Лиувилля [19, 36, 52].

Первый шаг этого алгоритма является чрезвычайно сложным вследствие отсутствия универсального решения проблемы Пуанкаре. Далее покажем, что метод рядов Пюизе делает первый шаг более простым и наглядным. Более того, явное представление для собственных значений инвариантных алгебраических кривых, которое будет получено в Теореме 2.5, для многих дифференциальных систем позволяет проводить классификацию инвариантов не в общем случае, а при определенных ограничениях на параметры систем.

Используя алгебраическую замкнутость поля рядов Пюизе $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, найдем общее представление в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ для многочленов, задающих инвариантные алгебраические кривые и их собственные значения. Несложно убедиться, что область определения операторов проектирования $\{S(x, y)\}_+$ и

$\{S(x,y)\}_-$ может быть расширена на кольцо рядов Пюизе с центром в точке $y=\infty$, коэффициенты которых принадлежат полю $\mathbb{C}_\infty\{x\}$. Обозначим это кольцо символом $\mathbb{C}_\infty\{x\}[\{y\}]$. Таким образом, справедливо соотношение $\{S(x,y)\}_+ \in \mathbb{C}[x,y]$, где $S(x,y) \in \mathbb{C}_\infty\{x\}[\{y\}]$.

Теорема 2.5. *Пусть неприводимый многочлен* $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}[x]$ *определяет инвариантную алгебраическую кривую* $F(x,y)=0$ *полиномиальной системы дифференциальных уравнений* (1.1) *и векторного поля* $\mathcal{X}$. *Тогда многочлен* $F(x,y)$ *и собственное значение* $\lambda(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ *инварианта* $F(x,y)$ *имеют вид*

$$F(x,y) = \left\{\mu(x)\prod_{j=1}^{N}\{y-y_{j,\infty}(x)\}\right\}_+, \tag{2.7}$$

$$\lambda(x,y) = \left\{P(x,y)\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{L}\frac{\nu_l(x_l)^m}{x^{m+1}} + \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{N}\frac{\{Q(x,y)-P(x,y)\partial_x y_{j,\infty}\}(y_{j,\infty})^m}{y^{m+1}}\right\}_+, \tag{2.8}$$

где $y_{1,\infty}(x)$, …, $y_{N,\infty}(x)$ *– попарно различные ряды Пюизе из поля* $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, *удовлетворяющие уравнению* (1.4), x_1, …, x_L *– попарно различные нули многочлена* $\mu(x) \in \mathbb{C}[x]$ *с кратностями* ν_1, …, $\nu_L \in \mathbb{N}$ *соответственно и* $L \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Кроме того, степень многочлена* $F(x,y)$ *относительно переменной* y *не превосходит числа различных рядов Пюизе из* $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, *удовлетворяющих уравнению* (1.4), *если это число конечно. Пусть* $\mu(x)=\mu_0$, *где* $\mu_0 \in \mathbb{C}$, *тогда* $L=0$ *и первый ряд отсутствует в выражении для собственного значения* $\lambda(x,y)$.

Доказательство. Представление (2.7) для многочлена $F(x,y)$, определяющего инвариантную алгебраическую кривую $F(x,y)=0$, получено в Теореме 1.1. Нам нужно вывести только соотношение (2.8). Рассмотрим разложение на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ многочлена $F(x,y)$:

$$F(x,y) = \mu(x)\prod_{j=1}^{N}\{y-y_{j,\infty}(x)\}. \tag{2.9}$$

В свою очередь, разложим на множители многочлен $\mu(x) \in \mathbb{C}[x]$:

$$\mu(x) = \prod_{l=1}^{L} (x - x_l)^{\nu_l}, \quad \nu_l \in \mathbb{N}, \quad L \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{2.10}$$

Если выполнено $\mu(x) = \mu_0$, где $\mu_0 \in \mathbb{C}$, то положим $L = 0$. Из соотношения (2.9) находим равенства

$$\frac{\partial_x F}{F} = \frac{\partial_x \mu}{\mu} - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial_x y_{j,\infty}}{y - y_{j,\infty}}, \quad \frac{\partial_y F}{F} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{y - y_{j,\infty}}. \tag{2.11}$$

Разложим логарифмические производные $\partial_x \ln F$ и $\partial_y \ln F$ в ряды Лорана в окрестности точки $y = \infty$. Подставляя получившиеся выражения в уравнение в частных производных $\mathcal{X}F(x, y) = \lambda(x, y)F(x, y)$, находим

$$\lambda(x, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{N} \frac{\{Q(x, y) - P(x, y)\partial_x y_{j,\infty}\}(y_{j,\infty})^m}{y^{m+1}} + P(x, y) \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{l=1}^{L} \frac{\nu_l (x_l)^m}{x^{m+1}},$$

где логарифмическая производная

$$\partial_x \ln \mu = \sum_{l=1}^{L} \frac{\nu_l}{x - x_l} \tag{2.12}$$

также разложена в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$. Далее вспоминаем, что собственное значение $\lambda(x, y)$ является многочленом из кольца $\mathbb{C}[x, y]$. В результате приходим к соотношению (2.8).

□

Заметим, что переменные x и y в Теореме 2.5 можно поменять ролями. Кроме того, представления (2.7) и (2.8) для многочленов, задающих инвариант и его собственное значение, остаются справедливыми, если убрать требование неприводимости. В этом случае в соответствующих представлениях могут появляться совпадающие ряды Пюизе.

Из Теорем 2.1–2.4 мы видим, что выражение (2.8) для собственного значения инварианта, полученное в Теореме 2.5, чрезвычайно важно для теории интегрируемости. Это связано с тем, что до явного нахождения инвариантов подстановка выражения вида (2.8) в соотношения (2.4) или (2.6) позволяет находить необходимые условия интегрируемости по Дарбу или Лиувиллю. Соответственно, инварианты можно классифицировать не в общем случае, а при найденных условиях.

Далее рассмотрим задачу нахождения экспоненциальных инвариантов. Получим некоторые полезные необходимые условия существования экспоненциальных инвариантов с неполиномиальными аргументами.

Теорема 2.6. *Пусть многочлен $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}[x]$ определяет инвариантную алгебраическую кривую $f(x, y) = 0$ с собственным значением $\lambda(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ системы дифференциальных уравнений* (1.1) *и векторного поля $\mathcal{X}$. Если существует многочлен $g(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ взаимно простой с многочленом $f(x, y)$ такой, что данная система и векторное поле имеют экспоненциальный инвариант $E = \exp(g/f)$, то для каждого непостоянного ряда Пюизе $y_{j,\infty}(x)$ из поля $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$, удовлетворяющего уравнению $f(x, y) = 0$, существует число $q \in \mathbb{Q}$ такое, что формальное разложение в ряд Пюизе с центром в точке $x = \infty$ для функции $\lambda(x, y_{j,\infty}(x))/P(x, y_{j,\infty}(x))$ имеет вид*

$$\frac{\lambda(x, y_{j,\infty}(x))}{P(x, y_{j,\infty}(x))} = \sum_{k=n}^{+\infty} b_k x^{-\frac{k}{n}}, \quad b_n = q. \tag{2.13}$$

Доказательство. Подставляя функцию $E = \exp(g/f)$ в уравнение в частных производных $\mathcal{X}E(x, y) = \varrho(x, y)E(x, y)$ и учитывая равенство $\mathcal{X}f(x, y) = \lambda(x, y)f(x, y)$, мы находим соотношение

$$P g_x + Q g_y = \lambda g + \varrho f. \tag{2.14}$$

Напомним, что символом O_{∞} мы обозначаем нулевой элемент поля $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$. Далее рассмотрим ряд Пюизе $G(x) = g(x, y_{j,\infty}(x))$, полученный подстановкой ряда $y = y_{j,\infty}(x)$ в многочлен $g(x, y)$. В силу взаимной простоты многочленов

$f(x,y)$ и $g(x,y)$ справедливо условие $G(x)\neq O_\infty$. Поскольку ряд $y_{j,\infty}(x)$ удовлетворяет уравнениям (1.4) и $f(x,y_{j,\infty}(x))=0$, мы получаем систему

$$P(x,y_{j,\infty}(x))g_x(x,y_{j,\infty}(x))+Q(x,y_{j,\infty}(x))g_y(x,y_{j,\infty}(x))=\lambda(x,y_{j,\infty}(x))G(x),$$
$$g_x(x,y_{j,\infty}(x))+(y_{j,\infty})_x g_y(x,y_{j,\infty}(x))=\frac{dG(x)}{dx}$$

Рассматривая эти уравнения как линейную неоднородную систему по отношению к переменным $g_x(x,y_{j,\infty}(x))$ и $g_y(x,y_{j,\infty}(x))$, мы видим, что ее определитель равен нулю. В результате мы приходим к уравнению

$$P(x,y_{j,\infty}(x))\frac{dG}{dx}-\lambda(x,y_{j,\infty}(x))G(x)=0. \tag{2.15}$$

Выберем открытое связное подмножество в области сходимости ряда Пюизе, полученного подстановкой ряда $y_{j,\infty}(x)$ в функцию $\lambda(x,y)\;/P(x,y)$, такое, что соответствующий ряд сходится равномерно. Решая уравнение (2.15) на этом подмножестве, находим

$$G(x)=\exp\left[\int\frac{\lambda(x,y_{j,\infty}(x))}{P(x,y_{j,\infty}(x))}dx\right]. \tag{2.16}$$

Отметим, что справедливо условие $P(x,y_{j,\infty}(x))\neq O_\infty$. Действительно, предполагая противное $P(x,y_{j,\infty}(x))=O_\infty$, мы получаем равенство $Q(x,y_j(x))=O_\infty$, которое противоречит взаимной простоте многочленов $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Поскольку $G(x)$ в выражении (2.16) является рядом Пюизе с центром в точке $x=\infty$, мы находим требуемое представление.

□

Теорема 2.6 будет использована в Разделе 3.2 при доказательстве отсутствия экспоненциальных инвариантов для полиномиальных дифференциальных систем Льенара в нерезонансном случае.

В связи с нашим подходом необходимо отметить интересное исследование [107], проведенное А. Гориэли (A. Goriely). В отмеченной работе существование алгебраических первых интегралов связывается с рядами Пюизе, удовлетворяющими исходной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.2 Неавтономные первые интегралы Дарбу и последние множители Якоби с зависящим от времени экспоненциальным множителем

Изучение автономных первых интегралов и автономных интегрирующих множителей может ограничивать общность рассмотрения, даже если исходная система дифференциальных уравнений автономна. Неавтономные первые интегралы в общем случае будут исследоваться в Разделе 4, где даются все необходимые определения. Целью настоящего раздела является исследование проблемы нахождения неавтономных первых интегралов и неавтономных интегрирующих множителей специального вида.

Пусть $D \subset \mathbb{C}^3$ является открытым подмножеством в $\mathbb{C}^3$, имеющем ненулевую меру Лебега. Непостоянная функция $I(x, y, t)$: $D \to \mathbb{C}$ называется *неавтономным первым интегралом* системы (1.1) и векторного поля $\mathcal{X}$, если она постоянна на всех интегральных кривых $(x(t), y(t), t)$ неавтономного векторного поля $\partial_t + \mathcal{X}$, лежащих в D. Неавтономный первый интеграл $I(x, y, t)$ из множества $C^1(D)$ удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению в частных производных $(\partial_t + \mathcal{X})I = 0$. *Неавтономным интегрирующим множителем (или последним множителем Якоби)* системы (1.1) и векторного поля $\mathcal{X}$ называют функцию $M(x, y, t) : D \to \mathbb{C}$ из множества $C^1(D)$, удовлетворяющую линейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$M_t + \mathcal{X}M = -\mathrm{div}\mathcal{X}M. \tag{2.17}$$

Здесь символом $\mathrm{div}\mathcal{X}$ мы опять обозначили дивергенцию векторного поля $\mathcal{X}$: $\mathrm{div}\mathcal{X} = P_x + Q_y$. Далее покажем, что существование неавтономных первых интегралов и последних множителей Якоби вида $G(x,y)\exp(\omega t)$, где $G(x,y)$ – функция Дарбу и $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, тесно связано с существованием и свойствами инвариантов системы.

Теорема 2.7. *Полиномиальная система дифференциальных уравнений* (1.1) *и соответствующее векторное поле* $\mathcal{X}$ *имеют неавтономный первый интеграл вида*

$$I(x,y,t) = \prod_{j=1}^{K} F_j^{d_j}(x,y) \exp\left\{\frac{S(x,y)}{R(x,y)}\right\} \exp(\omega t), \quad \omega, d_1, \ldots, d_K \in \mathbb{C}, \quad (2.18)$$

где $F_1(x,y), \ldots, F_K(x,y)$ *– взаимно простые неприводимые многочлены из кольца* $\mathbb{C}[x,y]$, $S(x,y)$ *и* $T(x,y)$ *– взаимно простые многочлены из кольца* $\mathbb{C}[x,y]$, *тогда и только тогда, когда функция* $E(x,y) = \exp\{S(x,y)/T(x,y)\}$ *является экспоненциальным инвариантом системы* (1.1) *и многочлены* $F_1(x,y), \ldots, F_K(x,y)$ *являются алгебраическими инвариантами системы* (1.1) *такими, что тождественно выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{K} d_j \lambda_j(x,y) + \varrho(x,y) + \omega = 0. \quad (2.19)$$

В этом выражении $\lambda_j(x,y)$ *– это собственное значение алгебраического инварианта* $F_j(x,y)$ *и* $\varrho(x,y)$ *– это собственное значение экспоненциального инварианта* $E(x,y)$.

Эта теорема при ограничении $\omega = 0$ становится Теоремой 2.3. Доказательство Теоремы 2.7 аналогично доказательству Теоремы 2.8, которое будет дано ниже.

Теорема 2.8. *В предположениях Теоремы 2.7 функция Дарбу с зависящим от времени экспоненциальным множителем*

$$M(x,y,t) = \prod_{j=1}^{K} F_j^{d_j}(x,y) \exp\left\{\frac{S(x,y)}{R(x,y)}\right\} \exp(\omega t), \quad \omega,\ d_1, \ldots, d_K \in \mathbb{C} \quad (2.20)$$

представляет собой последний множитель Якоби полиномиальной системы дифференциальных уравнений (1.1) *и соответствующего векторного поля* $\mathcal{X}$ *тогда и только тогда, когда функция* $E(x, y) = \exp\{S(x, y)/T(x, y)\}$ *является экспоненциальным инвариантом системы* (1.1) *и многочлены* $F_1(x, y)$, …, $F_K(x, y)$ *являются алгебраическими инвариантами системы* (1.1) *такими, что тождественно выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{K} d_j \lambda_j(x, y) + \varrho(x, y) + \omega = -\mathrm{div}\mathcal{X}. \tag{2.21}$$

Доказательство. Достаточность условий теоремы проверяется непосредственной подстановкой выражений (2.20) и (2.21) в уравнение в частных производных (2.17) для последнего множителя Якоби.

Установим необходимость. Пусть функция $M(x, y, t)$, определяемая выражением (2.20), является последним множителем Якоби системы (1.1). Подставляя выражение (2.20) в уравнение (2.17), разделим результат на $M(x, y, t)$. Придем к соотношению

$$\sum_{j=1}^{K} d_j \frac{\mathcal{X} F_j}{F_j} + \frac{\mathcal{X} S}{R} - \frac{S \mathcal{X} R}{R^2} + \omega = -\mathrm{div}\mathcal{X}. \tag{2.22}$$

Избавляясь от знаменателей, находим

$$\begin{gathered} R^2 \sum_{j=1}^{K} d_j \mathcal{X} F_j \prod_{m=1, m \neq j}^{K} F_m + R \mathcal{X} S \prod_{j=1}^{K} F_j - S \mathcal{X} R \prod_{j=1}^{K} F_j \\ = -(\mathrm{div}\mathcal{X} + \omega) R^2 \prod_{j=1}^{K} F_j. \end{gathered} \tag{2.23}$$

Выберем индекс j_0 такой, что $1 \leq j_0 \leq K$. Собирая выражения при различных степенях многочлена $F_{j_0}(x, y)$, мы видим, что или $F_{j_0}(x, y)$ делит $\mathcal{X} F_{j_0}$, или $F_{j_0}(x, y)$ делит $R(x, y)$. В первом случае многочлен $F_{j_0}(x, y)$ является алгебраическим инвариантом. Покажем, что это утверждение справедливо и во втором случае. Разложим многочлен $R(x, y)$ на множители. Получим представление $R(x, y) = F_{j_0}^{m}(x, y) r(x, y)$, где $m \in \mathbb{N}$ и многочлены $F_{j_0}(x, y)$ и $r(x, y)$

взаимно просты. Найдем коэффициент, стоящий при многочлене $F_{j_0}(x, y)$ в выражении (2.23). Мы видим, что многочлен $F_{j_0}(x, y)$ делит $\mathcal{X} F_{j_0} S r$. При этом многочлен $F_{j_0}(x, y)$ не может являться ни делителем $S(x, y)$, ни делителем $r(x, y)$. Следовательно, $F_{j_0}(x, y)$ делит $\mathcal{X} F_{j_0}$.

Таким образом, мы доказали, что многочлены $F_1(x, y)$, …, $F_K(x, y)$ являются алгебраическими инвариантами системы (1.1). Собственное значение алгебраического инварианта $F_j(x, y)$ обозначено символом $\lambda_j(x, y)$. Подставляя равенство $\mathcal{X} F_j(x, y) = \lambda_j(x, y) F_j(x, y)$ в выражение (2.23), получим

$$R^2 \sum_{j=1}^{N} d_j \lambda_j + R \mathcal{X} S - S \mathcal{X} R = -(\mathrm{div} \mathcal{X} + \omega) R^2. \tag{2.24}$$

Собирая коэффициенты при различных степенях многочлена $R(x, y)$, мы видим, что $R(x, y)$ делит $S \mathcal{X} R$. Поскольку многочлены $R(x, y)$ и $S(x, y)$ взаимно просты, мы можем сделать вывод, что многочлен $R(x, y)$ является алгебраическим инвариантом системы (1.1). Обозначим собственное значение этого инварианта символом $\lambda_R(x, y)$. В результате получим

$$R \sum_{j=1}^{N} d_j \lambda_j + \mathcal{X} S - S \lambda_R = -(\mathrm{div} \mathcal{X} + \omega) R. \tag{2.25}$$

Несложно заметить, что многочлен $\mathcal{X} S - S \lambda_R$ делится на R и, следовательно, может быть представлен в виде $\mathcal{X} S - S \lambda_R = \varrho R$, где $\varrho(x, y)$ – некоторый многочлен. Вычисляя $\mathcal{X} \exp\{S(x, y)/R(x, y)\}$, находим

$$\mathcal{X} \exp\left\{\frac{S(x, y)}{R(x, y)}\right\} = \varrho(x, y) \exp\left\{\frac{S(x, y)}{R(x, y)}\right\}. \tag{2.26}$$

Тогда функция $\exp\{S(x, y)/R(x, y)\}$ является экспоненциальным инвариантом системы (1.1) с собственным значением $\varrho(x, y)$. Более того, из соотношения (2.25) следует, что собственные значения $\lambda_1(x, y)$, …, $\lambda_K(x, y)$ и $\varrho(x, y)$ удовлетворяют условию (2.21). Теорема доказана. □

Первые интегралы вида (2.18) будем называть неавтономными первыми интегралами Дарбу. Аналогично, последние множители Якоби вида (2.20) будем называть неавтономными множителями Дарбу – Якоби.

Алгоритм поиска неавтономных первых интегралов Дарбу и неавтономных множителей Дарбу – Якоби отличается от алгоритма, представленного в Разделе 2.1, только условиями (2.4) и (2.6), которые должны быть соответственно заменены на условия (2.19) и (2.21).

Проблема поиска последних множителей Якоби для обыкновенных дифференциальных уравнений детально рассматривалась М.К. Нуччи (M. C. Nucci) и ее соавторами [108–110]. Если для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка известен последний множитель Якоби, то существуют простой метод построения функции Лагранжа или лагранжиана [108]. Лагранжевы представления для дифференциальных уравнений позволяют применять подходы и методы, разработанные в рамках классической механики.

Рассмотрим систему (1.7) и соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (1.8). Для простоты положим $R(x) \equiv 0$. Функция Лагранжа $L(x, y, t)$ этой системы и связанного с ней уравнения определяется посредством соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}L(x, y, t) = M(x, y, t), \quad y = x_t, \tag{2.27}$$

где $M(x, y, t)$ – это последний множитель Якоби этой системы. Интегрируя уравнение (2.27), получим

$$L(x, y, t) = \int \left(\int M dy \right) dy + \frac{d}{dt}p(x, t) + q(x, t), \tag{2.28}$$

Дифференцируемая функция $p(x, t)$ называется калибровочной и не влияет на уравнения движения. Функция $q(x, t)$ может быть найдена с помощью уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial y}L(x, y, t)\right) - \frac{\partial}{\partial x}L(x, y, t) = 0. \tag{2.29}$$

В общем случае существования только одного независимого неавтономного первого интеграла недостаточно для полной интегрируемости исследуемой системы (1.1) в рамках теории Дарбу, см. определение интегрируемых неавтономных систем, приведенное в Разделе 4.1. Однако знание неавтономного первого интеграла Дарбу уменьшает порядок исходной системы и в некоторых случаях может быть использовано для получения явных выражений для общего решения. Примеры будут приведены в Разделах 3.3 и 3.5. В заключение отметим, что траектории, лежащие в множестве нулевого уровня обратного последнего множителя Якоби $M^{-1}(x,y,t) = 1/M(x,y,t)$, представляют особый интерес в рамках качественной теории динамических систем [111].

2.3 Локальная теория инвариантов

Этот раздел посвящен локальным приложениям метода рядов Пюизе. Будем использовать алгебраическую замкнутость полей $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, $x_0 \in \mathbb{C}$ и $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, для того чтобы ввести понятие локальных инвариантов, локальных интегрирующих множителей и локальных первых интегралов. В частности, локальные алгебраические инварианты будут определяться как элементы одного из колец $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ или $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$. Вспоминая общее представление первых интегралов Дарбу и интегрирующих множителей Дарбу для систем (1.1), дадим определения локальные первых интегралов и локальных интегрирующих множителей в терминах локальных алгебраических и экспоненциальных инвариантов аналогично глобальному случаю. Такой подход преследует двоякую цель [112]. Во-первых, локальная теория оказывается чрезвычайно полезной для получения глобальных результатов о существовании инвариантных алгебраических кривых, экспоненциальных инвариантов и первых интегралов Дарбу или Лиувилля. Во-вторых, эта теория имеет важное значение для нахождения неалгебраических инвариантных кривых и первых интегралов, не являющихся функциями Лиувилля.

Пусть максимальная степень многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ относительно переменной y равна $m \in \mathbb{N}$. Символами $p_m(x) \in \mathbb{C}[x]$ и $q_m(x) \in \mathbb{C}[x]$ обозначим коэффициенты многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, стоящие при старшей степени относительно y, соответственно. Мы видим, что $p_m(x) \not\equiv 0$ и (или) $q_m(x) \not\equiv 0$. Возьмем некоторую точку x_0 расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Элементы кольца $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ будем называть многочленами Пюизе. Заметим, что многочлены $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ можно рассматривать как многочлены Пюизе для любого $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Считая переменную y зависимой, а переменную x независимой, будем интересоваться формальными рядами Пюизе $y = Y_{x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, удовлетворяющими уравнению (1.4). Мы можем провести тот же анализ, выбрав переменную x в качестве зависимой.

Определение 2.4. *Кривую* $F(x, y) = 0$*, где* $F(x, y) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ *назовем локальной инвариантной кривой системы* (1.1) *и векторного поля* $\mathcal{X}$*, если выполнено соотношение* $F_t|_{F=0} = (PF_x + QF_y)|_{F=0} = 0$.

Пусть элемент $F(x, y)$ кольца $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ определяет локальную инвариантную кривую $F(x, y) = 0$ системы (1.1). Тогда существует многочлен Пюизе $\lambda(x, y) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ такой, что справедливо следующее соотношение $\mathcal{X}F(x, y)$ $= \lambda(x, y)F(x, y)$. По аналогии с алгебраическим случаем, многочлены Пюизе $F(x, y)$ и $\lambda(x, y)$ назовем *локальным алгебраическим инвариантом* и *собственным значением (кофактором)* соответствующего локального алгебраического инварианта и локальной кривой.

Локальные алгебраические инварианты вида $F(x, y) = h_{x_0}(x)$ и $F(x, y) = y - Y_{x_0}(x)$, где $h_{x_0}(x)$, $Y_{x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, назовем *элементарными*. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.9. *Элемент* $F(x, y) = y - Y_{x_0}(x)$ *кольца* $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ *является элементарным локальным алгебраическим инвариантом системы* (1.1) *тогда* *и только тогда, когда ряд Пюизе* $y = Y_{x_0}(x)$ *удовлетворяет уравнению* (1.4).

Доказательство. Рассмотрим элементарный локальный алгебраический инвариант $y - Y_{x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ системы (1.1). Справедливо следующее соотношение: $Q(x,y) - P(x,y)\,\partial_x Y_{x_0} = \lambda(x,y)(y - Y_{x_0})$, где $\lambda(x,y) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$. Подставляя $y = Y_{x_0}(x)$ в это соотношение, находим $P(x, Y_{x_0})\partial_x Y_{x_0} - Q(x, Y_{x_0}) = 0$. Следовательно, ряд $Y_{x_0}(x)$ удовлетворяет уравнению (1.4).

Докажем обратное утверждение. Рассмотрим ряд Пюизе $Y_{x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, удовлетворяющий уравнению (1.4). Мы видим, что выражение $\mathcal{X}(y - Y_{x_0}) = Q(x,y) - P(x,y)\partial_x Y_{x_0}$ является элементом кольца $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$. Далее находим

$$\mathcal{X}(y - Y_{x_0})\Big|_{y=Y_{x_0}(x)} = 0. \tag{2.30}$$

Согласно определению, элемент $F(x,y) = y - Y_{x_0}(x)$ является элементарным локальным алгебраическим инвариантом системы (1.1). □

Далее покажем, что любой локальный алгебраический инвариант $F(x,y) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ системы (1.1) может быть представлен в виде произведения элементарных локальных алгебраических инвариантов. Собственное значение локального алгебраического инварианта $F(x,y)$ является суммой собственных значений всех сомножителей.

Теорема 2.10. *Пусть* $F(x,y) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ *является локальным алгебраическим инвариантом системы* (1.1). *Тогда многочлен Пюизе* $F(x,y)$ *представляет собой произведение* $F(x,y) = \prod\limits_{j=0}^{N} f_j(x,y)$ *элементарных локальных алгебраических инвариантов* $f_0(x,y)$, $\ldots$, $f_N(x,y)$. *При этом собственное значение локального алгебраического инварианта* $F(x,y)$ *равно сумме собственных значений всех сомножителей. Такое представление единственно с точностью до перестановки сомножителей.*

Доказательство. Кольцо $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ является факториальным. В силу алгебраической замкнутости поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, любой элемент $F(x,y)$ можно представить как произведение многочлена нулевой степени $f_0(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ и многочленов первой степени $\{f_j(x,y) = y - Y_{j,x_0}(x), Y_{j,x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}\}$ относительно переменной y. Таким образом, справедливо равенство $F(x,y) = \prod\limits_{j=0}^{N} f_j(x,y)$, где N – это степень многочлена Пюизе $F(x,y)$ относительно y. Пусть $\lambda(x,y) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ является собственным значением локального алгебраического инварианта $F(x,y)$. Подставляя полученное выше представление в уравнение $\mathcal{X}F(x,y) = \lambda(x,y)F(x,y)$, находим

$$\sum_{j=0}^{N} \mathcal{X} f_j \prod_{k=0,\, k\neq j}^{N} f_k - \lambda(x,y) \prod_{k=0}^{N} f_j = 0. \qquad (2.31)$$

Анализируя коэффициенты при f_{j_0}, $0 \leq j_0 \leq N$, мы видим, что многочлен Пюизе f_{j_0} делит $\mathcal{X} f_{j_0}$. Тогда существует многочлен Пюизе $\lambda_{j_0}(x,y) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ такой, что справедливо равенство $\mathcal{X} f_{j_0}(x,y) = \lambda_{j_0}(x,y) f_{j_0}(x,y)$. Следовательно, элементы $f_0(x,y)$, …, $f_N(x,y)$ являются элементарными локальными алгебраическими инвариантами системы (1.1). Отметим, что мы не исключаем возможности $f_j(x,y) \equiv f_k(x,y)$ при $j \neq k$, $1 \leq j$, $k \leq N$. Подставляя равенства $\mathcal{X} f_j(x,y) = \lambda_j(x,y) f_j(x,y)$, $0 \leq j \leq N$ в уравнение (2.31), получаем

$$\lambda(x,y) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j(x,y). \qquad (2.32)$$

Теорема доказана. □

Из Теоремы 2.10 следует, что мы не теряем общности, рассматривая только элементарные локальные алгебраические инварианты. В дальнейшем нам потребуется многочлен

$$W(x,y) = Q_y P - P_y Q. \qquad (2.33)$$

Напомним, что нулевой элемент поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ обозначается символом O_{x_0}.

Лемма 2.1. *Пусть* $F(x,y) = y - Y_{x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ *является элементарным локальным алгебраическим инвариантом системы* (1.1) *и* $q_m(x)$ –

$p_m(x)\partial_x Y_{x_0} \neq O_{x_0}$. Тогда собственное значение $\lambda(x,y)$ этого инварианта принимает вид

$$\lambda(x,y) = \{q_m(x) - p_m(x)\partial_x Y_{x_0}\} \prod_{j=1}^{m-1} \{y - h_j(x)\}\,, \tag{2.34}$$

где ряды Пюизе $h_1(x)$, …, $h_{m-1}(x)$ из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ удовлетворяют уравнению

$$Q(x,h(x)) - P(x,h(x))\partial_x Y_{x_0} = 0, \quad h(x) = h_j(x), \quad 1 \leq j \leq m-1. \tag{2.35}$$

При этом ряд Пюизе $h_{j_0}(x)$ совпадает с рядом Пюизе $Y_{x_0}(x)$ для некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$, $1 \leq j_0 \leq m-1$, если выполнено $W(x, Y_{x_0}(x)) = O_{x_0}$.

Доказательство. Собственное значение $\lambda(x,y) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ и ряд Пюизе $Y_{x_0}(x)$ связаны соотношением

$$Q(x,y) - P(x,y)\partial_x Y_{x_0}(x) = \lambda(x,y)\{y - Y_{x_0}(x)\}. \tag{2.36}$$

Из Теоремы 2.9 следует, что ряд Пюизе $Y_{x_0}(x)$ удовлетворяет уравнению (1.4). Левая и правая части равенства в соотношении (2.36) делятся на элемент $y - Y_{x_0}(x)$ кольца $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$. Анализируя выражение (2.36), мы видим, что многочлен Пюизе $\lambda(x,y)$ имеет степень $m-1$ относительно y и коэффициент при старшей степени равен $q_m(x) - p_m(x)\partial_x Y_{x_0}$. Любой нуль собственного значения $\lambda(x,y)$ должен одновременно являться нулем выражения, стоящего в левой части равенства (2.36). Приходим к уравнению (2.35).

Далее предположим, что справедливо соотношение $W(x, Y_{x_0}(x)) = O_{x_0}$. С помощью правила Лопиталя вычислим ряд Пюизе для $\lambda(x, Y_{x_0}(x))$. В результате находим

$$\begin{aligned} \lambda(x, Y_{x_0}(x)) &= \lim_{y \to Y_{x_0}} \frac{Q(x,y) - P(x,y)(Y_{x_0})_x}{y - Y_{x_0}(x)} \\ &= Q_y(x, Y_{x_0}(x)) - P_y(x, Y_{x_0}(x))(Y_{x_0})_x. \end{aligned} \tag{2.37}$$

В силу того что ряд Пюизе $Y_{x_0}(x)$ удовлетворяет уравнению (1.4), мы получаем $\lambda(x,\, Y_{x_0}(x)) = O_{x_0}$. Следовательно, элемент $y - Y_{x_0}(x)$ делит $\lambda(x,y)$.

Мы показали, что для некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$, $1 \leq j_0 \leq m-1$ ряд Пюизе $h_{j_0}(x)$ совпадает с рядом Пюизе $Y_{x_0}(x)$.

□

Если выполнено соотношение $q_m(x) - p_m(x)\partial_x Y_{x_0} = O_{x_0}$, то степень собственного значения $\lambda(x,y)$ относительно y меньше, чем $m-1$. В этом случае коэффициент при старшей степени относительно y многочлена Пюизе $\lambda(x,y)$ может быть найден с помощью дальнейшего анализа уравнения (2.36).

Получим еще одно явное представление для собственного значения. Это представление является аналогом формулы, выведенной в Теореме 2.5 для глобального случая. Введем в рассмотрение оператор проектирования $\{S(x,y)\}_{+,\,y}$, определяющий полиномиальную часть относительно y элемента $S(x,y) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}\ [\{y\}]$. Символом $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[\{y\}]$ мы обозначили кольцо рядов Пюизе относительно y с центром в точке $y = \infty$ с коэффициентами из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$. Другими словами, справедливо соотношение $\{S(x,y)\}_{+,\,y} \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$.

Теорема 2.11. *Пусть* $F(x,y) = y - Y_{x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ *является элементарным локальным алгебраическим инвариантом системы* (1.1). *Тогда собственное значение* $\lambda(x,y)$ *этого инварианта и соответствующей элементарной локальной кривой* $F(x,y) = 0$ *имеет вид*

$$\lambda(x,y) = \left\{ \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\{Q(x,y) - P(x,y)\partial_x Y_{x_0}(x)\} Y_{x_0}^m(x)}{y^{m+1}} \right\}_{+,\,y}. \tag{2.38}$$

Доказательство. Разделим обе части равенства (2.36) на $y - Y_{x_0}(x)$ и воспользуемся формальным рядом

$$\frac{1}{y - Y_{x_0}(x)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(Y_{x_0}(x))^m}{y^{m+1}}. \tag{2.39}$$

Учитывая, что собственное значение $\lambda(x,y)$ является многочленом Пюизе, получаем требуемое представление.

□

Далее рассмотрим элементарные локальные инварианты, не зависящие от y.

Лемма 2.2. *Пусть $F(x, y) = h_{x_0}(x)$, где $h(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, является элементарным локальным инвариантом системы* (1.1). *Тогда его собственное значение имеет вид*

$$\lambda(x, y) = P(x, y)\frac{\partial_x h_{x_0}(x)}{h_{x_0}(x)}, \tag{2.40}$$

где правую часть необходимо представить формальным рядом Пюизе с центром в точке x_0.

Эта лемма доказывается непосредственными вычислениями. Аналогично случаю локальных алгебраических инвариантов, мы можем ввести понятие локальных экспоненциальных инвариантов.

Определение 2.5. *Функцию $E(x, y) = \exp[g(x, y)/f(x, y)]$, где $g(x, y)$ и $f(x, y)$ являются взаимно простыми многочленами Пюизе, назовем локальным экспоненциальным инвариантом системы* (1.1) *и векторного поля $\mathcal{X}$, если частное $r(x, y) = g(x, y)/f(x, y)$ удовлетворяет уравнению в частных производных $\mathcal{X}r(x, y) = \varrho(x, y)$, где $\varrho(x, y)$ — многочлен Пюизе.*

Заметим, что выражение вида $E(x, y) = \exp[r(x, y)]$, $r(x, y) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}(y)$ представляет собой элемент расширения дифференциального поля частных $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}(y)$. Уравнение $\mathcal{X}r(x, y) = \varrho(x, y)$ можно переписать следующим образом: $\mathcal{X}E(x, y) = \varrho(x, y)E(x, y)$. Многочлен Пюизе $\varrho(x, y)$ назовем *собственным значением (кофактором)* локального экспоненциального инварианта $E(x, y)$.

Лемма 2.3. *Пусть $E(x, y) = \exp[g(x, y)/f(x, y)]$ является локальным экспоненциальным инвариантом системы* (1.1). *Тогда знаменатель $f(x, y)$ представляет собой локальный алгебраический инвариант этой системы.*

Доказательство. Подставляя явное представление локального экспоненциального инварианта в уравнение в частных производных $\mathcal{X}E(x,y) = \varrho(x,y)$ $E(x,y)$, находим

$$g(x,y)\mathcal{X}f(x,y) = f(x,y)\left[\mathcal{X}g(x,y) - \varrho(x,y)f(x,y)\right]. \tag{2.41}$$

Элементы $f(x,y)$ и $g(x,y)$ взаимно просты. Следовательно, существует многочлен Пюизе $\lambda(x,y) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ такой, что справедливо соотношение $\mathcal{X}f(x,y)$ $= \lambda(x,y)f(x,y)$. Согласно определению $f(x,y)$ – локальный алгебраический инвариант системы (1.1). □

Будем говорить, что локальные экспоненциальные инварианты вида

$$\begin{gathered}E(x,y) = \exp\left[g_l(x)y^l\right], \quad g_l(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}, \quad l \in \mathbb{N} \cup \{0\};\\ E(x,y) = \exp\left[\frac{u(x,y)}{\{y - Y_{x_0}(x)\}^n}\right], \quad u(x,y) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y],\\ Y_{x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}, \quad n \in \mathbb{N},\end{gathered} \tag{2.42}$$

где степень многочлена Пюизе $u(x,y)$ меньше или равна $n-1$, являются *элементарными локальными экспоненциальными инвариантами.*

Рассмотрим локальный экспоненциальный инвариант системы (1.1) вида $E(x,y) = \exp[g(x,y)/f(x,y)]$. Для любого $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ элемент $E^{\alpha}(x,y) = \exp[\alpha g(x,y)/f(x,y)]$, также является локальным экспоненциальным инвариантом. Локальные экспоненциальные инварианты $E_1(x,y) = \exp[r_1(x,y)]$ и $E_2(x,y) = \exp[r_2(x,y)]$ будем назвать различными, если для любого $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ выполнено условие $r_1(x,y) - \alpha r_2(x,y) \neq O_{x_0}$, где O_{x_0} – нулевой элемент поля частных кольца $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$, а элементы $r_1(x,y)$, $r_2(x,y)$ принадлежат этому полю. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.12. *Любой локальный экспоненциальный инвариант* $E(x,y) = \exp[g(x,y)\ /f(x,\ y)]$ *системы* (1.1) *можно представить в виде произведения попарно различных элементарных локальных экспоненциальных инвариантов* $E_1(x,y)$, …, $E_K(x,y)$. *При этом собственное значение локального* *экспоненциального инварианта* $E(x,y)$ *равно сумме собственных значений всех сомножителей. Такое представление единственно с точностью до перестановки сомножителей.*

Доказательство. Кольцо $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ является факториальным. Выполним разложение на простейшие дроби частного двух многочленов Пюизе $g(x,y)$ и $f(x,y)$ в поле частных этого кольца. Используя тот факт, что элементы $y - Y_{j,x_0}(x)$ и $y - Y_{k,x_0}(x)$, где $Y_{j,x_0}(x) - Y_{k,x_0}(x) \neq O_{x_0}$, не имеют нетривиальных общих делителей, и действуя так же, как и при доказательстве Теоремы 2.10, мы раскладываем любой локальный экспоненциальный инвариант $E(x,y) = \exp[g(x,y)/f(x,y)]$ на произведение элементарных локальных экспоненциальных инвариантов. Далее повторяем алгоритм доказательства Теоремы 2.10. □

Аналогично случаю локальных алгебраических инвариантов мы не теряем общности, рассматривая только элементарные локальные экспоненциальные инварианты. Сформулируем полезное необходимое условие существования элементарных локальных экспоненциальных инвариантов, связанных с элементарными локальными алгебраическими инвариантами.

Теорема 2.13. *Пусть* $F(x,y) = y - Y_{x_0}(x)$, *где* $Y_{x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, *является элементарным локальным алгебраическим инвариантом системы* (1.1) *и имеет собственное значение* $\lambda(x,y) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$. *Также предположим, что при некотором* $n \in \mathbb{N}$ *рассматриваемая система имеет элементарный локальный экспоненциальный инвариант вида* $E = \exp[u(x,y)/\{y - Y_{x_0}(x)\}^n]$, *где степень многочлена Пюизе* $u(x,y) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ *меньше или равна* $n-1$. *Тогда существует число* $q \in \mathbb{Q}$, *такое что формальное разложение в ряд Пюизе с центром в точке* $x = x_0$ *для элемента* $\lambda(x, Y_{x_0}(x))/P(x, Y_{x_0}(x))$

имеет вид

$$\begin{aligned} x_0 = \infty : \quad & \frac{\lambda(x, Y_{x_0}(x))}{P(x, Y_{x_0}(x))} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^{-\frac{k}{n_0}-1}, \quad b_0 = q, \quad n_0 \in \mathbb{N}; \\ x_0 \in \mathbb{C} : \quad & \frac{\lambda(x, Y_{x_0}(x))}{P(x, Y_{x_0}(x))} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (x - x_0)^{\frac{k}{n_0}-1}, \quad c_0 = q, \quad n_0 \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Эта теорема доказывается так же, как и Теорема 2.6.

Исследование существования элементарных локальных экспоненциальных инвариантов вида $E = \exp[u(x, y)/\{y - Y_{x_0}(x)\}^n]$ для заданной системы (1.1) можно проводить с помощью подстановки представления

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} u_j(x) \{y - Y_{x_0}(x)\}^k, \quad u_j(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\} \tag{2.44}$$

в уравнение в частных производных $\mathcal{X} E(x, y) = \varrho(x, y) E(x, y)$, где для многочлена Пюизе $\varrho(x, y)$ необходимо записать аналогичное представление. Далее следует приравнять нулю коэффициенты при различных степенях элемента $\{y - Y_{x_0}(x)\}$ и построить систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для рядов Пюизе $\{u_j(x),\, 0 \leq j \leq n - 1\}$. Затем необходимо исследовать существование решений, являющихся рядами Пюизе из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$.

Используя Теоремы 2.10 и 2.13, приходим к следующему заключению. Если система (1.1) имеет глобальный инвариант (алгебраический или экспоненциальный), то для любого $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ этот инвариант является произведением элементарных локальных инвариантов, при этом сумма собственных значений всех сомножителей является многочленом из кольца $\mathbb{C}[x, y]$.

2.4 Интегрируемость по Пюизе

Символом $\operatorname{div}\mathcal{X} = P_x + Q_y$ мы обозначаем дивергенцию векторного поля $\mathcal{X}$, соответствующего дифференциальной системе (1.1). С помощью теории локальных инвариантов дадим определения формального первого интеграла $I(x, y) \notin \mathbb{C}$ и формального интегрирующего множителя $M(x, y)$ системы

(1.1) и связанного с ней векторного поля $\mathcal{X}$. Мы предполагаем, что эти объекты удовлетворяют уравнениям в частных производных $\mathcal{X}I(x,y) = 0$ и $\mathcal{X}M(x,y) = -\mathrm{div}\mathcal{X} \cdot M(x,y)$ соответственно. Операторы дифференцирования ∂_x, ∂_y и интегрирования ∂_x^{-1}, ∂_y^{-1} опять рассматриваются как формальные операторы. Также мы будем работать с формальными объектами $F^{\alpha}(x,y)$, где $F(x,y) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ и $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, которые принадлежат некоторому дифференциальному расширению поля частных $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}(y)$.

Определение 2.6. *Рассмотрим точку* $x_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. *Систему дифференциальных уравнений* (1.1) *и векторное поле* $\mathcal{X}$ *назовем интегрируемыми по Пюизе в окрестности прямой* $\{(x_0, y),\ y \in \overline{\mathbb{C}}\}$, *если они имеют формальный интегрирующий множитель*

$$M(x,y) = \exp\left\{\frac{g(x,y)}{f(x,y)}\right\} \prod_{j=1}^{r} F_j^{d_j}(x,y), \quad r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{2.45}$$

где $F_1(x,y)$, …, $F_r(x,y)$, $g(x,y)$ *и* $f(x,y)$ *– многочлены Пюизе из кольца* $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ *и* d_1, …, $d_r \in \mathbb{C}$. *Многочлены Пюизе* $g(x,y)$ *и* $f(x,y)$ *являются взаимно простыми. Также без ограничения общности предполагаем, что многочлены Пюизе* $F_1(x,y)$, …, $F_r(x,y)$ *являются попарно взаимно простыми.*

Отметим, что аналогичные определения, в которых используются степенные ряды вместо рядов Пюизе, были предложены Дж. Жинне (J. Giné) и Дж. Ллибре (J. Llibre), см. [113–115]. Такая интегрируемость называется интегрируемостью по Вейерштрассу. Поля степенных рядов с центрами в различных точках не обладают алгебраической замкнутостью. Следовательно, неприводимые локальные алгебраические инварианты над такими полями не являются необходимо многочленами первой степени по отношению к одной из переменных. В результате изучение только локальных алгебраических инвариантов первой степени над полями степенных рядов, как это было сделано в статьях [114, 115], ограничивает общность.

Получим необходимые и достаточные условия интегрируемости по Пюизе.

Теорема 2.14. *Система дифференциальных уравнений* (1.1) *и векторное поле* $\mathcal{X}$ *являются интегрируемыми по Пюизе в окрестности прямой* $\{(x_0, y),$ $y \in \overline{\mathbb{C}}\}$ *с формальным интегрирующим множителем* $M(x, y)$ *вида* (2.45) *тогда и только тогда, когда интегрирующий множитель* $M(x, y)$ *представляется следующим образом:*

$$M(x,y) = (x - x_0)^{\beta_0} h_{x_0}(x) \prod_{j=1}^{N_1} \{y - Y_{j,x_0}(x)\}^{\beta_j} \prod_{j=1}^{N_2} E_j(x,y), \qquad (2.46)$$

$$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{N_1} \in \mathbb{C}, \quad N_1, N_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

и выполнены условия:

1) $Y_{1,x_0}(x)$, …, $Y_{N_1,x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ *– попарно различные ряды Пюизе, удовлетворяющие уравнению* (1.4), *которое соответствует системе* (1.1);

2) $E_1(x, y)$, …, $E_{N_2}(x, y)$ *– попарно различные элементарные локальные экспоненциальные инварианты системы* (1.1);

3) $h_{x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ *– элементарный локальный алгебраический инвариант системы* (1.1) *с постоянным доминантным мономом;*

4) собственные значения всех инвариантов удовлетворяют соотношению

$$\beta_0\lambda_0 + \sum_{j=1}^{N_1} \beta_j \lambda_j(x,y) + \sum_{j=1}^{N_2} \varrho_j(x,y) = -\mathrm{div}\mathcal{X}, \qquad (2.47)$$

где $\lambda_j(x, y)$, $\lambda_0(x, y)$, $\lambda_h(x, y)$ *– собственные значения элементарных локальных алгебраических инвариантов* $y - Y_{x_0,j}(x)$, $x - x_0$, $h_{x_0}(x)$ *соответственно и* $\varrho_j(x, y)$ *— собственное значение элементарного локального экспоненциального инварианта* $E_j(x, y)$.

Доказательство. Без ограничения общности докажем теорему для конечных значений x_0. При изучении интегрируемости по Пюизе в окрестности прямой $\{(\infty, y),\, y \in \overline{\mathbb{C}})\}$, в выражении (2.46) необходимо положить $x_0 = 0$.

Пусть $\{y - Y_{j,x_0}(x) = 0,\, 1 \leq j \leq N_1\}$ и $\{E_j(x, y),\, 1 \leq j \leq N_2\}$ являются элементарными локальными инвариантами системы (1.1) и выполняется условие (2.47) для собственных значений. Тогда непосредственной проверкой убеждаемся, что выражение (2.46) представляет собой формальный интегрирующий множитель рассматриваемой системы. Этот интегрирующий множитель имеет вид (2.45). Следовательно, система (1.1) и векторное поле $\mathcal{X}$ интегрируемы по Пюизе в окрестности прямой $\{(x_0, y),\, y \in \overline{\mathbb{C}}\}$.

Докажем обратное утверждение. Используя Теоремы 2.10 и 2.12, мы можем представить интегрирующий множитель (2.45) в виде

$$\begin{gathered} M(x,y) = \prod_{j=1}^{N_3} v_{j,x_0}^{\alpha_j}(x) \prod_{j=1}^{N_1} \{y - Y_{j,x_0}(x)\}^{\beta_j} E(x,y), \\ E(x,y) = \exp\left[\frac{g(x,y)}{f(x,y)}\right], \quad \beta_1, \ldots, \beta_{N_1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N_3} \in \mathbb{C}, \end{gathered} \tag{2.48}$$

где $g(x, y)$ и $f(x, y)$ – взаимно простые элементы кольца $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$, $Y_{j,x_0}(x)$ и $v_{j,x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, $Y_{j,x_0}(x) - Y_{k,x_0}(x) \neq O_{x_0}$, $k \neq j$. Далее несложно получить следующее выражение:

$$\prod_{j=1}^{N_3} v_{j,x_0}^{\alpha_j}(x) = (x - x_0)^{\beta_0} h_{x_0}(x), \quad \beta_0 \in \mathbb{C}, \quad h_{x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}, \tag{2.49}$$

где старший член ряда $h_{x_0}(x)$ является константой. Поскольку $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ – поле, мы не теряем общности, предполагая, что многочлен Пюизе $f(x, y)$ не имеет множителя вида $w(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$. Покажем, что элементы $x - x_0$, $h_{x_0}(x)$ и $\{y - Y_{j,x_0}(x)\}$ являются элементарными локальными алгебраическими инвариантами и $E(x, y)$ является локальным экспоненциальным инвариантом системы (1.1) и, следовательно, произведением элементарных локальных экспоненциальных инвариантов. Также нам необходимо доказать справедливость соотношения (2.47).

Подставляя выражения (2.48) и (2.49) в уравнение в частных производных $\mathcal{X}M(x,y) = -\mathrm{div}\mathcal{X}\cdot M(x,y)$, разделим получившееся соотношение на $M(x,y)$. В результате получим

$$\begin{gathered}\beta_0\frac{\mathcal{X}(x-x_0)}{x-x_0}+\frac{\mathcal{X}h_{x_0}(x)}{h_{x_0}(x)}+\sum_{j=1}^{N_1}\beta_j\frac{\mathcal{X}\{y-Y_{j,x_0}(x)\}}{y-Y_{j,x_0}(x)}\\+\frac{\mathcal{X}g}{f}-\frac{g\mathcal{X}f}{f^2}=-\mathrm{div}\mathcal{X}.\end{gathered}\tag{2.50}$$

Избавляясь от знаменателей, находим

$$\begin{gathered}(x-x_0)h_{x_0}f^2\sum_{j=1}^{N_1}\beta_j\mathcal{X}\{y-Y_{j,x_0}(x)\}\prod_{m=1,m\neq j}^{N_1}\{y-Y_{m,x_0}(x)\}\\=-\prod_{m=1}^{N_1}\{y-Y_{m,x_0}(x)\}\left\{\beta_0h_{x_0}f^2\mathcal{X}(x-x_0)+(x-x_0)(f^2\mathcal{X}h_{x_0}\right.\\\left.+h_{x_0}f\mathcal{X}g-h_{x_0}g\mathcal{X}f+h_{x_0}f^2\mathrm{div}\mathcal{X})\right\}.\end{gathered}\tag{2.51}$$

Пусть j_0 является целым числом, удовлетворяющим неравенству $1\leq j_0\leq N_1$. Собирая коэффициенты, стоящие при различных степенях элемента $y-Y_{j_0,x_0}(x)$, мы видим, что или $y-Y_{j_0,x_0}(x)$ делит $\mathcal{X}\{y-Y_{j_0,x_0}(x)\}$ или $y-Y_{j_0,x_0}(x)$ делит $f(x,y)$. В первом случае $y-Y_{j_0,x_0}(x)$ является элементарным локальным алгебраическим инвариантом рассматриваемой системы (1.1). Покажем, что тот же результат справедлив и во втором случае. Положим $f(x,y)=\{y-Y_{j_0,x_0}(x)\}^l r(x,y)$, где $r(x,y)\in\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$, $l\in\mathbb{N}$ и элемент $y-Y_{j_0,x_0}(x)$ не делит $r(x,y)$. Собирая коэффициенты, стоящие при различных степенях элемента $y-Y_{j_0,x_0}(x)$ в получившемся выражении, мы убеждаемся, что элемент $y-Y_{j_0,x_0}(x)$ делит $rg\mathcal{X}\{y-Y_{j_0,x_0}(x)\}$. При этом элемент $y-Y_{j_0,x_0}(x)$ не является делителем ни $g(x,y)$, ни $r(x,y)$. Следовательно, он делит $\mathcal{X}\{y-Y_{j_0,x_0}(x)\}$.

Таким образом, мы показали, что элементы $y-Y_{1,x_0}(x)$, …, $y-Y_{N_1,x_0}(x)$ представляют собой элементарные локальные алгебраические инварианты рассматриваемой системы (1.1). Обозначим собственное значение инварианта $y-Y_{j,x_0}(x)$ символом $\lambda_j(x,y)$. Аналогично убеждаемся, что элементы $x-x_0$

и $h_{x_0}(x)$ также являются элементарными локальными алгебраическими инвариантами. Их собственные значения обозначаем символами $\lambda_0(x,y)$ и $\lambda_h(x,y)$ соответственно. Подставляя равенства $\mathcal{X}\{y-Y_{j,x_0}(x)\} = \lambda_j(x,y)\{y-Y_{j,x_0}(x)\}$, $\mathcal{X}(x-x_0) = \lambda_0(x,y)(x-x_0)$, $\mathcal{X}h_{x_0}(x) = \lambda_h(x,y)h_{x_0}(x)$ в выражение (2.50) и избавляясь от знаменателей, получим

$$f^2\left(\lambda_h + \sum_{j=0}^{N_1}\beta_j\lambda_j\right) + f\mathcal{X}g - g\mathcal{X}f = -f^2\mathrm{div}\mathcal{X}. \qquad (2.52)$$

Собирая коэффициенты при различных степенях многочлена Пюизе $f(x,y)$, мы видим, что $f(x,y)$ делит $g\mathcal{X}f$. Многочлены $f(x,y)$ и $g(x,y)$ взаимно просты. Следовательно, многочлен Пюизе $f(x,y)$ является локальным алгебраическим инвариантом исследуемой системы (1.1). Обозначим его собственное значение символом $\lambda_f(x,y)$. В результате находим

$$f\left(\lambda_h + \sum_{j=0}^{N_1}\beta_j\lambda_j\right) + \mathcal{X}g - g\lambda_f = -f\mathrm{div}\mathcal{X}. \qquad (2.53)$$

Несложно заметить, что многочлен Пюизе $\mathcal{X}g - g\lambda_f$ представляется в виде $\mathcal{X}g - g\lambda_f = \varrho_E(x,y)f$, где $\varrho_E(x,y)$ некоторый элемент кольца $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$. Мы приходим к равенству

$$\mathcal{X}\exp\left\{\frac{g(x,y)}{f(x,y)}\right\} = \varrho_E(x,y)\exp\left\{\frac{g(x,y)}{f(x,y)}\right\}. \qquad (2.54)$$

Анализируя это равенство, заключаем, что $E(x,y) = \exp\{g(x,y)/f(x,y)\}$ представляет собой локальный экспоненциальный инвариант изучаемой системы (1.1) и имеет собственное значение $\varrho_E(x,y)$. Более того, из соотношения (2.53) следует, что собственные значения $\lambda_h(x,y)$, $\lambda_0(x,y)$, …, $\lambda_{N_1}(x,y)$, $\varrho_E(x,y)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{j=0}^{N_1}\beta_j\lambda_j(x,y) + \varrho_E(x,y) = -\mathrm{div}\mathcal{X}. \qquad (2.55)$$

Любой локальный экспоненциальный инвариант $E(x,y)$ может быть представлен в виде произведения $E(x,y) = \prod\limits_{j=1}^{N_2}E_j(x,y)$, где $E_1(x,y)$, …, $E_{N_2}(x,y)$

– попарно различные элементарные локальные экспоненциальные инварианты с собственными значениями $\varrho_1(x, y)$, …, $\varrho_{N_2}(x, y)$, удовлетворяющими условию $\varrho_E(x, y) = \varrho_1(x, y) + \ldots + \varrho_{N_2}(x, y)$. Объединяя это условие и соотношение (2.55), мы находим (2.47). Теорема доказана. □

Отметим, что мы не ограничиваем общности, рассматривая элементарные локальные экспоненциальные инварианты вида $E(x, y) = \exp[g_0(x)]$, в которых ряд Пюизе $g_0(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ обрывается:

$$\begin{aligned} x_0 = \infty : \quad g_0(x) &= \sum_{k=0}^{L_0-1} b_k x^{\frac{L_0-k}{n_0}}, \quad L_0, n_0 \in \mathbb{N}; \\ x_0 \in \mathbb{C} : \quad g_0(x) &= \sum_{k=0}^{L_0-1} c_k (x - x_0)^{\frac{k-L_0}{n_0}}, \quad L_0, n_0 \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Действительно, выражения

$$\begin{aligned} x_0 = \infty : \quad E(x, y) &= \exp\left[\sum_{k=L_0+1}^{+\infty} b_k x^{\frac{L_0-k}{n_0}}\right], \quad L_0, n_0 \in \mathbb{N}; \\ x_0 \in \mathbb{C} : \quad E(x, y) &= \exp\left[\sum_{k=L_0+1}^{+\infty} c_k (x - x_0)^{\frac{k-L_0}{n_0}}\right], \quad L_0, n_0 \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.57}$$

легко представить рядами Пюизе. Следовательно, эти инварианты в соотношении (2.46) можно выразить с помощью локальных алгебраических инвариантов $x - x_0$ и $h_{x_0}(x)$.

Для исследования интегрируемости системы (1.1) по Пюизе в окрестности прямой $\{(x_0, y),\ y \in \overline{\mathbb{C}}\}$ можно использовать следующий алгоритм.

На *первом шаге* необходимо найти все ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, которые удовлетворяют уравнению (1.4).

На *втором шаге* следует классифицировать элементарные локальные инварианты и их собственные значения.

На *третьем шаге* нужно потребовать, чтобы собственные значения второго шага удовлетворяли условию (2.47).

Далее рассмотрим дифференциальные системы вида (1.1), имеющие формальный первый интеграл

$$I(x,y) = \exp\left\{\frac{g(x,y)}{f(x,y)}\right\}\prod_{j=1}^{r} F_j^{d_j}(x,y), \quad r \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{2.58}$$

где $F_1(x,y)$, …, $F_r(x,y)$, $g(x,y)$ и $f(x,y)$ являются многочленами Пюизе из кольца $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$ и d_1, …, $d_r \in \mathbb{C}$. Без ограничения общности можно считать, что многочлены Пюизе $g(x,y)$ и $f(x,y)$ являются взаимно простыми, а многочлены Пюизе $F_1(x,y)$, …, $F_r(x,y)$ являются попарно взаимно простыми.

Теорема 2.15. *Система дифференциальных уравнений* (1.1) *и векторное поле* $\mathcal{X}$ *имеют формальный первый интеграл* $I(x,y)$, *заданный выражением* (2.58), *тогда и только тогда, когда первый интеграл* $I(x,y)$ *представляется следующим образом:*

$$\begin{gathered} I(x,y) = (x-x_0)^{\beta_0} h_{x_0}(x)\prod_{j=1}^{N_1}\{y - Y_{j,x_0}(x)\}^{\beta_j}\prod_{j=1}^{N_2}E_j(x,y), \\ \beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{N_1}\in\mathbb{C}, \quad N_1,N_2\in\mathbb{N}\cup\{0\} \end{gathered} \tag{2.59}$$

и выполнены условия:

1) $Y_{1,x_0}(x)$, …, $Y_{N_1,x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ *– попарно различные ряды Пюизе, удовлетворяющие уравнению* (1.4), *которое соответствует системе* (1.1);

2) $E_1(x,y)$, …, $E_{N_2}(x,y)$ *– попарно различные элементарные локальные экспоненциальные инварианты системы* (1.1);

3) $h_{x_0}(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ *– элементарный локальный алгебраический инвариант системы* (1.1) *с постоянным старшим слагаемым;*

4) собственные значения всех инвариантов удовлетворяют соотношению

$$\beta_0\lambda_0 + \lambda_h + \sum_{j=1}^{N_1}\beta_j\lambda_j(x,y) + \sum_{j=1}^{N_2}\varrho_j(x,y) = 0, \tag{2.60}$$

где $\lambda_j(x,y)$, $\lambda_0(x,y)$, $\lambda_h(x,y)$ *– собственные значения элементарных локальных алгебраических инвариантов* $y - Y_{x_0,j}(x)$, $x - x_0$, $h_{x_0}(x)$ *соответственно и* $\varrho_j(x,y)$ *— собственное значение элементарного локального экспоненциального инварианта* $E_j(x,y)$.

Мы опустим доказательство этой теоремы, поскольку оно аналогично доказательству Теоремы 2.14. Покажем, что система (1.1), имеющая формальный первый интеграл вида by (2.58), интегрируема по Пюизе в окрестности прямой $\{(x_0,y),\, y\in\overline{\mathbb{C}}\}$ с формальным интегрирующим множителем специального вида.

Теорема 2.16. *Система дифференциальных уравнений* (1.1) *и векторное поле* $\mathcal{X}$ *имеют формальный первый интеграл* $I(x,y)$ *вида* (2.58) *тогда и только тогда, когда они интегрируемы по Пюизе в окрестности прямой* $\{(x_0,y),\, y\in\overline{\mathbb{C}}\}$ *с интегрирующим множителем*

$$M(x,y) = h_{x_0}(x)\prod_{j=1}^{N_1}\{y - Y_{j,x_0}(x)\}^{n_j},\ n_1,\ldots,n_{N_1}\in\mathbb{Z},\ N_1\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{2.61}$$

где $\{Y_{j,x_0}(x)\in\mathbb{C}_{x_0}\{x\},\ j=1,\ldots N_1\}$ *– попарно различные ряды Пюизе, удовлетворяющие уравнению* (1.4), *и* $h_{x_0}(x)\in\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ *– элементарный локальный алгебраический инвариант рассматриваемой системы* (1.1) *и векторного поля* $\mathcal{X}$.

Доказательство. Без ограничения общности докажем эту теорему для конечных значений x_0. Рассмотрим систему (1.1) с формальным первым интегралом (2.58). Функция

$$H(x,y) = \ln I(x,y) = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} + \sum_{j=1}^{r} d_j \ln F_j(x,y) \tag{2.62}$$

является еще одним формальным первым интегралом рассматриваемой системы. Используя соотношение $M(x,y)(P(x,y)dy - Q(x,y)dx) = dH(x,y)$, найдем соответствующий формальный интегрирующий множитель

$$M(x,y)=\frac{\partial_y H(x,y)}{P(x,y)}=-\frac{\partial_x H(x,y)}{Q(x,y)}. \tag{2.63}$$

Мы видим, что $M(x,y)$ лежит в поле частных кольца $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$. Используя алгебраическую замкнутость поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, представим интегрирующий множитель (2.63) в виде (2.61), где ряды Пюизе $\{Y_{j,x_0}(x)\in\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, $j=1,\ldots N_1\}$ попарно различны. Действуя так же, как и при доказательстве Теоремы 2.14, мы видим, что $h_{x_0}(x)$ и $\{y-Y_{j,x_0}(x)=0,\ j=1,\ldots N_1\}$ – попарно различные элементарные локальные алгебраические инварианты рассматриваемой системы (1.1). Из Теоремы 2.9 следует, что ряды $Y_{1,x_0}(x)$, …, $Y_{N_1,x_0}(x)$ удовлетворяют уравнению (1.4).

Докажем обратное утверждение. Возьмем формальный интегрирующий множитель $M(x,y)$, заданный соотношением (2.61), и рассмотрим систему

$$\partial_y H(x,y)=M(x,y)P(x,y),\quad \partial_x H(x,y)=-M(x,y)Q(x,y). \tag{2.64}$$

Раскладывая элемент $M(x,y)P(x,y)$ на простейшие дроби в поле $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}(y)$, находим

$$M(x,y)P(x,y)=\sum_{j=0}^{N_2}b_{j,x_0}(x)y^j+\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{l=1}^{n_j}\frac{u_{j,x_0}^{(l)}(x)}{\{y-Y_{j,x_0}(x)\}^l}, \tag{2.65}$$

где коэффициенты $\{b_{j,x_0}(x), j=0,\ldots N_2\}$ и $\{u_{j,x_0}^{(l)}(x), l=1,\ldots,n_j, j=1,\ldots N_1\}$ являются элементами поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$. Вычисляя формальный интеграл $\partial_y^{-1}M(x,y)$ $P(x,y)$, получим

$$\begin{aligned}H(x,y)=\sum_{j=0}^{N_2}\frac{b_{j,x_0}(x)}{j+1}y^{j+1}-\sum_{j=1}^{N_1}\sum_{l=2}^{n_j}\frac{u_{j,x_0}^{(l)}(x)}{(l-1)\{y-Y_{j,x_0}(x)\}^{l-1}}\\+\sum_{j=1}^{N_1}u_{j,x_0}^{(1)}(x)\ln\{y-Y_{j,x_0}(x)\}+C(x).\end{aligned} \tag{2.66}$$

В этом выражении $C(x)$ появляется в результате интегрирования. Подставляя выражение (2.66) во второе уравнение системы (2.64), где мы опять выполняем разложение на простейшие дроби, получаем соотношения $u_{j,x_0}^{(1)}(x) \in \mathbb{C}$, $j = 1$, $\ldots$, N_1 и уравнение $\partial_x C(x) = A(x)$, где $A(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ – заданный ряд Пюизе. В результате находим $C(x) = B(x) + \alpha \ln(x - x_0)$, $B(x) \in \mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$. Мы видим, что первый интеграл $I(x, y) = \exp[H(x, y)]$ имеет вид (2.58).

□

В силу того, что интегрируемость по Лиувиллю двумерной полиномиальной системы (1.1) эквивалентна существованию интегрирующего множителя Дарбу и любая функция Дарбу может быть представлена в виде (2.46), мы видим, что интегрируемые по Лиувиллю системы (1.1) интегрируемы и по Пюизе в окрестности любой прямой $\{(x_0, y),\ y \in \overline{\mathbb{C}}\}$ с формальным интегрирующим множителем (2.46). Аналогично, интегрируемые по Дарбу системы (1.1) интегрируемы и по Пюизе в окрестности любой прямой $\{(x_0, y),\ y \in \overline{\mathbb{C}}\}$ с формальным первым интегралом (2.59) и формальным интегрирующим множителем (2.61). Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Контрпример будет приведен в Разделе 3.8.

В заключение отметим, что, как правило, изучение интегрируемости в окрестности некоторой прямой $\{(x_0, y),\ y \in \overline{\mathbb{C}}\}$, которая не состоит целиком из особых точек уравнения (1.4), является очень трудной задачей. Основная сложность связана с тем, что для любого такого $x_0 \in \mathbb{C}$ существуют ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, которые удовлетворяют уравнению (1.4) и имеют произвольный коэффициент в доминантном слагаемом. Эти ряды являются степенными и их существование определяется теоремой о существовании, единственности и аналитичности локальных решений. Подобная ситуация может не возникать в случае особых линий. Более того, даже если число рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, где $\{(x_0, y),\ y \in \overline{\mathbb{C}}\}$ – особая линия уравнения (1.4), бесконечно, вычисления могут быть полностью проведены для многих систем дифференциальных уравнений. По-видимому, важность работы с рядами Пюизе с центрами в точках, лежащих на особых линиях, и, в частности, на бесконечно удаленной линии обсуждается в данной диссертационной работе впервые.

3 Полиномиальные дифференциальные системы Льенара

3.1 Инвариантные алгебраические кривые полиномиальных дифференциальных систем Льенара

В этом разделе мы выполним классификацию неприводимых инвариантных алгебраических кривых для полиномиальных дифференциальных систем Льенара. В последующих разделах эти результаты будут использоваться для получения необходимых и достаточных условий интегрируемости по Лиувиллю и других аналитических свойств этих систем.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$x_t = y, \quad y_t = -f(x)y - g(x) \tag{3.1}$$

называют дифференциальными системами Льенара в честь французского физика и инженера А.-М. Льенара. Эти системы описывают осцилляторы при наличии трения и возвращающей силы, задаваемых функциями $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Также системы Льенара возникают при моделировании различных явлений в физике, химии, биологии, экономике и других областях науки [116]. Например, системы (3.1) могут быть получены при переходе к переменным бегущей волны в уравнениях реакции–конвекции–диффузии

$$u_t = Du_{xx} + A(u)u_x + B(u), \quad u = u(x,t), \tag{3.2}$$

где D – это коэффициент диффузии, функция $A(u)$ описывает нелинейный конвективный поток, а функция $B(u)$ – силу реакции [117]. Качественные свойства систем (3.1) исследовались в большом количестве работ, см. например [47,118–125]. В настоящей диссертационной работе мы изучаем полиномиальные системы Льенара. Другими словами, функции $f(x)$ и $g(x)$ являются многочленами. Запишем их в виде

$$f(x) = f_0 x^m + \ldots + f_m, \quad g(x) = g_0 x^n + \ldots + g_n, \quad f_0 g_0 \neq 0, \tag{3.3}$$

где все коэффициенты принадлежат полю $\mathbb{C}$, m, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $m + n > 0$. Выражая функцию $y(t)$ из первого уравнения системы (3.1) и подставляя во второе, мы приходим к следующему семейству обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x_{tt} + f(x)x_t + g(x) = 0, \tag{3.4}$$

которые называют уравнениями Льенара. Уравнения (1.4) для систем Льенара принимают вид

$$yy_x + f(x)y + g(x) = 0. \tag{3.5}$$

К. Одани (K. Odani) доказал, что полиномиальные системы Льенара (3.1) при выполнении условий $\deg f \geq \deg g$, $f(x)g(x) \not\equiv 0$ и $f(x) \not\equiv \alpha g(x)$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ не имеют инвариантных алгебраических кривых [126]. Поиск верхних оценок на степени неприводимых инвариантных алгебраических кривых полиномиальных систем Льенара (3.1) при ограничении $\deg f < \deg g$ проводился Х. Жолондеком (H. Żołądek), см. [127]. К сожалению, результаты этой статьи неверны, поскольку автор не учитывал наличие бесконечного числа рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющих уравнению (3.5). Задача нахождения предельных циклов, содержащихся в овалах гиперэллиптических инвариантных алгебраических кривых $(y - p(x))^2 - q(x) = 0$, где $p(x)$ и $q(x)$ некоторые многочлены, рассматривалась в работах [127–132]. Далее положим $\deg f \leq \deg g$.

Мы начнем исследование с простых свойств инвариантных алгебраических кривых и их собственных значений. Заметим, что мы рассматриваем только конечные инвариантные алгебраические кривые. Бесконечная прямая всегда инвариантна для любой полиномиальной дифференциальной системы (3.1), рассматриваемой на комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$.

Лемма 3.1. *Пусть* $F(x, y) = 0$*, где* $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}$*, является инвариантной алгебраической кривой полиномиальной дифференциальной системы Льенара вида* (3.1)*. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Не существует инвариантных алгебраических кривых, задаваемых многочленом* $F(x, y) \in \mathbb{C}[x]$.
2. *Старший коэффициент по отношению к переменной* y *многочлена* $F(x, y)$ *не зависит от* x *и является константой.*
3. *Собственное значение инвариантной алгебраической кривой* $F(x, y) = 0$ *не зависит от* y.

Доказательство. Подставляя $\lambda(x, y) = \lambda_0(x)y^l$ и $F(x, y) = \mu(x)y^N$, где l, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, в уравнение в частных производных

$$yF_x - \{f(x)y + g(x)\}F_y = \lambda(x, y)F \tag{3.6}$$

и приравнивая друг другу старшие коэффициенты относительно y в левой и правой частях равенства, мы получаем $\mu(x) \in \mathbb{C}$, $l = 0$ и $N \in \mathbb{N}$. Следовательно, собственные значения инвариантных алгебраических кривых не зависят от y и не существует инвариантных алгебраических кривых, задаваемых многочленом $F(x, y) \in \mathbb{C}[x]$.

Этот же результат можно получить и с помощью метода рядов Пюизе. Действительно, для любого $x_0 \in \mathbb{C}$ ряды Пюизе с центром в точке x_0, удовлетворяющие уравнению (3.5), имеют неотрицательные показатели степеней в доминантных членах. Используя Лемму 1.3, мы находим $\mu(x) = \mu_0$, где μ_0 является константой. Без ограничения общности полагаем $\mu_0 = 1$. Независимость собственных значений от y следует из формулы (2.8). □

Далее покажем, что необходимые и достаточные условия существования инвариантных алгебраических кривых, полученные в Теореме 1.4 и Лемме 1.5, принимают особенно простой вид в случае полиномиальных дифференциальных систем Льенара.

Теорема 3.1. *Многочлен* $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}$ *степени* $N > 0$ *относительно переменной* y *определяет инвариантную алгебраическую кривую* $F(x,y) = 0$ *дифференциальной системы Льенара* (3.1) *тогда и только тогда, когда существуют* N *рядов Пюизе* $y_{1,\infty}(x)$, …, $y_{N,\infty}(x)$ *из поля* $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, *которые удовлетворяют уравнению* (3.5) *и соотношению*

$$\left\{\sum_{j=1}^{N} y_{j,\infty}(x)\right\}_{-} = 0. \tag{3.7}$$

Доказательство. Из Леммы 3.1 следует, что полиномиальные системы Льенара не имеют инвариантных алгебраических кривых с порождающими многочленами, не зависящими от y. Рассмотрим инвариантную алгебраическую кривую $F(x,y) = 0$ системы (3.1) с многочленом $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}[x]$.

Будем использовать результаты Леммы 1.5. Покажем, что если соотношения (1.30) выполнены при $k = 1$, то они также справедливы и при $k \in \mathbb{N}$. Доказательство проведем методом математической индукции по k. Пусть соотношения (1.30) справедливы при $k \leq l$, $l \in \mathbb{N}$. Ряды Пюизе из этих соотношений удовлетворяют уравнению (3.5). Подставляя $y(x) = y_{j,\infty}(x)$ в уравнение (3.5) и умножая результат на $(y_{j,\infty})^{l-1}$, мы получаем

$$\frac{1}{l+1}\partial_x\left[(y_{j,\infty})^{l+1}\right] = -f(x)(y_{j,\infty})^{l} - g(x)(y_{j,\infty})^{l-1}. \tag{3.8}$$

Выполняя суммирование по j, находим

$$\frac{1}{l+1}\partial_x\left(\sum_{j=1}^{N}(y_{j,\infty})^{l+1}\right)=-f(x)\sum_{j=1}^{N}(y_{j,\infty})^{l}-g(x)\sum_{j=1}^{N}(y_{j,\infty})^{l-1}. \qquad (3.9)$$

Из предположения индукции следует, что правая часть в выражении (3.9) является многочленом. В результате приходим к соотношению

$$\frac{1}{l+1}\left\{\partial_x\left(\sum_{j=1}^{N}(y_{j,\infty})^{l+1}\right)\right\}_{-}=0 \qquad (3.10)$$

Несложно убедиться, что для любого ряда $Y(x)\in\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$ из условия $\{\partial_x Y(x)\}_{-}$ $=0$ вытекает $\{Y(x)\}_{-}=0$. Окончательно получаем

$$\left\{\sum_{j=1}^{N}(y_{j,\infty})^{l+1}\right\}_{-}=0. \qquad (3.11)$$

Необходимость и достаточность соотношений (3.7) следует из Леммы 1.5 и проведенных выше вычислений. □

Далее покажем, что структура рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$, удовлетворяющих уравнению (3.5), существенно различна в следующих случаях:

(A) $\deg f<\deg g<2\deg f+1$;

(B) $\deg g=2\deg f+1$;

(C) $\deg g>2\deg f+1$.

Напомним, что простой случай $\deg f\geq\deg g$ рассматривался ранее в работе [126]. В связи с этим, мы интересуемся системами (3.1), удовлетворяющими ограничению $\deg f\leq\deg g$. Здесь и далее будем использовать обозначения $\deg f=m$ и $\deg g=n$. Также предполагаем, что выполнено соотношение $f(x)\not\equiv 0$. Мы начнем со случая $\deg f<\deg g<2\deg f+1$ или в наших обозначениях $m<n<2m+1$.

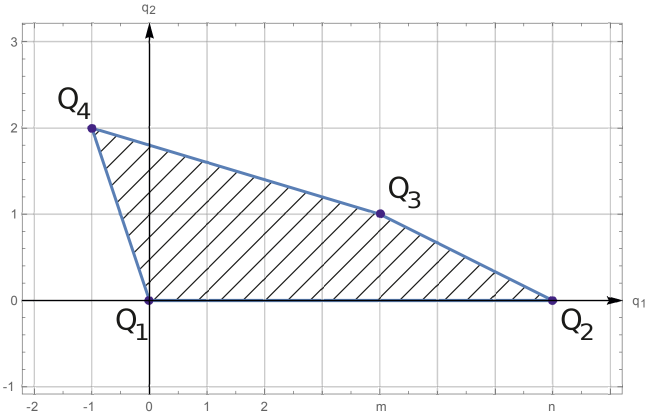


Рис. 3.1: Многоугольник Ньютона уравнения (3.5) при выполнении условий $m < n < 2m + 1$ и $g(0) \neq 0$, где $m = \deg f$ и $n = \deg g$.

Теорема 3.2. *Пусть многочлен $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}$ определяет неприводимую инвариантную алгебраическую кривую $F(x, y) = 0$ дифференциальной системы Льенара* (3.1) *из семейства (A). Тогда этот многочлен и собственное значение инвариантной алгебраической кривой $F(x, y) = 0$ принимают вид*

$$F(x,y) = \left\{ \prod_{j=1}^{N-k} \left\{ y - y_{j,\infty}^{(1)}(x) \right\} \left\{ y - y_{N,\infty}^{(2)}(x) \right\}^k \right\}_+ , \tag{3.12}$$

$$\lambda(x, y) = -Nf - (N - k)q_x - kp_x, \tag{3.13}$$

где $k = 0$ или $k = 1$, $N \in \mathbb{N}$ и ряды Пюизе $y_{1,\infty}^{(1)}(x)$, …, $y_{N-k,\infty}^{(1)}(x)$, $y_{N,\infty}^{(2)}(x)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} y_{j,\infty}^{(1)}(x) &= q(x) + \sum_{l=0}^{+\infty} b_{m+1+l}^{(j)} x^{-l}, \quad j = 1, \dots, N - k; \\ y_{N,\infty}^{(2)}(x) &= p(x) + \sum_{l=0}^{+\infty} b_{n-m+l}^{(N)} x^{-l}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Коэффициенты ряда $y_{N,\infty}^{(2)}(x)$ и многочленов

$$\begin{aligned} q(x) &= -\frac{f_0}{m+1} x^{m+1} + \sum_{l=1}^{m} q_{m+1-l} x^l \in \mathbb{C}[x], \\ p(x) &= -\frac{g_0}{f_0} x^{n-m} + \sum_{l=1}^{n-m-1} p_{n-m-l} x^l \in \mathbb{C}[x] \end{aligned} \tag{3.15}$$

определяются единственным образом. Коэффициенты $b^{(j)}_{m+1}$, $j = 1, \dots, N-k$ *попарно различны. Все остальные коэффициенты* $b^{(j)}_{m+1+l}$, $l \in \mathbb{N}$ *выражаются через* $b^{(j)}_{m+1}$, *где* $j = 1, \dots, N-k$. *Если* $k = 1$ *и* $N = 1$, *то соответствующее произведение в формуле* (3.12) *равно единице.*

Доказательство. Пользуясь Леммой 3.1, положим $\mu(x) = 1$. Из Теоремы 2.5 следует, что ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, появляющиеся в представлении (2.7), удовлетворяют уравнению (3.5). Найдем все такие ряды Пюизе при выполнении условия $m < n < 2m+1$. Многоугольник Ньютона уравнения (3.5) представлен на Рисунке 3.1. Существует два доминантных баланса, которые порождают ряды Пюизе с центром в точке $x = \infty$. Эти балансы соответствуют ребрам $[Q_3, Q_4]$ и $[Q_2, Q_3]$. Уравнения, связанные с этими балансами, и их решения имеют вид

$$\begin{aligned} &[Q_3, Q_4]: \quad y(y_x + f_0 x^m) = 0, \quad y^{(1)}(x) = -\frac{f_0}{m+1} x^{m+1}; \\ &[Q_2, Q_3]: \quad x^m(f_0 y + g_0 x^{n-m}) = 0, \quad y^{(2)}(x) = -\frac{g_0}{f_0} x^{n-m}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Рассмотрим доминантный баланс, порождаемый ребром $[Q_3, Q_4]$. Для вычисления показателя Ковалевской l_0 воспользуемся формулой (1.31). В результате находим $l_0 = m+1$. Таким образом, при выполнении условия совместности для показателя Ковалевской $l_0 = m+1$ мы получаем семейство рядов Пюизе, имеющих один произвольный коэффициент – коэффициент при x^0. Если параметры рассматриваемой системы выбраны таким образом, что условие совместности не выполняется, то не существует ряда Пюизе с доминантным поведением $-f_0 x^{m+1}/(m+1)$. Ряды Пюизе, порождаемые ребром $[Q_3, Q_4]$, имеют совпадающие начальные отрезки, которые мы обозначим символом $q(x)$. Заметим, что $q(x)$ является многочленом, удовлетворяющим условию $q(0) = 0$, см. (3.15). Анализируя доминантный баланс, порождаемый ребром $[Q_2, Q_3]$, мы видим, что коэффициенты соответствующего ряда Пюизе определяются единственным образом. Отметим, что все появляющиеся в этой теореме ряды Пюизе на самом деле являются рядами Лорана. Структура этих рядов представлена соотношением (3.14), где мы ввели нижний индекс с целью различать ряды. Раскладывая многочлен $F(x, y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ и вычисляя полиномиальную часть, приходим к соотношению (3.12). Многочлен $F(x, y)$ неприводим. По Теореме 2.5 ряды $y^{(1)}_{1,\infty}(x)$, …, $y^{(1)}_{N-k,\infty}(x)$ попарно различны. Следовательно, коэффициенты $b^{(j)}_{m+1}$, $j = 1, \ldots, N - k$ также попарно различны и $k = 0$ или $k = 1$.

Наконец, подставляя $L = 0$ ($\mu(x) = 1$) и ряды (3.14) в представление (2.8), мы находим собственное значение (3.13). □

Замечание 1. Если параметры системы (3.1) из семейства (A) выбраны таким образом, что условие совместимости для ряда Пюизе с доминантным поведением $-f_0x^{m+1}/(m + 1)$ не выполняется, то соответствующая система имеет не более одной неприводимой инвариантной алгебраической кривой. Причем эта кривая определяется многочленом $F(x, y) = y - p(x) - b^{(N)}_{n-m}$ и существует при условии, что ряд Пюизе с доминантным поведением $-f_0x^{n-m}/g_0$ обрывается на мономе с нулевым показателем степени.

Далее покажем, что для каждой полиномиальной дифференциальной системы Льенара (3.1) из семейства (A) может быть построена эквивалентная полиномиальная дифференциальная система такая, что дифференциальному уравнению первого порядка (1.4) для этой системы удовлетворяет лишь конечное число попарно различных рядов Пюизе с центром в бесконечно удаленной точке. Введем обратимую замену переменных $x = s$, $y = z + q(s) \leftrightarrow s = x$, $z = y - q(x)$. Многочлен $q(x)$ определяется выражением (3.15). Подставляя ряд Пюизе с доминантным поведением $-f_0x^{m+1}/(m+1)$ в уравнение (3.5), мы получаем рекуррентное соотношение для коэффициентов многочлена $q(x)$:

$$q_l = \frac{(m + 1)}{(m - l + 1)f_0} \left\{ \sum_{k=0}^{l-1} q_k f_{l-k} + \sum_{k=1}^{l-1} (m + 1 - k) q_k q_{l-k} + g_{n+l-(2m+1)} \right\}, \tag{3.17}$$

где $1 \leq l \leq m$, $q_0 = -f_0/(m+1)$, $g_{-l} = 0$, $l \in \mathbb{N}$ и вторая сумма обращается в нуль, если $l = 1$. Новая дифференциальная система принимает вид

$$s_t = z + q(s), \quad z_t = -\{q_s(s) + f(s)\}\{z + q(s)\} - g(s). \tag{3.18}$$

Существует взаимно однозначное соответствие между неприводимыми инвариантными алгебраическими кривыми $F(x, y) = 0$ систем Льенара (3.1) из семейства (A) и неприводимыми инвариантными алгебраическими кривыми $G(s, z) = 0$ систем (3.18).

Теорема 3.3. *Предположим, что многочлен* $G(s, z) \in \mathbb{C}[s, z] \setminus \mathbb{C}$ *определяет неприводимую инвариантную алгебраическую кривую* $G(s, z) = 0$ *дифференциальной системы* (3.18), *где коэффициенты многочлена* $q(s)$ *удовлетворяют рекуррентному соотношению* (3.17). *Тогда степень многочлена* $G(s, z)$ *относительно переменной* s *равна либо* 0, *либо* $m + 1$.

Доказательство. Пусть переменная s является зависимой, а переменная z – независимой. Разложим на множители многочлен $G(s, z)$ в кольце $\mathbb{C}_{\infty}\{z\}[s]$. Обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $s(z)$ принимает вид

$$[\{q_s(s) + f(s)\}z + \{q_s(s) + f(s)\}q(s) + g(s)]s_z + q(s) + z = 0. \tag{3.19}$$

Вспомним, что степень многочлена $q(s)$ равна $m + 1$. Используя соотношение (3.18), мы получаем неравенства

$$\deg(\{q_s(s) + f(s)\}q(s) + g(s)) \leq m, \quad \deg(q_s(s) + f(s)) \leq m - 1. \tag{3.20}$$

Анализируя эти неравенства, мы видим, что уравнение (3.19) имеет только один доминантный баланс, порождающий ряды Пюизе с центром в точке $z = \infty$. Уравнения для этого баланса и соответствующие решения принимают вид

$$f_0 s^{m+1} - (m+1)z = 0, \quad s^{(k)}(z) = b_0^{(k)} z^{1/(m+1)}, \quad k = 1, \ldots, m+1, \tag{3.21}$$

где $b_0^{(1)}$, …, $b_0^{(m+1)}$ – корни уравнения $f_0 b_0^{m+1} - (m+1) = 0$. Баланс (3.21) является алгебраическим. Следовательно, число попарно различных рядов Пюизе с центром в точке $z = \infty$, удовлетворяющих уравнению (3.19), равно $m+1$. Раскладывая многочлен $G(s,z)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{z\}[s]$, находим

$$G(s,z) = \nu(z) \prod_{k=1}^{m+1} \{s - b_0^{(k)} z^{1/(m+1)} - \ldots\}^{n_k}, \tag{3.22}$$

где $\nu(z) \in \mathbb{C}[z]$ и $n_k = 0$ или $n_k = 1$. Представление (3.22) определяет многочлен из кольца $\mathbb{C}[s,z]$, только если или $n_k = 0$, $k = 1, \ldots, m+1$, или $n_k = 1$, $k = 1, \ldots, m+1$. В первом случае степень многочлена относительно s равна 0, во втором случае – $m+1$. □

Последняя теорема важна для приложений, поскольку оценки для степеней неприводимых инвариантных алгебраических кривых, установленные в этой теореме, могут быть использованы для нахождения всех неприводимых инвариантных алгебраических кривых систем (3.1) и (3.18) в явном виде. Из Теорем 3.3 и 1.3 следует, что число различных неприводимых инвариантных алгебраических кривых дифференциальных систем дифференциальных (3.18) конечно. То же самое верно и для систем Льенара (3.1) из семейства (A), см. Теорему 3.4 ниже.

Замена переменных $x = s$, $y = z + q(s) \leftrightarrow s = x$, $z = y - q(x)$ и Теорема 3.3 позволяют нам доказать следующие утверждения.

Лемма 3.2. *Пусть многочлен $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}$ определяет неприводимую инвариантную алгебраическую кривую $F(x,y) = 0$ дифференциальной системы Льенара* (3.1) *из семейства (A). Если $F(x,y)$ не имеет своим нулем в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ ряд Пюизе с доминантным поведением $-f_0 x^{n-m}/g_0$, то степень многочлена $F(x,y)$ относительно переменной y равна* 1.

Доказательство. Рассмотрим систему (3.18), эквивалентную рассматриваемой системе Льенара. Каждая неприводимая инвариантная алгебраическая кривая $F(x, y) = 0$, заданная выражением (3.12) при $k = 0$, соответствует неприводимой инвариантной алгебраической кривой $G(s, z) = 0$ системы (3.18) такой, что многочлен $G(s, z)$ не зависит от s. Последний, если существует, принимает вид $G(s, z) = z - z_0$, где $z_0 \in \mathbb{C}$. Следовательно, если исследуемая система Льенара имеет неприводимую инвариантную алгебраическую кривую (3.12) при $k = 0$, то соответствующий многочлен выглядит следующим обазом $F(x, y) = y - q(x) - z_0$. □

Теорема 3.4. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (A) имеет не более двух различных неприводимых инвариантных алгебраических кривых одновременно.*

Доказательство. Согласно Лемме 3.1 полиномиальные дифференциальные системы Льенара (3.1) не имеют инвариантных алгебраических кривых, которые определяются многочленами, не зависящими от y. Из Теоремы 1.2 следует, что не может существовать более одной неприводимой инвариантной алгебраической кривой, имеющей $k = 1$ в представлении (3.12).

Используя Лемму 3.2, мы видим, что, если $k = 0$ в представлении (3.12), то $N = 1$. В этом случае неприводимые инвариантные алгебраические кривые определяются многочленом $F(x, y) = y - q(x) - z_0$, где $z_0 \in \mathbb{C}$. Если такая кривая существует, то дифференциальное уравнение (3.5) должно иметь полиномиальное решение $y(x) = q(x) + z_0$. Подставляя эту функцию в уравнение (3.5) и учитывая тот факт, что коэффициенты многочленов $f(x)$, $g(x)$ и $q(x)$ определяются единственным образом, мы находим единственное значение z_0. Тот же самый результат можно получить, если вспомнить, что инвариантные алгебраические кривые в случае $k = 0$ и $N = 1$ могут быть найдены, если мы оборвем на нулевом члене ряд Пюизе с доминантным поведением $-f_0 x^{n-m}/g_0$. Изучая рекуррентное соотношение для коэффициентов этого ряда, которое аналогично выражению (3.17), мы видим, что первое появление коэффициента b_{m+1} в явном выражении для $\{b_{m+1+l}, l \in \mathbb{N}\}$ происходит с первой степенью

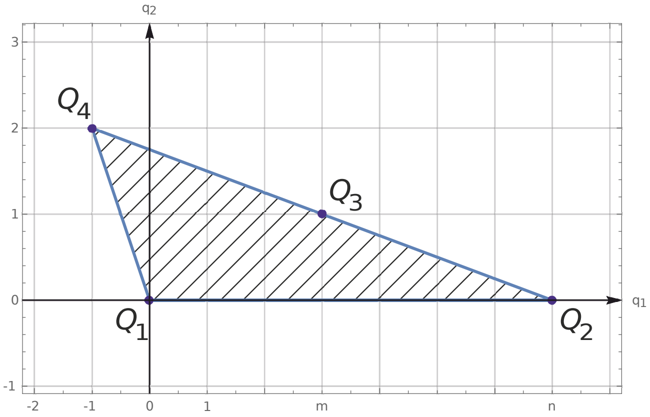


Рис. 3.2: Многоугольник Ньютона уравнения (3.5) при выполнении условий $n = 2m + 1$ и $g(0) \neq 0$, где $m = \deg f$ и $n = \deg g$.

и ненулевым множителем. Далее полагаем $b_{m+1} = z_0$.

Таким образом, мы получили следующие результаты. Если система Льенара (3.1) из семейства (A) имеет две различные неприводимые инвариантные алгебраические кривые, то для одной из кривых в представлении (3.12) $k = 1$, а другая определяется многочленом первой степени относительно переменной y: $F(x, y) = y - q(x) - z_0$. □

Следствие 1. Дифференциальные системы Льенара (3.1) из семейства (A) не имеют рациональных первых интегралов.

Далее рассмотрим системы Льенара (3.1) из семейства (B). Степени и структура неприводимых инвариантных алгебраических кривых таких систем Льенара существенно зависят от наличия рациональных решений квадратного уравнения

$$p^2 - \varrho p + (m + 1)\varrho = 0, \tag{3.23}$$

где введено обозначение

$$\varrho = 4(m + 1) - \frac{f_0^2}{g_0}. \tag{3.24}$$

Множество всех положительных рациональных чисел обозначим символом $\mathbb{Q}^+$. Пусть числа p_1 и p_2 являются решениями уравнения (3.23).

Теорема 3.5. *Пусть многочлен* $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}$ *определяет неприводимую инвариантную алгебраическую кривую* $F(x,y)=0$ *дифференциальной системы Льенара* (3.1) *из семейства (B). Справедливо одно из следующих утверждений.*

1. *Если* $p_1,\, p_2 \notin \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, *то степень относительно* y *многочлена* $F(x,y)$ *не превосходит числа* 2 *и*

$$\begin{gathered} F(x,y) = \left\{ \left\{ y - y_\infty^{(1)}(x) \right\}^{s_1} \left\{ y - y_\infty^{(2)}(x) \right\}^{s_2} \right\}_+, \\ \lambda(x,y) = -(s_1+s_2)f(x) - \left\{ s_1 \left(y_\infty^{(1)} \right)_x + s_2 \left(y_\infty^{(2)} \right)_x \right\}_+, \\ y_\infty^{(k)}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l^{(k)} x^{m+1-l}, \quad b_0^{(k)} = \frac{f_0}{p_k - 2(m+1)}, \quad k=1,2, \end{gathered} \tag{3.25}$$

где s_1 *и* s_2 *независимо принимают значение* 0 *или* 1, *причем* $s_1+s_2>0$. *Ряды* $y_\infty^{(k)}(x)$, $k=1,\,2$ *являются рядами Лорана и имеют единственным образом заданные коэффициенты.*

2. *Если* $p_k \in \mathbb{Q}^+$, $p_q \notin \mathbb{Q}^+$, *где или* $(k,q)=(1,2)$, *или* $(k,q)=(2,1)$, *то многочлен* $F(x,y)$ *и собственное значение* $\lambda(x,y)$ *принимают вид*

$$\begin{gathered} F(x,y) = \left\{ \prod_{j=1}^{N_k} \left\{ y - y_{j,\infty}^{(k)}(x) \right\} \left\{ y - y_\infty^{(q)}(x) \right\}^{s_q} \right\}_+, \\ \lambda(x,y) = -(N_k+s_q)f(x) - \left\{ \sum_{j=1}^{N_k} \left(y_{j,\infty}^{(k)} \right)_x + s_q \left(y_{j,\infty}^{(q)} \right)_x \right\}_+, \\ y_{j,\infty}^{(k)}(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} b_{l,j}^{(k)} x^{m+1-\frac{l}{n_k}}, \quad y_\infty^{(q)}(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} b_l^{(q)} x^{m+1-l}, \\ b_{0,j}^{(k)} = \frac{f_0}{p_k - 2(m+1)}, \quad b_0^{(q)} = \frac{f_0}{p_q - 2(m+1)}, \end{gathered} \tag{3.26}$$

где $N_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, s_q *равно* 0 *или* 1, $N_k + s_q > 0$. *Ряд Пюизе* $y_\infty^{(q)}(x)$ *является рядом Лорана и имеет единственным образом заданные коэффициенты. Ряды Пюизе* $\{y_{j,\infty}^{(k)}(x),\ j=1,\,\ldots,\,N_k\}$ *имеют попарно* *различные коэффициенты* $\{b^{(k)}_{n_k p_k, j},\ j = 1, \ldots, N_k\}$. *Число* n_k *определяется с помощью равенства* $p_k = l_k/n_k$, *где* l_k *и* n_k *– взаимно простые натуральные числа.*

3. *Если* $p_1,\ p_2 \in \mathbb{Q}^+$, *то многочлен* $F(x,y)$ *и собственное значение* $\lambda(x,y)$ *выглядят следующим образом:*

$$\begin{gathered}
F(x,y) = \left\{ \prod_{j=1}^{N_1} \left\{ y - y^{(1)}_{j,\infty}(x) \right\} \prod_{j=1}^{N_2} \left\{ y - y^{(2)}_{j,\infty}(x) \right\} \right\}_+ , \\
\lambda(x,y) = -(N_1+N_2) f(x) - \left\{ \sum_{j=1}^{N_1} \left(y^{(1)}_{j,\infty} \right)_x + \sum_{j=1}^{N_2} \left(y^{(2)}_{j,\infty} \right)_x \right\}_+ , \qquad (3.27) \\
y^{(k)}_{j,\infty}(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} b^{(k)}_{l,j}\, x^{m+1-\frac{l}{n_k}}, \quad b^{(k)}_{0,j} = \frac{f_0}{p_k - 2(m+1)},\ k = 1, 2,
\end{gathered}$$

где $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $N_1 + N_2 > 0$. *Ряды Пюизе* $\{y^{(k)}_{j,\infty}(x),\ j = 1, \ldots, N_k\}$ *имеют попарно различные коэффициенты* $\{b^{(k)}_{n_k p_k, j},\ j = 1, \ldots, N_k\}$. *Число* n_k *определяется с помощью равенства* $p_k = l_k/n_k$, *где* l_k *и* n_k *– взаимно простые натуральные числа и* $k = 1,\ 2$.

4. *Если* $p_1 p_2 = 0$, *то* $p_1 = p_2 = 0$. *Многочлен* $F(x,y)$ *и собственное значение* $\lambda(x,y)$ *имеют вид*

$$\begin{gathered}
F(x,y) = y + \frac{f_0}{2(m+1)} x^{m+1} - \sum_{l=1}^{m+1} b_l x^{m+1-l}, \\
\lambda(x,y) = -f(x) + \frac{f_0}{2} x^m - \sum_{l=1}^{m} (m+1-l) b_l x^{m-l},
\end{gathered} \qquad (3.28)$$

где коэффициенты $b_1, \ldots, b_{m+1}$ *определяются единственным образом. Также справедливо соотношение* $4(m+1)g_0 - f_0^2 = 0$.

Доказательство. Воспользуемся Теоремой 2.5 и Леммой 3.1. Найдем ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, которые удовлетворяют уравнению (3.5) при выполнении условия $n = 2m+1$. Анализируя многоугольник Ньютона, представленный на Рисунке 3.1, мы видим, что существует только один доминантный баланс, порождающий степенные асимптотики в окрестности точки $x = \infty$. Этот баланс определяется ребром $[Q_2, Q_4]$. Укороченное обыкновенное дифференциальное уравнение для этого баланса и его степенные решения принимают вид

$$yy_x + f_0x^my + g_0x^{2m+1} = 0: \quad y^{(k)}(x) = b_0^{(k)}x^{m+1}, \quad k = 1, 2, \tag{3.29}$$

где коэффициенты $b_0^{(1,2)}$ удовлетворяют уравнению $(m + 1)b_0^2 + f_0b_0 + g_0 = 0$. Вычисляя производную по Гато этого баланса на его степенных решениях, получаем уравнение для определения показателей Ковалевской: $(2(m + 1) - p)b_0 + f_0 = 0$. Выражая b_0 из этого равенства и подставляя результат в уравнение $(m + 1)b_0^2 + f_0b_0 + g_0 = 0$, приходим к соотношению (3.23). Продолжим полученные степенные асимптотики до асимптотических рядов Пюизе. Ряд Пюизе с доминантным поведением $b_0^{(k)}x^{m+1}$ обозначим символом $y_\infty^{(k)}(x)$, $k = 1$, 2. Также мы вводим нижний индекс j, в тех случаях когда соответствующий ряд не единственный.

Если уравнение (3.23) не имеет положительных рациональных решений, то коэффициенты всех рядов Пюизе, порождаемых асимптотиками (3.29), однозначно определены. Поскольку число различных рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющих уравнению (3.5), конечно и равно двум, то из Теоремы 2.5 следует, что степень многочлена $F(x, y)$ относительно переменной y ограничена числом 2. Разложим многочлен $F(x, y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$. В результате получим представление (3.25).

Если же одно из решений уравнения (3.23), определяющих показатели Ковалевской, является положительным рациональным числом, а другое – нет, то ряды Пюизе в первом случае имеют произвольный коэффициент и существуют лишь при выполнении условия совместности. Во втором случае ряд Пюизе определяется единственным образом. Мы приходим к соотношению (3.26). Многочлен, задающий инвариантную алгебраическую кривую, неприводим. Следовательно, коэффициенты $\{b_{n_kp_k,\,j}^{(k)}, j = 1, \ldots, N_k\}$, соответствующие положительному рациональному показателю Ковалевской p_k, должны быть попарно различными. Число n_k находим с помощью соотношения $p_k = l_k/n_k$, где l_k и n_k – взаимно простые натуральные числа.

Если оба решения уравнения (3.23) являются положительными рациональными числами, то ряд Пюизе $y^{(k)}_{j,\infty}(x)$ имеет произвольный коэффициент $b^{(k)}_{n_k p_k,\, j}$ и существует лишь при выполнении условия совместности для показателя Ковалевской p_k, $k = 1$, 2. С помощью Теоремы 2.5 мы находим представление многочлена $F(x, y)$ как в соотношении (3.27). Поскольку многочлен $F(x, y)$ неприводим, мы заключаем, что коэффициенты $\{b^{(k)}_{n_k p_k,\, j}$, $j = 1, \ldots,$ $N_k\}$ с одинаковым верхним индексом должны быть попарно различными, $k = 1$, 2. Числа n_1 и n_2 можно вычислить аналогично предыдущему случаю.

Нам осталось рассмотреть ситуацию, в которой корень уравнения $(m + 1)b_0^2 + f_0 b_0 + g_0 = 0$ становится кратным. В результате находим $4(m + 1)g_0 - f_0^2 = 0$ и $b_0 = -f_0/(2\{m + 1\})$. Подставляя эти соотношения в уравнения $(2(m + 1) - p)b_0 + f_0 = 0$, вычисляем показатель Ковалевской: $p = 0$. Показатель Ковалевской не является положительным рациональным числом. Следовательно, соответствующему уравнению (3.5) удовлетворяет только один ряд Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$. Этот ряд имеет целые показатели степеней и единственным образом определенные коэффициенты. Единственная неприводимая инвариантная алгебраическая кривая задается многочленом первой степени относительно переменной y.

Собственные значения $\lambda(x, y)$ инвариантных алгебраических кривых мы находим с помощью соотношения (2.7). Поскольку мы рассмотрели все возможные комбинации рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, которые удовлетворяют уравнению (3.5), мы заключаем, что нет других неприводимых инвариантных алгебраических кривых. □

При доказательстве Теоремы 3.5 мы также установили, что в случае представления (3.26), если $p_k \in \mathbb{N}$ и условие совместности для ряда $y^{(k)}_{j,\infty}(x)$ не

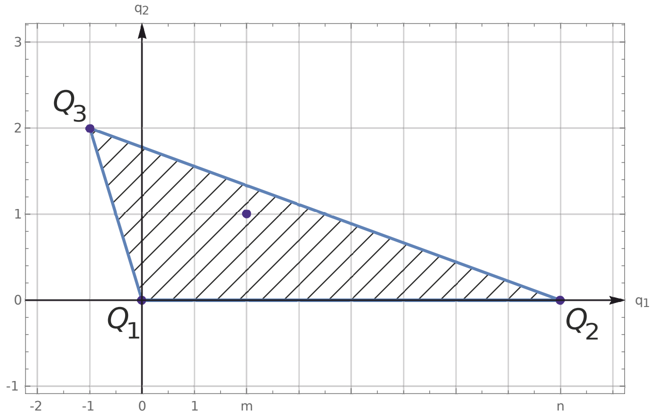


Рис. 3.3: Многоугольник Ньютона уравнения (3.5) при ограничениях $n > 2m+1$ и $g(0) \neq 0$, где $m = \deg f$ и $n = \deg g$.

выполнено, то неприводимая алгебраическая кривая задается многочленом $F(x,y) = y - b_0^{(q)} x^{m+1} - b_1^{(q)} x^m - \ldots - b_{m+1}^{(q)}$. Если подобная ситуация возникает в случае представления (3.27), то или $N_1 = 0$, или $N_2 = 0$ и произведение в представлении (3.27), включающее соответствующие ряды, отсутствует. Более того, если p_1, $p_2 \in \mathbb{N}$ и условие совместности не выполнено для каждого из рядов, то соответствующая система Льенара не имеет инвариантных алгебраических кривых.

Далее рассмотрим полиномиальные системы Льенара из семейства (C). Напоминаем, что мы используем обозначения $\deg f = m$ и $\deg g = n$.

Теорема 3.6. *Пусть многочлен* $F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}$ *определяет неприводимую инвариантную алгебраическую кривую* $F(x,y) = 0$ *дифференциальной системы Льенара* (3.1) *из семейства* (C). *Тогда этот многочлен и собственное значение* $\lambda(x,y)$ *инвариантной алгебраической кривой* $F(x,y) = 0$ *имеют вид*

$$F(x,y) = \left\{ \prod_{j=1}^{N_1} \left\{ y - y_{j,\infty}^{(1)}(x) \right\} \prod_{j=1}^{N_2} \left\{ y - y_{j,\infty}^{(2)}(x) \right\} \right\}_+, \tag{3.30}$$

$$\lambda(x,y) = -(N_1 + N_2) f - \left\{ N_1 h_x^{(1)} + N_2 h_x^{(2)} \right\}_+ \tag{3.31}$$

где ряды Пюизе $y_{j,\infty}^{(1,2)}(x)$ *представляются в виде*

$$\begin{gathered}
y_{j,\infty}^{(1,2)}(x) = h^{(1,2)}(x) + \sum_{k=2(n+1)}^{+\infty} b_{k,j}^{(1,2)} x^{\frac{n+1}{2}-\frac{k}{2}},\\
h^{(1,2)}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} b_{k}^{(1,2)} x^{\frac{n+1}{2}-\frac{k}{2}},
\end{gathered} \qquad (3.32)$$

и N_1, $N_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $N_1 + N_2 \geq 1$. *Коэффициенты* $b_{2(n+1),j}^{(1,2)}$ *с одинаковым верхним индексом попарно различны, а коэффициенты* $b_{l,j}^{(1,2)}$ *при* $l > 2(n+1)$ *выражаются через* $b_{2(n+1),j}^{(1,2)}$. *Если* n *– нечетное число, то ряды Пюизе являются рядами Лорана,* $b_{2l-1}^{(1,2)} = 0$ *при* $1 \leq l \leq n+1$ *и* $b_{2l-1,j}^{(1,2)} = 0$ *при* $l > n+1$, *где* $l \in \mathbb{N}$. *Также* $N_k = 1$, *если* n *– нечетное число и* $N_l = 0$, *где* k, $l = 1,\, 2$ *и* $k \neq l$. *Если* n *– четное число, то* $N_1 = N_2$.

Доказательство. Воспользуемся Леммой 3.1 и Теоремой 2.5. По Теореме 2.5 ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, которые появляются в представлении (2.7), удовлетворяют уравнению (3.5). Найдем все ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, являющиеся решениями уравнения (3.5) при $n > 2m+1$. Опять будем использовать алгоритмы степенной геометрии [67, 68]. Многоугольник Ньютона уравнения (3.5) при выполнении ограничения $n > 2m+1$ изображен на Рисунке 3.1. Существует только один доминантный баланс, который порождает ряды Пюизе с центром в точке $x = \infty$. Этот баланс соответствует ребру $[Q_2, Q_3]$. Укороченное обыкновенное дифференциальное уравнение для этого баланса и его степенные решения имеют вид

$$yy_x + g_0 x^n = 0, \quad y^{(1,2)}(x) = b_0^{(1,2)} x^{\frac{n+1}{2}}, \quad b_0^{(1,2)} = \pm\frac{\sqrt{-2(n+1)g_0}}{(n+1)}. \qquad (3.33)$$

Вычисляя производную по Гато доминантного баланса на степенных решениях, находим показатель Ковалевской. Для каждого из степенных решений показатель Ковалевской имеет вид $l_0 = n+1$. Таким образом, мы получаем два семейства рядов Пюизе $y_\infty^{(1)}(x)$ и $y_\infty^{(2)}(x)$ с доминантным поведением (3.33).

Каждый из этих рядов имеет один произвольный коэффициент, стоящий при мономе $x^{-(n+1)/2}$. Ряды существуют лишь при выполнении условий совместности для показателей Ковалевской. Если n – нечетное число, то ряды Пюизе (3.32) являются рядами Лорана.

Раскладывая многочлен $F(x, y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ и вычисляя полиномиальную часть, мы получаем представление (3.30). Из неприводимости многочлена $F(x, y)$ следуют ограничения на коэффициенты $b_{2(n+1),j}^{(1,2)}$ с одинаковым верхним индексом.

Далее предположим, что n является нечетным числом и $N_2 = 0$. Покажем, что в этом случае выполнено $N_1 = 1$. Все ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, появляющиеся в представлении (3.30), являются рядами Лорана с одинаковыми начальными отрезками. Введем новую переменную z по правилу z

$$z = y - \sum_{l=0}^{\frac{n+1}{2}} b_{2l}^{(1)} x^{\frac{n+1}{2}-l}. \tag{3.34}$$

Вычисляя проекцию в выражении (3.30), находим

$$\left\{ \prod_{j=1}^{N_1} \left(z - b_{n+3}^{(1)} x^{-1} - \ldots - b_{2(n+1),j}^{(1)} x^{-\frac{n+1}{2}} - \ldots \right) \right\}_+ = z^{N_1}. \tag{3.35}$$

Требуя, чтобы получающийся многочлен был неприводим, находим $N_1 = 1$. Повторяем те же самые рассуждения для случай $N_1 = 0$ и нечетного n.

Подставляя $L = 0$ и ряды (3.32) в представление (2.7), мы находим собственное значение, заданное выражением (3.31).

Пусть теперь n – четное число. Вычислим коэффициент при мономе $y^{N_1+N_2-1}x^{(n+1)/2}$ в представлении (3.30). В результате находим $(N_1 - N_2)b_0^{(1)}$. Поскольку моном $y^{N_1+N_2-1}x^{(n+1)/2}$ не является элементом кольца $\mathbb{C}[x, y]$ и $b_0^{(1)} \neq 0$, мы получаем равенство $N_1 = N_2$. Доказательство теоремы закончено.

□

Проведем анализ полученных результатов. Рассмотрим полиномиальные дифференциальные системы Льенара из семейства (B). Мы видели, что показатели Ковалевской доминантного баланса в точке $x=\infty$ для соответствующего уравнения (3.5) зависят от параметров f_0 и g_0. В Теоремах 3.2 и 3.6 было доказано, что такая ситуация не может возникать для систем Льенара из семейств (A) и (C). Таком образом, задача классификации инвариантных алгебраических кривых для систем Льенара при ограничении $\deg g = 2\deg f + 1$ является чрезвычайно сложной. В рамках метода рядов Пюизе каждый случай положительного рационального показателя Ковалевской p_j, для которого выполнено $0 < p_j \leq m+1$, должен рассматриваться независимо.

Отметим, что инвариантные алгебраические кривые из Теорем 3.2, 3.6 и 3.5 существуют лишь при выполнении определенных ограничений на параметры исходных систем. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.7. *Типичная полиномиальная дифференциальная система Льенара* (3.1) *при фиксированных степенях многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *не имеет конечных инвариантных алгебраических кривых, если выполнены условия* $\deg g > \deg f$ *и* $(\deg f, \deg g) \neq (0,1)$.

Доказательство. Обозначим множество всех полиномиальных дифференциальных систем Льенара с фиксированными степенями многочленов $f(x)$ и $g(x)$ символом $L_{m,n}$. Любая система Льенара с фиксированными коэффициентами многочленов $f(x)$ и $g(x)$ может быть отождествлена с точкой из множества $\mathbb{C}^{m+n} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$.

Сначала рассмотрим системы из семейства (A). Подмножество всех полиномиальных систем Льенара из семейства (A), таких что существует семейство формальных рядов Пюизе $y_{\infty}^{(1)}(x)$, удовлетворяющих соответствующему уравнению (3.5), имеет нулевую меру Лебега во множестве всех таких систем. Действительно, ряды $y_{\infty}^{(1)}(x)$ существуют лишь при выполнении условия совместности. Нам нужно показать, что условие совместности не может выполняться автоматически. С этой целью будем следить за появлением коэффициента g_{n-m} в семействе рядов $y_{\infty}^{(1)}(x)$. Воспользуемся представлением

$$y_{\infty}^{(1)}(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} v_l(x) \left(g_{n-m}\right)^l, \tag{3.36}$$

где $\{v_l(x)\}$ – элементы поля $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}$. Условие совместности возникает при нахождении коэффициента монома x^0. Подставляя представление (3.36) в уравнение (3.5) и приравнивая нулю коэффициенты при $(g_{n-m})^l$, где $l = 0$, 1, мы находим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$v_0 v_{0,x} + f(x) v_0 + \hat{g}(x) = 0, \quad v_0 v_{1,x} + (f(x) + v_{0,x}) v_1 + x^m = 0. \tag{3.37}$$

Здесь использованы обозначения $\hat{g}(x) = g(x) - g_{n-m} x^m$. Доминантное поведение ряда $v_0(x)$ имеет вид

$$v_0(x) = -\frac{f_0}{m+1} x^{m+1} + o(x^{m+1}), \quad x \to \infty. \tag{3.38}$$

Анализируя обыкновенное дифференциальное уравнение для ряда $v_1(x)$, мы видим, что оно должно было бы иметь степенное решение вида $v_1(x) = e_0 x^0$, $e_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $x \to \infty$, но не имеет. Также дифференциальные уравнения для рядов $v_l(x)$, $l \geq 2$ имеет нулевое решение, если $v_1(x)$ обращается в нуль. Следовательно, условие совместности, обеспечивающее существование ряда $y_{\infty}^{(1)}(x)$, представляет собой многочлен первой степени относительно g_{n-m} и не может выполняться тождественно. Тот же результат можно получить с помощью рекуррентного соотношения (3.17). Таким образом, необходимо рассматривать системы с инвариантными алгебраическими кривыми, порождающие многочлены которых не имеют своим нулем в кольце $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}[y]$ ряд $y_{\infty}^{(1)}(x)$. Из Теоремы 3.2 следует, что если существует неприводимая инвариантная алгебраическая кривая, то она единственная и определяется многочленом $F(x, y) = y - p(x) - z_1$, где $z_1 \in \mathbb{C}$ и многочлен $p(x)$ степени $n - m$ представлен в соотношении (3.15). Рассмотрим подмножество систем Льенара, имеющих инвариантную алгебраическую кривую $y - p(x) - z_1 = 0$. В этом случае соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение (3.5) имеет полиномиальное решение $y(x) = p(x) + z_1$. Из этого уравнение мы можем найти многочлен $g(x)$. В результате получаем $g(x) = -(p + z_1)(p_x + f)$. Мы видим, что размерность подмножества рассматриваемых систем Льенара меньше размерности $L_{m,n}$.

Далее рассмотрим системы Льенара из семейства (B). Из Теоремы 3.5 следует, что у типичной системы Льенара из семейства (B) могут быть неприводимые инвариантные алгебраические кривые, заданные только многочленами степеней 1 и 2 относительно переменной y. Предположим, что существует неприводимая инвариантная алгебраическая кривая $y - q_l(x) = 0$, где $l = 1$ или 2. В этом выражении многочлен $q_l(x)$ имеет степень $m+1$ и определяется по ряду Пюизе $y_{\infty}^{(l)}(x)$ следующим образом: $q_l(x) = \{y_{\infty}^{(l)}(x)\}_{+}$. Аналогично случаю систем Льенара из семейства (A), мы вычисляем многочлен $g(x)$ с помощью уравнения (3.5). Мы видим из соотношения $g(x) = -q_l(f + q_{l,x})$, что подмножество систем Льенара из семейства (B), у которых существует инвариантная алгебраическая кривая $y - q_l(x) = 0$, имеет размерность $2m+3$, в то время как размерность множества $L_{m,n}$ равна $m + n + 2 = 3(m + 1)$. Следовательно, рассматриваемое подмножество систем Льенара имеет нулевую меру Лебега в $L_{m,n}$, если выполнено $m > 0$. Предположим, что типичная система Льенара из семейства (B) имеет гиперэллиптическую инвариантную алгебраическую кривую $(y + u(x))^2 + w(x) = 0$. По Теореме 3.5 такая кривая единственная. Также несложно показать, что многочлен $u(x)$ имеет степень $m+1$, а многочлен $w(x)$ имеет степень $2m+2$. Подставим многочлен $F(x, y) = (y + u(x))^2 + w(x)$ в уравнение в частных производных

$$yF_x - (f(x)y + g(x))F_y - \lambda(x, y)F = 0. \tag{3.39}$$

Приравняем нулю коэффициенты при различных степенях переменной y. Поскольку собственное значение $\lambda(x, y)$ не зависит от y, мы можем выразить многочлены $f(x)$ и $g(x)$ через $u(x)$ и $v(x)$. В результате находим

$$f(x) = u_x + \frac{uw_x}{2w}, \quad g(x) = \frac{w_x}{2} + \frac{u^2 w_x}{2w}. \tag{3.40}$$

Из этого выражения можно заключить, что любой нуль многочлена $w(x)$ является также нулем многочлена $u(x)$. Многочлен $u(x)$ параметризуется самое большее с помощью $m+2$ параметров, а многочлен $w(x)$ добавляет только один новый параметр. Таким образом, размерность множества систем Льенара из семейства (B), имеющих гиперэллиптическую инвариантную алгебраическую кривую $(y+u(x))^2 + w(x) = 0$, равна самое большее числу $m+3$. При этом размерность множества $L_{m,2m+1}$ есть $3m+3$.

Нам осталось рассмотреть системы Льенара из семейства (C). Проанализируем зависимость рядов Пюизе $y_\infty^{(1)}(x)$ и $y_\infty^{(2)}(x)$ от коэффициента f_m. Рассмотрим представления

$$y_\infty^{(k)}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} v_l^{(k)}(x) \left(f_m\right)^l, \quad k = 1, 2, \tag{3.41}$$

где $\{v_l^{(k)}(x)\}$ – элементы поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$. Введем следующее обозначение: $\hat{f}(x) = f(x) - f_m$. Подставляя эти представления в уравнение (3.5) и приравнивая нулю коэффициенты при $(f_m)^l$, где $l = 0$ и 1, мы приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$v_0 v_{0,x} + \hat{f}(x) v_0 + g(x) = 0, \quad v_0 v_{1,x} + (\hat{f}(x) + v_{0,x}) v_1 + v_0 = 0. \tag{3.42}$$

Здесь мы опустили верхний индекс.

Предположим, что число n четное. Ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, которые удовлетворяют системе (3.42), выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered} v_0^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(k)} x^{\frac{n+1-k}{2}}, \quad k = 1, 2, \quad c_0^{(1,2)} = \pm \frac{\sqrt{-2(n+1)g_0}}{n+1}; \\ v_1^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} e_j^{(k)} x^{\frac{2-k}{2}}, \quad k = 1, 2, \quad e_0^{(1,2)} = -\frac{2}{n+1}. \end{gathered} \tag{3.43}$$

Теорема 3.1 определяет следующее необходимое условие существования инвариантной алгебраической кривой $F(x, y) = 0$: $N_1 b^{(1)}_{n+3} + N_2 b^{(2)}_{n+3} = 0$. Вспомним, что $b^{(k)}_{n+3}$ является коэффициентом одного из рядов семейства $y^{(k)}_{\infty}(x)$ и N_k представляет собой число вхождений рядов семейства $y^{(k)}_{\infty}(x)$ в разложение многочлена $F(x, y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}[y]$. Из Теоремы 3.6 следует равенство $N_1 = N_2$. Вычисляя первые пять коэффициентов ряда $v^{(k)}_1(x)$, мы видим, что выражение $e^{(1)}_4 + e^{(2)}_4$ не является тождественным нулем для любого многочлена $f(x) \not\equiv 0$ степени $m < (n-1)/2$. Следовательно, выражение $N_1(b^{(1)}_{n+3} + b^{(2)}_{n+3})$ является многочленом относительно f_m с ненулевым коэффициентом при f_m в общем случае.

Предположим, что число n нечетное. Ряды Пюизе $v^{(k)}_0(x)$ и $v^{(k)}_1(x)$, удовлетворяющие системе (3.42), имеют вид (3.43), где коэффициенты $\left\{c^{(k)}_j\right\}$ и $\left\{e^{(k)}_j\right\}$ с нечетными нижними индексами равны нулю. Далее опять рассмотрим необходимое условие существования инвариантной алгебраической кривой: $N_1 b^{(1)}_{n+3} + N_2 b^{(2)}_{n+3} = 0$. В отличие от предыдущего случая числа N_1 и N_2 не обязательно равны. Вычислим первые три нетривиальных коэффициента рядов $v^{(k)}_1(x)$, $k = 1, 2$. Мы видим, что выражение $N_1 e^{(1)}_4 + N_2 e^{(2)}_4$ тождественно не обращается в нуль для любых чисел N_1, $N_2 \geq 0$, $N_1 + N_2 > 0$ и любого ненулевого многочлена $f(x)$ степени $m < (n-1)/2$. Следовательно, выражение $N_1 b^{(1)}_{n+3} + N_2 b^{(2)}_{n+3}$, рассматриваемое как многочлен относительно параметра f_m, имеет ненулевой коэффициент при f_m в общем случае. Мы заключаем, что типичная система Льенара из семества (C) не имеет инвариантных алгебраических кривых.

$\square$

Отметим, что в Теореме 3.7 мы рассматривали, так называемые, конечные инвариантные алгебраические кривые. Продолжая систему (3.1) на комплексную проективную плоскость $\mathbb{C}P^2$, как описано в Разделе 1.1, мы убеждаемся, что бесконечно удаленная прямая всегда инвариантна для рассматриваемой системы.

При условиях $\deg f = 0$ и $\deg g = 1$ система Льенара становится линейной. Любая такая система имеет две инвариантные прямые.

3.2 Интегрируемость полиномиальных дифференциальных систем Льенара

В последние годы интегрируемость систем Льенара активно изучается в научной литературе. Используются различные методы и алгоритмы. Ниже перечислим наиболее важные исследования:

1. локальный анализ [133–137] и формальные первые интегралы [113, 138];
2. классический групповой анализ [139, 140] и λ-симметрии [26];
3. локальные [141–145] и нелокальные преобразования [24, 146–150];
4. дифференциальная теория Галуа [151];
5. обобщенный метод Прелля–Зингера [152] и теория интегрируемости Дарбу [81, 146, 149, 153–160].

Примеры интегрируемых и разрешимых систем Льенара представлены в справочнике Э. Камке (E. Kamke) [161], а также в справочнике А. Д. Полянина и В. Ф. Зайцева [162]. Преобразование $y(x) = 1/w(x)$ связывает дифференциальное уравнение Абеля второго рода (3.5) с дифференциальным уравнением Абеля первого рода

$$w_x = g(x)w^3 + f(x)w^2. \tag{3.44}$$

Следовательно, результаты, полученные для дифференциальных уравнений Абеля [141–143, 163–165], непосредственно преносятся на системы Льенара.

Также отметим некоторые работы, посвященные интегрируемости обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в которых как частные случаи возникают дифференциальные уравнения Льенара [25, 166–168]. К сожалению, в большинстве научных работ, затрагивающих глобальную проблему интегрируемости, дается вывод только достаточных условий интегрируемости. Таким образом, подобные работы не содержат классификации интегрируемых по Дарбу и Лиувиллю подсистем Льенара. Таким образом, поиск всех интегрируемых подсистем Льенара для фиксированных степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$ является актуальной задачей.

Целью настоящего раздела является изучение общих свойств интегрируемости полиномиальных дифференциальных систем Льенара. Мы будем интересоваться необходимыми и достаточными условиями интегрируемости по Дарбу и Лиувиллю. Мы предполагаем, что выполнено условие $f(x) \not\equiv 0$. Если положить $f(x) \equiv 0$, то любая система Льенара является гамильтоновой с полиномиальным первым интегралом

$$I(x,y) = y^2 + 2\int_0^x g(s)ds. \tag{3.45}$$

Дж. Ллибре (J. Llibre) и К. Валлс (C. Valls) доказали [153], что системы Льенара (3.1) при выполнении условия $\deg g \leq \deg f$ не имеют первых интегралов, являющихся функциями Лиувилля, за исключением простого случая: $g(x) = \alpha f(x)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. В связи с этим далее мы будем изучать системы Льенара (3.1), для которых выполнено неравенство $\deg g > \deg f$.

Как свойства инвариантных алгебраических кривых, так и свойства первых интегралов и интегрирующих множителей существенно различны в следующих случаях:

(A) $\deg f < \deg g < 2\deg f + 1$;

(B) $\deg g = 2\deg f + 1$;

(C) $\deg g > 2\deg f + 1$.

В частности, мы покажем, что системы Льенара из семейств (A) и (C) не интегрируемы по Дарбу. Однако, при любых степенях многочленов $f(x)$ и $g(x)$ существуют интегрируемые по Лиувиллю подсистемы. Системы Льенара из семейства (B), наоборот, при различных значениях параметров имеют не только первые интегралы Лиувилля, но и первые интегралы Дарбу и рациональные первые интегралы. Этот факт также отмечался на примерах многими математиками [26, 139–141, 145, 147, 152]. Однако, доказательство этого результата в настоящей диссертационной работе будет дано впервые. Мы не накладываем нетривиальные ограничения на коэффициенты многочленов $f(x)$ и $g(x)$ за исключением систем Льенара из семейства (B). Как правило, мы будем рассматривать нерезонансные системы Льенара из семейства (B). Система Льенара (3.1) является резонансной на бесконечности, если старшие коэффициенты f_0 и g_0 многочленов $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют резонансному условию, приведенному в Разделе 3.2.1. Резонанс на бесконечности может возникать только в случае $\deg g = 2\deg f + 1$. Заметим, что подмножество полиномиальных резонансных систем Льенара имеет нулевую меру Лебега во множестве всех полиномиальных систем Льенара с фиксированными степенями многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Наши результаты также справедливы и для резонансных на бесконечности систем, но они не являются полными. Для всех остальных полиномиальных систем Льенара мы приведем полную классификацию интегрируемых по Лиувиллю подсемейств. Также мы дадим вывод необходимых и достаточных условий существования неавтономных первых интегралов Дарбу и неавтономных последних множителей Дарбу – Якоби.

Напомним, что интегрирующие множители и последние множители Якоби определяются с точностью до умножения на ненулевую постоянную. Два интегрирующих множителя или два последних множителя Якоби мы считаем эквивалентными, если их частное постоянно. Мы не будем различать такие объекты. Единственность далее понимается именно в таком смысле.

Лемма 3.3. *Пусть полиномиальная система Льенара* (3.1)*, удовлетворяющая ограничению* $\deg g > \deg f$*, имеет экспоненциальный инвариант вида* $E(x, y) = \exp[h(x, y)]$*,* $h(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ *с собственным значением* $\varrho(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ *степени, не превышающей числа* $\deg g - 1$*. Тогда многочлен* $\varrho(x, y)$ *делится на* y *в кольце* $\mathbb{C}[x, y]$*.*

Доказательство. Многочлен $h(x, y)$ удовлетворяет следующему линейному неоднородному уравнению в частных производных:

$$yh_x - \{f(x)y + g(x)\}h_y = \varrho(x, y). \tag{3.46}$$

Представим функции $h(x, y)$ и $\varrho(x, y)$ в виде многочленов относительно y с коэффициентами, зависящими от x. Подставим эти представления $h(x, y) = h_0(x) + h_1(x)y + \ldots$ и $\varrho(x, y) = \varrho_0(x) + \varrho_1(x)y + \ldots$ в уравнение (3.46) и найдем коэффициент при мономе y^0. В результате мы приходим к соотношению $g(x)h_1(x) = -\varrho_0(x)$. Степень многочлена $\varrho_0(x)$ не превосходит числа $\deg g - 1$. Следовательно, справедливы соотношения $h_1(x) \equiv 0$ и $\varrho_0(x) \equiv 0$. В результате многочлен $\varrho(x, y)$ определяется выражением $\varrho(x, y) = (\varrho_1(x) + \ldots)y$. На этом мы заканчиваем доказательство.

□

В качестве следствия Леммы 3.3 покажем, что интегрируемые по Дарбу или Лиувиллю полиномиальные системы Льенара необходимо обладают инвариантными алгебраическими кривыми.

Теорема 3.8. *Если полиномиальная дифференциальная система Льенара* (3.1)*, удовлетворяющая условию* $\deg g > \deg f$*, не имеет инвариантных алгебраических кривых, то эта система не интегрируема по Дарбу или Лиувиллю.*

Доказательство. Несложно убедиться, что полиномиальная дифференциальная система (1.1) без инвариантных алгебраических кривых не может иметь рациональных первых интегралов.

Будем доказывать от противного. Предположим, что рассматриваемая система Льенара (3.1) интегрируема по Дарбу, но не имеет инвариантных алгебраических кривых. Тогда первый интеграл Дарбу является экспоненциальным инвариантом этой системы, имеющим нулевое собственное значение. Следовательно, выражение стоящее в показателе экспоненты этого инварианта, представляет собой рациональный первый интеграл системы. Мы пришли к противоречию.

Теперь предположим, что исследуемая система Льенара (3.1) интегрируема по Лиувиллю, но не имеет инвариантных алгебраических кривых. Тогда существует интегрирующий множитель, являющийся функцией Дарбу. Этот интегрирующий множитель представляет собой экспоненциальный инвариант и имеет вид $E(x, y) = \exp[h(x, y)]$. Вычисляя дивергенцию соответствующего векторного поля

$$\mathcal{X} = y\frac{\partial}{\partial x} - (f(x)y + g(x))\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.47}$$

находим: $\mathrm{div}\mathcal{X} = -f(x)$. Дивергенция не зависит от y. При этом согласно Лемме 3.3 собственное значение экспоненциального инварианта $E(x, y) = \exp[h(x, y)]$ делится на y, если выполнено $\deg g > \deg f$. Мы видим, что условие (2.6) не выполняется. □

Следствие 1. Типичная полиномиальная дифференциальная система Льенара (3.1) при фиксированных степенях многочленов $f(x)$ и $g(x)$ не интегрируема ни по Дарбу, ни по Лиувиллю, если выполнены условия $\deg g > \deg f$ и $(\deg f, \deg g) \neq (0, 1)$.

Это утверждение следует из Теорем 3.7 и 3.8. Несложно заметить, что системы Льенара являются линейными при выполнении условия $(\deg f, \deg g)$

$= (0, 1)$. Такие системы всегда имеют две различные инвариантные прямы и интегрируемы по Дарбу.

Мы заключаем, что интегрируемая по Лиувиллю полиномиальная дифференциальная система Льенара (3.1) при ограничении $\deg f < \deg g$ необходимо обладает хотя бы одной инвариантной алгебраической кривой. Как мы видели в Разделе 3.1, алгебраические инварианты, порождающие инварианты алгебраические кривые, имеют существенно различные разложения на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ в следующих трех случаях:

(A) $\deg f < \deg g < 2 \deg f + 1$;

(B) $\deg g = 2 \deg f + 1$;

(C) $\deg g > 2 \deg f + 1$.

Далее будем исследовать интегрируемость систем Льенара из семейств (A), (B) и (C) по отдельности.

3.2.1 Системы Льенара из семейства (A)

Исследуем возможность существования экспоненциальных инвариантов с неполиномиальными аргументами для систем Льенара (3.1) из семейства (A). Здесь и далее мы используем обозначения Раздела 3.1. В частности, многочлены $q(x)$ и $p(x)$ представляют собой начальные отрезки рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, которые удовлетворяют уравнению (3.5) при выполнении условия $\deg f < \deg g < 2 \deg f + 1$. Эти многочлены вводятся в соотношении (3.15).

Лемма 3.4. *Дифференциальные системы Льенара* (3.1) *из семейства (A) не имеют экспоненциальных инвариантов вида* $E(x, y) = \exp\{h(x, y)/r(x, y)\}$, *где* $h(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ *и* $r(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \setminus \mathbb{C}$ *– взаимно простые многочлены.*

Доказательство. Доказательство проведем методом от противного. Пусть функция $E(x,y)=\exp\{h(x,y)/\,r(x,y)\}$ является экспоненциальным инвариантом некоторой системы Льенара (3.1) из семейства (A). Поскольку многочлен $r(x,y)$ не постоянен, мы видим, что множество $\{r(x,y)=0\}$ представляет собой инвариантную алгебраическую кривую рассматриваемой системы [18]. Пользуясь Теоремой 3.2, представим многочлен $r(x,y)$ в виде $r(x,y)=F_1^{m_1}(x,y)F_2^{m_2}(x,y)$, где m_1, $m_2\in\mathbb{N}_0$, $m_1+m_2>0$ и многочлены $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$ являются неприводимыми алгебраическими инвариантами соответствующей системы. Эти многочлены задаются выражением (3.12) при $N=1$, $k=0$ (инвариант $F_1(x,y)$) и выражением (3.12) при $N\in\mathbb{N}$, $k=1$ (инвариант $F_2(x,y)$). С помощью соотношения (3.13) находим соответствующие представления для собственных значений этих инвариантов:

$$\begin{aligned}&\lambda_1(x,y)=-f(x)-q_x(x)=o(x^m),\quad x\to\infty,\\&\lambda_2(x,y)=-Nf(x)-(N-1)q_x(x)-p_x(x)=-f_0x^m+o(x^m),\ x\to\infty.\end{aligned}\tag{3.48}$$

Следовательно, собственное значение алгебраического инварианта $r(x,y)$ равно $\lambda(x,y)=m_1\lambda_1(x,y)+m_2\lambda_2(x,y)$. Если рассматриваемая система Льенара имеет только один неприводимый алгебраический инвариант, например $F_1(x,y)$, то мы полагаем $m_2=0$ и наоборот.

Здесь и далее символом O_∞ мы обозначаем нулевой элемент поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$. Предположим, что $y_\infty^{(2)}(x)$ является рядом Пюизе, таким что выполнено условие $F_2\left(x,y_\infty^{(2)}(x)\right)=O_\infty$. Подставляя $y=y_\infty^{(2)}(x)$ в функцию $\lambda(x,y)/y$, мы можем разложить ее в ряд Пюизе с центром в точке $x=\infty$. Предполагая, что выполнено неравенство $m_2>0$, мы находим доминантное поведение этого ряда в точке $x=\infty$. Оно имеет вид

$$\frac{\lambda\left(x,y_\infty^{(2)}(x)\right)}{y_\infty^{(2)}(x)}=\frac{m_2f_0^2}{g_0}x^{2m-n}+o\left(x^{2m-n}\right),\quad x\to\infty.\tag{3.49}$$

Для систем Льенара из семейства (A) справедливо неравенство $2m-n>-1$. Соотношение (3.49) противоречит Теореме 2.6. Следовательно, мы должны положить $m_2 = 0$. Тогда многочлен $r(x,y)$ принимает вид $r(x,y) = F_1^{m_1}(x,y)$, где $F_1(x,y) = y - q(x) - z_0$ и $z_0 \in \mathbb{C}$. Уравнение $\mathcal{X}E = \varrho(x,y)E$, где $\varrho(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, перепишем в виде

$$yh_x - (g(x)y + f(x))h_y = m_1\lambda_1(x,y)h + \varrho(x,y)F_1^{m_1}(x,y). \qquad (3.50)$$

Заметим, что многочлен $y(x) = q(x) + z_0$ удовлетворяет уравнению (3.5), поскольку существует алгебраический инвариант $F_1(x,y)$. При этом $y(x)$ является нулем многочлена $F_1(x,y)$. Для многочлена $H(x) = h(x,y)|_{y=y(x)}$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(q(x) + z_0)\,\frac{dH}{dx} = m_1\lambda_1(x,y)H, \quad \lambda_1(x,y) = -f(x) - q_x(x). \qquad (3.51)$$

Многочлены $h(x,y)$ и $F_1(x,y)$ являются взаимно простыми. В результате, мы заключаем: $H(x) \not\equiv 0$. Действительно, предполагая противное и применяя теорему Безу, мы видим что многочлены $h(x,y)$ и $r(x,y)$ имеют нетривиальный общий множитель.

Из соотношений $\deg q = m + 1$ и $\deg \lambda_1 \leq m - 1$ следует, что уравнение (3.51) не имеет ненулевых полиномиальных решений. Этот факт противоречит существованию экспоненциальных инвариантов вида $E(x,y) = \exp\{h(x,y)/r(x,y)\}$ с непостоянным многочленом в знаменателе. □

Далее докажем, что дифференциальные системы Льенара (3.1) не имеют первых интегралов Дарбу при выполнении условия $m < n < 2m + 1$.

Теорема 3.9. *Дифференциальные системы Льенара* (3.1) *из семейства (A) не интегрируемы по Дарбу.*

Доказательство. Из Теоремы 3.4 следует, что системы Льенара (3.1), удовлетворяющие ограничению $m < n < 2m + 1$, не могут иметь одновременно более двух различных неприводимых инвариантных алгебраических кривых. Как и при доказательстве Леммы 3.4 мы обозначим соответствующие инварианты символами $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$. Не ограничивая общности, будем считать, что эти алгебраические инварианты определяются соотношением (3.12), где $N = 1$, $k = 0$ и $N \in \mathbb{N}$, $k = 1$ соответственно.

Предположим, что существует система Льенара (3.1) из семейства (A), имеющая первый интеграл Дарбу. Тогда согласно предыдущему анализу этот первый интеграл имеет вид

$$I(x,y) = F_1^{d_1}(x,y)F_2^{d_2}(x,y), \quad d_1, d_2 \in \mathbb{C}, \quad |d_1| + |d_2| > 0. \tag{3.52}$$

Действительно, по Лемме 3.4 исследуемая система не имеет экспоненциальных инвариантов вида $E(x,y) = \exp\{h(x,y)/r(x,y)\}$, где $h(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ и $r(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]\backslash\mathbb{C}$. Из Леммы 3.3 следует, что собственные значения экспоненциальных инвариантов $E(x,y) = \exp[h(x,y)]$ кратны y. При этом собственные значения инвариантных алгебраических кривых $F_1(x,y) = 0$ и $F_2(x,y) = 0$, а также дивергенция соответствующего векторного поля не зависят от y. Следовательно, в первые интегралы, являющиеся функциями Дарбу, не входят экспоненциальные множители.

Отметим, что если рассматриваемая система Льенара имеет только один неприводимый алгебраический инвариант, например, $F_1(x,y)$, то мы полагаем $d_2 = 0$ и наоборот. Собственные значения $\lambda_1(x,y)$ и $\lambda_2(x,y)$ инвариантных алгебраических кривых $F_1(x,y) = 0$ и $F_2(x,y) = 0$ представлены в соотношении (3.48). Первый интеграл (3.52) существует тогда и только тогда, когда выполнено условие $d_1\lambda_1(x,y) + d_2\lambda_2(x,y) = 0$. Подставим собственные значения в это условие. В результате получим

$$d_1[f(x) + q_x(x)] + d_2[Nf(x) + (N-1)q_x(x) + p_x(x)] = 0. \tag{3.53}$$

Старший моном в соотношении (3.52) имеет вид $d_2 f_0 x^m$. Поскольку $f_0 \neq 0$, мы получаем $d_2 = 0$. Следовательно, рассматриваемая система Льенара из семейства (A) имеет рациональный первый интеграл, который можно задать подстановкой $d_1 = 1$ в представление (3.52). Опять воспользуемся следствием из Теоремы 3.4, которое исключает существование рациональных первых интегралов. □

Далее наша задача состоит в изучении вопроса существования неавтономных первых интегралов Дарбу с зависящими от времени экспоненциальными множителями, определенных в Разделе 2.2.

Лемма 3.5. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (A) имеет неавтономный первый интеграл Дарбу с зависящим от времени экспоненциальным множителем вида* (2.18) *тогда и только тогда, когда* $\deg g = \deg f + 1$ *и выполняется условие*

$$g(x) = \omega \left(\int_0^x f(s)ds - \omega x - z_0 \right), \quad \omega, z_0 \in \mathbb{C}, \quad \omega \neq 0. \tag{3.54}$$

При этом соответствующий неавтономный первый интеграл имеет вид

$$I(x, y, t) = \left(y + \int_0^x f(s)ds - \omega x - z_0 \right) \exp(\omega t). \tag{3.55}$$

Кроме того, рассматриваемая система не может иметь других независимых неавтономных первых интегралов Дарбу с зависящими от времени экспоненциальными множителями вида (2.18).

Доказательство. Пусть многочлен $g(x)$ задан соотношением (3.54). Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция (3.55) является неавтономным первым интегралом соответствующей системы.

Установим необходимость условия (3.54). Повторим рассуждения, приведенные при доказательстве Теоремы 3.9. Согласно Теоремам 2.7 и 3.4 неавтономный первый интеграл (2.18) можно представить в виде

$$\begin{gathered} I(x, y, t) = F_1^{d_1}(x, y) F_2^{d_2}(x, y) \exp(\omega t), \\ d_1, d_2, \omega \in \mathbb{C}, \quad |d_1| + |d_2| > 0, \quad \omega \neq 0. \end{gathered} \tag{3.56}$$

Исследуем необходимое и достаточное условие существования этого неавтономного первого интеграла:

$$d_1[f(x) + q_x(x)] + d_2[Nf(x) + (N-1)q_x(x) + p_x(x)] - \omega = 0. \tag{3.57}$$

Аналогично случаю Теоремы 3.9 мы находим $d_2 = 0$. Далее без ограничения общности полагаем $d_1 = 1$. Рассмотрим равенство (3.57) как обыкновенное дифференциальное уравнение для многочлена $q(x)$. Выполняя интегрирование, получаем полиномиальное решение

$$q(x) = -\int_0^x f(s)ds + \omega x, \tag{3.58}$$

удовлетворяющее условию $q(0) = 0$. Напомним, что это условие накладывалось в соотношении (3.15). Наконец заметим, что алгебраический инвариант $F_1(x, y) = y - q(x) - z_0$ существует тогда и только тогда, кода ряд Пюизе вида $y_\infty^{(1)}$, заданный соотношением (3.14), обрывается на мономе $b_{m+1}x^0$. В этом случае уравнение (3.5) имеет полиномиальное решение $y(x) = q(x) + z_0$. Подставляя наши результаты в уравнение (3.5), мы приходим у соотношению (3.54). Анализируя это соотношение, находим $\deg g = \deg f + 1$. Отсутствие других неавтономных первых интегралов Дарбу вида (2.18) следует из проведенных выше выкладок и единственности алгебраического инварианта $F_1(x, y)$. □

Из Леммы 3.5 следует, что обыкновенное дифференциальное уравнение (3.5), соответствующее системе Льенара из семейства (A) с неавтономным первым интегралом Дарбу вида (2.18), необходимо имеет полиномиальное решение $y(x) = q(x) + z_0$, где многочлен $q(x)$ задан равенством (3.58).

Теорема 3.10. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (A) интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *рассматриваемая система имеет две различные неприводимые инвариантные алгебраические кривые $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, где многочлен $F_1(x, y) = y - q(x) - z_0$ определяется равенством* (3.12) *при $N = 1$, $k = 0$ и многочлен $F_2(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ определяется равенством* (3.12) *при $N \in \mathbb{N}$, $k = 1$;*

2. *для многочленов* $q(x)$ *и* $p(x)$*, задающих начальные отрезки рядов Пюизе из поля* $\mathbb{C}_\infty\{x\}$ *и удовлетворяющих уравнению* (3.5)*, выполнено условие*

$$(n-m)[f(x)+q_x(x)]+(m+1)p_x(x)=0. \tag{3.59}$$

При этом для соответствующей системы Льенара существует единственный интегрирующий множитель Дарбу

$$M(x,y)=\frac{(y-q(x)-z_0)^{\frac{N(m+1)-(n+1)}{m+1}}}{F_2(x,y)}. \tag{3.60}$$

Доказательство. Согласно Теореме 2.2 интегрируемая по Лиувиллю двумерная полиномиальная система имеет интегрирующий множитель Дарбу. Действуя так же, как и при доказательстве Теоремы 3.9, мы заключаем, что интегрирующий множитель не содержит экспоненциальных инвариантов и имеет вид

$$M(x,y)=F_1^{d_1}(x,y)F_2^{d_2}(x,y),\quad d_1,d_2\in\mathbb{C},\quad |d_1|+|d_2|>0. \tag{3.61}$$

В этом выражении многочлены $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$ представляют собой неприводимые алгебраические инварианты. Многочлен $F_1(x,y)$ определяется выражением (3.12) при $N=1$ и $k=0$. Многочлен $F_2(x,y)$, в свою очередь, определяется тем же самым выражением, где $N\in\mathbb{N}$ и $k=1$. Если рассматриваемая система Льенара имеет только один алгебраический инвариант, например $F_1(x,y)=0$, то полагаем $d_2=0$ и наоборот. Вычисляя дивергенцию векторного поля (3.47), находим $\mathrm{div}\mathcal{X}=-f(x)$. Необходимое и достаточное условие существования интегрирующего множителя (3.61) представляется следующим образом: $d_1\lambda_1(x,y)+d_2\lambda_2(x,y)=f(x)$, где многочлены $\lambda_1(x,y)$ и $\lambda_2(x,y)$ – это собственные значения инвариантных алгебраических кривых $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$ соответственно. Эти собственные значения приведены в соотношении (3.48). Перепишем условие существования интегрирующего множителя в виде

$$d_1[f(x)+q_x(x)]+d_2[Nf(x)+(N-1)q_x(x)+p_x(x)]=-f(x). \tag{3.62}$$

Приравнивая коэффициенты, стоящие при старших степенях, находим $d_2 = -1$. Далее вспомним, что алгебраический инвариант $F_1(x, y)$ имеет первую степень по переменной y: $F_1(x, y) = y - q(x) - z_0$. Если $d_1 = 0$, то инвариант $F_1(x, y)$ или не существует, или не входит в явное представление (3.61) интегрирующего множителя.

Далее рассмотрим представления собственных значений $\lambda_1(x, y)$ и $\lambda_2(x, y)$ в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$. Они имеют вид

$$\begin{aligned} &\lambda_1(x,y) = -f(x) - q_x(x), \\ &\lambda_2(x,y) = -\sum_{j=1}^{N-1}\left[f(x) + \left(y_{j,\infty}^{(1)}\right)_x\right] - \left[f(x) + \left(y_{N,\infty}^{(2)}\right)_x\right]. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Подставляя эти соотношения в условие $d_1\lambda_1(x, y) + d_2\lambda_2(x, y) = f(x)$, где $d_2 = -1$, находим

$$d_1[f(x) + q_x(x)] - \sum_{j=1}^{N-1}\left[f(x) + \left(y_{j,\infty}^{(1)}\right)_x\right] = \left(y_{N,\infty}^{(2)}\right)_x. \tag{3.64}$$

Ряды Пюизе $y(x) = y_{j,\infty}^{(1)}(x)$ и многочлен $y(x) = q(x) + z_0$ удовлетворяют уравнению (3.5). Таким образом, мы приходим к равенству

$$f(x) + q_x(x) = -\frac{g(x)}{q(x) + z_0}, \quad f(x) + \left(y_{j,\infty}^{(1)}\right)_x = -\frac{g(x)}{y_{j,\infty}^{(1)}}. \tag{3.65}$$

Опять мы предполагаем, что $d_1 = 0$, если нет полиномиального решения $y(x) = q(x) + z_0$. Используя выражения (3.65), переписываем условие (3.64) в виде

$$g(x)\left[\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{y_{j,\infty}^{(1)}} - \frac{d_1}{q(x) + z_0}\right] = \left(y_{N,\infty}^{(2)}\right)_x. \tag{3.66}$$

Найдем мономы наибольшего порядка роста в окрестности точки $x = \infty$. Используя асимптотические формулы

$$\begin{aligned} &g(x) = g_0x^n + o(x^n), \quad q(x) = -\frac{f_0}{m+1}x^{m+1} + o(x^{m+1}), \\ &y_{j,\infty}^{(1)}(x) = -\frac{f_0}{m+1}x^{m+1} + o(x^{m+1}), \quad y_{N,\infty}^{(2)}(x) = -\frac{g_0}{f_0}x^{n-m} + o(x^{n-m}), \end{aligned} \tag{3.67}$$

собираем коэффициенты при x^{n-m-1} в соотношении (3.66). В результате получаем формулу

$$d_1 = N - 1 - \frac{n-m}{m+1}. \tag{3.68}$$

Из неравенств $m < n < 2m + 1$ следует, что параметр d_1 не может равняться нулю. Подставляя выражение (3.68) и $d_2 = -1$ в соотношения (3.61) и (3.62), мы находим условие (3.59) и интегрирующий множитель Дарбу (3.61).

Предположим, что система Льенара из семейства (A) имеет два различных интегрирующих множителя Дарбу. Напомним, что мы считаем интегрирующие множители различными, если их частное не равно константе. В этом случае исследуемая система интегрируема с первым интегралом Дарбу. Пришли к противоречию. □

Замечание 1. Условие (3.59) тождественно удовлетворяется, если выполнено $\deg g = \deg f + 1$. Действительно, положим $n = m + 1$. Тогда

$$f(x) + q_x(x) = \frac{(m+1)g_0}{f_0}, \quad p(x) = -\frac{g_0}{f_0}x. \tag{3.69}$$

Следовательно, дифференциальная система Льенара, удовлетворяющая ограничению $\deg g = \deg f + 1$ и имеющая два различных алгебраических инварианта, всегда интегрируема по Лиувиллю.

Из Теоремы 3.10 следует, что уравнение (3.5), соответствующее интегрируемой по Лиувиллю дифференциальной системе Льенара из семейства (A), имеет полиномиальное решение $y(x) = q(x) + z_0$. Также используя условие (3.59) и уравнение (3.5), мы можем в интегрируемых случаях представить многочлены $f(x)$ и $g(x)$ в виде

$$f(x) = -q_x(x) - \frac{m+1}{n-m}p_x(x), \quad g(x) = \frac{m+1}{n-m}[q(x) + z_0]p_x(x). \tag{3.70}$$

Напомним, что многочлены $q(x)$ и $p(x)$ имеют степени $m+1$ и $n-m$ соответственно. Из Теоремы 3.10 следует, что дифференциальная система Льенара

(3.1) из семейства (A) интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда многочлены $f(x)$ и $g(x)$ заданы соотношениями (3.70) и система имеет алгебраический инвариант с представлением (3.12), где $N \in \mathbb{N}$ и $k = 1$.

Далее исследуем интегрируемость систем Льенара (3.1) из семейства (A), таких что соответствующее уравнение (3.5) имеет два полиномиальных решения. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.11. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (A), имеющая два различных алгебраических инварианта первой степени по переменной y, интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде*

$$\begin{gathered} x_t = y, \quad y_t = \left[k\beta v^{k-1}(x) + (k+l)v^{l-1}(x)\right] v_x y \\ -k\left[\beta v^k(x) + v^l(x)\right] v^{l-1}(x) v_x, \end{gathered} \tag{3.71}$$

где $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $v(x)$ – произвольный многочлен степени $(n-m)/l$, k и l взаимно простые натуральные числа такие, что выполнено соотношение $(m+1)l = (n-m)k$. Соответствующая система Льенара имеет единственный интегрирующий множитель Дарбу

$$M(x,y) = \{y - \beta v^k(x) - v^l(x)\}^{-\frac{l}{k}} \left\{y - v^l(x)\right\}^{-1} \tag{3.72}$$

и алгебраические инварианты $y - \beta v^k(x) - v^l(x)$ и $y - v^l(x)$. Первый интеграл Лиувилля выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} I(x,y) = \frac{k\beta^{\frac{l}{k}}}{k-l}\{y - \beta v^k(x) - v^l(x)\}^{\frac{k-l}{k}} + \sum_{j=0}^{k-1} \exp\left[-\frac{\pi l(2j+1)i}{k}\right] \\ \times \ln\left\{\{y - \beta v^k(x) - v^l(x)\}^{\frac{1}{k}} - \beta^{\frac{1}{k}} \exp\left[\frac{\pi(2j+1)i}{k}\right] v(x)\right\}. \end{gathered} \tag{3.73}$$

Доказательство. Будем использовать новые обозначения для полиномиальных решений уравнения (3.5). Положим $\tilde{q}(x) = q(x) + z_0$ и $\tilde{p}(x) = p(x) + z_1$. Условие (3.59) и уравнение (3.5) позволяют получить явные выражения (3.70) для многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Подставляя формулу $y(x) = \tilde{p}(x)$ и соотношения (3.70) в уравнение (3.5), мы будем рассматривать получающееся равенство как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно многочлена $\tilde{q}(x)$. Интегрируя это уравнение, находим

$$\tilde{q}(x) = \beta \tilde{p}^{\frac{m+1}{n-m}}(x) + \tilde{p}(x), \tag{3.74}$$

где $\beta \in \mathbb{C}$ – постоянная интегрирования. Вспомним, что $\tilde{q}(x)$ и $\tilde{p}(x)$ являются многочленами степеней $m+1$ и $n-m$ соответственно. Следовательно, получаем $\beta \neq 0$. Введем взаимно простые натуральные числа k и l такие, что выполнено $(m+1)l = (n-m)k$. Тогда многочлены $\tilde{p}(x)$ и $\tilde{q}(x)$ можно представить в виде

$$\tilde{p}(x) = v^l(x), \quad \tilde{q}(x) = \beta v^k(x) + v^l(x). \tag{3.75}$$

В этом выражение $v(x)$ представляет собой произвольный многочлен степени $(n-m)/l$. Подставляя $N = 1$ в соотношение (3.60), мы находим интегрирующий множитель (3.72). Наконец, вычисляя криволинейный интеграл

$$I(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\left[y dy + \{f(x)y + g(x)\} dx\right], \tag{3.76}$$

мы получаем первый интеграл (3.73), где i – мнимая единица. □

Замечание 1. Семейство систем (3.71) можно привести к простому виду

$$s_\tau = z, \quad z_\tau = \left[k\beta s^{k-1} + (k+l)s^{l-1}\right] z - k\left[\beta s^k + s^l\right] s^{l-1} \tag{3.77}$$

с помощью обобщенных преобразований Зундмана $s(\tau) = v(x)$, $z(\tau) = y$, $d\tau = v_x(x)dt$. Подставляя $v(x) = s$, $y = z$ в соотношение (3.73), мы находим первый интеграл для систем (3.77).

Покажем, что для любых фиксированных степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$ существуют интегрируемые по Лиувиллю дифференциальные системы

Льенара (3.1) из семейства (A). С этой целью положим $\tilde{p}(x) = x^{n-m}$. Многочлен $\tilde{q}(x)$ вычислим с помощью соотношения (3.74). В результате получаем $\tilde{q}(x) = \beta x^{m+1} + x^{n-m}$. Таким образом, семейство систем Льенара вида

$$\begin{gathered} x_t = y, \quad y_t = \left[(m+1)\beta x^m + (n+1)x^{n-m-1}\right] y \\ -(m+1)\left(\beta x^n + x^{2n-2m-1}\right) \end{gathered} \tag{3.78}$$

интегрируемо по Лиувиллю. Соответствующий интегрирующий множитель Дарбу имеет вид

$$M(x,y) = \left(y - x^{n-m}\right)^{-1}\left(y - \beta x^{m+1} - x^{n-m}\right)^{\frac{m-n}{m+1}}. \tag{3.79}$$

Заметим, что если для чисел n и m выполнено $n = l(k+1) - 1$ и $m = lk - 1$, где l, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, то соотношения (3.70) и (3.74) позволяют построить интегрируемые по Лиувиллю системы Льенера

$$x_t = y,\, y_t = \left[k\beta\tilde{p}^{k-1}(x) + k + 1\right]\tilde{p}_x(x)y - k\left(\beta\tilde{p}^{k-1}(x) + 1\right)\tilde{p}(x)\tilde{p}_x(x), \tag{3.80}$$

где $\tilde{p}(x)$ – многочлен степени $n-m = l$. Используя выражение (3.72), несложно показать, что системы (3.80) имеют интегрирующий множитель Дарбу

$$M(x,y) = \{y - \beta\tilde{p}^k(x) - \tilde{p}(x)\}^{-\frac{1}{k}}\{y - \tilde{p}(x)\}^{-1}. \tag{3.81}$$

В случае $k = 2$ для соответствующего первого интеграла Лиувилля находим следующее простое представление, отличное от (3.73):

$$\begin{gathered} I(x,y) = \operatorname{arctanh}\left\{\sqrt{\frac{\beta\tilde{p}^2(x)}{F(x,y)}}\right\} + \sqrt{\beta F(x,y)}, \\ F(x,y) = \beta\tilde{p}^2(x) + \tilde{p}(x) - y. \end{gathered} \tag{3.82}$$

Отметим, что существуют дифференциальные системы Льенара из семейства (A) такие, что многочлен $F_2(x,y)$ в выражении (3.60) имеет степень выше 1 относительно переменной y. На самом деле, степени многочлена $F_2(x,y)$ относительно переменной y могут быть любыми натуральными числами. Это утверждение будет обосновано в Разделе 3.3.

Далее изучим существование неавтономных последних множителей Дарбу – Якоби. Случаи $\deg g = \deg f + 1$ и $\deg g \neq \deg f + 1$ рассмотрим по отдельности.

Лемма 3.6. *Дифференциальная система Льенара* (3.1)*, для которой выполнено* $\deg f + 1 < \deg g < 2\deg f + 1$ *(*$m + 1 < n < 2m + 1$*), имеет неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби вида* (2.20) *тогда и только тогда, когда справедливы следующие условия:*

1. *рассматриваемая система обладает двумя различными неприводимыми инвариантными алгебраическими кривыми* $F_1(x, y) = 0$ *и* $F_2(x, y) = 0$*, где многочлен* $F_1(x, y) = y - q(x) - z_0$ *определяется равенством* (3.12) *при* $N = 1$*,* $k = 0$ *и многочлен* $F_2(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ *определяется равенством* (3.12) *при* $N \in \mathbb{N}$*,* $k = 1$*;*
2. *для многочленов* $q(x)$ *и* $p(x)$*, задающих начальные отрезки рядов Пюизе из поля* $\mathbb{C}_\infty\{x\}$ *и удовлетворяющих уравнению* (3.5)*, выполнено условие*

   $$(n - m)[f(x) + q_x(x)] + (m + 1)[p_x(x) + \omega] = 0, \qquad (3.83)$$

   где $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *некоторая постоянная.*

При этом неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби единственный и принимает вид

$$M(x, y, t) = \frac{(y - q(x) - z_0)^{\frac{N(m+1)-(n+1)}{m+1}}}{F_2(x, y)} \exp(\omega t). \qquad (3.84)$$

Доказательство. Воспользуемся Теоремами 2.8 и 3.10. Действуя так же, как и при доказательстве Теоремы 3.10, мы видим, что единственное отличие заключается в условии (3.62). В нашем случае это условие принимает вид

$$d_1[f(x) + q_x(x)] + d_2[Nf(x) + (N - 1)q_x(x) + p_x(x)] - \omega = -f(x), \qquad (3.85)$$

где $\omega \neq 0$. Соответствующий неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби выглядит следующим образом:

$$M(x,y,t) = F_1^{d_1}(x,y)F_2^{d_2}(x,y)\exp[\omega t]. \tag{3.86}$$

Аналогично случаю Теоремы 3.10 находим значения параметров d_1 и d_2: $d_1 = N - 1 - (n-m)/(m+1)$ и $d_2 = -1$. Оба эти параметра отличны от нуля. Следовательно, если для рассматриваемой системы Льенара (3.1) существует неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби, то эта система имеет две различные неприводимые инвариантные алгебраические кривые $F_1(x,y) = 0$ и $F_2(x,y) = 0$. Подставляя явные значения параметров d_1 и d_2 в условие (3.85), приходим к соотношению (3.83).

Предположим, что существуют два различных неавтономных последних множителей Дарбу – Якоби вида (2.20). Тогда их частное является первым интегралом Дарбу (2.18), автономным или неавтономным. Согласно Теореме 3.9 и Лемме 3.5 это невозможно. □

Лемма 3.7. *Дифференциальная система Льенара* (3.1)*, для которой выполнено* $\deg g = \deg f + 1$ *(*$n = m + 1$*), обладает неавтономным последним множителем Дарбу – Якоби вида* (2.20) *тогда и только тогда, когда рассматриваемая система имеет неприводимую инвариантную алгебраическую кривую* $F_2(x,y) = 0$*, заданную многочленом* (3.12)*, где* $N \in \mathbb{N}$ *и* $k = 1$*. Неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби выглядит следующим образом:*

$$M(x,y,t) = \frac{(y - q(x) - z_0)^{d_1}\exp\left[\frac{g_0}{f_0}\left\{1 + \{d_1 - (N-1)\}(m+1)\right\}t\right]}{F_2(x,y)}. \tag{3.87}$$

При этом $d_1 \in \mathbb{C}$*, если система имеет еще одну инвариантную алгебраическую кривую* $y - q(x) - z_0 = 0$ *и* $d_1 = 0$ *в противном случае. Неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби единственен, когда инвариантная кривая* $y - q(x) - z_0 = 0$ *не существует.*

Доказательство. Аналогично случаю Леммы 3.6 мы видим, что неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби (2.20) существует тогда и только тогда, когда рассматриваемая система имеет хотя бы одну инвариантную алгебраическую кривую и выполнено условие (3.85). Опять мы предполагаем, что $d_j = 0$, если инвариантная алгебраическая кривая $F_j(x, y) = 0$ не существует. Явное представление неавтономного последнего множителя Дарбу – Якоби имеет вид (3.86). Приравнивая коэффициенты мономов наибольшего порядка роста в выражении (3.85), находим $d_2 = -1$. Отсюда заключаем, что инвариантная алгебраическая кривая $F_2(x, y) = 0$ обязательно существует. Далее мы видим, что многочлены $f(x) + q_x(x)$ и $p_x(x)$ на самом деле являются константами, см. соотношение (3.69). Подставляя равенства $d_2 = -1$, $f(x) + q_x(x) = (m + 1)g_0/f_0$ и $p_x(x) = -g_0/f_0$ в условие (3.85), получаем

$$(m + 1)g_0 d_1 + \{1 - (N - 1)(m + 1)\} g_0 - f_0\omega = 0. \tag{3.88}$$

Это выражение позволяет определить параметр ω, который имеет вид (3.87). Если рассматриваемая дифференциальная система Льенара не имеет инвариантной алгебраической кривой $F_1(x, y) = 0$, то неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби (3.87), где $d_1 = 0$, единственен. В противном случае, существует семейство неавтономных последних множителей Дарбу – Якоби (3.87), параметризованных числом d_1. Напомним, что инвариантная алгебраическая кривая $F_1(x, y) = 0$ выглядит следующим образом: $y - q(x) - z_0 = 0$. Ранее было показано, что для дифференциальной системы Льенара (3.1), удовлетворяющей условию $\deg g = \deg f + 1$ и имеющей инвариантную алгебраическую кривую $y - q(x) - z_0 = 0$, существует зависящий от времени первый интеграл Дарбу (3.55). Несложно заметить, что произведение первого интеграла и непостоянного последнего множителя Якоби представляет собой еще один последний множитель Якоби исследуемой системы. □

В Разделах 3.3 и 3.4 будут приведены примеры дифференциальных систем Льенара из семейства (A), обладающих неавтономными последними множителями Дарбу – Якоби (3.87).

3.2.2 Системы Льенара из семейства (B)

В этом разделе мы будем рассматривать полиномиальные дифференциальные системы Льенара с фиксированными степенями многочленов $f(x)$ и $g(x)$, такими что выполнено условие $\deg g = 2\deg f + 1$. Из Теоремы 3.5 следует, что показатели Ковалевской рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющих уравнению (3.5), зависят от параметров f_0 и g_0. Следовательно, проведение классификации неприводимых алгебраических инвариантов, а также интегрируемых по Дарбу или Лиувиллю подсистем является чрезвычайно трудной задачей, если зафиксированы лишь степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Каждый случай рационального показателя Ковалевской p_j, для которого выполнено $0 < p_j \leq m+1$, в рамках метода рядов Пюизе должен рассматриваться отдельно. Отметим, что наличие показателей Ковалевской, зависящих от параметров, приводит к появлению большого количества различных интегрируемых подсемейств систем Льенара из семейства (B).

Мы будем по большей части интересоваться нерезонансным случаем. Дифференциальная система Льенара из семейства (B) называется *резонансной на бесконечности*, если уравнение (3.23) имеет решение из множества $\mathbb{Q}^+$. Для удобства введем новый параметр δ в соответствии с соотношением

$$g_0 = \frac{f_0^2 - \delta^2}{4(m+1)}, \quad \delta \in \mathbb{C} \setminus \{-f_0, f_0\}. \tag{3.89}$$

Используя новую параметризацию, решим уравнение (3.23). В результате показатели Ковалевской принимают вид

$$\eta_1 = \frac{2(m+1)\delta}{\delta - f_0}, \quad \eta_2 = \frac{2(m+1)\delta}{\delta + f_0}. \tag{3.90}$$

Оба показателя Ковалевской не являются положительными рациональными числами тогда и только тогда, когда выполнено условие $\delta/f_0 \notin \mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Также мы предполагаем, что выполнено неравенство $\deg f > 0$. Дифференциальные системы Льенара (3.1) при ограничениях $\deg f = 0$ и $\deg g = 1$ становятся линейными. Такие системы при любых значениях параметров интегрируемы по Дарбу, см. Раздел 3.2.

В этом разделе мы используем обозначения Теоремы 3.5. В частности, ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющие уравнению (3.5), обозначены символами $y_\infty^{(1)}(x)$ и $y_\infty^{(2)}(x)$. Если ввести параметр δ в место коэффициента g_0, то эти ряды имеют следующее доминантное поведение:

$$\begin{aligned} y_\infty^{(1)}(x) &= \frac{\delta - f_0}{2(m+1)} x^{m+1} + o(x^{m+1}), \quad x \to \infty; \\ y_\infty^{(2)}(x) &= -\frac{\delta + f_0}{2(m+1)} x^{m+1} + o(x^{m+1}), \quad x \to \infty. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Полиномиальные части рядов $y_\infty^{(1)}(x)$ и $y_\infty^{(2)}(x)$ обозначим как $q_1(x)$ и $q_2(x)$ соответственно. Таким образом, справедливы соотношения

$$q_1(x) = \left\{ y_\infty^{(1)}(x) \right\}_+, \quad q_2(x) = \left\{ y_\infty^{(2)}(x) \right\}_+. \tag{3.92}$$

Если $\delta = 0$, то ряды $y_\infty^{(1)}(x)$ и $y_\infty^{(2)}(x)$ совпадают. В этом случае будем опускать нижний индекс: $q(x) = \{y_\infty(x)\}_+$.

Изучим возможность существования экспоненциальных инвариантов, соответствующих инвариантным алгебраическим кривым.

Лемма 3.8. *Пусть* $h(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ *и* $r(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}$ *являются взаимно простыми многочленами. Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (B) при ограничении* $\delta/f_0 \notin \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *имеет экспоненциальные инварианты вида* $E(x,y) = \exp\{h(x,y)/r(x,y)\}$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. $\delta = 0$;

2. *существует алгебраический инвариант* $F(x,y) = y - q(x)$;

3. обыкновенное дифференциальное уравнение

$$q(x)u_x(x) + [f(x) + q_x(x)]u(x) = 0 \tag{3.93}$$

имеет ненулевое полиномиальное решение $u(x)$.

Соответствующий экспоненциальный инвариант выглядит следующим образом:

$$E(x, y) = \exp\left[\frac{u(x)}{y - q(x)}\right] \tag{3.94}$$

и ему соответствует собственное значение $\varrho(x, y) = u_x(x)$.

Доказательство. Из Теоремы 3.5 следует, что любая дифференциальная система Льенара (3.1) из семейства (B) при ограничении $\delta/f_0 \notin \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ имеет не более двух различных инвариантных алгебраических кривых одновременно. Степени по переменной y соответствующих неприводимых алгебраических инвариантов равны 1 или 2. Если существует неприводимый алгебраический инвариант степени 2 по отношению к переменной y, то он единственен. Неприводимых алгебраических инвариантов степени 1 относительно переменной y не может быть более двух. Поскольку $E(x, y) = \exp\{h(x, y)/r(x, y)\}$ представляет собой экспоненциальный инвариант, мы заключаем, что $r(x, y)$ является алгебраическим инвариантом соответствующей системы. Экспоненциальные инварианты можно представить в виде

$$E(x, y) = \exp\left[\frac{h(x, y)}{F_1^{m_1}(x, y)F_2^{m_2}(x, y)}\right], \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0, \quad m_1 + m_2 > 0, \tag{3.95}$$

где $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ – неприводимые алгебраические инварианты. Не теряя общности, предположим, что $m_k = 0$, если алгебраический инвариант $F_k(x, y)$ не существует. Здесь $k = 1$ или $k = 2$.

Случай 1. Предположим, что система Льенара из семейства (B) имеет только один неприводимый алгебраический инвариант $F_1(x, y)$ степени

2 относительно переменной y. С помощью соотношения (3.25), мы находим собственное значение $\lambda_1(x,y)$ этого инварианта. Он имеет вид

$$\lambda_1(x,y) = -2f(x) - \left\{\partial_x\left(y_\infty^{(1)}\right) + \partial_x\left(y_\infty^{(2)}\right)\right\}_+. \tag{3.96}$$

В окрестности точки $x=\infty$ собственное значение ведет себя следующим образом: $\lambda_1(x,y) = -f_0x^m + o(x^m)$. Далее рассмотрим один из рядов Пюизе, например, ряд $y_\infty^{(1)}(x)$. Справедливо асимптотическое представление

$$\frac{\lambda_1\left(x, y_\infty^{(1)}(x)\right)}{y_\infty^{(1)}(x)} = -\frac{2(m+1)f_0}{(\delta-f_0)x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\to\infty \tag{3.97}$$

Поскольку $\delta/f_0 \notin \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, мы заключаем, что условия Теоремы 2.6 не выполнены, если $\delta\neq 0$. Случай $\delta=0$ будет рассматриваться отдельно. Таким образом, экспоненциальные инварианты не существуют при выполнении условия $\delta\neq 0$.

Случай 2. Предположим, что рассматриваемая система Льенара из семейства (B) имеет два различных неприводимых алгебраических инварианта $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$. Заметим, что эти инварианты определяются многочленами первой степени относительно переменной y. Их собственные значения выглядят следующим образом:

$$\lambda_k(x,y) = -f(x) - \left\{\partial_x\left(y_\infty^{(k)}\right)\right\}_+, \quad k=1,2. \tag{3.98}$$

Собственное значение алгебраического инварианта $F_1^{m_1}(x,y)F_2^{m_2}(x,y)$ имеет вид $\lambda(x,y) = m_1\lambda_1(x,y) + m_2\lambda_2(x,y)$. Найдем его асимптотическое поведение в точке $x=\infty$. В результате получаем

$$\lambda(x,y) = \frac{1}{2}\left[m_2(\delta-f_0) - m_1(\delta+f_0)\right]x^m + o(x^m), \quad x\to\infty. \tag{3.99}$$

Предположим, что одно из чисел m_1 или m_2, например m_1, отлично от нуля. Рассмотрим асимптотическое равенство

$$\frac{\lambda\left(x, y_\infty^{(1)}(x)\right)}{y_\infty^{(1)}(x)} = (m+1)\left(m_2 - \frac{(\delta+f_0)m_1}{\delta-f_0}\right)\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\to\infty. \tag{3.100}$$

Используя Теорему 2.6 и выражение $\delta/f_0 \notin \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, мы видим, что экспоненциальные инварианты (3.95) не существуют, если $\delta \neq 0$.

Случай 3. Будем считать, что исследуемая дифференциальная система Льенара из семейства (B) имеет только один неприводимый алгебраический инвариант: $F_1(x,y)$ или $F_2(x,y)$. Если $\delta \neq 0$, то действуя как и в предыдущем случае, мы доказываем отсутствие экспоненциальных инвариантов с неполиномиальным аргументом.

Случай 4. Положим $\delta = 0$. В этом случае ряды Пюизе $y_\infty^{(1)}(x)$ и $y_\infty^{(2)}(x)$ сливаются. Единственный ряд Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, который удовлетворяет уравнению (3.5), мы обозначили символом $y_\infty(x)$. Предположим, что рассматриваемая система Льенара имеет неприводимый алгебраический инвариант $F(x,y)$. Тогда справедливо равенство $F(x,y) = y - q(x)$, где $q(x) = \{y_\infty(x)\}_+$. Собственное значение $\lambda(x,y)$ этого инварианта выглядит следующим образом: $\lambda(x,y) = -f(x) - q_x(x)$ и не зависит от переменной y. Если система имеет экспоненциальный инвариант $E(x,y) = \exp\left\{h(x,y)/F^k(x,y)\right\}$ при некотором $k \in \mathbb{N}$, то без ограничения общности можно считать, что степень многочлена $h(x,y)$ относительно переменной y не превосходит числа $k-1$. Символом $\varrho(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ обозначаем собственного значения инварианта $E(x,y)$. Введем переменную z по правилу $z = y - q(x)$ и представим многочлен $h(x,y)$ в виде

$$h(x,y) = \sum_{j=0}^{k-1} u_j(x) z^j, \quad z = y - q(x), \quad u_j(x) \in \mathbb{C}[x], \tag{3.101}$$

где без ограничения общности полагаем $u_0(x) \not\equiv 0$. В противном случае параметр k нужно уменьшить на единицу. Подставляя представление (3.101) в уравнение в частных производных $\mathcal{X}h - k\lambda h = \varrho(x,y)z^k$, которое можно получить из уравнения для экспоненциального инварианта $E(x,y)$, мы требуем, чтобы коэффициенты при z^j, $0 \leq j \leq k$ обращались в нуль. В результате мы видим, что собственное значение $\varrho(x,y)$ не зависит от переменной y:

$\varrho(x, y) = u_{k-1,x}$. Также получаем систему

$$\begin{aligned} &q u_{0,x} - k\lambda u_0 = 0, \\ &q u_{j,x} - (k-j)\lambda u_j + u_{j-1,x} = 0, \quad 1 \leq j < k-1. \end{aligned} \tag{3.102}$$

Решая первые два уравнения, находим доминантные слагаемые многочленов $u_0(x)$ и $u_1(x)$: $u_0(x) = C_0 x^{k(m+1)}$ и $u_1(x) = 2k(m+1)^2 C_0 x^{(k-1)(m+1)} \ln x / f_0$, где $C_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поскольку $u_1(x)$ – многочлен, необходимо положить $k = 1$. Следовательно, экспоненциальный инвариант $E(x, y) = \exp\{h(x, y)/F(x, y)\}$ существует тогда и только тогда, когда $E(x, y) = \exp\{u_0(x)/(y - q(x))\}$ и многочлен $u_0(x)$ удовлетворяет уравнению $q u_{0,x} - \lambda u_0 = 0$. Опуская нижний индекс для $u_0(x)$, получаем соотношения (3.93) и (3.94). □

Замечание 1. Анализируя поведение в точке $x = \infty$ полиномиального решения уравнения (3.93), мы видим, что многочлен $u(x)$ имеет степень $m+1$.

Далее наша задача состоит в выводе необходимых и достаточных условий интегрируемости по Дарбу для нерезонансных на бесконечности дифференциальных систем Льенара из семейства (B). Случай $\delta = 0$ будет рассматриваться отдельно.

Теорема 3.12. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (B), удовлетворяющая условию $\delta/f_0 \notin \mathbb{Q}$, интегрируема по Дарбу тогда и только тогда, когда она выглядит следующим образом:*

$$x_t = y, \quad y_t = \frac{2f_0}{f_0 - \delta} q_{1,x} y - \frac{f_0 + \delta}{f_0 - \delta} q_{1,x} q_1, \tag{3.103}$$

где $q_1(x)$ – многочлен степени $m+1$ со страшим коэффициентом $(\delta - f_0)/(2\{m+1\})$. Соответствующий первый интеграл Дарбу можно представить в виде

$$I(x, y) = [y - q_1(x)]^{\delta - f_0} \left[y - \frac{(f_0 + \delta)}{(f_0 - \delta)} q_1(x) \right]^{\delta + f_0}. \tag{3.104}$$

Доказательство. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что выражение (3.104) представляет собой первый интеграл Дарбу, если выполнены все условия теоремы.

Докажем обратное утверждение. Из Лемм 3.3 и 3.8 следует, что интегрируемые по Дарбу системы Льенара (3.1) из семейства (B), удовлетворяющие условию $\delta/f_0 \notin \mathbb{Q}$, не имеют экспоненциальных инвариантов. По Теореме 3.5 рассматриваемые системы одновременно имеют не более двух различных неприводимых алгебраических инвариантов. Сначала предположим, что существует только один неприводимый алгебраический инвариант. Если существует первый интеграл Дарбу, то его можно представить в виде $I(x, y) = F(x, y)$, где $F(x, y)$ – неприводимый алгебраический инвариант. Используя Теорему 3.5, мы видим, что многочлен $F(x, y)$ имеет степень не выше двух относительно переменной y. Первый интеграл Дарбу $I(x, y) = F(x, y)$ существует тогда и только тогда, когда собственное значение $\lambda(x, y)$ алгебраического инварианта $F(x, y)$ тождественно равно нулю. Рассмотрим три возможности. Запишем соответствующие собственные значения и их доминантные мономы в точке $x = \infty$. С помощью соотношений (3.91) и (3.92), получаем

$$\begin{aligned} N = 1: &\quad \lambda(x,y) = -f(x) - q_{1,x}, \quad \lambda(x,y) = -\frac{1}{2}(\delta + f_0)x^m + o(x^m); \\ N = 1: &\quad \lambda(x,y) = -f(x) - q_{2,x}, \quad \lambda(x,y) = \frac{1}{2}(\delta - f_0)x^m + o(x^m); \\ N = 2: &\quad \lambda(x,y) = -2f(x) - q_{1,x} - q_{2,x}, \quad \lambda(x,y) = -f_0x^m + o(x^m). \end{aligned} \tag{3.105}$$

В этих выражениях символом N обозначена степень относительно переменной y соответствующего инварианта $F(x, y)$. Мы видим, что собственные значения не могут тождественно равняться нулю. Таким образом, первые интегралы Дарбу не существуют.

Наконец, предположим, что рассматриваемая система Льенара из семейства (B) имеет два различных неприводимых алгебраических инварианта $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$. По Теореме 3.5 многочлены $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ имеют вид

$F_1(x,y) = y - q_1(x)$ и $F_2(x,y) = y - q_2(x)$. Тогда соответствующий первый интеграл Дарбу выглядит следующим образом:

$$I(x,y) = F_1^{d_1}(x,y)F_2^{d_2}(x,y), \quad d_1, d_2 \in \mathbb{C} \tag{3.106}$$

и существует при выполнении условия $d_1\lambda_1(x,y) + d_2\lambda_2(x,y) = 0$. Вычисляя доминантное поведение в точке $x = \infty$ собственных значений $\lambda_1(x,y)$ и $\lambda_2(x,y)$, находим

$$\lambda_1(x,y) = -\frac{1}{2}(\delta + f_0)x^m + o(x^m), \quad \lambda_2(x,y) = \frac{1}{2}(\delta - f_0)x^m + o(x^m). \tag{3.107}$$

Напомним, что один из параметров, d_1 или d_2, можно выбрать произвольным образом. Следовательно, мы можем положить $d_1 = \delta - f_0$, $d_2 = \delta + f_0$. При таком выборе условие существования первого интеграла Дарбу принимает вид

$$2\delta f(x) + (\delta - f_0)q_{1,x}(x) + (\delta + f_0)q_{2,x}(x) = 0. \tag{3.108}$$

Из Теоремы 3.12 следует, что соответствующее уравнение (3.5) имеет два различных полиномиальных решения $y(x) = q_1(x)$ и $y(x) = q_2(x)$. В результате, мы приходим к следующим равенствам:

$$f(x) + q_{1,x}(x) = -\frac{g(x)}{q_1(x)}, \quad f(x) + q_{2,x}(x) = -\frac{g(x)}{q_2(x)}. \tag{3.109}$$

Подставляя эти равенства и значения параметров d_1 и d_2 в условие, связывающее собственные значения: $d_1[f(x) + q_{1,x}(x)] + d_2[f(x) + q_{2,x}(x)] = 0$, мы получаем выражение $q_2(x) = -d_2q_1(x)/d_1$. Далее с помощью соотношений (3.108) и (3.109) несложно найти явные представления для многочленов $f(x)$ и $g(x)$. □

Следствие 1. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$yy_x - \frac{2f_0}{f_0 - \delta}q_{1,x}y + \frac{f_0 + \delta}{f_0 - \delta}q_{1,x}q_1 = 0, \tag{3.110}$$

соответствующее системе (3.103), имеет два различных полиномиальных решения: $y(x) = q_1(x)$ и $y(x) = (f_0 + \delta)q_1(x)/(f_0 - \delta)$.

Замечание 1. Предположим, что мы находимся в условиях Теоремы 3.12 за исключением ограничения $\delta/f_0 \notin \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Тогда функция (3.104) по-прежнему является первым интегралом Дарбу соответствующей дифференциальной системы Льенара. Также следствие к Теореме 3.12 остается справедливым. Однако, могут существовать другие резонансные на бесконечности системы Льенара из семейства (B) с первыми интегралами Дарбу.

Замечание 2. Семейство систем Льенара (3.103) интегрируемо с рациональными первыми интегралами (3.104), если частное f_0/δ является рациональным числом.

Далее исследуем интегрируемость по Дарбу систем Льенара из семейства (B) при условии $\delta = 0$.

Теорема 3.13. *Дифференциальная систем Льенара из семейства (B) при условии $\delta = 0$ интегрируема по Дарбу тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде*

$$x_t = y, \quad y_t = 2q_x(x)y - q(x)q_x(x), \tag{3.111}$$

где $q(x)$ – многочлен степени $m+1$. Соответствующий первый интеграл Дарбу выглядит следующим образом:

$$I(x,y) = [y - q(x)] \exp\left[-\frac{q(x)}{y - q(x)}\right]. \tag{3.112}$$

Система (3.111) *имеет единственный неприводимый алгебраический инвариант $y - q(x)$ и семейство экспоненциальных инвариантов $E(x,y) = \exp[\alpha\, q(x)/(y - q(x))]$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Несложно убедиться, что выражение (3.112) представляет собой первый интеграл Дарбу системы Льенара (3.111). Достаточность условий теоремы установлена. Докажем необходимость.

Предположим, что система Льенара из семейства (B), удовлетворяющая условию $\delta = 0$, имеет первый интеграл Дарбу. Интегрируемая по Дарбу полиномиальная дифференциальная система (1.1) должна иметь хотя бы один алгебраический инвариант. Из Теоремы 3.5 следует, что в случае $\delta = 0$ может существовать только один неприводимый алгебраический инвариант. Этот инвариант имеет вид $y - q(x)$. Ему соответствует собственное значение $\lambda(x, y) = -f(x) - q_x(x)$. Согласно Лемме 3.8 исследуемая система Льенара может иметь экспоненциальные инварианты, соответствующие инвариантной алгебраической кривой $y - q(x) = 0$. Эти инварианты представлены в выражении (3.94) и имеют собственное значение $\varrho(x, y) = u_x(x)$, не зависящий от переменной y. Многочлен $u(x)$ удовлетворяет уравнению (3.93). Используя Лемму 3.3, мы заключаем, что экспоненциальные инварианты с полиномиальным аргументом не могут появляться в явном представлении первого интеграла Дарбу. Следовательно, первый интеграл Дарбу представляется в виде

$$I(x, y) = [y - q(x)]^d \exp\left[\frac{u(x)}{y - q(x)}\right], \quad d \in \mathbb{C}, \tag{3.113}$$

где мы предполагаем, что $u(x) \equiv 0$, если экспоненциальные инварианты (3.94) не существуют.

Если $d = 0$, то соответствующая дифференциальная система Льенара имеет алгебраический инвариант $u(x) = 0$, не зависящий от y. По Лемме 3.1 это невозможно. Без ограничения общности положим $d = 1$. Необходимое и достаточное условие существования первого интеграла (3.113) принимает вид $\lambda(x, y) + \varrho(x, y) = 0$. В результате, мы приходим к соотношению $f(x) = u_x(x) - q_x(x)$. Подставляя это выражение в уравнение (3.93), получаем равенство $u(x) = -q(x)$. Это равенство доказывает существование экспоненциальных инвариантов вида (3.94). Поскольку $q(x)$ является полиномиальным решением уравнения (3.5) и $f(x) = -2q_x(x)$, мы находим многочлен $g(x)$. Справедливо представление $g(x) = q(x)q_x(x)$. □

Отметим, что дифференциальные системы Льенара (3.103) и (3.111) удовлетворяют, так называемому, условию интегрируемости Кьеллини (Chiellini), которое записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = \alpha f(x), \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{3.114}$$

Это условие было найдено А.Кьеллини (A. Chiellini), см. [141]. Системы Льенара (3.103) и (3.111) могут быть преобразованы к линейной системе $s_\tau = z$, $z_\tau = -z - \alpha s$ с помощью обобщенного преобразования Зудмана $s(\tau) = \int f(x)dx$, $z(\tau) = y$, $d\tau = f(x)dt$. Этот результат получен Л. М. Берковичем [24]. Некоторые другие свойства систем Льенара, удовлетворяющих условию интегрируемости Кьеллини, изучались в работах [24, 145].

Далее будем исследовать существование неавтономных первых интегралов Дарбу с зависящим от времени экспоненциальным множителем (2.18).

Лемма 3.9. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (B), удовлетворяющая условию $\delta/f_0 \notin \mathbb{Q}$, имеет неавтономный первый интеграл Дарбу* (2.18) *тогда и только тогда, когда эта система может быть представлена в виде*

$$\begin{gathered} x_t = y, \quad y_t = -\left\{f_0(x-x_0)^m + \frac{(m+2)\omega}{2(m+1)\delta}\right\}y - \frac{f_0^2-\delta^2}{4(m+1)}(x-x_0)^{2m+1} \\ -\frac{f_0\omega}{2(m+1)\delta}(x-x_0)^{m+1} - \frac{\omega^2}{4(m+1)\delta^2}(x-x_0), \end{gathered} \tag{3.115}$$

где $x_0 \in \mathbb{C}$ и $\omega \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Соответствующий неавтономный первый интеграл Дарбу выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} I(x,y,t) = \left[y + \frac{f_0-\delta}{2(m+1)}(x-x_0)^{m+1} + \frac{\omega}{2(m+1)\delta}(x-x_0)\right]^{\delta-f_0} \\ \times\left[y + \frac{\delta+f_0}{2(m+1)}(x-x_0)^{m+1} + \frac{\omega}{2(m+1)\delta}(x-x_0)\right]^{\delta+f_0}\exp(\omega t). \end{gathered} \tag{3.116}$$

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что выражение (3.116) представляет собой неавтономный первый интеграл системы (3.115).

Докажем обратное утверждение. Предположим, что нерезонансная на бесконечности система Льенара из семейства (B) имеет неавтономный первый интеграл Дарбу (2.18). Действуя аналогично случаю Теоремы 3.12, мы представляем этот первый интеграл в виде

$$I(x,y,t) = [y - q_1(x)]^{\delta - f_0}\,[y - q_2(x)]^{\delta + f_0}\exp(\omega t), \quad \omega \neq 0, \tag{3.117}$$

где $q_1(x)$ и $q_2(x)$ – различные полиномиальные решения соответствующего уравнения (3.5). Также мы получаем соотношение

$$2\delta f(x) + (\delta - f_0)q_{1,\,x}(x) + (\delta + f_0)q_{2,\,x}(x) - \omega = 0. \tag{3.118}$$

Выразим многочлен $f(x)$ из этого соотношения. Подставляя равенство $y(x) = q_1(x)$ в уравнение (3.5), находим многочлен $g(x)$. Введем многочлен $v(x)$ согласно правилу $q_2(x) - q_1(x) = v(x)$. Функция $q_2(x) = q_1(x) + v(x)$ является решением уравнения (3.5). В результате, приходим к соотношению

$$[(\delta - f_0)v(x) + 2\delta q_1(x)]v_x(x) + \omega v(x) = 0. \tag{3.119}$$

Напомним, что $q_1(x)$ – многочлен. Это соотношение позволяет получить обыкновенное дифференциальное уравнение $\beta(x - x_0)v_x = v$, где β, $x_0 \in \mathbb{C}$. Интегрируя это уравнение, находим $v(x) = v_0(x - x_0)^{1/\beta}$. Здесь $v_0 \in \mathbb{C}$ – постоянная интегрирования. Анализируя равенство $q_2(x) - q_1(x) = v(x)$, видим, что многочлен $v(x)$ имеет степень $m + 1$. Отсюда получаем $\beta = 1/(m + 1)$. Следовательно, многочлены $q_1(x)$ и $q_2(x)$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} q_1(x) &= \frac{\delta - f_0}{2(m+1)}(x - x_0)^{m+1} - \frac{\omega}{2(m+1)\delta}(x - x_0), \\ q_2(x) &= -\frac{\delta + f_0}{2(m+1)}(x - x_0)^{m+1} - \frac{\omega}{2(m+1)\delta}(x - x_0). \end{aligned} \tag{3.120}$$

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ мы находим с помощью соотношения (3.118) и уравнения (3.5) с учетом того факта, что $q_1(x)$ является полиномиальным решением последнего уравнения. Единственность независимого неавтономного первого интеграла Дарбу (3.116) следует из единственности полиномиальных решений $q_1(x)$, $q_2(x)$ и доминантного поведения собственных значений, заданных соотношениями (3.107). □

Замечание 1. Предположим, что мы находимся в условиях Леммы 3.9 за исключением требования $\delta/f_0 \notin \mathbb{Q}$. Тогда функция (3.116) по-прежнему является неавтономным первым интегралом Дарбу соответствующей системы Льенара. Однако, могут существовать другие резонансные системы Льенара из семейства (B), имеющие неавтономные первые интегралы Дарбу вида (2.18).

Отметим, что при выполнении условия $\delta = \pm m f_0/(m+2)$ любая система (3.115) одновременной имеет не только неавтономный первый интеграл Дарбу (3.116), но и независимый автономный первый интеграл Дарбу (3.104), где многочлен $q_1(x)$ задан выражением

$$q_1(x) = -\frac{f_0 x^{m+1}}{(m+1)\,(m+2)} - \frac{(m+2)\,\omega x}{2m\,(m+1)\,f_0}. \tag{3.121}$$

Символом $I_1(x,y)$ обозначим автономный первый интеграл Дарбу (3.104), а символом $I_2(x,y,t)$ – неавтономный первый интеграл Дарбу (3.116). Исключая переменную y из соотношений $I_1(x,y) = C_1$ и $I_2(x,y,t) = C_2$, несложно найти общее решение системы (3.115) при условии $\delta = \pm m f_0/(m+2)$. Отметим, что эта система является резонансной на бесконечности. Общее решение в случаее $m = 2$ было получено ранее в работе [26], см. также [149].

Лемма 3.10. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (B), удовлетворяющая условию $\delta = 0$, имеет неавтономный первый интеграл Дарбу* (2.18) *тогда и только тогда, когда эта система может быть представлена в виде*

$$\begin{gathered} x_t = y, \quad y_t = -\left\{f_0(x-x_0)^m + \frac{(m+2)\omega}{m+1}\right\} y \\ -\frac{(x-x_0)}{4(m+1)}\left\{f_0(x-x_0)^m + 2\omega\right\}^2, \end{gathered} \tag{3.122}$$

где $x_0 \in \mathbb{C}$ *и* $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Соответствующий неавтономный первый интеграл Дарбу выглядит следующим образом:*

$$
\begin{gathered}
I(x,y,t) = \exp\left[\frac{f_0(x-x_0)^{m+1}}{2(m+1)y + f_0(x-x_0)^{m+1} + 2\omega(x-x_0)}\right] \\
\times\left[y + \frac{f_0(x-x_0)^{m+1}}{2(m+1)} + \frac{\omega(x-x_0)}{m+1}\right]\exp(\omega t).
\end{gathered} \tag{3.123}
$$

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что система (3.122) действительно имеет неавтономный первый интеграл (3.123). Докажем обратное утверждение.

Предположим, что система Льенара (3.1) из семейства (B), удовлетворяющая условию $\delta = 0$, имеет неавтономный первый интеграл Дарбу (2.18). Как и при доказательстве Теоремы 3.13 мы можем представить этот первый интеграл в виде

$$
I(x,y,t) = [y - q(x)]^d \exp\left[\frac{u(x)}{y - q(x)}\right]\exp(\omega t), \quad d \in \mathbb{C}, \quad \omega \in \mathbb{C}\setminus\{0\}. \tag{3.124}
$$

Отметим, что исследуемая система имеет неприводимую инвариантную алгебраическую кривую $y - q(x) = 0$ с собственным значением $\lambda(x,y) = -f(x) - q_x(x)$. По Лемме 3.8 собственное значение $\varrho(x,y)$ экспоненциального инварианта $E(x,y) = \exp[u(x)/(y - q(x))]$ принимает вид $\varrho(x,y) = u_x(x)$. Условие (2.21), связывающее эти собственные значения и параметр ω, выглядит следующим образом:

$$
d[f(x) + q_x(x)] - u_x(x) - \omega = 0, \quad d \in \mathbb{C}. \tag{3.125}
$$

Сначала рассмотрим случай $d = 0$. Из условия (3.125) следует, что степень многочлена $u(x)$ равна единице. Используя замечание к Лемме 3.8, мы находим число m: $m = 0$. Как отмечалось в начале настоящего раздела, мы не рассматриваем линейные системы Льенара. Напомним, что система Льенара из семейства (B) становится линейной при выполнении условия $m = 0$ $(\deg f = 0)$.

Далее рассмотрим случай $d \neq 0$. Без ограничения общности, положим $d = 1$. Сначала будем считать, что справедливо условие $u(x) \equiv 0$. Мы видим, что соответствующая система может не иметь экспоненциальных инвариантов вида (3.94). Найдем доминантное поведение собственного значения $\lambda(x, y) = -f(x) - q_x(x)$ в точке $x = \infty$. В результате получим

$$\lambda(x, y) = -\frac{f_0}{2} x^m + o(x^m), \quad x \to \infty. \tag{3.126}$$

Учитывая неравенство $m > 0$, мы видим, что условие (3.125) не выполняется. Таким образом, семейство экспоненциальных инвариантов (3.94) существует и $u(x) \not\equiv 0$. Далее исключим из соотношений (3.93) и (3.125) многочлен $f(x)$. В результате, придем к равенству

$$q(x) = -u(x) - \omega \frac{u(x)}{u_x(x)}. \tag{3.127}$$

Следовательно, частное $u(x)/u_x(x)$ является многочленом. Несложно заметить, что этот многочлен имеет первую степень. Представим его в виде $\beta(x - x_0)$, где β, $x_0 \in \mathbb{C}$. Интегрируя обыкновенное дифференциальное уравнение $\{\beta(x - x_0)\} u_x(x) = u(x)$, получаем $u(x) = u_0(x - x_0)^{1/\beta}$. Здесь $u_0 \in \mathbb{C}$ – константа интегрирования. Напомним, что $u(x)$ – многочлен степени $m + 1$. В результате получаем $\beta = 1/(m + 1)$. Подставляя равенство $u(x) = u_0(x - x_0)^{m+1}$ в соотношения (3.127) и (3.125), находим многочлены $q(x)$ и $f(x)$. Также мы должны выбрать для многочлена $u(x)$ следующую нормализацию: $u_0 = f_0/(2\{m + 1\})$. Многочлен $g(x)$ найдем с учетом того факта, что $q(x)$ является полиномиальным решением уравнения (3.5).

Мы можем заключить, что рассматриваемая дифференциальная система Льенара имеет неавтономный первый интеграл Дарбу (2.18), алгебраический инвариант $y - q(x)$ и семейство экспоненциальных инвариантов $E(x, y) = \exp[\alpha u(x)/(y - q(x))]$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, многочлен $q(x)$ определяется равенством (3.127) и многочлен $u(x)$ имеет вид $u(x) = f_0(x - x_0)^{m+1}/(2\{m + 1\})$. $\square$

Далее в этом разделе мы докажем, что системы Льенара (3.115) и (3.122) интегрируемы по Лиувиллю.

Перейдем к исследованию интегрируемости по Лиувиллю дифференциальных систем Льенара из семейства (B). Мы начнем с изучения частного случая, соответствующего интегрирующему множителю Дарбу специального вида. Отметим, что для полиномиальных решений уравнения (3.5) в Теореме 3.14 будут использоваться новые обозначения: $p_1(x)$ и $p_2(x)$. Нам потребуются новые обозначения, поскольку многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$ в Теореме 3.14 могут иметь совпадающие старшие мономы. После изучения этого частного случая мы вернемся к нерезонансным на бесконечности системам.

Теорема 3.14. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (B) имеет интегрирующий множитель Дарбу вида*

$$M(x,y) = [y - p_1(x)]^{d_1}[y - p_2(x)]^{d_2}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{3.128}$$

где $p_1(x)$ *и* $p_2(x)$ *– различные многочлены тогда и только тогда, когда справедливо одно из следующих условий.*

1. *Соответствующая система принимает вид* (3.103) *и многочлены* $p_1(x)$ *и* $p_2(x)$ *линейно зависимы:* $p_2(x) = (f_0+\delta)/(f_0-\delta)p_1(x)$. *В этом случае параметры* d_1 *и* d_2 *можно выбрать в виде* $d_1 = d_2 = -1$ *и справедливы соотношения* $p_1(x) = q_1(x)$ *и* $p_2(x) = q_2(x)$. *При этом существует семейство интегрирующих множителей Дарбу вида* (3.128)*, представляющих собой произведение интегрирующего множителя* $M_0(x,y) = [y - q_1(x)]^{-1}[y - q_2(x)]^{-1}$ *и первых интегралов Дарбу* $I^{\varkappa}(x,y)$*, где функция* $I(x,y)$ *определяется равенством* (3.104) *и* $\varkappa \in \mathbb{C}$.

2. Соответствующая система принимает вид

$$x_t = y, \quad y_t = \left[\beta(l+k)u^{k-1} + \frac{\{(2d_1+1)l+k\}l}{k-l}u^{l-1}\right]u_x y$$
$$-\left[l\beta^2 u^{2k-1} + \frac{\{(2d_1+1)l+k\}l\beta}{k-l}u^{k+l-1} + \frac{(ld_1+k)(d_1+1)l^2}{(k-l)^2}u^{2l-1}\right]u_x, \tag{3.129}$$

где k и l взаимно простые натуральные числа одновременно не обращающиеся в единицу, $u(x)$ – многочлен степени $(m+1)/\max\{k,l\}$ и $\beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$ выглядят следующим образом:

$$p_1(x) = \beta u^k(x) + \frac{(d_1+1)l}{k-l}u^l(x), \quad p_2(x) = \beta u^k(x) + \frac{(ld_1+k)}{k-l}u^l(x), \tag{3.130}$$

а параметр d_2 задается соотношением $d_2 = -(d_1+1+k/l)$.

Доказательство. Функция (3.128) представляет собой интегрирующий множитель Дарбу дифференциальной системы Льенара тогда и только тогда, когда эта система имеет алгебраические инварианты $y - p_1(x)$ и $y - p_2(x)$ такие, что выполняется соотношение $d_1\lambda_1(x,y) + d_2\lambda_2(x,y) - f(x) = 0$ на их собственные значения. Собственное значение $\lambda_j(x,y)$ алгебраического инварианта $y - p_j(x)$ имеет вид $\lambda_j(x,y) = -f(x) - p_{j,x}(x)$, $j = 1, 2$. Следовательно, мы приходим к соотношению

$$(d_1+d_2+1)f(x) + d_1 p_{1,x}(x) + d_2 p_{2,x}(x) = 0. \tag{3.131}$$

Если справедливо равенство $d_2 = -1 - d_1$, то интегрируя дифференциальное уравнение (3.131) относительно многочлена $p_1(x)$, получаем $p_1(x) = (d_1 + 1)p_2(x)/d_1 + \beta$, где $\beta \in \mathbb{C}$ – постоянная интегрирования. Используя тот факт, что $p_1(x)$ и $p_2(x)$ представляют собой полиномиальные решения уравнения (3.5), мы находим многочлены $f(x)$ и $g(x)$. Многочлен $f(x)$ выглядит следующим образом:

$$f(x) = -\frac{(2d_1+1)p_2(x) + d_1(d_1+1)\beta}{d_1(p_2(x)+d_1\beta)}p_{2,x}(x). \tag{3.132}$$

Анализируя это выражение, мы заключаем, что функция, стоящая справа от знака равенства, не является многочленом, если многочлен $p_2(x)$ отличен от константы.

Рассмотрим случай $d_2 \neq -1 - d_1$. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ мы находим из условия (3.131) и уравнения (3.5), где полагаем $y(x) = p_1(x)$. Подставляя получившиеся выражения и $y(x) = p_2(x)$ в уравнение (3.5), получаем соотношение

$$\{(d_2+1)p_1(x) + d_1 p_2(x)\}p_{1,\,x}(x) - \{d_2 p_1(x) + (d_1+1)p_2(x)\}p_{2,\,x}(x) = 0. \tag{3.133}$$

Введем в рассмотрение многочлен $v(x)$ в соответствии с равенством $v(x) = p_2(x) - p_1(x)$. Подставим представление $p_2(x) = p_1(x) + v(x)$ в уравнение (3.133). Интегрируя получившееся обыкновенное дифференциальное уравнение относительно многочлена $p_1(x)$, находим

$$\begin{aligned} d_2 = -2 - d_1: &\quad p_1(x) = -(d_1+1)v(x)\ln v(x) + \beta v(x); \\ d_2 \neq -2 - d_1: &\quad p_1(x) = \frac{\beta}{v^{d_2+d_1+1}(x)} - \frac{d_1+1}{d_2+d_1+2}v(x), \end{aligned} \tag{3.134}$$

где $\beta \in \mathbb{C}$ – постоянная интегрирования. Рассмотрим случай $d_2 = -2 - d_1$. Мы должны положить $d_1 = -1$. В результате мы приходим к интегрируемой по Дарбу дифференциальной системе Льенара (3.103). Параметр β может быть вычислен с использованием доминантного поведения многочленов $p_1(x)$ и $p_2(x)$, которые в этом случае совпадают с многочленами $q_1(x)$ и $q_2(x)$ соответственно. Напомним, что произведение интегрирующего множителя и первого интеграла представляет собой еще один интегрирующий множитель рассматриваемой системы. Таким образом, мы получаем семейство интегрирующих множителей $M_0(x,y)I^{\varkappa}(x,y)$, где $M_0(x,y) = [y - q_1(x)]^{-1}[y - q_2(x)]^{-1}$, $\varkappa \in \mathbb{C}$ и первый интеграл Дарбу $I(x,y)$ задан выражением (3.104).

Теперь перейдем к случаю $d_2 \neq -2 - d_1$. Если $\beta = 0$, то мы приходим к равенству $p_2(x) = -(d_2+1)p_1(x)/(d_1+1)$. Также мы получаем следующие явные выражения для многочленов $f(x)$ и $g(x)$: $f(x) = (d_2 - d_1)p_{1,x}(x)/(d_1+1)$ и $g(x) = -(d_2+1)p_1(x)p_{1,x}(x)/(d_1+1)$. Анализируя эти результаты, мы видим что исследуемая система Льенара интегрируема по Дарбу и опять принимает вид (3.103).

Далее полагаем $\beta \neq 0$. Вспоминая ограничение $d_2 \neq -1 - d_1$, введем в рассмотрение взаимно простые натуральные числа k и l, удовлетворяющие условию $d_2 + d_1 + 1 = -k/l$. Заметим, что эти числа не могут одновременно обращаться в единицу. Рассматривая соотношение (3.134), мы заключаем, что существует многочлен $u(x)$ такой, что выполнено соотношение $v(x) = u^l(x)$. Следовательно, мы можем выразить многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$ через многочлен $u(x)$. Соответствующие равенства приведены в соотношении (3.130). По построению степень многочлена $u(x)$ равна $(m+1)/\max\{k, l\}$. □

Используя интегрирующий множителя (3.128), мы находим явное выражение для первого интеграла, являющегося функцией Лиувилля. Соответствующий первый интеграл систем Льенара (3.129) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} I(x,y) = \frac{s^{d_1+1}}{\{p_2(x)-p_1(x)\}^{\frac{k}{l}}} \Bigg[{}_2\tilde{F}_1\left(d_1+1, d_1+\frac{k}{l}+1; d_1+2; s\right) p_2(x) \\ +{}_2\tilde{F}_1\left(d_1+1, d_1+\frac{k}{l}; d_1+2; s\right)\{p_1(x)-p_2(x)\}\Bigg], \end{aligned} \tag{3.135}$$

где ${}_2\tilde{F}_1(\alpha, \beta; \delta; s)$ – приведенная гипергеометрическая функция, многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$ заданы соотношением (3.130), а символом s обозначено выражение

$$s = \frac{y - p_1(x)}{p_2(x) - p_1(x)}. \tag{3.136}$$

Приведенная гипергеометрическая функция следующим образом выражается через гипергеометрическую функцию: ${}_2\tilde{F}_1(\alpha, \beta; \delta; s) =_2 F_1(\alpha, \beta; \delta; s)/\Gamma(\delta)$. В этом выражении $\Gamma(\delta)$ – гамма-функция Эйлера. Заметим, что формула (3.135) не применима, если d_1 – целое отрицательное число. Интегрирующий множитель (3.128) инвариантен относительно замены $d_1 \leftrightarrow d_2$ и $p_1(x) \leftrightarrow p_2(x)$. Пусть d_1 и $d_2 = -(d_1+1+k/l)$ одновременно не являются целыми отрицательными числами. Тогда замена $d_1 \leftrightarrow d_2$ и $p_1(x) \leftrightarrow p_2(x)$ позволяет применять формулу (3.135). Если же d_1 и d_2 одновременно являются целыми отрицательными числами, то первый интеграл является функцией Дарбу. Его явное выражение несложно получить непосредственными вычислениями.

Семейство систем (3.129) может быть приведено к простому виду

$$\begin{gathered} s_\tau = z, \quad z_\tau = \left[\beta(l+k)s^{k-1} + \frac{\{(2d_1+1)l+k\}l}{k-l}s^{l-1}\right]z \\ -\left[l\beta^2 s^{2k-1} + \frac{\{(2d_1+1)l+k\}l\beta}{k-l}s^{k+l-1} + \frac{(ld_1+k)(d_1+1)l^2}{(k-l)^2}s^{2l-1}\right] \end{gathered} \tag{3.137}$$

с помощью обобщенного преобразования Зудмана $s(\tau) = u(x)$, $z(\tau) = y$, $d\tau = u_x(x)dt$. Подставляя $u(x) = s$, $y = z$ в первый интеграл (3.135) и соотношение (3.130), несложно получить первый интеграл Лиувилля для семейства систем (3.137).

Анализируя соотношение (3.130), мы приходим к выводу, что системы Льенара (3.129) являются резонансными на бесконечности при выполнении неравенства $k > l$. Действительно, два различных полиномиальных решения уравнения (3.5) могут иметь совпадающие доминантные мономы в точке $x = \infty$ только в случае резонансных на бесконечности систем Льенара. Найдем необходимые и достаточные условия интегрируемости по Лиувиллю для нерезонансных на бесконечности систем Льенара.

Теорема 3.15. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (B) при выполнении условия* $\delta/f_0 \notin \mathbb{Q}$ *интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда она или интегрируема по Дарбу и имеет вид* (3.103), *или принимает вид* (3.129), *где* $k < l$ *и необходимо положить*

$$d_1 = \frac{(k-l)f_0}{2l\delta} - \frac{l+k}{2l}, \quad u_0 = \left(-\frac{\delta}{m+1}\right)^{\frac{1}{l}}. \tag{3.138}$$

Символом u_0 *мы обозначили старший коэффициент многочлена* $u(x)$. *В случае семейства систем* (3.129) *интегрирующий множитель Дарбу выглядит следующим образом:*

$$M(x,y) = \{y - q_1(x)\}^{\frac{(k-l)f_0}{2l\delta} - \frac{l+k}{2l}} \{y - q_2(x)\}^{\frac{(l-k)f_0}{2l\delta} - \frac{l+k}{2l}}. \tag{3.139}$$

При этом многочлены $q_j(x) \equiv p_j(x)$, $j = 1, 2$ *заданы соотношением* (3.130).

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся, что системы Льенара (3.103) и (3.129) интегрируемы по Лиувиллю при выполнении остальных условий теоремы. Перейдем к доказательству необходимости условий теоремы.

Из Лемм 3.3 и 3.8 следует, что экспоненциальные инварианты не могут появляться в явном представлении интегрирующего множителя Дарбу интегрируемой по Лиувиллю системы Льенара из семейства (B), для которой выполнено $\delta/f_0 \notin \mathbb{Q}$. Следовательно, интегрирующий множитель Дарбу содержит только алгебраические инварианты и не существует, если соответствующая система вообще не имеет алгебраических инвариантов. Согласно результатам Теоремы 3.5 мы должны рассмотреть три различных случая.

Случай 1. Предположим, что исследуемая система Льенара имеет только один неприводимый алгебраический инвариант первой степени относительно переменной y. Этот инвариант $F(x,y)$ и его собственное значение $\lambda(x,y)$ принимают вид $F(x,y) = y - q_k(x)$ и $\lambda(x,y) = -f(x) - q_{k,x}(x)$, где $k = 1$ или 2. Тогда интегрирующий множитель Дарбу выглядит следующим образом:

$$M(x,y) = [y - q_k(x)]^{d_k}, \quad d_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{3.140}$$

Этот интегрирующий множитель существует при выполнении условия

$$d_k\{f(x) + q_{k,x}(x)\} + f(x) = 0. \tag{3.141}$$

Приравнивая нулю коэффициент при мономе x^m, получаем

$$k = 1: \quad d_1 = -\frac{2f_0}{\delta + f_0}; \quad k = 2: \quad d_2 = \frac{2f_0}{\delta - f_0}. \tag{3.142}$$

Выражая многочлены $f(x)$ и $g(x)$ из соотношения (3.141) и уравнения (3.5), где $y(x) = q_k(x)$, мы приходим к выводу, что рассматриваемую систему Льенара можно представить в виде (3.103). Эта система имеет два различных неприводимых алгебраических инварианта. Пришли к противоречию.

Случай 2. Предположим, что исследуемая система Льенара имеет один неприводимый алгебраический инвариант второй степени относительно переменной y. Этот инвариант определяется равенством $F(x,y) = \{[y - y_\infty^{(1)}(x)][y - y_\infty^{(2)}(x)]\}_+$. Соответствующее собственное значение принимает вид $\lambda(x,y) = -2f(x) - q_{1,x}(x) - q_{2,x}(x)$. Представим интегрирующий множитель Дарбу следующим образом:

$$M(x,y) = F^d(x,y),\ F(x,y) = \{[y - y_\infty^{(1)}(x)][y - y_\infty^{(2)}(x)]\}_+,\ d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (3.143)$$

Этот интегрирующий множитель существует при выполнении условия

$$d\{2f(x) + q_{1,x}(x) + q_{2,x}(x)\} + f(x) = 0. \quad (3.144)$$

Опять приравняем нулю коэффициент при мономе x^m. В результате найдем параметр d: $d = -1$. Далее представим многочлен $F(x,y)$ в виде $F(x,y) = y^2 + v(x)y + w(x)$, где $v(x)$, $w(x) \in \mathbb{C}[x]$. Подставляя выражение $M(x,y) = F^{-1}(x,y)$ в уравнение в частных производных

$$yM_x - [f(x)y + g(x)]M_y - f(x)M = 0, \quad (3.145)$$

избавимся от знаменателя. Приравняем нулю коэффициенты, стоящие при различных степенях переменной y. Приходим к равенству $w(x) = \beta v(x)^2$, где $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Это равенство противоречит неприводимости многочлена $F(x,y)$.

Случай 3. Теперь предположим, что интегрируемая по Лиувиллю система Льенара из семейства (B), удовлетворяющая условию $\delta/f_0 \notin \mathbb{Q}$, имеет два различных неприводимых алгебраических инварианта $y - q_1(x)$ и $y - q_2(x)$. Их собственные значения принимают вид $\lambda_1(x,y) = -f(x) - q_{1,x}(x)$ и $\lambda_2(x,y) =$

$-f(x)-q_{2,x}(x)$ соответственно. Условие (2.21) существования интегрирующего множителя Дарбу

$$M(x,y) = [y-q_1(x)]^{d_1}[y-q_2(x)]^{d_2}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{C}, \quad |d_1|+|d_2|>0 \qquad (3.146)$$

выглядит следующим образом:

$$d_1\{f(x)+q_{1,x}(x)\}+d_2\{f(x)+q_{2,x}(x)\}+f(x)=0. \qquad (3.147)$$

Все полиномиальные системы Льенара из семейства (B), имеющие интегрирующий множитель вида (3.146), были найдены в Теореме 3.14. Нам осталось выделить нерезонансные на бесконечности системы из множества систем (3.129). Мы видим, что многочлены $q_1(x)$ и $q_2(x)$ должны иметь различные доминантные мономы. В результате приходим к неравенству $k<l$. Также мы должны ввести нормализацию принятую в настоящем разделе. Используя соотношения (3.91) и (3.92), мы получаем выражение (3.138). □

Следствие 1. Любая дифференциальная система Льенара вида (3.115), имеющая неавтономный первый интеграл Дарбу (3.116), интегрируема по Лиувиллю. Такая система имеет интегрирующий множитель Дарбу

$$M(x,y) = \frac{\left[y+\frac{\delta+f_0}{2(m+1)}(x-x_0)^{m+1}+\frac{\omega}{2(m+1)\delta}(x-x_0)\right]^{\frac{mf_0-(m+2)\delta}{2(m+1)\delta}}}{\left[y+\frac{f_0-\delta}{2(m+1)}(x-x_0)^{m+1}+\frac{\omega}{2(m+1)\delta}(x-x_0)\right]^{\frac{mf_0+(m+2)\delta}{2(m+1)\delta}}}. \qquad (3.148)$$

В справедливости этого утверждения несложно убедиться подстановкой соотношений

$$\begin{gathered} k=1, \quad l=m+1, \quad u(x)=u_0(x-x_0), \quad \beta=-\frac{\omega}{2(m+1)\delta u_0}, \\ u_0=\left\{-\frac{\delta}{m+1}\right\}^{\frac{1}{m+1}} \end{gathered} \qquad (3.149)$$

в выражения (3.129) и (3.139). Также вспомним, что параметр d_1 принимает вид (3.138).

Теорема 3.16. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (B) при выполнении ограничения* $\delta = 0$ *интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда она имеет неприводимый алгебраический инвариант* $y - q(x)$, *экспоненциальный инвариант* $E(x, y) = \exp[u(x)/(y - q(x))]$ *и выполнено одно из приводимых ниже условий.*

1. *Рассматриваемая система интегрируема по Дарбу и принимает вид* (3.111). *Соответствующий интегрирующий множитель Дарбу выглядит следующим образом:*

$$M(x, y) = \frac{1}{[y - q(x)]^2}. \tag{3.150}$$

Для многочлена $u(x)$, *появляющегося в экспоненциальном инварианте, справедливо равенство* $u(x) = \alpha q(z)$, *где* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2. *Рассматриваемая система имеет вид*

$$\begin{gathered} x_t = y, \quad y_t = -\left[\frac{2l^2}{l-k} v^{l-1} - (l+k)\beta v^{k-1}\right] v_x y \\ + \left[\frac{2l^2\beta}{l-k} v^{l+k-1} - \frac{l^3}{(l-k)^2} v^{2l-1} - l\beta^2 v^{2k-1}\right] v_x, \end{gathered} \tag{3.151}$$

где $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $v(x)$ *– непостоянный многочлен,* k *и* l *– взаимно простые натуральные числа, удовлетворяющие неравенству* $k < l$. *Соответствующий интегрирующий множитель Дарбу выглядит следующим образом:*

$$M(x, y) = [y - q(x)]^{-\frac{l+k}{l}} \exp\left[\frac{v^l(x)}{y - q(x)}\right], q(x) = -\frac{l}{l-k} v^l + \beta v^k. \tag{3.152}$$

Также справедливо соотношение $m + 1 = l \deg v$, *где* $\deg v$ *– степень многочлена* $v(x)$.

Доказательство. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что выражения (3.150) и (3.152) представляют собой интегрирующие множители Дарбу соответствующей дифференциальной системы Льенара (3.1) из семейства (B) при выполнении всех условий теоремы. Докажем обратное утверждение.

Рассмотрим интегрируемую систему Льенара (3.1) из семейства (B) при выполнении ограничения $\delta = 0$. В силу Теорем 2.2, 3.5 и Лемм 3.3, 3.8 эта система имеет неприводимый алгебраический инвариант $F(x, y) = y - q(x)$ и интегрирующий множитель Дарбу, который может быть представлен в виде

$$M(x, y) = [y - q(x)]^d \exp\left[\frac{u(x)}{y - q(x)}\right], \quad d \in \mathbb{C}, \tag{3.153}$$

где мы полагаем $u(x) \equiv 0$, если экспоненциальный инвариант $E(x, y) = \exp[u(x)/(y - q(x))]$, соответствующий инвариантной алгебраической кривой $y - q(x) = 0$, или не существует, или не входит в явное представление интегрирующего множителя. Условие (2.6) выглядит следующим образом:

$$d[f(x) + q_x(x)] - u_x(x) + f(x) = 0. \tag{3.154}$$

Далее рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Предположим, что выполнено ограничение $u(x) \equiv 0$. Подставляя асимптотические представления $f(x) = f_0 x^m + o(x^m)$ и $q(x) = -f_0 x^{m+1}/(2\{m+1\}) + o(x^{m+1})$, $x \to \infty$ в условие (3.154) и приравнивая нулю коэффициент при мономе x^m, получаем равенства $d = -2$ и $f(x) = -2q_x(x)$. Вспомним, что многочлен $q(x)$ является решением соответствующего уравнения (3.5). Подставляя $y = q(x)$ в последнее уравнение, мы находим многочлен $g(x)$, см. (3.111). С помощью Теоремы 3.13 мы заключаем, что соответствующая система Льенара имеет первый интеграл Дарбу (3.112) и семейство экспоненциальных инвариантов $E(x, y) = \exp[\alpha q(x)/(y - q(x))]$, где $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Отметим, что интегрируя дифференциальную форму

$$\frac{ydy + (qq_x - 2q_x y)dx}{\{y - q(x)\}^2}, \tag{3.155}$$

мы получаем первый интеграл вида $\ln I(x, y)$, где функция $I(x, y)$ задана равенством (3.112).

Случай 2. Теперь будем предполагать, что многочлен $u(x)$ тождественно в нуль не обращается. Мы видим, что исследуемая система имеет экспоненциальный инвариант $E(x, y) = \exp[u(x)/(y - q(x))]$, где многочлен $u(x)$ удовлетворяет уравнению (3.93). Выражая многочлен $f(x)$ из последнего уравнения и подставляя результат в условие (3.154), получаем равенство

$$(d + 1)qu_x + q_x u + uu_x = 0. \tag{3.156}$$

Это равенство, рассматриваемое как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно многочлена $q(x)$, может быть проинтегрировано. В результате, мы приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} d \neq -2: \quad & q(x) = -\frac{1}{d+2}u + \beta u^{-(d+1)}, \\ d = -2: \quad & q(x) = (\beta - \ln u)u, \end{aligned} \tag{3.157}$$

где $\beta \in \mathbb{C}$ – постоянная интегрирования. Если $d = -2$, то $q(x)$ не является многочленом. Далее положим $d \neq -2$. Случай $\beta = 0$ опять приводит нас к семейству интегрируемых по Дарбу систем Льенара из Теоремы 3.13. Следовательно ,предполагаем, что параметр β отличен от нуля. Вспомним, что многочлены $q(x)$ и $u(x)$ имеют доминантное поведение $q(x) = -f_0 x^{m+1}/(2\{m+1\}) + o(x^{m+1})$ и $u(x) = u_0 x^{m+1} + o(x^{m+1})$, $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ в точке $x = \infty$. Мы должны рассмотреть две возможности

$$d = -1: \quad u(x) = \beta - q(x); \quad d = -\frac{l+k}{l}: \quad u(x) = v^l(x). \tag{3.158}$$

В этом выражении l и k – взаимно простые натуральные числа, удовлетворяющие неравенству $k < l$, и $v(x)$ – непостоянный многочлен. Пусть сначала $d = -1$. Подставляя равенство $u(x) = \beta - q(x)$ в выражение (3.93), мы можем найти многочлен $f(x)$. В результате, получаем

$$f(x) = \frac{(2q(x) - \beta)q_x(x)}{\beta - q(x)}. \tag{3.159}$$

Пусть $x_0 \in \mathbb{C}$ является нулем многочлена $\beta - q(x)$. Рассматривая поведение в точке x_0 рациональной функции, стоящей справа от знака равенства в выражении (3.159), мы видим, что $f(x)$ не является многочленом при условии $\beta \neq 0$.

Далее считаем, что выполнены соотношения $d = -(l+k)/l$ и $u(x) = v^l(x)$. С помощью соотношений (3.157), (3.154) и (3.5) найдем многочлены $f(x)$, $g(x)$ и $q(x)$. Соответствующие представления приведены в формулах (3.151) и (3.152). Также убеждаемся, что уравнение (3.93) выполняется тождественно. На этом мы завершаем доказательство. □

Следствие 1. Дифференциальные системы Льенара (3.122), имеющие неавтономный первый интеграл Дарбу (3.123), интегрируемы по Лиувиллю с интегрирующим множителем Дарбу

$$\begin{aligned} M(x,y) = \exp &\left[\frac{mf_0(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)\{2(m+1)y + f_0(x-x_0)^{m+1} + 2\omega(x-x_0)\}}\right] \\ &\times \left[y + \frac{f_0(x-x_0)^{m+1}}{2(m+1)} + \frac{\omega(x-x_0)}{m+1}\right]^{-\frac{m+2}{m+1}}. \end{aligned} \tag{3.160}$$

Доказательство. Справедливость этого утверждения можно обосновать, подставляя соотношения

$$\begin{gathered} k = 1, \quad l = m+1, \quad v(x) = v_0(x-x_0), \quad \beta = -\frac{\omega}{(m+1)v_0}, \\ v_0 = \left\{\frac{mf_0}{2(m+1)^2}\right\}^{\frac{1}{m+1}} \end{gathered} \tag{3.161}$$

в равенства (3.151) и (3.152). □

Следствие 2. Если справедливо неравенство $k > l$, то семейство систем (3.151) также интегрируемо по Лиувиллю. При этом эти системы являются резонансными на бесконечности. Соответствующий интегрирующий множитель Дарбу опять определяется соотношением (3.152).

Первый интеграл Лиувилля, соответствующий интегрирующему множителю (3.152), выглядит следующим образом:

$$I(x,y) = v^{l-k}(x)\gamma\left(\frac{k-l}{l}, \frac{v^l(x)}{q(x)-y}\right) - \frac{q(x)}{v^k(x)}\gamma\left(\frac{k}{l}, \frac{v^l(x)}{q(x)-y}\right), \tag{3.162}$$

где многочлен $q(x)$ задан выражением (3.151) и $\gamma(\delta, s)$ – это неполная гамма-функция

$$\gamma(\delta, s) = \int_0^s t^{\delta-1}\exp(-t)dt. \tag{3.163}$$

Отметим, что необходимо рассматривать аналитическое продолжение этого интеграла для комплексных и неположительных вещественных значениях переменной s. Если $k=1$ и $l=2$, то можно найти более простое представление первого интеграла. Оно имеет вид

$$\begin{gathered} I(x,y) = 2\sqrt{\beta v(x) - 2v^2(x) - y}\exp\left[\frac{v^2(x)}{y+2v^2(x)-\beta v(x)}\right] \\ -\sqrt{\pi}\beta\,\mathrm{erfc}\left[\frac{v(x)}{\sqrt{\beta v(x) - 2v^2(x) - y}}\right], \end{gathered} \tag{3.164}$$

где $\mathrm{erfc}(s)$ – дополнительная функция ошибок

$$\mathrm{erfc}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_s^\infty \exp\left(-t^2\right)dt. \tag{3.165}$$

Семейство систем (3.151) может быть преобразовано к простому виду

$$\begin{gathered} s_\tau = z, \quad z_\tau = -\left[\frac{2l^2}{l-k}s^{l-1} - (l+k)\beta s^{k-1}\right]z + \frac{2l^2\beta}{l-k}s^{l+k-1} \\ -\frac{l^3}{(l-k)^2}s^{2l-1} - l\beta^2 s^{2k-1} \end{gathered} \tag{3.166}$$

с помощью обобщенных преобразований Зудмана $s(\tau) = v(x)$, $z(\tau) = y$, $d\tau = v_x(x)dt$. Подставляя $v(x) = s$, $y = z$ в равенство (3.162), мы получаем первый интеграл Лиувилля для систем (3.166).

Интегрируемые по Лиувиллю семейства систем Льенара, представленные в Теоремах 3.14, 3.15 и 3.16, являются новыми, за исключением систем (3.122), полученных ранее [155] Т. Стаховяком (T. Stachowiak).

Далее будем исследовать существование неавтономных последних множителей Дарбу – Якоби (2.20).

Лемма 3.11. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (B) при выполнении ограничения* $\delta/f_0 \notin \mathbb{Q}$ *имеет неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби вида* (2.20) *тогда и только тогда, когда справедливо одно из следующих условий.*

1. *Для рассматриваемой системы существует один неприводимый алгебраический инвариант первой степени относительно переменной* y*:* $F(x, y) = y - q_k(x)$*, где* $k = 1$ *или* $k = 2$*, такой, что многочлены* $f(x)$ *и* $q_k(x)$ *тождественно удовлетворяют соотношению*

$$\begin{aligned} k = 1: &\quad (f_0 - \delta)f(x) + 2f_0 q_{1,x}(x) + (f_0 + \delta)\omega = 0, \\ k = 2: &\quad (f_0 + \delta)f(x) + 2f_0 q_{2,x}(x) + (f_0 - \delta)\omega = 0, \end{aligned} \qquad (3.167)$$

где $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*. Соответствующий последний множитель Дарбу – Якоби принимает вид*

$$\begin{aligned} k = 1: &\quad M(x, y, t) = [y - q_1(x)]^{-\frac{2f_0}{\delta + f_0}} \exp(\omega t), \\ k = 2: &\quad M(x, y, t) = [y - q_2(x)]^{\frac{2f_0}{\delta - f_0}} \exp(\omega t). \end{aligned} \qquad (3.168)$$

2. *Для рассматриваемой системы существует один неприводимый алгебраический инвариант второй степени относительно переменной* y*:*

$$F(x, y) = \left\{ \left[y - y_\infty^{(1)}(x) \right] \left[y - y_\infty^{(2)}(x) \right] \right\}_+ \qquad (3.169)$$

такой, что многочлены $f(x)$, $q_1(x) = \left\{ y_\infty^{(1)}(x) \right\}_+$ *и* $q_2(x) = \left\{ y_\infty^{(2)}(x) \right\}_+$ *тождественно удовлетворяют соотношению*

$$f(x) + q_{1,x}(x) + q_{2,x}(x) + \omega = 0,\ \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \qquad (3.170)$$

Соответствующий последний множитель Дарбу – Якоби имеет вид

$$M(x, y, t) = \frac{\exp(\omega t)}{F(x, y)}, F(x, y) = \left\{ \left[y - y_\infty^{(1)}(x) \right] \left[y - y_\infty^{(2)}(x) \right] \right\}_+. \qquad (3.171)$$

3. *Для рассматриваемой системы существуют два различных неприводимых алгебраических инварианта первой степени относительно переменной* y: $F_1(x,y) = y - q_1(x)$ *и* $F_2(x,y) = y - q_2(x)$ *такие, что многочлены* $f(x)$, $q_1(x)$, *and* $q_2(x)$ *тождественно удовлетворяют соотношению*

$$\begin{gathered}[(2d_2+1)\delta - f_0]f(x) + [(\delta - f_0)d_2 - 2f_0]q_{1,x}(x) \\ +(\delta + f_0)d_2 q_{2,x}(x) - (\delta + f_0)\omega = 0, \quad d_2 \in \mathbb{C}, \quad \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.\end{gathered} \tag{3.172}$$

Соответствующий последний множитель Дарбу – Якоби выглядит следующим образом:

$$M(x,y,t) = [y - q_1(x)]^{\frac{(\delta - f_0)d_2 - 2f_0}{\delta + f_0}}[y - q_2(x)]^{d_2}\exp(\omega t). \tag{3.173}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству Теоремы 3.15.

Лемма 3.12. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (B) при выполнении ограничения* $\delta = 0$ *имеет неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби вида* (2.20) *тогда и только тогда, когда справедливо одно из следующих условий.*

1. *Для рассматриваемой системы существует один неприводимый алгебраический инвариант первой степени относительно переменной* y: $F(x,y) = y - q(x)$ *такой, что многочлены* $f(x)$ *и* $g(x)$ *представляются в виде*

$$f(x) = -2q_x(x) - \omega, \quad g(x) = q(x)(q_x(x) + \omega), \quad \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{3.174}$$

Соответствующий последний множитель Дарбу – Якоби выглядит следующим образом:

$$M(x,y,t) = \frac{\exp(\omega t)}{[y - q(x)]^2}. \tag{3.175}$$

2. *Для рассматриваемой системы существует один неприводимый алгебраический инвариант первой степени относительно переменной y: $F(x,y) = y - q(x)$ и семейство экспоненциальных инвариантов $E(x,y) = \exp[u(x)/(y-q(x))]$ такие, что многочлены $f(x)$, $q(x)$ и $u(x)$ тождественно удовлетворяют условию*

$$(d+1)f(x) + dq_x(x) + u_x(x) + \omega, \quad d \in \mathbb{C}, \quad \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{3.176}$$

Соответствующий последний множитель Дарбу – Якоби выглядит следующим образом:

$$M(x,y,t) = [y-q(x)]^d \exp\left[\frac{u(x)}{y-q(x)}\right] \exp(\omega t). \tag{3.177}$$

Эту лемму можно доказать так же, как и Теорему 3.16.

В заключение этого раздела отметим, что автономные и неавтономные первые интегралы Дарбу для нерезонансных на бесконечности дифференциальных систем Льенара (3.1), удовлетворяющих условиям $(\deg f, \deg g) = (1,3)$ и $(\deg f, \deg g) = (2,5)$, были классифицированы в статьях [146, 149] соответственно.

3.2.3 Системы Льенара из семейства (C)

Мы начнем исследование интегрируемости полиномиальных дифференциальных систем Льенара (3.1) из семейства (C) с доказательства отсутствия экспоненциальных инвариантов, имеющих неполиномиальные аргументы. Будем использовать обозначения Теоремы 3.6. В частности, символами $h^{(1)}(x)$ и $h^{(2)}(x)$ мы обозначили начальные отрезки рядов Пюизе $y_{\infty}^{(1)}(x)$ и $y_{\infty}^{(2)}(x)$ соответственно. Эти начальные отрезки включают в себя дифференциальные мономы, показатели степеней которых больше числа $-(n+1)/2$. Напомним, что степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ обозначены следующим образом: $\deg g = n$ и $\deg f = m$. Также справедливо неравенство $n > 2m+1$.

Лемма 3.13. *Предположим, что дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (C) не интегрируема с рациональным первым интегралом. Тогда эта система не имеет экспоненциальных инвариантов вида* $E(x,y) = \exp\{h(x,y)/r(x,y)\}$*, где* $h(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ *и* $r(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}$ *– взаимно простые многочлены.*

Доказательство. Мы будем использовать локальную теорию инвариантов, разработанную в Разделе 2.3. Если система Льенара (3.1) имеет экспоненциальный инвариант вида $E(x,y) = \exp\{h(x,y)/r(x,y)\}$, где $r(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]\setminus\mathbb{C}$, то $r(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}[x]$ и без ограничения общности можно предположить, что степень многочлена $h(x,y)$ относительно переменной y меньше степени многочлена $r(x,y)$ относительно переменной y. Существует конечное число элементарных локальных экспоненциальных инвариантов

$$\begin{gathered} E_j(x,y) = \exp\left[\frac{u_j(x,y)}{\{y - Y_{j,\infty}(x)\}^{n_j}}\right], \quad u_j(x,y) \in \mathbb{C}_\infty\{x\}[y], \\ Y_{j,\infty}(x) \in \mathbb{C}_\infty\{x\}, \quad n_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \ldots, K, \quad K \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{3.178}$$

таких, что экспоненциальный инвариант $E(x,y)$ равен произведению $E_1(x,y) \times \ldots \times E_K(x,y)$. Из Теоремы 2.9 и Леммы 2.3 следует, что каждый из рядов Пюизе $Y_{j,\infty}(x)$, $j = 1, \ldots, K$ удовлетворяет уравнению (3.5). На самом деле ряд $Y_{j,\infty}(x)$ совпадает с одним из рядов $y^{(1,2)}_{j,\infty}(x)$, описанных в Теореме 3.6. Символом $\varrho_j(x,y) \in \mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ обозначим собственное значение элементарного локального экспоненциального инварианта $E_j(x,y)$. Мы видим, что выражение $\varrho_1(x,y) + \ldots + \varrho_K(x,y)$ равно собственному значению $\varrho(x,y)$ инварианта $E(x,y)$. Напомним, что собственное значение $\varrho(x,y)$ является элементом кольца $\mathbb{C}[x,y]$. Далее представим числитель из соотношения (3.178) в виде

$$u_j(x,y) = \sum_{k=0}^{n_j-1} v_{(j,k)}(x) z^k, \quad z = y - Y_{j,\infty}(x), \quad v_{(j,k)}(x) \in \mathbb{C}_\infty\{x\}, \tag{3.179}$$

где без ограничение общности полагаем $v_{j,0}(x) \neq O_\infty$. В противном случае число n_j необходимо уменьшить на единицу. Как и ранее, символом O_∞

мы обозначили нулевой элемент поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$. Подставляя явное представление локального инварианта $E_j(x,y)$ в уравнение в частных производных $\mathcal{X}E_j(x,y) = \varrho_j(x,y)E_j(x,y)$, мы избавляемся от знаменателей и приравниваем друг другу коэффициенты, стоящие при различных степенях переменной z. В результате, мы заключаем, что собственное значение $\varrho_j(x,y)$ не зависит от z и, значит, от y: $\varrho_j(x,y) = v_{(j,n_j-1),x}$. Также мы получаем следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &Y_{j,\infty}v_{(j,0),x} - n_j\lambda_j v_{(j,0)} = 0,\\ &Y_{j,\infty}v_{(j,k),x} - (n_j-k)\lambda_j v_{(j,k)} + u_{(j,k-1),x} = 0, \quad 1 \le k < n_j - 1. \end{aligned} \tag{3.180}$$

В этом выражении $\lambda_j(x,y) \in \mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ представляет собой собственное значение элементарного локального инварианта $F_j(x,y) = y - Y_{j,\infty}(x)$. Это собственное значение мы находим с помощью Теоремы 2.11. Оно принимает вид

$$\lambda_j(x,y) = -f(x) - \partial_x Y_{j,\infty}(x). \tag{3.181}$$

Решая систему (3.180), мы определяем доминантное поведение соответствующих рядов Пюизе: $v_{(j,k)}(x) = C_{(j,k)}x^{-(n_j+k)(n+1)/2}$, где $C_{(j,k)} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Заметим, что мы можем рассматривать только частные решения линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений (3.180) при условии $0 < k < n_j - 1$. Действительно, решения линейных однородных уравнений из системы (3.180) включены в элементарные локальные экспоненциальные инварианты для меньших значений числа n_j. Следовательно, собственное значение $\varrho_j(x,y) = v_{(j,n_j-1),x}$ не имеет мономов с неотрицательными показателями степеней. Мы видим, что многочлен $\varrho(x,y) = \varrho_1(x,y) + \ldots + \varrho_K(x,y)$ должен тождественно равняться нулю. Тогда аргумент $h(x,y)/r(x,y)$ экспоненциального инварианта $E(x,y) = \exp\{h(x,y)/r(x,y)\}$ представляет собой рациональный первый интеграл рассматриваемой системы Льенара. Мы пришли к противоречию. □

Замечание 1. Ниже мы покажем, что системы Льенара (3.1) из семейства

(C) не имеют рациональных первых интегралов. Следовательно, это условие не ограничивает общности Леммы 3.13.

Далее перейдем к исследованию существования первых интегралов Дарбу для систем Льенара (3.1) из семейства (C).

Теорема 3.17. *Дифференциальные системы Льенара* (3.1) *из семейства (C) не интегрируемы по Дарбу.*

Доказательство. Применим метод от противного. Пусть система Льенара (3.1) из семейства (C) имеет первый интеграл, являющийся функцией Дарбу. Согласно Теореме 2.1 для рассматриваемой системы должен существовать рациональный интегрирующий множитель. Следовательно, система имеет $K \in \mathbb{N}$ попарно различных неприводимых алгебраических инвариантов $F_1(x, y)$, …, $F_K(x, y) = 0$, таких что для некоторых ненулевых целых чисел d_1, …, d_K выполнено соотношение

$$\sum_{j=1}^{K} d_j \lambda_j(x, y) = f(x), \quad d_1, \dots, d_K \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{3.182}$$

В этом выражении $\lambda_j(x, y)$ представляет собой собственное значение алгебраического инварианта $F_j(x, y)$. Предположим, что семейство рядов Пюизе $y_\infty^{(l)}(x)$ появляется $N_{l,j}$ раз в разложении на множители многочлена $F_j(x, y)$ в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$. Здесь $l = 1$, 2 и мы используем обозначения Теоремы 3.6. Собственное значение $\lambda_j(x, y)$ принимает вид

$$\begin{gathered} \lambda_j(x, y) = -(N_{1,j} + N_{2,j}) f(x) - \left\{ N_{1,j} h_x^{(1)}(x) + N_{2,j} h_x^{(2)}(x) \right\}_+, \\ N_{1,j}, N_{2,j} \in \mathbb{N}_0, \quad N_{1,j} + N_{2,j} > 0, \end{gathered} \tag{3.183}$$

где $h^{(1,2)}(x)$ – начальный отрезок ряда Пюизе $y_\infty^{(1,2)}(x)$, описанного в Теореме 3.6. Подставляя выражение (3.183) в соотношение (3.182), находим

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{K} d_j \left[N_{1,j} \left(f(x) + \left\{ h_x^{(1)}(x) \right\}_+ \right) + N_{2,j} \left(f(x) \right.\right. \\ \left.\left. + \left\{ h_x^{(2)}(x) \right\}_+ \right) \right] = -f(x). \end{gathered} \tag{3.184}$$

Сначала будем считать, что n – нечетное число. Доминантный моном начальных отрезков $h^{(1)}(x)$ и $h^{(2)}(x)$ имеет вид $b_0 x^{(n+1)/2}$ и $-b_0 x^{(n+1)/2}$ соответственно. Приравнивая нулю коэффициент при $x^{(n-1)/2}$ в выражении (3.184), получаем

$$\sum_{j=1}^{K} d_j N_{1,j} = \sum_{j=1}^{K} d_j N_{2,j}. \tag{3.185}$$

Пусть теперь n – четное число. Из Теоремы 3.6 следует справедливость равенства $N_{1,j} = N_{2,j}$. Следовательно, соотношение (3.185) выполняется тождественно. В результате, условие (3.184) принимает вид

$$B\left(2f(x) + \left\{h_x^{(1)}(x) + h_x^{(2)}(x)\right\}_+\right) = -f(x), \quad B = \sum_{j=1}^{K} d_j N_{1,j}. \tag{3.186}$$

Очевидно, что B является ненулевым целым числом. Рассмотрим уравнение

$$y y_x + \varepsilon f(x) y + g(x) = 0. \tag{3.187}$$

Ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, являющиеся формальными решениями этого уравнения, совпадают с рядами Пюизе $\{y_{j,\infty}^{(1,2)}(x)\}$ Теоремы 3.6 при выполнении условия $\varepsilon = 1$. Аналогично случаю $\varepsilon = 1$, мы находим два семейства рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющих уравнению (3.187). Обозначим эти семейства символами $Y_\infty^{(1)}(x)$ and $Y_\infty^{(2)}(x)$. Несложно заметить, что коэффициенты этих рядов полиномиально зависят от ε. Следовательно, справедливо представление

$$Y_\infty^{(1,2)}(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} \varepsilon^l v_k^{(1,2)}(x), \tag{3.188}$$

где $\{v_k^{(1,2)}(x)\}$ – ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, не зависящие от ε. Подставляя выражение (3.188) в уравнение (3.187) и приравнивая нулю коэффициенты, стоящие при различных степенях параметра ε, мы находим обыкновенные дифференциальные уравнения для рядов $\{v_k^{(1,2)}(x)\}$. Первые два уравнения принимают вид

$$v_0 v_{0,x} + g(x) = 0, \quad v_0 v_{1,x} + v_{0,x} v_1 + f(x) v_0 = 0, \tag{3.189}$$

где верхний индекс опущен. Следовательно, мы получаем соотношения

$$v_0^{(2)}(x) = -v_0^{(1)}(x),\ v_1^{(1,2)}(x) = -\frac{2f_0}{2m+n+3}x^{m+1} + o(x^{m+1}),\ x \to \infty. \quad (3.190)$$

Анализируя другие обыкновенные дифференциальные уравнения для рядов $v_k^{(1,2)}(x)$, где $k \geq 2$, мы приходим к асимптотическим равенствам $v_k^{(1,2)}(x) = o(x^{m+1})$, $x \to \infty$, $k \geq 2$. Вспомним, что ряды Пюизе $y_{j,\infty}^{(1,2)}(x)$ с одинаковым верхним индексом имеют совпадающие начальные отрезки до мономов с показателем степени $-(n+1)/2$. Эти начальные отрезки мы обозначили символами $h^{(1)}(x)$ и $h^{(2)}(x)$. Подставляя наши результаты в условие (3.186) и рассматривая коэффициент при старшей степени x^m, мы приходим к уравнению

$$B\left(2f_0 - \frac{4(m+1)f_0}{2m+n+3}\right) = -f_0. \quad (3.191)$$

Решая это уравнение, получаем выражение

$$B = -\frac{m+1}{n+1} - \frac{1}{2}. \quad (3.192)$$

Из неравенства $n > 2m+1$ следует, что число B не является целым. Пришли к противоречию. □

Следствие 1. Дифференциальная система Льенара (3.1) из семейства (C) имеет не более одного алгебраического инварианта $F(x,y)$, для которого выполнено $N_1 = N_2$.

Доказательство. Напомним, что N_1 и N_2 представляют собой число попарно различных рядов вида $y_\infty^{(1)}(x)$ и $y_\infty^{(2)}(x)$ из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, появляющихся в разложении инварианта $F(x,y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$, соответственно. Эти факторизации приведены в Теореме 3.6. Отметим, что мы не требуем, чтобы многочлен $F(x,y)$ был неприводимым в кольце $\mathbb{C}[x,y]$. Собственное значение такого алгебраического инварианта принимает вид

$$\lambda(x,y) = -2N_1 f(x) - N_1\left\{h_x^{(1)}(x) + h_x^{(2)}(x)\right\}_+. \quad (3.193)$$

Предположим, что существует еще один алгебраический инвариант со свойством $N_1 = N_2$. Тогда из формулы (3.193) следует, что соответствующая система имеет рациональный первый интеграл. Этот факт противоречит Теореме 3.17. □

Следствие 2. Дифференциальная система Льенара (3.1) из семейства (C) не может иметь два различных неприводимых алгебраических инварианта $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$, для которых выполнено $N_{1,1}N_{2,2} - N_{1,2}N_{2,1} = 0$, где $N_{l,j}$ – число вхождений ряда Пюизе вида $y_\infty^{(l)}(x)$ в разложение многочлена $F_j(x,y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$.

Доказательство. Воспользуемся методом доказательства от противного. Предположим, что система Льенара (3.1) из семейства (C) имеет два различных неприводимых алгебраических инварианта $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$ со свойством $N_{1,1}N_{2,2} - N_{1,2}N_{2,1} = 0$.

Сначала будем считать, что одно из чисел $N_{l,j}$, где l, $j = 1$, 2, равно нулю. Без ограничения общности положим $N_{2,1} = 0$. Следовательно, мы приходим к равенству $N_{1,1}N_{2,2} = 0$. Многочлен $F_j(x,y)$, $j = 1$, 2 должен иметь в своем разложении на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ хотя бы один ряд Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$. Мы получаем неравенства $N_{1,1} > 0$, $N_{2,2} = 0$ и $N_{1,2} > 0$. По Теореме 3.6 существует самое большее один неприводимый алгебраический инвариант, имеющий в своем разложении на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ ряды Пюизе, принадлежащие семейству $y_\infty^{(1)}(x)$. Пришли к противоречию.

Теперь предположим, что все числа $N_{l,j}$, где l, $j = 1$, 2, отличны от нуля. Введем в рассмотрение число

$$\varkappa = \frac{N_{1,1}}{N_{2,1}} = \frac{N_{1,2}}{N_{2,2}}. \tag{3.194}$$

Собственные значения $\lambda_1(x,y)$ и $\lambda_2(x,y)$ алгебраических инвариантов $F_1(x,y)$

и $F_2(x,y)$ представляются в виде

$$\lambda_j(x,y) = -N_{2,j}\left[(\varkappa+1)f(x) + \left\{\varkappa h_x^{(1)}(x) + h_x^{(2)}(x)\right\}_+\right], \quad j=1,2. \quad (3.195)$$

Мы видим, что собственные значения зависимы над полем $\mathbb{Z}$. Таким образом, исследуемая система Льенара имеет рациональный первый интеграл. Пришли к противоречию. □

Из Следствия 1 к Теореме 3.17 и Теоремы 3.6 следует, что системы Льенара (3.1), принадлежащие семейству (C), не могут одновременно иметь более одного неприводимого алгебраического инварианта при четных значениях параметра n.

Теперь будем исследовать существование неавтономных первых интегралов Дарбу. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.14. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (C) имеет неавтономный первый интеграл Дарбу вида* (2.18) *тогда и только тогда, когда $n = 0$ ($\deg f = 0$) и выполнено одно из указанных ниже условий.*

1. *Существует неприводимый алгебраический инвариант $F(x,y)$ такой, что число рядов Пюизе из семейства $y_\infty^{(1)}(x)$ в разложении многочлена $F(x,y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ равно числу рядов Пюизе из семейства $y_\infty^{(2)}(x)$ в этом же разложении, т.е. $N_1 = N_2$. Соответствующий первый интеграл принимает вид*

$$I(x,y,t) = F(x,y)\exp\left[\frac{2(n+1)f_0N_1t}{n+3}\right]. \quad (3.196)$$

2. *Существуют два различных неприводимых алгебраических инварианта $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$ такие, что выполнено условие $N_{1,j} \neq N_{2,j}$, $j = 1$, 2, где $N_{l,j}$ – число рядов Пюизе из семейства $y_\infty^{(l)}(x)$ в разложении многочлена $F_j(x,y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$. Соответствующий*

первый интеграл выглядит следующим образом:

$$I(x, y, t) = \frac{\{F_1(x, y)\}^{N_{1,2}-N_{2,2}}}{\{F_2(x, y)\}^{N_{1,1}-N_{2,1}}} \exp\left[\frac{2(n+1)f_0\Omega t}{n+3}\right], \qquad (3.197)$$

где параметр Ω определяется соотношением $\Omega = N_{1,2}N_{2,1} - N_{1,1}N_{2,2}$.

Рассматриваемая система не имеет других независимых неавтономных первых интегралов Дарбу с зависящим от времени экспоненциальным множителем вида (2.18).

Доказательство. Согласно Леммам 3.3 и 3.4 экспоненциальные инварианты не могут появляться в явном представлении неавтономных первых интегралов Дарбу вида (2.18). Из Теоремы 2.7 следует, что система Льенара из семейства (C) имеет неавтономный первый интеграл (2.18) тогда и только тогда, когда существует $K \in \mathbb{N}$ попарно различных неприводимых алгебраических инвариантов $F_1(x, y)$, …, $F_K(x, y)$, таких что для некоторых ненулевых комплексных чисел d_1, …, d_K, ω выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{K} d_j\lambda_j(x, y) + \omega = 0, \quad d_1, \ldots, d_K,\ \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \qquad (3.198)$$

В этом выражении $\lambda_j(x, y)$ представляет собой собственное значение алгебраического инварианта $F_j(x, y)$. Соответствующий неавтономный первый интеграл Дарбу принимает вид

$$I(x, y, t) = \prod_{j=1}^{K} F_j^{d_j}(x, y) \exp[\omega t]. \qquad (3.199)$$

Предположим, что ряды Пюизе из семейства $y_{\infty}^{(l)}(x)$ появляются $N_{l,j}$ раз в разложении многочлена $F_j(x, y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}[y]$. Здесь $l = 1$, 2 и опять мы используем обозначения Теоремы 3.6. Собственное значение $\lambda_j(x, y)$ задано соотношением (3.183). Необходимое и достаточное условие существование неавтономного первого интеграла (3.199) выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{K} d_j \left[N_{1,j}\left(f(x)+\left\{h_x^{(1)}(x)\right\}_+\right)+N_{2,j}\left(f(x)+\left\{h_x^{(2)}(x)\right\}_+\right)\right]=\omega. \quad (3.200)$$

Это условие не выполнено, если не справедливо соотношение (3.185). Перепишем условие (3.200) в виде

$$B\left(2f(x)+\left\{h_x^{(1)}(x)+h_x^{(2)}(x)\right\}_+\right)=\omega, \quad B=\sum_{j=1}^{K} d_j N_{1,j}, \quad (3.201)$$

где в отличие от случая Теоремы 3.17 параметр B может быть комплексно-значным. Если $m>0$, то мы получаем равенство

$$B\left(2f_0-\frac{4(m+1)f_0}{2m+n+3}\right)=0, \quad (3.202)$$

которое не может выполняться. Следовательно, мы должны положить $m=0$. Соотношения (3.185) и (3.201) при $m=0$ принимают вид

$$\sum_{j=1}^{K} d_j N_{1,j}=\sum_{j=1}^{K} d_j N_{2,j}, \quad 2f_0(n+1)\sum_{j=1}^{K} d_j N_{1,j}=(n+3)\omega. \quad (3.203)$$

Если рассматриваемая система Льенара имеет только один неприводимый алгебраический инвариант ($K=1$), то алгебраическая система (3.203) удовлетворяется тогда и только тогда, когда выполнено $N_{1,1}=N_{2,1}$. Отметим, что параметр $d_1\neq 0$ можно выбрать произвольным образом. Тогда положим $d_1=1$. Второе уравнение в системе (3.203) задает значение параметра ω. В результате, мы получаем неавтономный первый интеграл Дарбу в виде (3.196), где нижний индекс $j=1$ опущен.

Далее предположим, что исследуемая система Льенара имеет хотя бы два различных неприводимых алгебраических инварианта $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$, удовлетворяющих условию $N_{1,j}\neq N_{2,j}$, $j=1$, 2. Мы видим, что алгебраическая система (3.203) удовлетворяется автоматически. Действительно, полагая $K=2$ и учитывая тот факт, что одно из чисел d_1 или d_2 можно выбрать произвольным образом, мы находим решение

$$d_1 = N_{1,2} - N_{2,2}, \quad d_2 = N_{2,1} - N_{1,1}, \quad \omega = \frac{2(n+1)f_0\Omega}{n+3}, \tag{3.204}$$

где используется обозначение $\Omega = N_{1,2}N_{2,1} - N_{1,1}N_{2,2}$. Следовательно, мы пришли к неавтономному первому интегралу Дарбу (3.197). По Следствию 2 к Теореме 3.17, справедливо условие $\Omega \neq 0$.

Предположим, что для системы Льенара (3.1) из семейства (C) существуют два независимых неавтономных первых интеграла Дарбу вида (2.18). Тогда эта система интегрируема по Дарбу. Этот факт противоречит Теореме 3.17. □

Замечание 1. Дифференциальные системы Льенара (3.1), удовлетворяющие условию 2 Леммы 3.14, могут существовать, только если $n = \deg g$ – нечетное число.

Примеры систем Льенара (3.1) из семейства (C), имеющих неавтономный первый интеграл Дарбу вида (3.196) или (3.197), будут приведены в Разделе 3.5.

Далее перейдем к исследованию интегрируемости по Лиувиллю систем Льенара (3.1) из семейства (C).

Теорема 3.18. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (C) интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда тождественно выполняется соотношение*

$$4(m+1)f(x) + (2m+n+3)\left\{h_x^{(1)}(x) + h_x^{(2)}(x)\right\}_+ = 0 \tag{3.205}$$

и справедливо одно из приводимых ниже условий.

1. *Существует неприводимый алгебраический инвариант $F(x,y)$ такой, что число рядов Пюизе из семейства $y_\infty^{(1)}(x)$ в разложении многочлена $F(x,y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ равно числу рядов Пюизе*

из семейства $y_\infty^{(2)}(x)$ *в этом же разложении, т.е.* $N_1 = N_2$. *В этом случае система имеет интегрирующий множитель Дарбу*

$$M(x,y) = \{F(x,y)\}^{-\frac{2m+n+3}{2(n+1)N_1}}. \tag{3.206}$$

2. *Существуют два различных неприводимых алгебраических инварианта* $F_1(x,y)$ *и* $F_2(x,y)$ *такие, что выполнено условие* $N_{1,j} \neq N_{2,j}$, $j = 1$, 2, *где* $N_{l,j}$ *– число рядов Пюизе из семейства* $y_\infty^{(l)}(x)$ *в разложении многочлена* $F_j(x,y)$ *на множители в кольце* $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$. *Соответствующий интегрирующий множитель Дарбу выглядит следующим образом:*

$$M(x,y) = \frac{\{F_1(x,y)\}^{\frac{(2m+n+3)(N_{2,2}-N_{1,2})}{2(n+1)\Omega}}}{\{F_2(x,y)\}^{\frac{(2m+n+3)(N_{2,1}-N_{1,1})}{2(n+1)\Omega}}}, \tag{3.207}$$

где параметр Ω *определяется соотношением* $\Omega = N_{1,2}N_{2,1} - N_{1,1}N_{2,2}$.

Доказательство. Из Теоремы 2.2 следует, что необходимым и достаточным условием интегрируемости по Лиувиллю дифференциальной системы (1.1) является существование интегрирующего множителя Дарбу. Согласно Леммам 3.3 и 3.4 интегрирующий множитель для интегрируемой по Лиувиллю системы Льенара из семейства (C) не может содержать экспоненциальных инвариантов и представляется в виде

$$M(x,y) = \prod_{j=1}^{K} F_j^{d_j}(x,y), \quad d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{C}, \quad K \in \mathbb{N}, \tag{3.208}$$

где $F_1(x,y)$, …, $F_K(x,y)$ – попарно различные неприводимые алгебраические инварианты рассматриваемой системы. Без ограничения общности предполагаем, что числа d_1, …, d_K отличны от нуля. Собственное значение $\lambda_j(x,y)$ алгебраического инварианта $F_j(x,y)$ определяется соотношением (3.183). Необходимое и достаточное условие $d_1\lambda_1(x,y) + \ldots + d_K\lambda_K(x,y) = -\mathrm{div}\mathcal{X}$ существования интегрирующего множителя Дарбу (3.208) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{K} d_j N_{1,j} \left(f(x) + \left\{h_x^{(1)}(x)\right\}_+\right) + \sum_{j=1}^{K} d_j N_{2,j} \left(f(x) + \left\{h_x^{(2)}(x)\right\}_+\right) = -f(x). \tag{3.209}$$

Это условие не удовлетворяется, если не выполнено соотношение (3.185). Используя выражение (3.185), мы упрощаем условие (3.209). В результате, получаем

$$B\left(2f(x) + \left\{h_x^{(1)}(x) + h_x^{(2)}(x)\right\}_+\right) = -f(x), \quad B = \sum_{j=1}^{K} d_j N_{1,j}, \tag{3.210}$$

где в отличие от случая Теоремы 3.17 параметр B может быть комплекснозначным. Повторяя те же действия, что и при доказательстве Теоремы 3.17, мы приходим к равенству

$$B\left(2f_0 - \frac{4(m+1)f_0}{2m+n+3}\right) = -f_0, \tag{3.211}$$

которое позволяет нам найти параметр B в явном виде:

$$B = -\frac{2m+n+3}{2(n+1)}. \tag{3.212}$$

Подставляя эту формулу в условие (3.210), мы получаем соотношение (3.205). Далее нам осталось исследовать разрешимость по отношению к неизвестным $d_1, \ldots, d_K$ следующей линейной неоднородной алгебраической системы:

$$\sum_{j=1}^{K} d_j N_{1,j} = \sum_{j=1}^{K} d_j N_{2,j}, \quad \sum_{j=1}^{K} d_j N_{1,j} = -\frac{2m+n+3}{2(n+1)}. \tag{3.213}$$

Предположим, что рассматриваемая система Льенара имеет только один неприводимый алгебраический инвариант, т.е. $K = 1$. В этом случае алгебраическая система (3.213) разрешима тогда и только тогда, когда $N_{1,1} = N_{2,1}$. Опуская нижний индекс j, мы находим значение параметра d и интегрирующий множитель Дарбу (3.206).

Теперь будем считать, что исследуемая система Льенара имеет по крайней мере два различных неприводимых алгебраических инварианта. Полагая $K = 2$, мы видим, что определитель системы (3.213) равен $\Omega = N_{1,2}N_{2,1} - N_{1,1}N_{2,2}$. По Следствию 2 к Теореме 3.17 параметр Ω отличен от нуля. Следовательно, алгебраическая система (3.213) имеет единственное решение. В результате, мы находим интегрирующий множитель Дарбу (3.207). Заметим, что интегрирующий множитель (3.207) становится интегрирующим множителем (3.206), если выполнено $N_{1,j} = N_{2,j}$ для $j = 1$ или $j = 2$.

Если алгебраических инвариантов нет или существует только один неприводимый алгебраически инвариант, удовлетворяющий условию $N_1 \neq N_2$, то алгебраическая система (3.213) не совместна.

Предположим, что система Льенара (3.1) из семейства (C) имеет два различных интегрирующих множителя Дарбу. Тогда их частное является первым интегралом Дарбу. Существование первого интеграла Дарбу противоречит Теореме 3.17. □

Следствие 1. Интегрируемая по Лиувиллю дифференциальная система Льенара (3.1) из семейства (C) имеет не более двух различных неприводимых алгебраических инвариантов, если $n = \deg g$ – нечетное число.

Доказательство. Предположим противное. Пусть система Льенара (3.1) из семейства (C) имеет три или более попарно различных неприводимых алгебраических инварианта. Согласно Теореме 3.18 мы можем найти по меньшей мере два различных интегрирующих множителя Дарбу. Следовательно, для рассматриваемой системы существует первый интеграл Дарбу. Мы пришли к противоречию. □

Замечание 1. Равенство (3.205) выполняется тождественно, если $m = 0$ ($\deg f = 0$). Справедливость этого утверждение следует из соотношений (3.188) и (3.189).

Замечание 2. Системы Льенара из семейства (C), удовлетворяющие условию 2 Теоремы 3.18, могут существовать, только если $n = \deg g$ – нечетное число. Более того, интегрирующий множитель (3.207) становится интегрирующим множителем (3.206), если выполнено условие $N_{1,1} + N_{1,2} = N_{2,1} + N_{2,2}$. В этом случае многочлен $F(x, y)$ в соотношении (3.206) приводим: $F(x, y) = F_1(x, y)F_2(x, y)$.

Получим общее представление для интегрируемых по Лиувиллю систем Льенара (3.1) из семейства (C), имеющих гиперэллиптическую инвариантную алгебраическую кривую $y^2 + u(x)y + v(x) = 0$, где $u(x)$, $v(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Теорема 3.19. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства* (C)*, имеющая гиперэллиптическую инвариантную алгебраическую кривую* $y^2 + u(x)y + v(x) = 0$*, где* $u(x)$*,* $v(x) \in \mathbb{C}[x]$*, интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда эта система принимает вид*

$$x_t = y, \quad y_t = -\frac{(k+2l)}{4}w^{l-1}w_x y - \frac{k}{8}\left(w^{2l-1} + 4\beta w^{k-1}\right)w_x. \tag{3.214}$$

В этом соотношении $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*,* $w(x)$ *– многочлен степени* $(m+1)/l$*,* k *и* l *– взаимно простые натуральные числа, удовлетворяющие условию* $(m+1)k = (n+1)l$*. Соответствующая система Льенара имеет единственный интегрирующий множитель Дарбу*

$$M(x, y) = \left\{y^2 + w^l y + \frac{1}{4}w^{2l} + \beta w^k\right\}^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{l}{k}\right)} \tag{3.215}$$

и гиперэллиптическую инвариантную алгебраическую кривую $4y^2 + 4w^l y + w^{2l} + 4\beta w^k = 0$*. Первый интеграл Лиувилля выглядит следующим образом:*

$$\begin{gathered} I(x, y) = \frac{(2l-k)(2y+w^l)}{4kw^{\frac{k}{2}}\beta^{\frac{1}{2}+\frac{l}{k}}}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{l}{k}; \frac{3}{2}; -\frac{(2y+w^l)^2}{4\beta w^k}\right) \\ + \left\{y^2 + w^l y + \frac{1}{4}w^{2l} + \beta w^k\right\}^{\frac{1}{2}-\frac{l}{k}}, \end{gathered} \tag{3.216}$$

где ${}_2F_1(\alpha, \delta; \sigma; s)$ *– гипергеометрическая функция.*

Доказательство. Легко убедиться, что любая система Льенара вида (3.214) интегрируема по Лиувиллю с интегрирующим множителем Дарбу и первым интегралом, заданными соотношениями (3.215) и (3.216) соответственно. Поскольку $\beta \neq 0$ и многочлен $w(x)$ имеет степень $(m+1)/l$, мы заключаем, что система (3.214) принадлежит семейству (C). Докажем обратное утверждение.

Предположим, что система Льенара (3.1) из семейства (C) интегрируема по Лиувиллю и имеет гиперэллиптическую инвариантную алгебраическую кривую $y^2 + u(x)y + v(x) = 0$. Согласно Теореме 3.18 условие (3.205) выполняется тождественно и для рассматриваемой системы существует интегрирующий множитель Дарбу (3.206), где многочлен $F(x, y)$ может быть выбран в виде $F(x, y) = y^2 + u(x)y + v(x)$. Также положим $N_1 = 1$. Подставляя интегрирующий множитель (3.206) в уравнение в частных производных $yM_x - [f(x)y + g(x)]M_y - f(x)M = 0$ и приравнивая нулю коэффициенты, стоящие при различных степенях переменной y, получаем равенства

$$f(x) = \frac{2m+n+3}{4(m+1)}u_x, \quad g(x) = \frac{1}{2}v_x + \frac{n-2m-1}{8(m+1)}uu_x \tag{3.217}$$

и уравнение

$$uv_x - \frac{n+1}{m+1}u_x v + \frac{n-2m-1}{4(m+1)}u^2 u_x = 0. \tag{3.218}$$

Отметим, что условие (3.205) дает то же самое явное выражение для многочлена $f(x)$. Интегрируя обыкновенное дифференциальное уравнение (3.218) относительно многочлена $v(x)$, получаем

$$v(x) = \beta u^{\frac{n+1}{m+1}} + \frac{1}{4}u^2, \tag{3.219}$$

где $\beta \in \mathbb{C}$ – постоянная интегрирования. Используя Теорему 3.6 и схему доказательства Теоремы 3.17, мы видим, что многочлен $u(x)$ имеет степень $m+1$, а многочлен $v(x)$ имеет степень $n+1$. Таким образом, параметр β отличен от нуля. Далее введем в рассмотрение взаимно простые натуральные числа k и l, удовлетворяющие соотношению $(m+1)k = (n+1)l$. Из равенства (3.219) следует, что существует многочлен $w(x)$ степени $(m+1)/l$ такой, что многочлен $u(x)$ можно представить в виде $u(x) = w^l(x)$. В результате, мы приходим к соотношению $v(x) = \beta w^k(x) + w^{2l}(x)$. Подставляя явные представления многочленов $u(x)$ и $v(x)$ в выражения (3.217), мы находим многочлены $f(x)$ и $g(x)$ как указано в формулах (3.214). Выразим n из равенства $(m+1)k = (n+1)l$. Тогда мы получаем интегрирующий множитель Дарбу (3.215), которому соответствует первый интеграл Лиувилля (3.216). □

Замечание 1. В Теореме 3.19 мы не требуем неприводимости многочлены $F(x, y) = y^2 + u(x)y + v(x)$, см. также Замечание 1 к Теореме 3.18.

Замечание 2. Семейство систем (3.214) может быть преобразовано к простому виду

$$s_\tau = z, \quad z_\tau = -\frac{(k+2l)}{4} s^{l-1} z - \frac{k}{8}\left(s^{2l-1} + 4\beta s^{k-1}\right) \tag{3.220}$$

с помощью обобщенного преобразования Зудмана $s(\tau) = w(x)$, $z(\tau) = y$, $d\tau = w_x(x)dt$. Подставляя $w(x) = s$, $y = z$ в соотношение (3.216), мы находим первый интеграл Лиувилля для систем (3.220).

Из Теоремы 3.6 следует, что уравнение (3.5), соответствующее дифференциальной системе Льенара (3.1) из семейства (C), может иметь полиномиальные решения, только если $n = \deg g(x)$ – нечетное число. Любое полиномиальное решение порождает неприводимый алгебраический инвариант первой степени относительно переменной y. Исследуем интегрируемые по Лиувиллю системы Льенара (3.1) из семейства (C), имеющие неприводимые алгебраические инварианты первой степени относительно переменной y. Поскольку произвольные коэффициенты рядов Пюизе $y_\infty^{(l)}(x)$, $l = 1, 2$ появляются в неполиномиальной части, мы заключаем, что соответствующее уравнение (3.5) не может иметь более двух различных полиномиальных решений при выполнении неравенства $\deg g > 2\deg f + 1$. Далее обозначим полиномиальные решения символами $p_1(x)$ и $p_2(x)$. Заметим, что справедливы равенства

$p_l(x) = \{h^{(l)}(x)\}_+$, $l = 1,\ 2$, где $h^{(l)}(x)$ – начальный отрезок ряда Пюизе $y_\infty^{(l)}(x)$.

Теорема 3.20. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (C), имеющая два различных неприводимых алгебраических инварианта первой степени относительно переменной y, интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда эта система принимает вид* (3.214), *$n = \deg g(x)$ – нечетное число, выполнены остальные условия Теоремы 3.19 при следующих дополнительных ограничениях: или k – четное число, или, в противном случае, $(m+1)/l$ – четное число и все нули многочлена $w(x)$ имеют кратность* 2. *Многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$, порождающие алгебраические инварианты $y - p_1(x)$ и $y - p_2(x)$, могут быть представлены в виде*

$$p_1(x) = \sqrt{\beta} w^{\frac{k}{2}} + \frac{1}{2} w^l(x), \quad p_2(x) = -\sqrt{\beta} w^{\frac{k}{2}} + \frac{1}{2} w^l(x), \quad \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{3.221}$$

Доказательство. Мы повторяем схему доказательства Теоремы 3.19, а также используем условие 2 Теоремы 3.18. Отметим, что гиперэллиптическая инвариантная кривая из Теоремы 3.19 с порождающим многочленом $F(x,y) = y^2 + w^l y + \frac{1}{4}w^{2l} + \beta w^k = (y + w^l/2)^2 + \beta w^k$ разбивается на две различные инвариантные алгебраические кривые $y - p_1(x) = 0$ и $y - p_2(x) = 0$ тогда и только тогда, когда n – нечетное число, а также или k – четное число, или, в противном случае, $(m+1)/l$ – четное число и все нули многочлена $w(x)$ имеют кратность 2. Также вспомним, что степень многочлена $w(x)$ равна $(m+1)/l$. □

Замечание 1. Эта теорема может быть доказана и другим способом, без использования Теоремы 3.19. Метод доказательства аналогичен методу доказательства Теоремы 3.11.

Покажем, что для любых чисел $m = \deg f(x)$ и $n = \deg g(x)$ существуют интегрируемые по Лиувиллю системы Льенара (3.1) из семейства (C).

Полагая $u(x) = x^{m+1}$ в соотношении (3.219), мы получаем следующие интегрируемые по Лиувиллю системы Льенара (3.1) из семейства (C):

$$x_t = y, \quad y_t = -\frac{2m+n+3}{4}x^m y - \frac{n+1}{8}\left(4\beta x^n + x^{2m+1}\right). \tag{3.222}$$

Соответствующий интегрирующий множитель Дарбу принимает вид

$$M(x, y) = \left(y^2 + x^{m+1}y + \beta x^{n+1} + \frac{1}{4}x^{2(m+1)}\right)^{-\frac{2m+n+3}{2(n+1)}}. \tag{3.223}$$

Также заметим, что при выполнении условий $n = l(m+1) - 1$, $l \in \mathbb{N}$ и $l > 2$, мы находим еще одно семейство интегрируемых по Лиувиллю систем Льенара

$$x_t = y, \quad y_t = -\frac{l+2}{4}u_x y - \frac{l}{8}\left(4\beta u^{l-1} + u\right)u_x, \tag{3.224}$$

где $u(x)$ – произвольный многочлен степени $m+1$. В этом случае интегрирующий множитель Дарбу представляется в виде

$$M(x, y) = \left(y^2 + uy + \beta u^l + \frac{1}{4}u^2\right)^{-\frac{l+2}{2l}}. \tag{3.225}$$

Далее исследуем возможность существование неавтономных последних множителей Дарбу – Якоби. Случай $m = 0$ $(\deg f = 0)$ является простым. Существуют семейства различных последних множителей Дарбу – Якоби, возникающих как произведение автономных интегрирующих множителей (3.206) или (3.207) и неавтономных первых интегралов $I^{\varkappa}(x, y, t)$, где $\varkappa \in \mathbb{C}$ и функция $I(x, y, t)$ определяется соотношениями (3.196) или (3.197).

Лемма 3.15. *Дифференциальная система Льенара* (3.1) *из семейства (C), удовлетворяющая условию* $m > 0$ $(\deg f > 0)$*, имеет неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби вида* (2.20) *тогда и только тогда, когда существует ненулевое комплексное число ω, такое что выполнено соотношение*

$$4(m+1)f(x) + (2m+n+3)\left\{h_x^{(1)}(x) + h_x^{(2)}(x)\right\}_+ + 2(n+1)\omega = 0, \tag{3.226}$$

а также справедливо одно из приводимых ниже условий.

1. *Существует неприводимый алгебраический инвариант $F(x, y)$ такой, что число рядов Пюизе из семейства $y_\infty^{(1)}(x)$ в разложении многочлена $F(x, y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ равно числу рядов Пюизе из семейства $y_\infty^{(2)}(x)$ в этом же разложении, т.е. $N_1 = N_2$. В этом случае система имеет единственный неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби*

$$M(x, y, t) = \{F(x, y)\}^{-\frac{2m+n+3}{2(n+1)N_1}} \exp[\omega t]. \tag{3.227}$$

2. *Существуют два различных неприводимых алгебраических инварианта $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ такие, что выполнено условие $N_{1,j} \neq N_{2,j}$, $j = 1$, 2, где $N_{l,j}$ – число рядов Пюизе из семейства $y_\infty^{(l)}(x)$ в разложении многочлена $F_j(x, y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$. Соответствующий неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби выглядит следующим образом:*

$$M(x, y, t) = \frac{\{F_1(x, y)\}^{\frac{(2m+n+3)(N_{2,2}-N_{1,2})}{2(n+1)\Omega}}}{\{F_2(x, y)\}^{\frac{(2m+n+3)(N_{2,1}-N_{1,1})}{2(n+1)\Omega}}} \exp[\omega t], \tag{3.228}$$

где параметр Ω определяется соотношением $\Omega = N_{1,2}N_{2,1} - N_{1,1}N_{2,2}$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству Теоремы 3.18. Единственное отличие заключается в условии (3.209). В неавтономном случае это условие принимает вид

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{K} d_j N_{1,j} \left(f(x) + \left\{h_x^{(1)}(x)\right\}_+\right) + \sum_{j=1}^{K} d_j N_{2,j} \left(f(x) + \left\{h_x^{(2)}(x)\right\}_+\right) \\ = \omega - f(x),\end{gathered} \tag{3.229}$$

где ω – ненулевая комплекснозначная постоянная. □

В этом разделе мы установили, что дифференциальные системы Льенара (3.1) из семейства (C) не имеют ни рациональных первых интегралов, ни

Семейство	$f(x)$, $g(x)$	$M(x,y)$	$I(x,y)$, тип первого интеграла
$(A)_1$ Теор. 3.11	$f(x) = -\left[k\beta v^{k-1} + (k+l)v^{l-1}\right] v_x$ $g(x) = k\left[\beta v^k + v^l\right] v^{l-1}v_x$ $z = y - \beta v^k - v^l$, $\frac{m+1}{n-m} = \frac{k}{l}$, $(l,k) = 1$ $v(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg v = \frac{n-m}{l}$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\frac{z^{-\frac{l}{k}}}{y-v^l}$	$I(x,y) = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \exp\left[-\frac{\pi l(2j+1)i}{k}\right]$ $\times \ln\left\{z^{\frac{1}{k}} - \beta^{\frac{1}{k}} \exp\left[\frac{\pi(2j+1)i}{k}\right] v\right\}$ $+\frac{k\beta^{\frac{l}{k}}}{k-l} z^{\frac{k-l}{k}}$ $\overline{D}EL$
$(B)_1$ Теор. 3.12	$f(x) = -\frac{2f_0}{f_0-\delta}q_{1,\,x}$, $g(x) = \frac{f_0+\delta}{f_0-\delta}q_{1,\,x}q_1$ $q_1(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\delta,\ f_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $q_1(x) = \frac{\delta-f_0}{2\{m+1\}}x^{m+1} + o(x^{m+1})$	$\frac{1}{y-\frac{(f_0+\delta)}{(f_0-\delta)}q_1}$ $\times\frac{1}{y-q_1}$	$[y-q_1]^{\delta-f_0}\left[y - \frac{(f_0+\delta)}{(f_0-\delta)}q_1\right]^{\delta+f_0}$ DEL
$(B)_2$ Теор. 3.13	$f(x) = -2q_x$, $g(x) = qq_x$ $q(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg q = m+1$	$\frac{1}{\{y-q\}^2}$	$[y-q(x)] \exp\left[-\frac{q(x)}{y-q(x)}\right]$ DEL
$(B)_3$ Теор. 3.14	$f(x) = -\left[\frac{\{(2d_1+1)l+k\}l}{k-l}u^{l-1}\right.$ $\left.+\beta(l+k)u^{k-1}\right] u_x$ $g(x) = \left[l\beta^2 u^{2k-1} + \frac{\{(2d_1+1)l+k\}l\beta}{k-l}\right.$ $\left.\times u^{k+l-1} + \frac{(ld_1+k)(d_1+1)l^2}{(k-l)^2}u^{2l-1}\right] u_x$ $p_1(x) = \beta u^k(x) + \frac{(d_1+1)l}{k-l}u^l(x)$ $p_2(x) = \beta u^k(x) + \frac{(ld_1+k)}{k-l}u^l(x)$ $(l,k) = 1$, d_1, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $u(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg u = \frac{m+1}{\max\{k,l\}}$	$\frac{[y-p_1]^{d_1}}{[y-p_2]^{d_1+1+\frac{k}{l}}}$	$\frac{p_2(y-p_1)^{d_1+1}{}_2\tilde{F}_1\left(d_1+1,d_1+\frac{k}{l}+1;d_1+2;\frac{y-p_1}{p_2-p_1}\right)}{\{p_2-p_1\}^{d_1+\frac{k}{l}+1}}$ $-\frac{(y-p_1)^{d_1+1}{}_2\tilde{F}_1\left(d_1+1,d_1+\frac{k}{l};d_1+2;\frac{y-p_1}{p_2-p_1}\right)}{\{p_2-p_1\}^{d_1+\frac{k}{l}}}$ $\overline{DE}L$ $(d_1 \notin \mathbb{Q})$
$(B)_4$ Теор. 3.16	$f(x) = \left[\frac{2l^2}{l-k}v^{l-1} - (l+k)\beta v^{k-1}\right] v_x$ $g(x) = \left[\frac{l^3}{(l-k)^2}v^{2l-1} + l\beta^2 v^{2k-1}\right.$ $\left.-\frac{2l^2\beta}{l-k}v^{l+k-1}\right] v_x$ $q(x) = -\frac{l}{l-k}v^l + \beta v^k$, $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $v(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg v = \frac{m+1}{\max\{k,l\}}$, $(l,k) = 1$	$\frac{\exp\left[\frac{v^l}{y-q}\right]}{[y-q]^{\frac{l+k}{l}}}$	$v^{l-k}\gamma\left(\frac{k-l}{l}, \frac{v^l}{q-y}\right) - \frac{q}{v^k}\gamma\left(\frac{k}{l}, \frac{v^l}{q-y}\right)$ $\overline{DE}L$
$(C)_1$ Теор. 3.19 Теор. 3.20	$f(x) = \frac{(k+2l)}{4}w^{l-1}w_x$ $g(x) = \frac{k}{8}\left(w^{2l-1} + 4\beta w^{k-1}\right) w_x$ $z = \left[y + \frac{w^l}{2}\right]^2 + \beta w^k$, $\frac{n+1}{m+1} = \frac{k}{l}$ $w(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg w = \frac{m+1}{l}$, $(l,k) = 1$	$z^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{l}{k}\right)}$	${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{l}{k}; \frac{3}{2}; -\frac{(2y+w^l)^2}{4\beta w^k}\right)$ $\times\frac{(2l-k)(2y+w^l)}{4kw^{\frac{k}{2}}\beta^{\frac{1}{2}+\frac{l}{k}}} + z^{\frac{1}{2}-\frac{l}{k}}$ $\overline{DE}L$

Таблица 3.1: Некоторые интегрируемые по Лиувиллю полиномиальные дифференциальные системы Льенара (3.1).

первых интегралов Дарбу. Классификация интегрируемых по Лиувиллю систем Льенара (3.1) из семейства (C) для некоторых фиксированных степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$ будет проводиться в Разделах 3.5 и 3.6.

3.2.4 Сводка результатов и обсуждение

В предыдущих разделах мы полностью решили проблему интегрируемости по Лиувиллю для полиномиальных дифференциальных систем Льенара (3.1) при выполнении условия $\deg g \neq 2\deg f + 1$. Если же $\deg g = 2\deg f + 1$, то мы провели классификацию интегрируемых по Лиувиллю подсистем, не имеющих резонанса на бесконечности. В Таблице 3.1 приведены интегрируемые по Лиувиллю подсистемы, для которых получены явные представления первых интегралов.

Замечания к Таблице 3.1

1. Натуральные числа l и k одновременно не равны единице.

2. Символами E, D и L обозначены свойства интегрируемости с элементарным первым интегралом, первым интегралом Дарбу и Лиувилля соответственно. Символы $\overline{D}$ и $\overline{E}$ представляют собой отсутствие элементарного первого интеграла и первого интеграла Дарбу соответственно.

3. Семейство $(A)_1$ включает в себя все интегрируемые по Лиувиллю системы Льенара (3.1) такие, что соответствующее уравнение (3.5) имеет два различных полиномиальных решения и выполнены неравенства $\deg f < \deg g < 2\deg f + 1$.

4. Семейства $(B)_1$ и $(B)_2$ представляют собой все нерезонансные на бесконечности интегрируемые по Дарбу системы Льенара (3.1) при ограничении $\deg g = 2\deg f + 1$.

5. Семейства $(B)_1$, $(B)_2$, $(B)_3$ и $(B)_4$ включают в себя все нерезонансные на бесконечности интегрируемые по Лиувиллю системы Льенара (3.1) при ограничении $\deg g = 2\deg f + 1$. Отметим, что семействам $(B)_1$,

$(B)_3$ и $(B)_4$ также принадлежат и интегрируемые резонансные на бесконечности системы. Для выделения нерезонансных систем должны накладываться дополнительные ограничения. Для семейства $(B)_1$ эти ограничения имеют вид $\delta/f_0 \notin \mathbb{Q}$. Для семейств $(B)_3$ и $(B)_4$ соответствующие ограничения представлены в Теоремах 3.15 и 3.16.

6. Семейство $(C)_1$ представляет собой все интегрируемые по Лиувиллю системы Льенара (3.1), которые удовлетворяют неравенству $\deg g > 2\deg f + 1$ и имеют или гиперэллиптическую инвариантную алгебраическую кривую, или две различные неприводимые инвариантные алгебраические кривые, заданные многочленами первой степени относительно переменной y.

Заметим, что семейства $(B)_1$ и $(B)_2$ – это системы Льенара (3.1), удовлетворяющие условию интегрируемости [141] Кьеллини (Chiellini), которое имеет вид $\{f(x)/g(x)\}_x = \alpha f(x)$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Хорошо известно, что такие системы Льенара могут быть линеаризованы с помощью обобщенных преобразований Зудмана [24]. Обобщенные преобразования Зудмана являются нелокальными преобразованиями. Другие интегрируемые семейства из Таблицы 3.1 также могут быть сведены к более простому виду с помощью обобщенных преобразований Зудмана, см. замечания к Теоремам 3.11 и 3.16. Эти системы, за исключением некоторых частных случаев, которые появлялись в работах [139, 140, 152, 155, 162], получены впервые.

3.3 Система Гельмгольца – ван дер Поля

Ранее мы разбили полиномиальные дифференциальные системы Льенара (3.1) на три различных семейства. Простейшим представителем семейства (A) является система, для которой выполнено $\deg f = 1$ и $\deg g = 2$. Эта система имеет вид

$$x_t = y, \quad y_t = -(\zeta x + \alpha)x_t - (\varepsilon x^2 + \sigma x + \delta), \quad \zeta\varepsilon \neq 0. \tag{3.230}$$

С помощью преобразований подобия, поворота и параллельного переноса мы можем без ограничения общности положить $\zeta = 2$ и $\alpha = 0$. Система (3.230) также относится к классу квадратичных дифференциальных систем. Фазовые портреты квадратичной системы Льенара были классифицированы в работе [169]. Нашей целью является изучение существования алгебраических инвариантов и первых интегралов Лиувилля для системы (3.230) и соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$x_{tt} + 2xx_t + \varepsilon x^2 + \sigma x + \delta = 0, \quad \varepsilon \neq 0. \tag{3.231}$$

Это уравнение называют уравнением Гельмгольца – ван дер Поля. Систему (3.230) будем также называть системой Гельмгольца – ван дер Поля.

Теорема 3.21. *Система Гельмгольца – ван дер Поля* (3.230), *где* $\zeta = 2$ *и* $\alpha = 0$, *имеет неприводимые алгебраические инварианты неограниченных степеней при условии отсутствия ограничений на коэффициенты. Справедливы следующие утверждения:*

1. *если* $\delta = -(\varepsilon^2 + 4\sigma)\varepsilon/16$, *то существует неприводимый алгебраический инвариант степени* 1;

2. *если* $\sigma = -\varepsilon^2$, *то существует неприводимый алгебраический инвариант степени* 2;

3. *если* $\sigma = -\varepsilon^2$ *и* $\delta = -(2N-3)(2N+1)\varepsilon^3/16$, *то существует неприводимый алгебраический инвариант степени* $2N-1$, *где* $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Нет других неприводимых алгебраических инвариантов, кроме описанных выше. Одновременно существуют не более двух неприводимых алгебраических инвариантов. Полученные результаты собраны в Таблице 3.2.

Алгебраический инвариант $F(x,y)$	*Собственное значение*	*Параметры*
$y+\frac{\varepsilon}{2}x+\frac{1}{8}(\varepsilon^2+4\sigma)$	$-2x+\frac{\varepsilon}{2}$	$\delta=-\frac{1}{16}(\varepsilon^2+4\sigma)\varepsilon$
$y+x^2-\varepsilon x+\frac{\delta}{\varepsilon}$	$-\varepsilon$	$\sigma=-\varepsilon^2$
$g_2(z)x^2+g_1(z)x+g_0(z)$, $z=y+x^2-\varepsilon x-\frac{(2N-3)(2N+1)\varepsilon^2}{16}$, $N\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$	$-2x-\varepsilon\left(N-\frac{3}{2}\right)$	$\sigma=-\varepsilon^2$, $\delta=-\frac{(2N-3)(2N+1)\varepsilon^3}{16}$

Таблица 3.2: Неприводимые алгебраические инварианты системы Гельмгольца – ван дер Поля (3.230). Многочлены $g_0(z)$, $g_1(z)$, и $g_2(z)$ определяются соотношениями (3.244), (3.246) и (3.250).

Доказательство. Будем использовать метод рядов Пюизе. Разложение неприводимых алгебраических инвариантов на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ для исследуемой системы

$$x_t=y,\quad y_t=-2xy-(\varepsilon x^2+\sigma x+\delta) \tag{3.232}$$

было получено в Теореме 3.2. Многоугольник Ньютона уравнения

$$yy_x+2xy+(\varepsilon x^2+\sigma x+\delta)=0. \tag{3.233}$$

приведен на Рисунке 3.3. Мы видим, что только два ряда Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$ удовлетворяют уравнению (3.233). Эти ряды Пюизе порождаются ребрами $[Q_3,Q_4]$, $[Q_2,Q_3]$ и имеют вид

$$\begin{gathered}[Q_3,Q_4]:\quad y_\infty^{(1)}(x)=-x^2+\varepsilon x+b_2+\sum_{k=3}^{+\infty}b_kx^{2-k},\\ [Q_2,Q_3]:\quad y_\infty^{(2)}(x)=-\frac{\varepsilon}{2}x-\frac{1}{8}(\varepsilon^2+4\sigma)+\sum_{k=2}^{+\infty}a_kx^{1-k}.\end{gathered} \tag{3.234}$$

Первый ряд существует при выполнении условия $\sigma=-\varepsilon^2$ и имеет произвольный коэффициент b_2. Следовательно, мы имеем семейство рядов вида

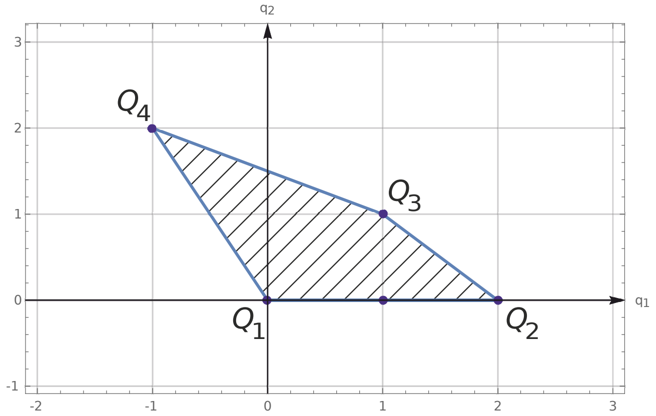


Рис. 3.4: Многоугольник Ньютона уравнения (3.233) при условии $\delta\varepsilon \neq 0$.

$y_\infty^{(1)}(x)$. Коэффициенты $\{b_k, k = 3, 4, \ldots\}$ выражаются через коэффициент b_2 и параметры системы. Коэффициенты ряда $y_\infty^{(2)}(x)$ определяются единственным образом. Заметим, что из соображений удобства для коэффициентов ряда $y_\infty^{(2)}(x)$ мы используем обозначения, отличные от обозначений Теоремы 3.2. Анализируя соотношение (2.8), мы заключаем, что собственные значения алгебраических инвариантов являются элементами кольца $\mathbb{C}[x]$ степени, не превышающей единицу:

$$\lambda(x, y) = -2kx + \varepsilon\left(\frac{3k}{2} - N\right). \tag{3.235}$$

Разложим неприводимые алгебраические инварианты на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$. В результате получим

$$\begin{aligned} F(x, y) = \prod_{j=1}^{N-k}\left(y + x^2 - \varepsilon x - b_2^{(j)} - \sum_{k=3}^{+\infty} b_k^{(j)} x^{2-k}\right) \\ \times\left(y + \frac{\varepsilon}{2}x + \frac{1}{8}(\varepsilon^2 + 4\sigma) - \sum_{m=2}^{+\infty} a_m x^{1-m}\right)^k, \end{aligned} \tag{3.236}$$

где $k = 0$ или $k = 1$. Уравнение (3.231) и соответствующая ему система (3.232) при $\sigma = -\varepsilon^2$ не обладают свойством конечности, описанном в Разделе 1.6. Следовательно, параметр $N \in \mathbb{N}$ заранее не известен. Если $\sigma \neq -\varepsilon^2$, то единственный неприводимый алгебраический инвариант существует, только если $N = 1$ и $k = 1$. При этом ряд Пюизе $y_\infty^{(2)}(x)$ должен обрываться на мономе с нулевым показателем степени. Мы находим соответствующий алгебраический инвариант, его собственное значение

$$F(x,y) = y + \frac{\varepsilon}{2}x + \frac{1}{8}(\varepsilon^2 + 4\sigma), \quad \lambda(x,y) = -2x + \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.237}$$

и ограничения на параметры системы

$$\delta = -\frac{1}{16}(\varepsilon^2 + 4\sigma)\varepsilon, \tag{3.238}$$

при которых инвариант существует. Перейдем к случаю $\sigma = -\varepsilon^2$. Если $k = 0$, то неприводимый алгебраический инвариант и его собственное значение принимают вид

$$F(x,y) = y + x^2 - \varepsilon x + \frac{\delta}{\varepsilon}, \quad \lambda(x,y) = -\varepsilon. \tag{3.239}$$

Введем обратимую замену переменных: $x = s$, $y = z - s^2 + \varepsilon s + \omega \leftrightarrow s = x$, $z = y + x^2 - \varepsilon x\ - \omega$, где $\omega \in \mathbb{C}$. Исследуемая система в новых переменных выглядит следующим образом:

$$s_t = z - s^2 + \varepsilon s + \omega, \quad z_t = -\varepsilon z - (\sigma + \varepsilon^2)s + \varepsilon\omega + \delta. \tag{3.240}$$

Для того чтобы упростить эту систему, положим $\omega = -\delta/\varepsilon$. Вспомним, что выполнено условие $\sigma = -\varepsilon^2$. Далее будем работать с системой

$$s_t = z - s^2 + \varepsilon s - \frac{\delta}{\varepsilon}, \quad z_t = -\varepsilon z. \tag{3.241}$$

Мы установили взаимно однозначное соответствие между алгебраическими инвариантами систем (3.232) и (3.241) при $\sigma = -\varepsilon^2$. Алгебраические инварианты системы (3.241) обозначим символом $G(s,z)$. Из Теоремы 3.3 следует, что степени неприводимых алгебраических инвариантов $G(s,z)$ относительно переменной s равны 0 или 2. Если эта степень равна 0, то $k = 0$. Это утверждение обосновано в Лемме 3.2. Случай $k = 0$ исследовался ранее. Предположим, что степень неприводимых алгебраических инвариантов $G(s,z)$ относительно переменной s равна 2. Алгебраические инварианты удовлетворяют линейному уравнению в частных производных

$$\left(z - s^2 + \varepsilon s - \frac{\delta}{\varepsilon}\right) G_s - \varepsilon z G_z = (A_0 + A_1 s)G, \tag{3.242}$$

где собственное значение не зависит от переменной z. Подставляя представление

$$G(s,z) = g_2(z)s^2 + g_1(z)s + g_0(z),\ g_0(z), g_1(z), g_2(z) \in \mathbb{C}[z],\ g_2(z) \not\equiv 0 \tag{3.243}$$

в уравнение (3.242) и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях переменной s, мы получаем $A_1 = -2$,

$$\begin{gathered} g_1 = \varepsilon z g_{2,z} + (A_0 - 2\varepsilon) g_2, \quad g_0 = \frac{\varepsilon^2}{2} z^2 g_{2,zz} + \varepsilon(A_0 - \varepsilon) z g_{2,z} \\ + \left(\frac{\delta}{\varepsilon} + \varepsilon^2 - \frac{3}{2} A_0 \varepsilon + \frac{1}{2} A_0^2 - z\right) g_2 \end{gathered} \tag{3.244}$$

и следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для многочлена $g_2(z)$:

$$\begin{gathered} \varepsilon^3 z^3 g_{2,zzz} + 3A_0 \varepsilon^2 z^2 g_{2,zz} - (4\varepsilon z + \{3A_0 \varepsilon\,(\varepsilon - A_0) - 4\delta\}) z g_{2,z} \\ + \left((2\varepsilon - 4\,A_0)\, z + A_0\,(\varepsilon - A_0)\,(2\varepsilon - A_0) - 4\frac{(\varepsilon - A_0)\,\delta}{\varepsilon}\right) g_2 = 0. \end{gathered} \tag{3.245}$$

Используя соотношения (3.244), мы убеждаемся, что если точка $z = 0$ является нулем многочлена $g_2(z)$, то она же является нулем многочленов $g_1(z)$ и $g_2(z)$. В такой ситуации многочлен $G(s,z)$ будет приводимым в кольце $\mathbb{C}[s,z]$. Наша задача состоит в нахождении всех неприводимых алгебраических инвариантов $G(s,z)$, поэтому положим

$$g_2(z) = z^{N-1} + B_1 z^{N-2} + \ldots + B_{N-1}, \quad N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \tag{3.246}$$

где $B_{N-1} \neq 0$. Степень многочлена $g_2(z)$ равна $N - 1$. Действительно, предполагая противное, мы видим, что степень многочлена $g_0(z)$ отлична от N и, следовательно, степень многочлена $G(s,z)$ относительно переменной z также отлична от N. Подставляя представление (3.246) в уравнение (3.245) и приравнивая нулю коэффициенты при z^N и z^0, мы получаем следующие необходимые условия существования полиномиальных решений:

$$2A_0 + \varepsilon(2N-3) = 0, \quad (\varepsilon - A_0)\left(4\delta - 2\varepsilon^2 A_0 + \varepsilon A_0^2\right) B_{N-1} = 0. \tag{3.247}$$

Вспоминая ограничение $B_{N-1} \neq 0$, мы решаем систему (3.247). В результате, находим

$$A_0 = -\varepsilon\left(N - \frac{3}{2}\right), \quad \delta = -\frac{(2N-3)(2N+1)\varepsilon^3}{16}. \tag{3.248}$$

Также несложно вывести рекуррентное соотношение для коэффициентов многочлена $g_2(z)$. Оно принимает вид

$$(N-k-1)(2k+1)B_{N-k-1} + 8(k+1)\varepsilon^2 B_{N-k-2} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.249}$$

где $B_0 = 1$ и $B_k = 0$ при $k \geq N$ и $k < 0$. Анализируя это рекуррентное соотношение, мы делаем вывод, что дифференциальное уравнение (3.245) имеет единственное полиномиальные решение при выполнении условий (3.248) и фиксированном $N \in \mathbb{N}$. С помощью рекуррентного соотношения (3.249), мы находим явную формулу

$$B_k = \frac{(-1)^k (N+k-1)!(2k-1)!!\varepsilon^{2k}}{8^k k!(N-k-1)!}, \tag{3.250}$$

где без ограничения общности мы положили $B_0 = 1$. Используя локальный анализ в соотношениях (3.244) и дифференциальном уравнении (3.245), мы видим, что многочлены $g_0(z)$, $g_1(z)$ и $g_2(z)$ не имеют совпадающих нулей. Неприводимость многочленов $G(s,z) = g_2(z)s^2 + g_1(z)s + g_0(z)$ следует из их разложений на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{z\}[s]$ и отсутствия общих нулей у многочленов $g_0(z)$, $g_1(z)$ и $g_2(z)$. Возвращаясь к переменным x и y, мы получаем неприводимые алгебраические инварианты

$$\begin{gathered} F(x,y) = g_2(z)x^2 + g_1(z)x + g_0(z), \qquad z = y + x^2 \\ -\varepsilon x - \frac{(2N-3)(2N+1)\varepsilon^2}{16} \end{gathered} \tag{3.251}$$

системы Гельмгольца – ван дер Поля (3.230) при $\zeta = 2$ и $\alpha = 0$. Для каждого $N \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ соответствующий неприводимый алгебраический инвариант имеет степень $2N - 1$. При этом собственное значение представляется в виде

$$\lambda(x, y) = -2x - \varepsilon\left(N - \frac{3}{2}\right). \qquad (3.252)$$

Напомним, что случай $N = 1$ мы рассмотрели отдельно. Согласно Теореме 3.4 изучаемая система не может иметь более двух различных неприводимых алгебраических инвариантов одновременно. Данные Таблицы 3.2 говорят о том, что при $\sigma = -\varepsilon^2$ и $\delta = -(2N - 3)(2N + 1)\varepsilon^3/16$ существуют ровно два различных неприводимых инварианта. При других значениях параметров – число различных неприводимых инвариантов не превосходит единицы. На этом мы заканчиваем доказательство теоремы. □

Следствие 1. Проблема Пуанкаре в классической постановке неразрешима для уравнения Гельмгольца – ван дер Поля и соответствующей системы Гельмгольца – ван дер Поля. Классическая постановка проблемы Пуанкаре описана в Разделе 1.5.

Замечание 1. Если $N = 1$, то выражение (3.251) определяет неприводимый алгебраический инвариант системы (3.230) при $\zeta = 2$ и $\alpha = 0$. Однако этот инвариант является частным случаем следующего алгебраического инварианта:

$$F(x, y) = y + \frac{\varepsilon}{2}x + \frac{1}{8}(\varepsilon^2 + 4\sigma). \qquad (3.253)$$

Таким образом, осцилляторы Гельмгольца – ван дер Поля (3.230) являются примером семейства систем дифференциальных уравнений, для которых верхняя оценка степеней неприводимых алгебраических инвариантов зависит от коэффициентов системы. Осцилляторы Гельмгольца – ван дер Поля, по-видимому, являются первым примером в научной литературе физических (не искусственно построенных) семейств дифференциальных уравнений с этим свойством.

Перейдем к изучению интегрируемости по Лиувиллю системы Гельмгольца – ван дер Поля (3.230).

Теорема 3.22. *Необходимым и достаточным условием интегрируемости по Лиувиллю системы Гельмгольца – ван дер Поля* (3.230) *при* $\zeta = 2$ *и* $\alpha = 0$ *является ограничение* $(\sigma, \delta) = -\ (\varepsilon^2,\ (2N-3)(2N+1)\varepsilon^3/16)$, *где* $N \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Воспользуемся результатами Теорем 3.10 и 3.21. Мы видим, что исследуемые системы имеют два различных неприводимых алгебраических инварианта тогда и только тогда, когда $\sigma = -\varepsilon^2$, $\delta = -(2N-3)(2N+1)\varepsilon^3/16$ и $N \in \mathbb{N}$. Эти инварианты и их собственные значения принимают вид

$$\begin{gathered}
F_1(x,y) = y + x^2 - \varepsilon x - \frac{(2N-3)(2N+1)\varepsilon^2}{16}, \quad \lambda_1(x,y) = -\varepsilon; \\
F_2(x,y) = g_2(z)x^2 + g_1(z)x + g_0(z), \quad \lambda_2(x,y) = -2x - \varepsilon\left(N - \frac{3}{2}\right), \\
z = y + x^2 - \varepsilon x - \frac{(2N-3)(2N+1)\varepsilon^2}{16}.
\end{gathered} \tag{3.254}$$

Все обозначения объяснены в Теореме 3.21. Символом $\mathcal{X}_{(x,y)}$ обозначим векторное поле

$$\mathcal{X}_{(x,y)} = y\frac{\partial}{\partial x} - (2xy + \sigma x + \delta)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.255}$$

соответствующее системе (3.232). Дивергенция векторного поля $\mathcal{X}_{(x,y)}$ равна $\mathrm{div}\mathcal{X}_{(x,y)} = -2x$. Анализируя уравнение

$$d_1\varepsilon + d_2\left[2x + \varepsilon\left(N - \frac{3}{2}\right)\right] = -2x, \tag{3.256}$$

находим $d_1 = N - 3/2$ и $d_2 = -1$. Следовательно, функция

$$M(x,y) = \frac{F_1^{N-\frac{3}{2}}(x,y)}{F_2(x,y)} \tag{3.257}$$

представляет собой интегрирующий множитель Дарбу системы (3.232). Согласно Теореме 3.10 других интегрируемых по Лиувиллю подсистем изучаемая система не имеет. □

Вычисляя криволинейный интеграл

$$I(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\left[ydy+\Big(2xy+\varepsilon x^2-\varepsilon^2 x\right.\\ \left.-\frac{(2N-3)(2N+1)\varepsilon^3}{16}\Big)\,dx\right], \tag{3.258}$$

где функция $M(x,y)$ задается равенством (3.257), можно получить первые интегралы Лиувилля. Явные представления этих первых интегралов являются достаточно громоздкими. Мы не будем приводить их для всех значений параметра N. Если $N=1$, то соответствующий первый интеграл задан выражением (3.73), где необходимо положить

$$v(x)=-\frac{\varepsilon}{2}x-\frac{1}{8}(\varepsilon^2+\sigma), \quad \beta=-\frac{4}{\varepsilon^2}, \quad k=2, \quad l=1. \tag{3.259}$$

В случае $N=3$ первый интеграл имеет вид

$$\begin{gathered} I(x,y)=\frac{4z-6\varepsilon\sqrt{z}+3\varepsilon^2}{4z+6\varepsilon\sqrt{z}+3\varepsilon^2}\exp\left[\frac{4\sqrt{z}}{\varepsilon}-2\mathrm{arctanh}(Z)\right], \\ Z=\frac{(48\varepsilon-64x)\,z^2-12\varepsilon^2\,(5\varepsilon-4x)\,z+9\varepsilon^4\,(7\varepsilon-4x)}{64z^{5/2}}. \end{gathered} \tag{3.260}$$

В этом выражении введено обозначение $z=x^2-\varepsilon x+y-21\varepsilon^2/16$.

Из Теоремы 3.21 следует, что система Гельмгольца – ван дер Поля (3.232) при $\sigma=-\varepsilon^2$ имеет неприводимый алгебраический инвариант с постоянным собственным значением. Этот инвариант принимает вид

$$y+x^2-\varepsilon x+\frac{\delta}{\varepsilon}=0, \quad y=x_t, \quad \lambda=-\varepsilon. \tag{3.261}$$

В результате, по этому инварианту мы можем построить неавтономный первый интеграл Дарбу

$$I(x,y,t)=\left[x_t+x^2-\varepsilon x+\frac{\delta}{\varepsilon}\right]\exp(\varepsilon t). \tag{3.262}$$

Равенство $I(x,y,t)=C_0$, рассматриваемое как обыкновенное дифференциальное уравнение, представляет собой уравнение Риккати. Подстановка

$x(t) = \psi_t(t)/\psi(t)$ приводит изучаемое уравнение Риккати к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\psi_{tt} - \varepsilon\psi_t + \left(\frac{\delta}{\varepsilon} - C_0 \exp[-\varepsilon t]\right)\psi = 0. \tag{3.263}$$

Интегрируя последнее уравнение, мы находим

$$\begin{gathered}\psi(t) = \exp\left[\frac{\varepsilon}{2}t\right]\left\{C_1 I_\nu\left(\frac{2\sqrt{C_0}}{\varepsilon}\exp\left[-\frac{\varepsilon}{2}t\right]\right)\right.\\ \left.+C_2 K_\nu\left(\frac{2\sqrt{C_0}}{\varepsilon}\exp\left[-\frac{\varepsilon}{2}t\right]\right)\right\}, \quad \nu = \sqrt{1 - \frac{4\delta}{\varepsilon^3}},\end{gathered} \tag{3.264}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, $I_\nu(s)$ и $K_\nu(s)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Заметим, что общее решение $x(t) = \psi_t(t)/\psi(t)$ уравнения Гельмгольца – ван дер Поля (3.231), где функция $\psi(t)$ определяется равенством (3.264), получено как в интегрируемом, так и в неинтегрируемом по Лиувиллю случаях. Если параметр δ выбран как указано Теореме 3.22, то в выражении (3.264) появляются модифицированные функции Бесселя полуцелых порядков. Такие функции Бесселя становятся элементарными. Таким образом, мы заключаем, что интегрируемые по Лиувиллю подсистемы имеют общие решения, выражаемые через элементарные функции.

Исследуем существование неавтономных последних множителей Дарбу – Якоби с зависящим от времени экспоненциальным множителем. В интегрируемых по Лиувиллю случаях $(\sigma, \delta) = -\ (\varepsilon^2,\ (2N-3)(2N+1)\varepsilon^3/16)$, где $N \in \mathbb{N}$, соответствующая система имеет семейство неавтономных последних множителей Дарбу – Якоби вида (2.20) . Эти множители представляют собой произведение автономного интегрирующего множителя Дарбу (3.257) и семейства первых интегралов $I^{\varkappa}(x, y, t)$, где функция $I(x, y, t)$ задана выражением (3.262) и $\varkappa \in \mathbb{C}$.

Лемма 3.16. *Система Гельмгольца – ван дер Поля* (3.232) *при выполнении условия* $(\sigma, \delta) \neq -\ (\varepsilon^2,\ (2N-3)(2N+1)\varepsilon^3/16)$*, где* $N \in \mathbb{N}$*, имеет неавто-*

номный последний множитель Дарбу – Якоби вида (2.20) *тогда и только тогда, когда справедливо равенство*

$$\delta = -\frac{1}{16}(\varepsilon^2 + 4\sigma)\varepsilon. \tag{3.265}$$

Соответствующий неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби выглядит следующим образом:

$$M(x, y, t) = \frac{\exp\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right)}{y + \frac{\varepsilon}{2}x + \frac{1}{8}(\varepsilon^2 + 4\sigma)}. \tag{3.266}$$

Доказательство этой леммы основано на результатах Леммы 3.7 и Теоремы 3.21. Отметим, что последний множитель Дарбу – Якоби (3.266) порождает лагранжиан

$$L(x, y, t) = \left(F(x, y)\ln\{8F(x, y)\} - \left\{y + x^2 + \frac{\varepsilon^2}{8} + \frac{\sigma}{2}\right\}\right).\exp\left[\frac{\varepsilon}{2}t\right], \tag{3.267}$$

В этом выражении калибровочная функция опущена, а $F(x, y)$ – это алгебраический инвариант

$$F(x, y) = y + \frac{\varepsilon}{2}x + \frac{1}{8}(\varepsilon^2 + 4\sigma). \tag{3.268}$$

Лагранжиан (3.267) является нестандартным. Мы получили его явное представление с помощью соотношений (2.28) и (2.29).

3.4 Система Дуффинга – ван дер Поля и ее обобщение

В этом разделе мы будем исследовать аналитические свойства обобщенного уравнения Дуффинга – ван дер Поля

$$x_{tt} + (\zeta x^2 + \beta x + \alpha)x_t + \varepsilon x^3 + e x^2 + \sigma x + \delta = 0, \quad \varepsilon \neq 0 \tag{3.269}$$

и соответствующей дифференциальной системы Дуффинга – ван дер Поля. Без ограничения общности положим $\zeta = 3$ и $e = 0$. Классическое уравнение Дуффинга – ван дер Поля можно получить из уравнения (3.269) подстановкой

$\beta = 0$, $e = 0$ и $\delta = 0$. Уравнение (3.269) имеет множество приложений в теории колебаний и других областях науки [170]. Отметим связь уравнения (3.269) и знаменитой системы ФитцХью – Нагумо

$$\begin{cases} v_t = v - v^3 - u + \sigma_0, \\ \tau u_t = v - \beta_0 u - \alpha_0. \end{cases} \tag{3.270}$$

Система (3.270) была предложена Р. ФитцХью (R. FitzHugh) [171] и Дж. Нагумо (J. Nagumo) с соавторами [172] как одна из простейших моделей, описывающих возбуждение нейронов и распространение нервных импульсов по аксону. Все параметры в системе (3.270) вещественнозначны. Их физический смысл подробно описан в работах [171,172]. Исключая функцию $u(t)$ из первого уравнения системы (3.270) и подставляя результат во второе уравнение, мы получаем уравнение Дуффинга – ван дер Поля. Фазовые портреты, предельные циклы и другие качественные свойства траекторий уравнения (3.269) и соответствующей системы активно изучаются в последние годы [118,123–125].

Проведем классификацию алгебраических инвариантов для обобщенной системы Дуффинга –ван дер Поля с выбранной нормализацией

$$x_t = y, \quad y_t = -(3x^2 + \beta x + \alpha)y - (\varepsilon x^3 + \sigma x + \delta), \quad \varepsilon \neq 0. \tag{3.271}$$

Мы будем опираться на результаты Теоремы 3.2 и Леммы 3.2.

Теорема 3.23. *Обобщенная система Дуффинга – ван дер Поля* (3.271) *имеет девять различных неприводимых алгебраических инвариантов, которые приведены в Таблице 3.3. Эти инварианты существуют при определенных ограничениях на параметры системы. Степени неприводимых алгебраических инвариантов ограничены числом* 7. *Не более двух различных неприводимых алгебраических инвариантов может существовать одновременно.*

Доказательство. Понижая порядок в системе (3.271), мы получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$yy_x + (3x^2 + \beta x + \alpha)y + \varepsilon x^3 + \sigma x + \delta = 0. \tag{3.272}$$

$\mathcal{N}$	*Алгебраический инвариант* $F(x,y)$	*Собственное значение*	*Параметры*
1	$y+\frac{\varepsilon}{3}x-\frac{\varepsilon\beta}{9}$	$-3x^2-\beta x$ $+\frac{\varepsilon}{3}-\alpha$	$\delta=\frac{\varepsilon\beta}{27}(\varepsilon-3\alpha)$, $\sigma=\frac{\varepsilon}{9}(3\alpha-\varepsilon-\beta^2)$
2	$y+x^3+(\alpha-\varepsilon)x+\frac{\delta}{\varepsilon}$	$-\varepsilon$	$\beta=0$, $\sigma=\varepsilon(\alpha-\varepsilon)$
3	$y^2+(x^2+\frac{4\varepsilon}{3})xy+\frac{\varepsilon}{3}x^4+\frac{4\varepsilon^2}{9}x^2$	$-3x^2-\frac{8\varepsilon}{3}$	$\alpha=2\varepsilon$, $\beta=0$, $\delta=0$, $\sigma=\frac{8\varepsilon^2}{9}$
4	$y^2+(x^2-\frac{4\varepsilon}{3})xy+\frac{\varepsilon}{3}x^4-\frac{8\varepsilon^2}{9}x^2$ $+\frac{16}{27}\varepsilon^3$	$-3x^2$	$\alpha=-\frac{2\varepsilon}{3}$, $\beta=0$, $\delta=0$, $\sigma=-\frac{4\varepsilon^2}{3}$
5	$y^2+(x^3+\frac{28\varepsilon}{27}x+\frac{160i\varepsilon^{3/2}}{729})y+\frac{\varepsilon}{3}x^4$ $+\frac{8\varepsilon^2}{27}x^2+\frac{256i\varepsilon^{5/2}}{2187}x-\frac{80\varepsilon^3}{6561}$	$-3x^2-\frac{64\varepsilon}{27}$	$\alpha=\frac{46\varepsilon}{27}$, $\beta=0$, $\delta=\frac{32i\varepsilon^{5/2}}{243}$, $\sigma=\frac{52\varepsilon^2}{81}$
6	$y^2+(x^3+\frac{28\varepsilon}{27}x-\frac{160i\varepsilon^{3/2}}{729})y+\frac{\varepsilon}{3}x^4$ $+\frac{8\varepsilon^2}{27}x^2-\frac{256i\varepsilon^{5/2}}{2187}x-\frac{80\varepsilon^3}{6561}$	$-3x^2-\frac{64\varepsilon}{27}$	$\alpha=\frac{46\varepsilon}{27}$, $\beta=0$, $\delta=-\frac{32i\varepsilon^{5/2}}{243}$, $\sigma=\frac{52\varepsilon^2}{81}$
7	$y^3+2(x^2+\frac{5\varepsilon}{3})xy^2+(x^4+\frac{11\varepsilon}{3}x^2$ $+\frac{125\varepsilon^2}{36})x^2y+\frac{\varepsilon}{3}x^7+\frac{11\varepsilon^2}{9}x^5+\frac{125\varepsilon^3}{108}x^3$	$-3x^2-\frac{25\varepsilon}{6}$	$\alpha=\frac{5\varepsilon}{2}$, $\beta=0$, $\delta=0$, $\sigma=\frac{25\varepsilon^2}{18}$
8	$y^3+(2x^2+\frac{15\varepsilon}{7})xy^2+(x^4+\frac{52\varepsilon}{21}x^2$ $+\frac{75\varepsilon^2}{49})x^2y+\frac{\varepsilon}{3}x^7+\frac{314\varepsilon^2}{551}x^5+\frac{125\varepsilon^3}{343}x^3$	$-3x^2-\frac{25\varepsilon}{7}$	$\alpha=\frac{40\varepsilon}{21}$, $\beta=0$, $\delta=0$, $\sigma=\frac{125\varepsilon^2}{147}$
9	$y^3+(2x^2-\frac{85\varepsilon}{27})xy^2+(x^6-\frac{76\varepsilon}{27}x^4$ $+\frac{1075\varepsilon^2}{729}x^2+\frac{400000\varepsilon^3}{531441})y+\frac{\varepsilon}{3}x^7$ $-\frac{14\varepsilon^2}{9}x^5+\frac{15875\varepsilon^3}{6561}x^3-\frac{2000000\varepsilon^4}{1594323}x$	$-3x^2-\frac{25\varepsilon}{27}$	$\alpha=-\frac{20\varepsilon}{27}$, $\beta=0$, $\delta=0$, $\sigma=-\frac{125\varepsilon^2}{81}$

Таблица 3.3: Неприводимые алгебраические инварианты обобщенной системы Дуффинга – ван дер Поля (3.271).

Многоугольник Ньютона этого уравнение приведен на Рисунке 3.4. Доминантные балансы, которые порождают степенные асимптотики в окрестности точки $x=\infty$, определяются ребрами $[Q_3,Q_4]$ и $[Q_2,Q_3]$. Ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, описанные в соотношении (3.14), для исследуемых систем принимают вид

$$\begin{aligned}
&[Q_3, Q_4]: \quad y_\infty^{(1)}(x) = -x^3 + (\varepsilon - \alpha)x + b_3 + \sum_{l=4}^{+\infty} b_l x^{3-l};\\
&[Q_2, Q_3]: \quad y_\infty^{(2)}(x) = -\frac{\varepsilon}{3}x + \frac{\varepsilon\beta}{9} + \sum_{l=2}^{+\infty} a_l x^{1-l}.
\end{aligned} \tag{3.273}$$

Семейство рядов Пюизе $y_\infty^{(1)}(x)$ имеет произвольный коэффициент b_3 и существует при выполнении условия $\beta = 0$. Коэффициенты ряда Пюизе $y_\infty^{(2)}(x)$ определяются единственным образом. Отметим, что из соображений удобства для коэффициентов ряда $y_\infty^{(2)}(x)$ мы используем обозначения, отличные от обозначений Теоремы 3.2. Разложения на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ неприводимых алгебраических инвариантов, а также собственные значения инвариантов принимают вид

$$\begin{aligned}
F(x, y) = \Bigg\{ \prod_{j=1}^{N-k} \left\{ y + x^3 - (\varepsilon - \alpha)x - b_3^{(j)} - \sum_{l=4}^{+\infty} b_l^{(j)} x^{3-l} \right\}\\
\times \left\{ y + \frac{\varepsilon}{3}x - \frac{\varepsilon\beta}{9} - \sum_{l=2}^{+\infty} a_l x^{1-l} \right\}^k \Bigg\}_+ ,
\end{aligned} \tag{3.274}$$

$$\lambda(x, y) = -3kx^2 - N\beta x - \varepsilon N + \left(\frac{4\varepsilon}{3} - \alpha \right) k, \tag{3.275}$$

где $k = 0$ или $k = 1$, $N \in \mathbb{N}$. Если $\beta \neq 0$, то из Теоремы 3.2 следует, что рассматриваемая система имеет только один неприводимый алгебраический инвариант

$$F(x, y) = y + \frac{\varepsilon}{3}x - \frac{\varepsilon\beta}{9}, \quad \lambda(x, y) = -3x^2 - \beta x + \left(\frac{\varepsilon}{3} - \alpha \right), \tag{3.276}$$

существующий при обрыве ряда $y_\infty^{(2)}(x)$ на мономе с нулевым показателем степени. Анализируя это требование, получаем следующие ограничения на параметры:

$$\delta = \frac{\varepsilon\beta}{27}(\varepsilon - 3\alpha), \quad \sigma = \frac{\varepsilon}{9}(3\alpha - \varepsilon - \beta^2). \tag{3.277}$$

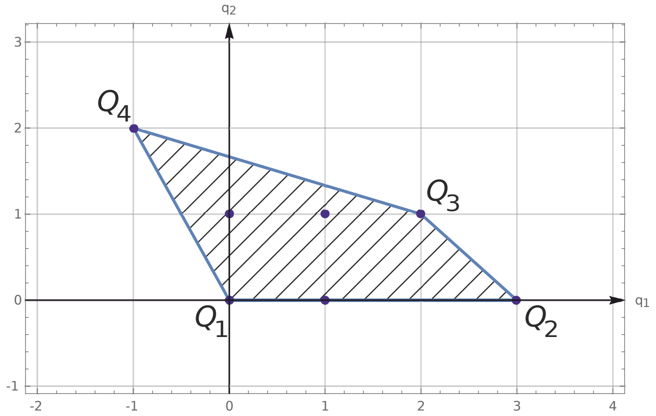


Рис. 3.5: Многоугольник Ньютона уравнения (3.272) при условии $\delta\varepsilon \neq 0$.

Далее положим $\beta = 0$. Если $k = 0$ в представлении (3.274), то согласно Лемме 3.2 необходимо положить $N = 1$. При этом неприводимый алгебраический инвариант и его собственное значение принимают вид

$$F(x, y) = y + x^3 - (\varepsilon - \alpha)x + \frac{\delta}{\varepsilon}, \quad \lambda(x, y) = -\varepsilon. \tag{3.278}$$

В этом случае ряд $y_\infty^{(1)}(x)$ обрывается на мономе с нулевым показателем степени. Это условие позволяет получить ограничение: $\sigma = \varepsilon(\alpha - \varepsilon)$.

Далее рассмотрим случай $k = 1$ и $N > 1$. Вычисляем первые несколько коэффициентов рядов Пюизе (3.273) и используем Теорему 3.1. В результате, приходим к алгебраической системе

$$a_{l+1} + \sum_{j=1}^{N-1} b_{l+3}^{(j)} = 0, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{3.279}$$

Для удобства вводим в рассмотрения симметрические многочлены

$$C_m = \left\{b_3^{(1)}\right\}^m + \ldots + \left\{b_3^{(N-1)}\right\}^m, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3.280}$$

С помощью вычисления результантов и базиса Гребнера, мы решаем подсистему, состоящую из 12 уравнений: (3.279), где $1 \leq l \leq 12$. Мы видим, что $N = 2$ или $N = 3$. Также существуют решения с ненатуральными значениями параметра N, которые мы отбрасываем. Достаточность проверяем подстановкой соответствующих алгебраических инвариантов, их собственных значений и ограничений на параметры в уравнение

$$yF_x - [(3x^2 + \beta x + \alpha)y + \varepsilon x^3 + \sigma x + \delta]F_y = \lambda(x, y)F. \tag{3.281}$$

Полученные результаты собраны в Таблице 3.3. Согласно Теореме 3.4, исследуемая система имеет самое большее два различных неприводимых алгебраических инварианта.

В заключение доказательства отметим, что степени неприводимых алгебраических инвариантов обобщенной системы Дуффинга – ван дер Поля (3.271) ограничены числом 7, а степени относительно переменной y ограничены числом 3. □

Замечание 1. Существует обратимая замена переменных, которая переводит обобщенную систему Дуффинга – ван дер Поля (3.271) в систему, имеющую неприводимые алгебраические инварианты степеней 0 или 3 относительно одной из переменных. Более детально эта замена описана в Разделе 3.1. Следовательно, для построения всех неприводимых алгебраических инвариантов можно также использовать метод неопределенных коэффициентов.

Инвариантные алгебраические кривые, соответствующие алгебраическим инвариантам Таблицы 3.3, имеют нулевой род. Для построения алгебраически инвариантных решений соответствующей системы мы можем использовать алгоритм, разработанный в Разделе 1.6. В качестве примера приведем алгебраически инвариантные решения для инвариантов, находящихся в строках с номерами 3 и 4. Эти решения выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered}\alpha = 2\varepsilon, \quad \sigma = \frac{8\varepsilon^2}{9}: \quad x(t) = \frac{4\sqrt{3\varepsilon}\exp\left[-\frac{2}{3}\varepsilon\{t-t_0\}\right]}{\sqrt{1+12\exp\left[-\frac{2}{3}\varepsilon\{t-t_0\}\right]}},\\ \alpha = -\frac{2\varepsilon}{3}, \quad \sigma = -\frac{4\varepsilon^2}{3}: \quad x(t) = \frac{\sqrt{3\varepsilon}\left(2+\exp\left[-\frac{2}{3}\varepsilon\{t-t_0\}\right]\right)}{3\sqrt{1+\exp\left[-\frac{2}{3}\varepsilon\{t-t_0\}\right]}},\end{gathered} \tag{3.282}$$

где $t_0 \in \mathbb{C}$ – произвольный параметр. Далее перейдем к проблеме интегрируемости.

Теорема 3.24. *Обобщенная система Дуффинга – ван дер Поля* (3.271) *интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда параметры* (α, β, δ, σ) *принимают вид* ($4\varepsilon/3$, 0, 0, $\varepsilon^2/3$).

Доказательство. Используя Теорему 3.10 и Замечание 1 к Теореме 3.10, мы видим, что необходимым и достаточным условием интегрируемости по Лиувиллю обобщенной системы Дуффинга – ван дер Поля (3.271) является существование двух различных неприводимых алгебраических инвариантов. Анализируя данные Таблицы 3.3, заключаем что это условие выполняется только в случае $(\alpha, \beta, \delta, \sigma) = (4\varepsilon/3, 0, 0, \varepsilon^2/3)$. Соответствующие алгебраические инварианты и их собственные значения принимают вид

$$\begin{aligned} F_1(x,y) &= y + x^3 + \frac{\varepsilon}{3}x, \quad \lambda_1(x,y) = -\varepsilon, \\ F_2(x,y) &= y + \frac{\varepsilon}{3}x, \quad \lambda_2(x,y) = -3x^2 - \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.283}$$

Собственные значения удовлетворяют уравнению $d_1\lambda_1(x,y) - \lambda_2(x,y) = f(x)$, где $f(x) = 3x^2 + 4\varepsilon/3$, при $d_1 = -1/3$. Следовательно, функция

$$M(x,y) = \frac{1}{\left(y + \frac{\varepsilon}{3}x\right)\left(y + x^3 + \frac{\varepsilon}{3}x\right)^{1/3}} \tag{3.284}$$

представляет собой интегрирующий множитель Дарбу. Из Теоремы 3.10 следует, что изучаемая система не имеет других интегрируемых по Лиувиллю подсистем. □

Первый интеграл Лиувилля определяется выражением (3.73), где необходимо положить

$$v(x) = -\frac{\varepsilon}{3}x, \quad \beta = \frac{27}{\varepsilon^3}, \quad k = 3, \quad l = 1. \tag{3.285}$$

Еще одно явное представление первого интеграла [155] было получено Т. Стаховяком (T. Stachowiak). Отсутствие интегрируемости по Лиувилля в других случаях является результатом автора диссертационной работы. Общее решение интегрируемой по Лиувиллю подсистемы выражается через эллиптические функции с экспоненциальным аргументом [173].

Исследуем существование неавтономных первых интегралов Дарбу и последних множителей Дарбу – Якоби [159]. Единственный независимый неавтономный первый интеграл Дарбу имеет вид

$$I(x, y, t) = \left(y + x^3 + (\alpha - \varepsilon)x + \frac{\delta}{\varepsilon}\right)\exp(\varepsilon t) \tag{3.286}$$

и существует при выполнении условий $\beta = 0$ и $\sigma = \varepsilon(\varepsilon - \varepsilon)$. Этот факт следует из Леммы 3.5. Неавтономный первый интеграл (3.286) был получен [174] в работе Г. Гао (G. Gao) и З. Фенга (Z. Feng). Единственность, по-видимому, установлена в настоящей диссертационной работе впервые.

Теорема 3.25. *Пусть выполнено условие* $(\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \sigma) \neq (4\varepsilon/3,\ 0,\ 0,\ \varepsilon^2/3)$. *Обобщенная система Дуффинга – ван дер Поля* (3.271) *имеет неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби тогда и только тогда, когда параметры системы удовлетворяют ограничениям из Таблицы 3.3 за исключением строки с номером* $k = 2$. *Неавтономные последние множители Дарбу – Якоби выглядят следующим образом:*

$$M_k(x, y, t) = \frac{\exp\{(A_0 + \alpha)t\}}{F^{(k)}(x, y)}, \quad 1 \leq k \leq 9, \quad k \neq 2, \tag{3.287}$$

где значения параметров α *и* $A_0 = \lambda^{(k)}(0, y)$ *также приведены в Таблице 3.3. Параметр* k *представляет собой номер строки в Таблице 3.3.*

Эта теорема является следствием Леммы 3.7 и Теоремы 3.23. В интегрируемом по Лиувиллю случае, т.е. при $(\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \sigma) = (4\varepsilon/3,\ 0,\ 0,\ \varepsilon^2/3)$, выражение (3.287) также является неавтономным последним множителем Дарбу – Якоби рассматриваемой системы. Однако, этот множитель не единственен. Существует семейство последних множителей Дарбу – Якоби, которое можно получить умножением множителя (3.284) на первый интеграл $I^{\varkappa}(x, y, t)$, где функция $I(x,y,t)$ определяется соотношением (3.286) и $\varkappa \in \mathbb{C}$. Также необходимо положить $\alpha = 4\varepsilon/3$ и $\delta = 0$.

Вспомним, что с помощью неавтономных последних множителей Дарбу – Якоби можно построить лагранжианы рассматриваемой системы, см. Раздел 2.2. В явном виде приведем лагранжиан для случая $k = 1$. Остальные лагранжианы достаточно громоздкие. Множитель $M_1(x,y,t)$ позволяет получить следующий Лагранжиан:

$$\begin{gathered} L_1(x,y,t) = \left\{\left(\ln\left(y+\frac{\varepsilon}{3}x-\frac{\varepsilon\beta}{9}\right)-1\right)\left(y+\frac{\varepsilon}{3}x-\frac{\varepsilon\beta}{9}\right)\right. \\ \left.-x^3-\frac{\beta}{2}x^2+\left(\frac{\varepsilon}{3}-\alpha\right)x\right\}\exp\left(\frac{\varepsilon}{3}t\right), \end{gathered} \tag{3.288}$$

где калибровочная функция опущена. Этот лагранжиан является нестандартным.

3.5 Система Дуффинга и ее обобщение

В этом разделе мы рассмотрим первый пример полиномиальной дифференциальной системы Льенара (3.1) из семейства (C). Напомним, что системы из этого семейства удовлетворяют условию $\deg g > 2\deg f + 1$. Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x_{tt} + \alpha x_t + \varepsilon x^n + \sigma x = 0, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad \varepsilon \neq 0 \tag{3.289}$$

называют обобщенным уравнение Дуффинга. Уравнению (3.289) соответствует система Льенара степени n:

$$x_t = y, \quad y_t = -\alpha y - \varepsilon x^n - \sigma x. \tag{3.290}$$

Уравнение (3.289) и система (3.290) встречаются в самых разных приложениях, включая модели реакции-диффузии, механические системы с вязким сопротивлением, оптические генераторы [170,175,176] и т. д. Уравнение (3.289)

Алгебраический инвариант $F(x,y)$	*Собственное значение*	*Параметры*
$y^2+\frac{2\varepsilon}{n+1}x^{n+1}+\sigma x^2+C_0$	0	$\alpha=0$
Четные значения параметра n		
$y^2+\left(\frac{4\alpha}{5}x-\frac{24\alpha^3}{125\varepsilon}\right)y+\frac{2\varepsilon}{3}x^3$ $-\frac{8\alpha^2}{25}x^2+\frac{24\alpha^4}{625\varepsilon}x$	$-\frac{6\alpha}{5}$	$\sigma=-\frac{6\alpha^2}{25}$, $n=2$
$y^2+\frac{4\alpha}{n+3}xy+\frac{2\varepsilon}{n+1}x^{n+1}+\frac{4\alpha^2}{(n+3)^2}x^2$	$-\frac{2(n+1)\alpha}{(n+3)}$	$\sigma=\frac{2\alpha^2(n+1)}{(n+3)^2}$
Нечетные значения параметра n, $n\neq 1$		
$y-\frac{\sqrt{-2(n+1)\varepsilon}}{n+1}x^{\frac{n+1}{2}}+\frac{2\alpha}{n+3}x$ $y+\frac{\sqrt{-2(n+1)\varepsilon}}{n+1}x^{\frac{n+1}{2}}+\frac{2\alpha}{n+3}x$	$-\frac{\sqrt{-2(n+1)\varepsilon}}{2}x^{\frac{n-1}{2}}-\frac{(n+1)\alpha}{n+3}$ $\frac{\sqrt{-2(n+1)\varepsilon}}{2}x^{\frac{n-1}{2}}-\frac{(n+1)\alpha}{n+3}$	$\sigma=\frac{2\alpha^2(n+1)}{(n+3)^2}$

Таблица 3.4: Неприводимые алгебраические инварианты обобщенной системы Дуффинга (3.290).

названо в честь немецкого инженера Г. Дуффинга (G. Duffing). Классическому уравнению Дуффинга соответствует значение параметра $n=3$. Подробный обзор прошлых и современных исследований, посвященных уравнению Дуффинга, приведен в книге [175]. Проведем классификацию алгебраических инвариантов системы (3.290).

Теорема 3.26. *Обобщенная система Дуффинга* (3.290) *имеет неприводимые алгебраические инварианты тогда и только тогда, когда* $\alpha=0$ *или выполнено одно из следующий условий*

$$\begin{aligned} &n=2, \quad \sigma=\pm\frac{6\alpha^2}{25},\\ &n>2, \quad \sigma=\frac{2\alpha^2(n+1)}{(n+3)^2}. \end{aligned} \tag{3.291}$$

Степени неприводимых алгебраически инвариантов ограничены числом $n+1$. *Результаты приведены в Таблице 3.4.*

Доказательство. Если $\alpha=0$, то мы можем умножить уравнение $x_{tt}+\varepsilon x^n+\sigma x=0$ на x_t и проинтегрировать результат. В результате получим следующий

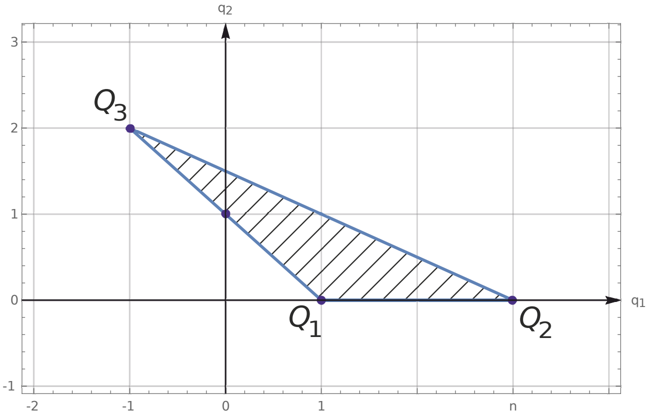


Рис. 3.6: Многоугольник Ньютона уравнения (3.293) при выполнении условия $\sigma\varepsilon \neq 0$.

неприводимый алгебраический инвариант:

$$F(x, y) = y^2 + \frac{2\varepsilon}{n+1} x^{n+1} + \sigma x^2 + C_0, \quad y = x_t, \tag{3.292}$$

где $C_0 \in \mathbb{C}$ – произвольная постоянная. Собственное значение этого инварианта равно нулю. Следовательно, инвариант определяет первый интеграл соответствующей системы.

Рассмотрим случай $\alpha \neq 0$. Воспользуемся результатами Теоремы 3.6. Уравнение (3.5) принимает вид

$$y y_x + \alpha y + \varepsilon x^n + \sigma x = 0. \tag{3.293}$$

Многоугольник Ньютона этого уравнения изображен на Рисунке 3.5. Анализируя доминантные балансы, соответствующие всем вершинам и ребрам этого многоугольника, мы заключаем, что только ребро $[Q_2, Q_3]$ порождает ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющие уравнению (3.293). Укороченное уравнение и его степенные решения выглядят следующим образом:

$$y y_x + \varepsilon x^n = 0: \quad y^{(1,2)}(x) = b_0^{(1,2)} x^{\frac{n+1}{2}}, \quad b_0^{(1,2)} = \pm \frac{\sqrt{-2(n+1)\varepsilon}}{n+1}. \tag{3.294}$$

Мы видим, что случаи четных и нечетных значений параметра n должны рассматриваться отдельно.

Четные значения параметра n. Уравнению (3.293) удовлетворяют два семейства рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$

$$y_\infty^{(1,2)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k^{(1,2)} x^{\frac{n+1}{2}-\frac{k}{2}}. \qquad (3.295)$$

Подставляя эти ряды в уравнение (3.293), находим рекуррентное соотношение для коэффициентов

$$(2\{n+1\}-k)\, b_0 b_k = -\sum_{l=1}^{k-1}(n+1-l)b_l b_{k-l} - 2\alpha b_{k-n+1} - 2\sigma\delta_{k,2(n-1)}, \quad (3.296)$$

где $k \in \mathbb{N}$ и $\delta_{k,2(n-1)}$ – символ Кронекера. Также мы предполагаем, что $b_l = 0$, если $l < 0$, и соответствующая сумма равна нулю при $k = 1$. Заметим, что верхний индекс в соотношении (3.296) опущен. Вычислим первые несколько нетривиальных коэффициентов b_k, $k > 0$:

$$b_{n-1}^{(1,2)} = -\frac{2\alpha}{n+3}, \quad b_{2n-2}^{(1,2)} = \frac{2(n+1)\alpha^2 - (n+3)^2\sigma}{(n+3)^2 b_0^{(1,2)}}. \qquad (3.297)$$

С помощью производной по Гато для баланса $yy_x + \varepsilon x^n$, мы находим показатель Ковалевской, который для каждого ряда равен $l_0 = n+1$. Из соотношения (3.296) следует, что условие совместности выполняется автоматически при $n \geq 6$. Если $n = 4$, то непосредственными вычислениями убеждаемся, что условие совместности также выполняется. В случае $n = 2$ условие совместности выглядит следующим образом:

$$(6\alpha^2 - 25\sigma)(6\alpha^2 + 25\sigma) = 0. \qquad (3.298)$$

Следовательно, ряды Пюизе (3.295) всегда существуют при условии $n \geqslant 4$. Если же $n = 2$, то ряды Пюизе (3.295) существуют лишь при выполнении условия (3.298). Используя Теорему 3.6, разложим неприводимые алгебраические инварианты $F(x, y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$. В результате получим

$$F(x, y) = \left\{\prod_{j=1}^{N_1}\left\{y - y_{j,\infty}^{(1)}(x)\right\}\prod_{j=1}^{N_2}\left\{y - y_{j,\infty}^{(2)}(x)\right\}\right\}_+, \qquad (3.299)$$

где N_1, $N_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $N_1 + N_2 > 0$. Каждый из рядов $y_{j,\infty}^{(1,2)}(x)$ содержит произвольный коэффициент $b_{2(n+1),j}^{(1,2)}$. Эти коэффициенты с одинаковым верхним индексом должны быть попрано различными. Далее запишем условие (3.7). Оно принимает вид

$$\left\{y_{1,\infty}^{(1)}(x) + \ldots + y_{N_1,\infty}^{(1)}(x) + y_{1,\infty}^{(2)}(x) + \ldots + y_{N_2,\infty}^{(1)}(x)\right\}_- = 0. \qquad (3.300)$$

Вспомним, что n – четное число. Тогда моном $x^{(n+1)/2}$ не принадлежит кольцу $\mathbb{C}[x]$. Приравнивая нулю коэффициент при мономе $x^{(n+1)/2}$, находим $N_2 = N_1$. В случае $n = 2$ также должно выполняться необходимое условие (3.298). Если $n = 2$ и $N_1 = N_2 = 1$, то мы получаем следующие неприводимые алгебраические инварианты:

$$\begin{aligned} &\sigma = -\frac{6\alpha^2}{25}: \quad F_1(x,y) = y^2 + \left(\frac{4\alpha}{5}x - \frac{24\alpha^3}{125\varepsilon}\right)y + \frac{2\varepsilon}{3}x^3 - \frac{8\alpha^2}{25}x^2 + \frac{24\alpha^4}{625\varepsilon}x, \\ &\sigma = \frac{6\alpha^2}{25}: \quad F_2(x,y) = y^2 + \frac{4\alpha}{5}xy + \frac{2\varepsilon}{3}x^3 + \frac{4\alpha^2}{25}x^2. \end{aligned} \qquad (3.301)$$

Соответствующие собственные значения находим с помощью соотношения (3.13). Они имеют вид $\lambda_{1,2}(x,y) = -6\alpha/5$.

В случае $n \geq 4$ мы используем рекуррентную формулу (3.296) и выражения (3.297) для того, чтобы найти коэффициенты $b_{3n-3}^{(1,2)}$. В результате имеем

$$b_{3n-3}^{(1,2)} = \frac{\{(n+3)^2\sigma - 2(n+1)\alpha^2\}(n^2-1)\alpha}{(n+3)^2(n-5)\varepsilon}. \qquad (3.302)$$

Мы видим, что эти коэффициенты не зависят от произвольных коэффициентов $b_{2(n+1)}^{(1,2)}$. Приравнивая нулю коэффициент при мономе x^{-n+2} в соотношении (3.300), мы получаем необходимое условие существования неприводимых алгебраических инвариантов. Это условие представляется в виде

$$\frac{2\{(n+3)^2\sigma - 2(n+1)\alpha^2\}(n^2-1)\alpha N_1}{(n+3)^2(n-5)\varepsilon} = 0 \qquad (3.303)$$

и позволяет найти значения параметра σ, см. (3.291). При $N_1 = N_2 = 1$ мы находим неприводимый алгебраический инвариант

$$\sigma = \frac{2(n+1)\alpha^2}{(n+3)^2} : \ F(x,y) = y^2 + \frac{4\alpha}{n+3}xy + \frac{2\varepsilon}{n+1}x^{n+1} + \frac{4\alpha^2}{(n+3)^2}x^2. \quad (3.304)$$

С помощью соотношения (3.13) получаем его собственное значение, которое равно $\lambda(x,y) = -2(n+1)\alpha/(n+3)$. Мы проверяем наши результаты подставкой инвариантов и их собственных значений в линейное уравнение в частных производных

$$yF_x - (\alpha y + \varepsilon x^n + \sigma x)F_y = \lambda(x,y)F. \quad (3.305)$$

Теперь установим, что не существует других неприводимых алгебраических инвариантов. Введем в рассмотрение параметры $\beta_1, \ldots, \beta_{N_1}$ в соответствии с правилом $b^{(l)}_{2(n+1),j} = b^{(l)}_0\beta_j$, $l = 1, 2$. Такая подстановка делает ряды Пюизе $y^{(1)}_{j,\infty}(x)$ и $y^{(2)}_{j,\infty}(x)$ сопряженными. Согласно алгоритму метода рядов Пюизе, описанному в Разделе 1.4, алгебраическая система, возникающая из условия (3.300), зависит от параметров β_j, $1 \leq j \leq N_1$ посредством инвариантов

$$C_k = \sum_{j=1}^{N_1} (\beta_j)^k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.306)$$

В силу существования алгебраических инвариантов (3.301) и (3.304), мы заключаем, что справедливо уравнение

$$C_k = \eta^k N_1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.307)$$

где $\eta \in \mathbb{C}$ – некоторая постоянная. Если $\sigma = 2(n+1)\alpha^2/(n+3)^2$, то эта постоянная равна нулю. По Теореме 1.5 обобщенная система Дуффинга (3.290) не может иметь других неприводимых алгебраических инвариантов.

Нечетные значения параметра n. Ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющие уравнению (3.293), являются рядами Лорана и имеют вид

$$y^{(1,2)}_\infty(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b^{(1,2)}_k x^{\frac{n+1}{2}-k}. \quad (3.308)$$

Подставляя ряды (3.308) в уравнения (3.293), мы находим рекуррентное соотношение для коэффициентов

$$2\,(n+1-k)\,b_0 b_k = -\sum_{l=1}^{k-1}(n+1-2l)b_l b_{k-l} - 2\alpha b_{k-\frac{n-1}{2}} - 2\sigma\delta_{k,n-1}, \qquad (3.309)$$

где $k \in \mathbb{N}$ и $\delta_{k,n-1}$ – символ Кронекера. Опять предполагаем, что $b_l = 0$ при $l < 0$ и соответствующая сумма равна нулю, если $k = 1$. Верхний индекс в соотношении (3.309) опущен. Вычисляя первые нетривиальные коэффициенты b_k при $k > 0$, получаем

$$b^{(1,2)}_{\frac{n-1}{2}} = -\frac{2\alpha}{n+3}, \quad b^{(1,2)}_{n-1} = \frac{2(n+1)\alpha^2 - (n+3)^2\sigma}{(n+3)^2 b_0^{(1,2)}}. \qquad (3.310)$$

Как и в случае четных значений параметра n, показатель Ковалевской для всех рядов равен $l_0 = n+1$. Из соотношения (3.309) следует, что условие совместности, обеспечивающее существование рядов Пюизе, автоматически выполняется при $n \geq 7$. Значения $n = 3$ и $n = 5$ рассмотрим отдельно. Если $n = 3$, то условие совместности имеет вид $\sigma = 2\alpha^2/9$. При этом ряды Пюизе выглядят следующим образом:

$$y^{(1,2)}_{\infty}(x) = \pm\frac{\sqrt{-2\varepsilon}}{2}x^2 - \frac{\alpha}{3}x + \frac{b_4^{(1,2)}}{x^2} + \ldots \qquad (3.311)$$

Ряд $y^{(l)}_{\infty}(x)$ имеет произвольный коэффициент $b_4^{(l)}$, $l = 1, 2$. Пусть $b_4^{(l)} = 0$. Тогда ряды обрываются на мономе с нулевым показателем степени и мы получаем два неприводимых алгебраических инварианта

$$\begin{gathered} \sigma = \frac{2\alpha^2}{9}: \quad F_1(x,y) = y - \frac{\sqrt{-2\varepsilon}}{2}x^2 + \frac{\alpha}{3}x, \\ F_2(x,y) = y + \frac{\sqrt{-2\varepsilon}}{2}x^2 + \frac{\alpha}{3}x. \end{gathered} \qquad (3.312)$$

Собственные значения этих инвариантов находим с помощью соотношения (3.13). В результате, получаем

$$\lambda_1(x,y) = -\sqrt{-2\varepsilon}x - \frac{2\alpha}{3}, \quad \lambda_2(x,y) = \sqrt{-2\varepsilon}x - \frac{2\alpha}{3}. \qquad (3.313)$$

Если $n = 5$, то условие совместности, обеспечивающее существование рядов Пюизе, принимает вид $\sigma = 3\alpha^2/16$. Соответствующие ряды

$$y_{\infty}^{(1,2)}(x) = \pm\frac{\sqrt{-3\varepsilon}}{3}x^3 - \frac{\alpha}{4}x + \frac{b_6^{(1,2)}}{x^3} + \dots \tag{3.314}$$

имеют произвольный коэффициент $b_6^{(l)}$, $l = 1$, 2. Положим $b_6^{(l)} = 0$. Тогда эти ряды обрываются на мономе с нулевым показателем степени и мы получаем два неприводимых алгебраических инварианта

$$\begin{gathered}\sigma = \frac{3\alpha^2}{16}: \quad F_1(x,y) = y - \frac{\sqrt{-3\varepsilon}}{3}x^3 + \frac{\alpha}{4}x,\\ F_2(x,y) = y + \frac{\sqrt{-3\varepsilon}}{3}x^3 + \frac{\alpha}{4}x.\end{gathered} \tag{3.315}$$

Собственные значения инвариантов опять вычисляем, используя соотношение (3.13):

$$\lambda_1(x,y) = -\sqrt{-3\varepsilon}x^2 - \frac{3\alpha}{4}, \quad \lambda_2(x,y) = \sqrt{-3\varepsilon}x^2 - \frac{3\alpha}{4}. \tag{3.316}$$

Если выполнено неравенство $n \geq 7$, то ряды Пюизе $y_{\infty}^{(1,2)}(x)$ всегда существуют. С помощью соотношений (3.309) и (3.310) находим коэффициент $b_{\frac{3n-3}{2}}^{(1,2)}$. Он равен

$$b_{\frac{3n-3}{2}}^{(1,2)} = \frac{\{(n+3)^2\sigma - 2(n+1)\alpha^2\}(n^2-1)\alpha}{(n+3)^2(n-5)\varepsilon}. \tag{3.317}$$

Разложение на множители в кольце $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}[y]$ неприводимых алгебраических инвариантов $F(x,y)$ определяется равенством (3.299), где N_1, $N_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $N_1 + N_2 > 0$ и ряды Пюизе $y_{j,\infty}^{(1,2)}(x)$ имеют вид (3.308). Ряд $y_{j,\infty}^{(l)}(x)$ содержит произвольный коэффициент $b_{n+1,\,j}^{(l)}$, $l = 1$, 2. Коэффициенты $\left\{b_{n+1,\,j}^{(l)}\right\}$ с различным нижним индексом j и одинаковым верхним индексом должны быть попарно различными. Условие (3.300) позволяет получить уравнение

$$\frac{\{(n+3)^2\sigma - 2(n+1)\alpha^2\}(n^2-1)\alpha}{(n+3)^2(n-5)\varepsilon}(N_1 + N_2) = 0. \tag{3.318}$$

Решая это уравнения, находим значения параметра σ как указано в формуле (3.291). Полагая произвольные коэффициенты нулями, мы видим, что ряды

Пюизе $y_{j,\infty}^{(1,2)}(x)$ обрываются на мономе с нулевым показателем степени. Мы находим неприводимые алгебраические инварианты

$$\sigma = \frac{2(n+1)\alpha^2}{(n+3)^2}: \quad F_1(x,y) = y - \frac{\sqrt{-2(n+1)\varepsilon}}{n+1}x^{\frac{n+1}{2}} + \frac{2\alpha}{n+3}x, \\ F_2(x,y) = y + \frac{\sqrt{-2(n+1)\varepsilon}}{n+1}x^{\frac{n+1}{2}} + \frac{2\alpha}{n+3}x. \tag{3.319}$$

и их собственные значения

$$\lambda_1(x,y) = -\frac{\sqrt{-2(n+1)\varepsilon}}{2}x^{\frac{n-1}{2}} - \frac{(n+1)\alpha}{n+3}, \\ \lambda_2(x,y) = \frac{\sqrt{-2(n+1)\varepsilon}}{2}x^{\frac{n-1}{2}} - \frac{(n+1)\alpha}{n+3}. \tag{3.320}$$

Отметим, что неприводимые алгебраические инварианты и соответствующие им собственные значения в случаях $n = 3$ и $n = 5$ также описываются общими формулами (3.319) и (3.320) соответственно. Отсутствие других неприводимых алгебраических инвариантов можно обосновать также, как и при четных значениях параметра n. □

Замечание 1. Еще один способ доказательства единственности неприводимых алгебраических инвариантов состоит в использовании общих результатов Раздела 3.2.3. Если n – четное число, то соответствующая обобщенная система Дуффинга (3.290) имеет не более одного неприводимого алгебраического инварианта по Следствию 1 к Теореме 3.17. Если n – нечетное число, то существование не более двух различных неприводимых алгебраических инвариантов следует из Следствия 1 к Теореме 3.18. Действительно, далее мы покажем, что соответствующая обобщенная система Дуффинга (3.290) интегрируема по Лиувиллю.

Предположим, что все параметры обобщенной системы Дуффинга (3.290) вещественнозначны. В этом случае неприводимые в кольце $\mathbb{C}[x,y]$ алгебраические инварианты при нечетных значениях параметра n содержат комплекснозначные коэффициенты, если $\varepsilon > 0$. Мы можем построить алгебраический инвариант с вещественнозначными коэффициентами, умножая $F_1(x,y)$

на $F_2(x, y)$. Получающийся инвариант принимает вид (3.304). Он неприводим в кольце $\mathbb{R}[x, y]$ и имеет постоянное собственное значение $\lambda(x, y) = -2(n+1)\alpha/(n+3)$.

Перейдем к изучению проблемы интегрируемости по Лиувиллю.

Теорема 3.27. *Обобщенная система Дуффинга* (3.290) *интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда* $\alpha = 0$ *или параметр* σ *принимает вид* (3.291).

Доказательство. Обобщенная система Дуффинга (3.290) при $\alpha = 0$ является гамильтоновой с полиномиальным первым интегралом (3.292). Пусть $\alpha \neq 0$ и выполнено соотношение (3.291). Тогда система (3.290) имеет алгебраические инварианты такие, что их собственные значения удовлетворяют условию (2.6). Следовательно, мы находим интегрирующие множители Дарбу

$$\begin{gathered} n = 2, \quad \sigma = -\frac{6\alpha^2}{25}: \\ M(x, y) = \left\{ y^2 + \left(\frac{4\alpha}{5} x - \frac{24\alpha^3}{125\varepsilon} \right) y + \frac{2\varepsilon}{3} x^3 - \frac{8\alpha^2}{25} x^2 + \frac{24\alpha^4}{625\varepsilon} x \right\}^{-\frac{5}{6}}, \\ n \geq 2, \quad \sigma = \frac{2\alpha^2(n+1)}{(n+3)^2}: \\ M(x, y) = \left\{ y^2 + \frac{4\alpha}{n+3} xy + \frac{2\varepsilon}{n+1} x^{n+1} + \frac{4\alpha^2}{(n+3)^2} x^2 \right\}^{-\frac{n+3}{2(n+1)}}. \end{gathered} \tag{3.321}$$

Отсутствие первых интегралов Лиувилля в других случаях следует из Теоремы 3.8. □

Первые интегралы Лиувилля выражаются через гипергеометрическую функцию. Явное выражение задается соотношением (3.216), где необходимо положить $l = 1$, $k = n + 1$ и

$$\begin{gathered} n = 2, \quad \sigma = -\frac{6\alpha^2}{25}: \quad w(x) = \frac{4\alpha}{5} \left(x - \frac{6\alpha^2}{25\varepsilon} \right), \quad \beta = \frac{125\varepsilon}{96\alpha^3}, \\ n \geq 2, \quad \sigma = \frac{2\alpha^2(n+1)}{(n+3)^2}: \quad w(x) = \frac{4\alpha}{n+3} x, \quad \beta = \frac{2\varepsilon(n+3)^{n+1}}{(n+1)(4\alpha)^{n+1}}. \end{gathered} \tag{3.322}$$

Первые интегралы при $\sigma = 2\alpha^2(n+1)/(n+3)^2$ были получены в работе [155] Т. Стаховяком (T. Stachowiak). При $\sigma = -6\alpha^2/25$ первый интеграл, по-видимому, построен впервые. Отсутствие интегрируемости по Лиувилля при остальных значениях параметров является еще одним новым результатом.

Теорема 3.28. *Общее решение обобщенной системы Дуффинга* (3.290) *при выполнении условий* $\sigma = 2\alpha^2(n+1)/(n+3)^2$ *и* $n \geq 2$ *может быть представлено в виде* $x(t) = h(t)X(f(t))$*, где функции* $h(t)$ *и* $f(t)$ *определяются соотношениями*

$$h(t) = \exp\left[-\frac{2\alpha t}{n+3}\right], \quad f(t) = -\frac{n+3}{\alpha(n-1)}\exp\left[-\frac{(n-1)\alpha t}{n+3}\right], \tag{3.323}$$

а функция $X(s)$ *удовлетворяет автономному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка*

$$X_s^2 + \frac{2\varepsilon}{n+1}X^{n+1} - I_0 = 0. \tag{3.324}$$

Параметр $I_0 \in \mathbb{C}$ *является постоянной интегрирования.*

Доказательство. Несложно убедиться, что алгебраические инварианты с постоянным собственным значением порождают неавтономные первые интегралы Дарбу. Для исследуемых обобщенных систем Дуффинга эти первые интегралы имеют вид

$$I(x,y,t) = \left\{y^2 + \frac{4\alpha}{n+3}xy + \frac{2\varepsilon}{n+1}x^{n+1} + \frac{4\alpha^2}{(n+3)^2}x^2\right\}\exp\left[\frac{2(n+1)\alpha t}{n+3}\right].$$

Полагая $x_t = y$, рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$x_t^2 + \frac{4\alpha}{n+3}xx_t + \frac{2\varepsilon}{n+1}x^{n+1} + \frac{4\alpha^2}{(n+3)^2}x^2 = I_0, \exp\left[-\frac{2(n+1)\alpha t}{n+3}\right], \tag{3.325}$$

где $I_0 \in \mathbb{C}$ – произвольная постоянная. Подставляя $x(t) = h(t)X(f(t))$ в уравнение (3.325) и требуя, чтобы функция $X(s)$ удовлетворяла автономному обыкновенному дифференциальному уравнению, мы получаем явные выражения для функций $h(t)$ и $f(t)$, как указано в формулах (3.323). Соответствующее автономное обыкновенное дифференциальное уравнение принимает вид (3.324). Две независимы произвольные постоянные общего решения $x(t)$ определяются параметрами I_0 и s_0, где s_0 возникает из инвариантности уравнения (3.324) относительно параллельного переноса $s \mapsto s - s_0$. □

В случаях $n = 2$ и $n = 3$ дифференциальное уравнение (3.324) может быть проинтегрировано в эллиптических функциях. Если $n \geq 4$, то появляются гиперэллиптические интегралы, обращения которых позволяют выразить общее решение через гиперэллиптические функции. Проблема обращения гиперэллиптических интегралов рассматривалась В. М. Бухштабером с соавторами [177], а также В. З. Энольским с соавторами [178].

Общее решение обобщенной системы Дуффинга (3.290) в случае $n = 2$ и $\sigma = 6\alpha^2/25$ было найдено М. Дж. Абловицем [179] и соавторами (M. J. Ablowitz et al.), см. также [180]. Если $n = 2$ и $\sigma = -6\alpha^2/25$, то соответствующее общее решение приведено Дж. Ки и соавторами (J. Qi et al.) [181]. Случай $n = 3$ и $\sigma = 2\alpha^2/9$ рассматривался С. Партасарати с соавторами (S. Parthasarathy et al.) [182]. Интегрируемые обобщенные уравнения Дуффинга (3.289) при $n = 2$ и $n = 3$ могут быть переведены точечными преобразованиями в уравнения из классификации Пенлеве–Гамбье, имеющие свойство Пенлеве. Список таких уравнений приводится, например, в книге [183].

3.6 Система Льенара пятой степени с линейной функцией, описывающей трение

Наибольший интерес для приложений представляют полиномиальные системы Льенара (3.1) из семейства (C) с наименьшими степенями многочлена $g(x)$. К таким системам относятся системы четвертой и пятой степеней с постоянной или линейной функцией, задающей трение. Также в эту группу попадает кубическая система с постоянным трением. Мы исследовали отмеченные выше системы. Все они за исключением системы при ограничениях $\deg f(x) = 1$ и $\deg g(x) = 5$ имеют неприводимые алгебраические инварианты, степени которых относительно переменной y не превышают числа 2. Как мы увидим ниже, в случае $\deg f(x) = 1$ и $\deg g(x) = 5$ для соответствующей системы существуют неприводимые алгебраические инварианты степени 3 относительно переменной y. Отметим, что в некоторых научных статьях ошибочно предполагается, что системы Льенара (3.1), удовлетворяющие условию $\deg g \neq 2 \deg f + 1$, не могут иметь алгебраических инвариантов таких степеней [127].

Дифференциальную систему Льенара при выполнении описанных выше ограничений ($\deg f(x) = 1$ и $\deg g(x) = 5$) можно представить в виде

$$x_t = y,\, y_t = -(\alpha x + \beta)y - (\varepsilon x^5 + r x^4 + \nu x^3 + e x^2 + \sigma x + \delta),\, \alpha\varepsilon \neq 0. \quad (3.326)$$

Существует аффинная замена переменных вида $x \mapsto X(x + x_0)$, $y \mapsto Yy$, $T \mapsto Tt$, где $XYT \neq 0$, связывающая систему (3.326) с ее более простым представителем при $\alpha = 5$, $\varepsilon = -3$, $r = 0$. Далее без ограничения общности будем рассматривать систему

$$x_t = y, \quad y_t = -(5x + \beta)y + 3x^5 - \nu x^3 - e x^2 - \sigma x - \delta, \quad (3.327)$$

где все параметры принимают значения из поля $\mathbb{C}$. Соответствующее системе (3.327) обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка принимает вид

$$x_{tt} + (5x + \beta)x_t - 3x^5 + \nu x^3 + e x^2 + \sigma x + \delta = 0. \quad (3.328)$$

Найдем все неприводимые алгебраические инварианты изучаемой системы.

Теорема 3.29. *Система Льенара пятой степени* (3.327) *с линейной функцией, описывающей трение, имеет алгебраические инварианты тогда и только* *тогда, когда выполнены ограничения на параметры, указанные ниже. Соответствующие неприводимые алгебраические инварианты и их собственные значения также приведены ниже.*

Алгебраические инварианты первой степени относительно переменной y:

1. $e = \sigma + \frac{1}{8}\nu - \frac{15}{16} + \frac{15}{8}\beta + \frac{1}{16}\nu^2 - \frac{1}{8}\beta\,\nu - \frac{3}{16}\beta^2,$

$\delta = \frac{1}{192}\,(3\beta - \nu + 3)\,\big(\nu^2 - 6\nu - 2\beta\nu + 6\,\beta - 3\beta^2 + 9 + 16\sigma\big),$

$F(x,y) = y - x^3 + x^2 + \frac{1}{4}(\beta + \nu - 3)x + \frac{1}{3}\sigma + \frac{1}{48}(\beta + \nu - 3)(-3\beta + \nu - 3),$

$\lambda(x,y) = -3x^2 - 3x + \frac{1}{4}(\nu - 3\beta - 3);$

2. $e = \frac{15}{16} + \frac{15}{8}\beta - \sigma - \frac{1}{8}\nu - \frac{1}{16}\nu^2 - \frac{1}{8}\beta\,\nu + \frac{3}{16}\beta^2,$

$\delta = \frac{1}{192}\,(3\beta + \nu - 3)\,\big(\nu^2 - 6\nu + 2\beta\nu - 6\,\beta - 3\beta^2 + 9 + 16\sigma\big),$

$F(x,y) = y + x^3 + x^2 + \frac{1}{4}(\beta - \nu + 3)x + \frac{1}{3}\sigma + \frac{1}{48}(\beta - \nu + 3)(3 - 3\beta - \nu),$

$\lambda(x,y) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{4}(3 - \nu - 3\beta).$

Алгебраические инварианты второй степени относительно переменной y:

3. $e = 0, \qquad \delta = 0, \qquad \sigma = \frac{1}{12}(9 - \nu^2), \qquad \beta = 0,$

$$F(x,y) = y^2 + \left(2x^2 + 1 - \frac{\nu}{3}\right) y - x^6 + \frac{1}{2}\,(\nu - 1)\,x^4 - \frac{1}{12}\,(\nu + 1)\,(\nu - 3)\,x^2$$
$$+\frac{1}{216}(\nu + 3)(\nu - 3)^2, \qquad \lambda(x,y) = -6x;$$

4. $e = \frac{3}{1024}\beta\,\big(512 - 5\beta^2\big),\ \delta = -\frac{3}{262144}\beta^3\,\big(\beta^2 + 1280\big),$

$\sigma = \frac{3}{65536}\beta^2\,\big(2816 + 15\beta^2\big),\ \nu = \frac{15}{128}\beta^2 + 3,$

$$F(x,y) = y^2 + \left(2x^2 + \frac{1}{2}\beta x - \frac{5}{128}\beta^2\right) y - x^6 + \left(\frac{15}{256}\beta^2 + 1\right) x^4$$
$$-\frac{1}{512}\beta\,\big(5\beta^2 - 256\big)\,x^3 + \frac{3}{65536}\beta^2\,\big(512 + 15\beta^2\big)\,x^2 - \frac{1}{131072}\beta^3$$
$$\times\big(1280 + 3\beta^2\big)\,x + \frac{5}{16777216}\,\beta^4\,\big(\beta^2 + 1280\big), \qquad \lambda(x,y) = -6x - \frac{3}{2}\beta.$$

Алгебраические инварианты третьей степени относительно переменной y:

5. $e = \frac{28511847}{62500}$, $\delta = -\frac{94714508889}{19531250}$, $\sigma = -\frac{8628822111}{1562500}$, $\nu = \frac{133188}{625}$,

$$\begin{aligned}
&\beta = \frac{91}{5},\ F(x,y) = y^3 + \left(x^3 + 3x^2 - \frac{24297}{625}x - \frac{15500849}{62500}\right) y^2 + \bigl(2x^5 - x^6 \\
&+\frac{73219}{625}x^4 + \frac{4316949}{31250}x^3 - \frac{11403548611}{1562500}x^2 - \frac{7670383903}{19531250}x \\
&+\frac{109912617846031}{976562500}\Bigr) y - x^9 - x^8 + \frac{96266}{625}x^7 + \frac{36191047}{62500}x^6 - \frac{17544478133}{1562500}x^5 \\
&-\frac{812450830009}{19531250}x^4 + \frac{138358719104879}{390625000}x^3 + \frac{131625246607012067}{97656250000}x^2 \\
&-\frac{925725907851168424}{152587890625}x - \frac{356383541131462914069}{61035156250000}, \\
&\lambda(x,y) = 3x^2 - 9x - \frac{58422}{625};
\end{aligned}$$

6. $e = -\frac{28511847}{62500}$, $\delta = \frac{94714508889}{19531250}$, $\sigma = -\frac{8628822111}{1562500}$, $\nu = \frac{133188}{625}$,

$$\begin{aligned}
&\beta = -\frac{91}{5},\ F(x,y) = y^3 + \left(3x^2 - x^3 + \frac{24297}{625}x - \frac{15500849}{62500}\right) y^2 - \bigl(x^6 + 2x^5 \\
&-\frac{73219}{625}x^4 + \frac{4316949}{31250}x^3 + \frac{11403548611}{1562500}x^2 - \frac{7670383903}{19531250}x \\
&-\frac{109912617846031}{976562500}\Bigr) y + x^9 - x^8 - \frac{96266}{625}x^7 + \frac{36191047}{62500}x^6 + \frac{17544478133}{1562500}x^5 \\
&-\frac{812450830009}{19531250}x^4 - \frac{138358719104879}{390625000}x^3 + \frac{131625246607012067}{97656250000}x^2 \\
&+\frac{925725907851168424}{152587890625}x - \frac{356383541131462914069}{61035156250000}, \\
&\lambda(x,y) = -3x^2 - 9x + \frac{58422}{625}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Разложение на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ неприводимых алгебраических инвариантов $F(x,y)$ системы (3.327) получено в Теореме 3.6. Многоугольник Ньютона обыкновенного дифференциального уравнения

$$yy_x + (5x+\beta)y - 3x^5 + \nu x^3 + ex^2 + \sigma x + \delta = 0 \qquad (3.329)$$

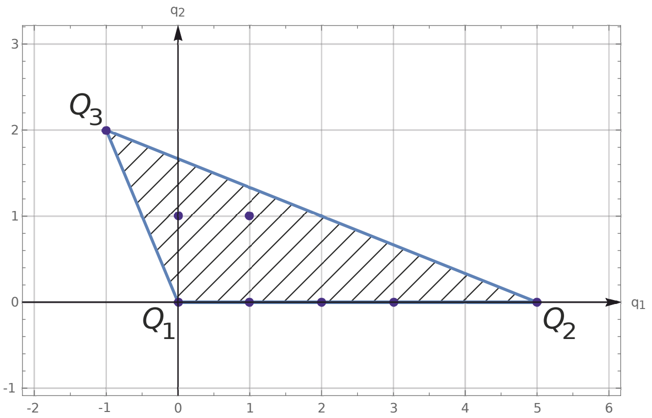


Рис. 3.7: Многоугольник Ньютона уравнения (3.329) при ограничении $\delta \neq 0$.

приведен на Рисунке 3.6. Ряды Пюизе Теоремы 3.6 принимают вид

$$\begin{gathered}
y_{\infty}^{(1)}(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{4}(3 - \beta - \nu)x + \sum_{l=3}^{+\infty} b_l^{(1)} x^{3-l};\\
y_{\infty}^{(2)}(x) = -x^3 - x^2 + \frac{1}{4}(\nu - \beta - 3)x + \sum_{l=3}^{+\infty} b_l^{(2)} x^{3-l}.
\end{gathered} \tag{3.330}$$

Ряд Пюизе $y_{\infty}^{(l)}(x)$ имеет единственный произвольный коэффициент $b_6^{(l)}$, где $l = 1,\, 2$. Построенные ряды существуют при выполнении условий

$$\begin{gathered}
y_{\infty}^{(1)}(x): \quad \delta = \frac{3}{160}\beta^3 + \left(\frac{1}{80}\nu - \frac{15}{16}\right)\beta^2 + \left(\frac{123}{32} - \frac{21}{80}\nu - \frac{1}{160}\nu^2\right)\beta\\
+ \left(2 - \frac{1}{10}\beta\right)\sigma + \left(\frac{7}{20}\beta - \frac{7}{4} - \frac{1}{12}\nu\right)e + \frac{1}{6}\left(\nu - 3\right)\left(\nu + 3\right);\\
y_{\infty}^{(2)}(x): \quad \delta = \frac{3}{160}\beta^3 + \left(\frac{15}{16} - \frac{1}{80}\nu\right)\beta^2 + \left(\frac{123}{32} - \frac{21}{80}\nu - \frac{1}{160}\nu^2\right)\beta\\
- \left(2 + \frac{1}{10}\beta\right)\sigma - \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{12}\nu + \frac{7}{20}\beta\right)e - \frac{1}{6}\left(\nu - 3\right)\left(\nu + 3\right)
\end{gathered} \tag{3.331}$$

и представляют собой семейства рядов. Предположим, что семейство $y_{\infty}^{(l)}(x)$ появляется в разложении неприводимого алгебраического инварианта $F(x, y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_{\infty}\{x\}[y]$ N_1 раз, где $l = 1,\, 2$. Для различения произвольных коэффициентов введем нижний индекс j: $b_{6,j}^{(l)}$, где $l = 1,\, 2$. Если $N_2 = 0$, то из Теоремы 3.6 следует, что $N_1 = 1$. Соответствующий неприводимый алгебраический инвариант существует, если семейство рядов $y_{\infty}^{(1)}(x)$

обрывается на мономе с нулевым показателем степени. В результате мы получаем ограничение на параметры

$$e = \sigma - \frac{3}{16}\beta^2 + \frac{1}{8}\left(15 - \nu\right)\beta + \frac{1}{16}\left(\nu + 5\right)\left(\nu - 3\right). \qquad (3.332)$$

Далее мы повторяем эти же рассуждения для случая $N_1 = 0$. Этот подход позволяет нам найти все неприводимые алгебраические инварианты, для которых выполнено $N_2 = 0$, $N_1 > 0$ или $N_2 = 0$, $N_1 > 0$.

Далее предположим, что справедливы неравенства $N_1 > 0$ и $N_2 > 0$. Введем в рассмотрение симметрические многочлены относительно произвольных коэффициентов

$$C_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{N_1}\left(b_{6,j}^{(1)}\right)^k; \quad C_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{N_1}\left(b_{6,j}^{(2)}\right)^k. \qquad (3.333)$$

Пользуясь результатами Теоремы 3.1, рассмотрим алгебраическую систему

$$\sum_{j=1}^{N_1} b_{l,j}^{(1)} + \sum_{j=1}^{N_2} b_{l,j}^{(2)} = 0, \quad l \geq 4. \qquad (3.334)$$

Возьмем ее подсистему, состоящую из первых одиннадцати уравнений. Также добавим к подсистеме условия существования обоих семейств рядов Пюизе. Решая алгебраическую подсистему, получаем три возможности: $N_1 = N_2$, $N_1 = 2N_2$ и $N_2 = 2N_1$. Если реализуется случай $N_1 = N_2$, то

$$C_1^{(1)} = g_1 N_1, \quad C_2^{(1)} = g_1^2 N_1, \qquad C_1^{(2)} = g_2 N_2, \quad C_2^{(2)} = g_2^2 N_2 \qquad (3.335)$$

и должны выполняться ограничения на параметры исходной системы, указанные в пунктах 3 и 4 настоящей теоремы. Существуют два неприводимых алгебраических инварианта $F(x, y)$ при $N_1 = 1$ и $N_2 = 1$. Эти инварианты также приведены в пунктах 3 и 4. Следовательно, справедливы условия

$$C_k^{(1)} = g_1^k N_1, \qquad C_k^{(2)} = g_2^k N_2, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (3.336)$$

Согласно Теореме 1.5, алгебраическая система (3.334) не имеет других решений, порождающих неприводимые алгебраические инварианты.

Если $N_1 = 2N_2$, то мы находим $C_1^{(2)} = g_2N_2$ и $C_2^{(2)} = g_2^2N_2$. Действуя как и в предыдущем случае, мы показываем, что из неприводимости искомых алгебраических инвариантов следует равенство $N_2 = 1$. Аналогично исследуется случай $N_2 = 2N_1$. В выражениях (3.335) и (3.336) величины g_1 и g_2 или являются постоянными, или зависят от параметров исходной системы и не зависят от чисел N_1 и N_2.

Собственные значения алгебраических инвариантов могут быть найдены с помощью соотношения (3.13). □

Замечание 1. Система Льенара пятой степени (3.327) с линейной функцией, описывающей трение, имеет не более двух различных неприводимых алгебраических инвариантов одновременно. Эти инварианты описываются пунктами 1 и 2 и существуют при выполнении ограничений:

1. $e = \dfrac{3\beta}{2}, \quad \delta = 0, \quad \sigma = \dfrac{3}{16}\beta^2, \quad \nu = 3;$
2. $e = \dfrac{3}{32}(16-\beta^2)\beta, \delta = \dfrac{3}{512}(\beta^2-16)\beta^3, \sigma = -\dfrac{3}{256}(3\beta^2+16)\beta^2, \nu = \dfrac{3}{4}\beta^2+3.$

В явном виде приведем соответствующие инварианты:

1. $F_1(x,y) = y - x^3 + x^2 + \dfrac{\beta}{4}x, \quad F_2(x,y) = y + x^3 + x^2 + \dfrac{\beta}{4}x;$
2. $F_1(x,y) = y - x^3 + x^2 + \dfrac{1}{16}(3\beta+4)x - \dfrac{1}{32}(\beta+4)\beta^2,$

   $F_2(x,y) = y + x^3 + x^2 + \dfrac{1}{16}(4-3\beta)x + \dfrac{1}{32}(\beta-4)\beta^2.$

Отметим, что построение алгебраических инвариантов пунктов 5 и 6 методами, отличными от метода рядов Пюизе, является сложной вычислительной задачей даже с использованием систем символьных вычислений.

Теорема 3.30. *Система Льенара пятой степени* (3.327) *с линейной функцией, описывающей трение, интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда параметры* $(\beta,\ \delta,\ \sigma,\ e)$ *принимают вид* $(0,\ 0,\ (9-\nu^2)/12,\ 0)$.

Доказательство. Используя Теорему 3.18, мы заключаем, что интегрируемая по Лиувиллю система (3.327) необходимо должна иметь алгебраические инварианты, разложения на множители которых в кольце $\mathbb{C}_\infty\{x\}[y]$ содержат ряды Пюизе каждого из семейств $y_\infty^{(l)}(x)$, где $l = 1$, 2. Пользуясь еще одним необходимым условием Теоремы 3.18, которое задается формулой (3.205), находим значение параметра β: $\beta = 0$. Предположим, что исследуемая система имеет только один неприводимый алгебраический инвариант. Из Теоремы 3.18 и предыдущих рассуждений следует, что $N_1 = N_2$. Соответственно, нас будут интересовать только неприводимые алгебраические инварианты четной степени относительно переменной y. Такие инварианты приведены в пунктах 3 и 4 Теоремы 3.29. Анализируя эти алгебраические инварианты, мы видим, что только инвариант пункта 3 удовлетворяет условию $\beta = 0$. Этот инвариант порождает следующий интегрирующий множитель Дарбу:

$$\begin{aligned} M(x,y) = \Bigg(y^2 + \left(2x^2+1-\frac{\nu}{3}\right)y - x^6 + \frac{1}{2}\left(\nu-1\right)x^4 \\ -\frac{1}{12}\left(\nu+1\right)\left(\nu-3\right)x^2 + \frac{1}{216}(\nu+3)(\nu-3)^2\Bigg)^{-\frac{5}{6}} \end{aligned} \tag{3.337}$$

Требуя чтобы в условиях пункта 4 выполнялось также $\beta = 0$, мы приходим к подсистеме системы (3.327), соответствующей значениям параметра пункта 3 с дополнительным ограничением.

Далее предположим, что изучаемая система одновременно имеет два различных неприводимых алгебраических инварианта. С помощью Замечания 1 к Теореме 3.29 и условия $\beta = 0$ можно заключить, что новые интегрируемые подсистемы не существуют. □

Найдем первый интеграл Лиувилля, соответствующий интегрирующему множителю (3.337). Этот первый интеграл задан выражением (3.216), где необходимо положить

$$l = 1, \quad k = 3, \quad \beta = -\frac{1}{8}, \quad w(x) = 2x^2 + 1 - \frac{\nu}{3}. \tag{3.338}$$

Лемма 3.17. *Система Льенара пятой степени (3.327) с линейной функцией, описывающей трение, имеет неавтономный последний множитель Дарбу – Якоби тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих ограничений:*

1. $e = \dfrac{3\beta}{2}, \qquad \delta = 0, \qquad \sigma = \dfrac{3}{16}\beta^2, \qquad \nu = 3;$
2. $e = \dfrac{3}{32}(16-\beta^2)\beta$, $\delta = \dfrac{3}{512}(\beta^2-16)\beta^3$, $\sigma = -\dfrac{3}{256}(3\beta^2+16)\beta^2$, $\nu = \dfrac{3}{4}\beta^2+3;$
3. $e = \dfrac{3}{1024}\beta\left(512-5\beta^2\right)$, $\delta = -\dfrac{3}{262144}\beta^3\left(\beta^2+1280\right)$,
   $\sigma = \dfrac{3}{65536}\beta^2\left(2816+15\beta^2\right)$, $\nu = \dfrac{15}{128}\beta^2+3.$

Соответствующие последние множители Дарбу – Якоби принимают вид

1. $M(x,y,t) = \exp\left[-\dfrac{\beta}{4}t\right]\left(y - x^3 + x^2 + \dfrac{\beta}{4}x\right)^{-\frac{5}{6}}\left(y + x^3 + x^2 + \dfrac{\beta}{4}x\right)^{-\frac{5}{6}};$
2. $M(x,y,t) = \exp\left[-\dfrac{\beta}{4}t\right]\left(y - x^3 + x^2 + \dfrac{1}{16}(3\beta+4)x - \dfrac{1}{32}(\beta+4)\beta^2\right)^{-\frac{5}{6}}$
   $\times\left(y + x^3 + x^2 + \dfrac{1}{16}(4-3\beta)x + \dfrac{1}{32}(\beta-4)\beta^2\right)^{-\frac{5}{6}};$
3. $M(x,y,t) = \exp\left[-\dfrac{\beta}{4}t\right]\left(y^2 + \left(2x^2 + \dfrac{1}{2}\beta x - \dfrac{5}{128}\beta^2\right)y - x^6\right.$
   $+\left(\dfrac{15}{256}\beta^2+1\right)x^4 - \dfrac{1}{512}\beta\left(5\beta^2-256\right)x^3 + \dfrac{3}{65536}\beta^2\left(512+15\beta^2\right)x^2$
   $\left.-\dfrac{1}{131072}\beta^3\left(1280+3\beta^2\right)x + \dfrac{5}{16777216}\beta^4\left(\beta^2+1280\right)\right)^{-\frac{5}{6}}.$

Эта лемма может быть доказана непосредственными вычислениями с использованием общих результатов Теоремы 3.29 и Леммы 3.15.

3.7 Система Льенара четвертой степени с квадратичной функцией, описывающей трение

В этом разделе мы покажем, что необходимые и достаточные условия интегрируемости по Лиувиллю, полученные в Разделе 3.2, могут использоваться для классификации интегрируемых подсемейств полиномиальных систем Льенара без предварительной классификации инвариантов. В качестве примера рассмотрим систему Льенара (3.1) при ограничениях $\deg f = 2$ и $\deg g = 4$:

$$x_t = y,\, y_t = -(\zeta x^2 + \beta x + \alpha)y - (\varepsilon x^4 + \xi x^3 + e x^2 + \sigma x + \delta),\, \zeta\varepsilon \neq 0. \quad (3.339)$$

Используя преобразования поворота, подобия и параллельного переноса, мы можем без ограничения общности положить $\zeta = 3$, $\varepsilon = -3$ и $\beta = 0$. Далее будем работать с системой

$$x_t = y, \quad y_t = -(3x^2 + \alpha)y + 3x^4 - \xi x^3 - e x^2 - \sigma x - \delta, \quad \zeta\varepsilon \neq 0, \quad (3.340)$$

где все параметры предполагаются комплекснозначными. Соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение Льенара принимает вид

$$x_{tt} + (3x^2 + \alpha)x_t - 3x^4 + \xi x^3 + e x^2 + \sigma x + \delta = 0. \quad (3.341)$$

Множество всех неприводимых алгебраических инвариантов системы (3.340) содержит более 25 элементов. В явном виде приведем неприводимый алгебраический инвариант наибольшей степени. Этот инвариант и его собственное значение выглядят следующим образом:

$$
\begin{gathered}
F(x,y) = y^4 + \left(3x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{2775}{4}x - \frac{8755}{8}\right) y^3 + \frac{2x+3}{64} \\
\times \left(96x^5 + 48x^4 - 45840x^3 - 46760x^2 + 5583550x + 8939175\right) y^2 \\
+\frac{(2x+3)^2}{512} (2x-33) \left(64x^6 + 960x^5 - 34320x^4 - 543200x^3\right. \\
\left.+4392700x^2 + 80253500x + 116606625\right) y - \frac{(2x+3)^3}{2048} \\
\times \left(4\,x^2 + 120\,x - 2565\right) \left(64x^6 + 960\,x^5 - 34320\,x^4 - 543200\,x^3\right. \\
\left.+4392700\,x^2 + 80253500\,x + 116606625\right), \\
\lambda(x,y) = -3x^2 + 7x + \frac{2805}{4}.
\end{gathered}
\tag{3.342}
$$

Алгебраический инвариант (3.342) имеет степень 4 относительно переменной y и существует при выполнении ограничений

$$
\alpha = -\frac{1395}{4}, \quad \xi = -137, \quad \sigma = \frac{112905}{4}, \quad \delta = \frac{654075}{16}, \quad e = 450 \tag{3.343}
$$

на параметры исходной системы. В научной литературе встречаются ошибочные утверждения о том, что система Льенара (3.340) не может иметь неприводимых алгебраических инвариантов таких степеней [127]. Можно доказать, что степени неприводимых алгебраических инвариантов системы (3.340) ограничены сверху числом 11 и эта оценка является точной. Отметим, что инвариант (3.342) непросто построить методом неопределенных коэффициентов или методом Лагутинского. Мы заключаем, что метод рядов Пюизе позволяет выполнять сложные вычисления, а также находить решение проблемы Пуанкаре для многопараметрических дифференциальных систем, имеющих неприводимые алгебраические инварианты высоких степеней. Далее решим проблему интегрируемости по Лиувиллю для системы (3.340).

Теорема 3.31. *Система Льенара четвертой степени* (3.340) *с квадратичной функцией, описывающей трение, интегрируема по Лиувиллю тогда и* *только тогда, когда выполнено одно из условий*

$$\begin{aligned} I: \quad (\alpha, \xi, \delta, \sigma, e) &= \left(-\frac{25}{12}, -7, \frac{125}{432}, -\frac{25}{36}, -5\right); \\ II: \quad (\alpha, \xi, \delta, \sigma, e) &= \left(-\frac{61}{12}, -7, \frac{3905}{432}, \frac{623}{36}, 4\right). \end{aligned} \tag{3.344}$$

Соответствующие интегрирующие множители Дарбу принимают вид

$$\begin{aligned} I: \quad M(x,y) &= \frac{1}{\left(y + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{25}{216}\right)^{\frac{2}{3}} \left(y - x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{25}{36}\right)}; \\ II: \quad M(x,y) &= \frac{\left(y + x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{31}{12}x - \frac{781}{216}\right)^{\frac{1}{3}}}{y^2 + \frac{(6x+5)(6x-13)(6x+11)y}{216} - \frac{(6x-13)(6x+11)^2(6x+5)^2}{7776}}. \end{aligned} \tag{3.345}$$

Доказательство. Воспользуемся результатами Теорем 3.2 и 3.10. Ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, представленные в соотношении (3.14), в случае системы (3.340) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} y_\infty^{(1)}(x) &= -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \left(\xi - \alpha + \frac{9}{2}\right)x + b_3 + \sum_{l=1}^{+\infty} b_{l+3}x^{-l}; \\ y_\infty^{(2)}(x) &= x^2 - \frac{1}{3}(\xi + 2)x + \frac{1}{3}(\xi + 2 - \alpha - e) + \sum_{l=1}^{+\infty} a_{l+2}x^{-l}. \end{aligned} \tag{3.346}$$

Ряд Пюизе $y_\infty^{(1)}(x)$ имеет единственный произвольный коэффициент b_3 и существует при выполнении условия $e = 3(27 + 6\xi - 4\alpha)/4$. Коэффициенты ряда Пюизе $y_\infty^{(2)}(x)$ определяются единственным образом. Отметим, что для коэффициентов ряда $y_\infty^{(2)}(x)$ мы используем обозначения, отличные от обозначений Теоремы 3.2. Ряд $y_\infty^{(1)}(x)$ обрывается на мономе с нулевым показателем степени при выполнении условия

$$\delta = \frac{1}{24}(2\xi + 9)(18\alpha + 4\xi\alpha - 4\sigma - 4\xi^2 - 36\xi - 81). \tag{3.347}$$

Мы заключаем, что система (3.340) имеет неприводимый алгебраический инвариант $F_1(x,y)$ Теоремы 3.10, если $e = 3(27 + 6\xi - 4\alpha)/4$ и параметр δ определяется равенством (3.347). Этот инвариант и его собственное значение представляются в виде

$$F_1(x,y) = y + x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \left(\xi - \alpha + \frac{9}{2}\right)x - \frac{1}{3}(\sigma + \xi^2 - \xi\alpha)$$
$$-\frac{1}{4}(27 + 12\xi - 6\alpha), \quad \lambda_1(x,y) = 3x - \xi - \frac{9}{2}. \tag{3.348}$$

Условие (3.59) дает следующее ограничение: $\xi = -7$. Далее с помощью Теоремы 3.1 будем искать неприводимый алгебраический инвариант, который существует одновременной с инвариантом (3.348) и задан соотношением (3.12), где $k = 1$ и $N \in \mathbb{N}$. В результате мы находим значения параметров, как представлено в выражении (3.344). Соответствующий инвариант принимает вид

$$(I): \quad F_2(x,y) = y - x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{25}{36}, \quad \lambda_2(x,y) = -3x^2 - 2x + \frac{5}{12};$$
$$(II): \quad F_2(x,y) = y^2 + \frac{(6x+5)(6x-13)(6x+11)\,y}{216} - \frac{(6x-13)}{7776}$$
$$\times (6x+11)^2(6x+5)^2, \quad \lambda_2(x,y) = -3x^2 + x + \frac{71}{12}. \tag{3.349}$$

Используя формулу (3.60), мы получаем явные представления интегрирующих множителей Дарбу (3.345). □

В случае (I) первый интеграл Лиувилля задан выражением (3.73), где необходимо положить

$$l = 2, \quad k = 3, \quad \beta = -1, \quad v(x) = x + \frac{5}{6}. \tag{3.350}$$

В случае (II) первый интеграл Лиувилля выглядит следующим образом:

$$I(x,y) = \frac{\sqrt{w(x)}}{w(x)} \sum_{l=0}^{2} \left(\left\{ \sqrt{w(x)} - v(x) \right\} U(x) \ln\left(z^{\frac{1}{3}} - U(x) \exp\left(\frac{2\pi l i}{3}\right)\right)\right.$$
$$\left. + \left\{ \sqrt{w(x)} + v(x) \right\} V(x) \ln\left(z^{\frac{1}{3}} - V(x) \exp\left(\frac{2\pi l i}{3}\right)\right)\right) \exp\left(\frac{2\pi l i}{3}\right) + 6z^{\frac{1}{3}},$$

где мы ввели обозначения $z = y + u(x)$ и

$$U(x) = \left\{ u(x) - v(x) + \sqrt{w(x)} \right\}^{\frac{1}{3}}, V(x) = \left\{ u(x) - v(x) - \sqrt{w(x)} \right\}^{\frac{1}{3}}.$$

Многочлены $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ принимают вид

$$u(x) = \frac{(6x+11)\left(36x^2-12x-71\right)}{216}, \quad v(x) = \frac{(6x+5)(6x-13)(6x+11)}{432},$$
$$w(x) = \frac{(6x-13)(6x+11)^3(6x+5)^2}{186624}.$$

В этом разделе мы продемонстрировали, что метод рядов Пюизе существенно упрощает классификацию интегрируемых многопараметрических дифференциальных систем и уравнений.

3.8 Система Льенара пятой степени с кубической функцией, описывающей трение

Применим теорию интегрируемости по Пюизе для исследования полиномиальной системы Льенара (3.1), удовлетворяющей ограничениям $\deg f = 3$ и $\deg g = 5$. Наша цель – показать, что метод, предложенный в Разделе 2.4, позволяет находить и классифицировать дифференциальные системы с первыми интегралами, не являющимися функциями Лиувилля. После применения преобразований поворота, подобия и параллельного переноса систему Льенара (3.1), при ограничениях $\deg f = 3$ и $\deg g = 5$ можно представить в виде

$$x_t = y, \quad y_t = -(4x^3+\beta x+\alpha)y + 4x^5 - \mu x^4 - \xi x^3 - ex^2 - \sigma x - \delta, \qquad (3.351)$$

где все параметры принадлежат полю $\mathbb{C}$. Эта система относится к семейству (A). Системе (3.351) соответствует следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$x_{tt} + (4x^3+\beta x+\alpha)x_t - 4x^5 + \mu x^4 + \xi x^3 + ex^2 + \sigma x + \delta = 0. \qquad (3.352)$$

Заметим, что число рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, удовлетворяющих неавтономной редукции уравнения (3.351), бесконечно. Для удобства введем обратимую замену переменных, которая преобразует соответствующее неавтономное обыкновенное дифференциальное уравнение в уравнение со свойством конечности. Такая замена была предложена в Разделе 3.1 и имеет вид

$$x = s, \quad y = z - x^4 - \left(\frac{\beta}{2} + 2\right) x^2 + (\mu - \alpha)x + \frac{\sigma}{4}. \tag{3.353}$$

Дифференциальная система в переменных x и z выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} x_t &= z - x^4 - \left(\frac{\beta}{2} + 2\right) x^2 + (\mu - \alpha)x + \frac{\sigma}{4}, \\ z_t &= (4x - \mu)z - (2\beta + \xi + 8)x^3 + \left(\frac{1}{2}\mu\beta + 6\mu - 4\alpha - e\right) x^2 \\ &\qquad + \mu(\alpha - \mu)x - \frac{1}{4}\mu\sigma - \delta, \end{aligned} \tag{3.354}$$

где мы используем старые обозначения для переменной s. Введем в рассмотрение следующие многочлены относительно переменной x:

$$\begin{aligned} G_1(x, z) &= x^2 - 2z\partial_z \ln I_\nu(\sqrt{z}) + \frac{1}{4}\beta + 1, \quad \nu = \frac{1}{4}\sqrt{(\beta+4)^2 + 4\sigma} \\ G_2(x, z) &= x^2 - 2z\partial_z \ln K_\nu(\sqrt{z}) + \frac{1}{4}\beta + 1, \quad \nu = \frac{1}{4}\sqrt{(\beta+4)^2 + 4\sigma}. \end{aligned} \tag{3.355}$$

Символами $I_\nu(\sqrt{z})$ и $K_\nu(\sqrt{z})$ обозначим модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Пусть $M(x, z)$ является интегрирующим множителем системы (3.354). Выражение $M^{-1}(x, z) = 1/M(x, z)$ принято называть обратным интегрирующим множителем соответствующей системы. Обратный интегрирующий множитель $M^{-1}(x, z)$ удовлетворяет линейному уравнению в частных производных $\mathcal{X}_{x,z} M^{-1}(x, z) = \operatorname{div} \mathcal{X}_{x,z} M^{-1}(x, z)$, где $\mathcal{X}_{x,z}$ – векторное поле системы (3.354).

Теорема 3.32. *Следующие утверждения справедливы для системы* (3.354).

1. *Система* (3.354) *интегрируема по Пюизе в окрестности прямой* $\{(x, \infty), x \in \overline{\mathbb{C}}\}$ *тогда и только тогда, когда параметры* $(\alpha, \delta, \mu, \xi, e)$ *принимают вид* $(0, 0, 0, -2\beta - 8, 0)$*, а параметры* β *и* σ *– произвольны.*

2. *Первый интеграл* $I(x, y)$ *и обратный интегрирующий множитель* $M^{-1}(x, z)$ *в интегрируемом по Пюизе случае выглядят следующим образом:*

$$
\begin{gathered}
I(x, y) = \frac{I_\nu(\sqrt{z})G_1(x, z)}{K_\nu(\sqrt{z})G_2(x, z)}, \\
M^{-1}(x, z) = zI_\nu(\sqrt{z})K_\nu(\sqrt{z})G_1(x, z)G_2(x, z).
\end{gathered}
\tag{3.356}
$$

3. *Система* (3.354) *интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда в дополнение к условиям пункта* 1 *выполнено ограничение*

$$
\sigma = \frac{1}{4}(4L + \beta + 2)(4L - \beta - 6), \quad L \in \mathbb{N}. \tag{3.357}
$$

Первый интеграл Лиувилля и обратный интегрирующий множитель определяются формулами (3.356)*, где необходимо положить* $\nu = (2L-1)/2$.

Доказательство. Предположим, что переменная x является зависимой, а переменная z – независимой. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$
\begin{gathered}
\left\{(2\beta + \xi + 8)x^3 - \left(\frac{1}{2}\mu\beta + 6\mu - 4\alpha - e\right)x^2 - \{\mu(\alpha - \mu) + 4z\}x \right. \\
\left. +\mu z + \frac{1}{4}\mu\sigma + \delta\right\} x_z - x^4 - \left(\frac{\beta}{2} + 2\right)x^2 - (\alpha - \mu)x + z + \frac{\sigma}{4} = 0,
\end{gathered}
\tag{3.358}
$$

соответствующее системе (3.354). Для этого уравнения существует единственный доминантный баланс и укороченное уравнение $x^4(z) - z = 0$, которые порождают ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$. Исследуемый баланс не имеет показателей Ковалевской. Таким образом, ровно четыре различных ряда Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{z\}$ удовлетворяют уравнению (3.358). Эти ряды имеют вид

$$
x_\infty^{(j)}(z) = \sum_{l=0}^{+\infty} b_l^{(j)} z^{\frac{1-l}{4}}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{3.359}
$$

где $b_0^{(j)}$, $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ – различные корни уравнения $b_0^4 - 1 = 0$. Из Теоремы 2.9 следует, что система (3.354) имеет четыре различных элементарных локальных инварианта $x - x_{\infty}^{(j)}(z) = 0$, $j = 1, 2, 3, 4$. Собственные значения $\lambda(x, z) \in \mathbb{C}_{\infty}\{z\}[x]$ этих инвариантов вычисляем с помощью Теоремы 2.11. В результате находим

$$\lambda_j(x, z) = -x^3 + \left(\omega \partial_z x_{\infty}^{(j)}(z) - x_{\infty}^{(j)}(z)\right) x^2 + A_1(x)x + A_0(x), \qquad (3.360)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
&A_1(x) = \left\{4\alpha - 6\mu - \frac{1}{2}\mu\beta + e + \omega x_{\infty}^{(j)}(z)\right\} \partial_z x_{\infty}^{(j)}(z) - \frac{1}{2}\beta - 2 - \left\{x_{\infty}^{(j)}(z)\right\}^2, \\
&A_0(x) = \left(\omega \left\{x_{\infty}^{(j)}(z)\right\}^2 + \left(4\alpha - 6\mu - \frac{1}{2}\mu\beta + e\right) x_{\infty}^{(j)}(z) + \mu^2 - \mu\alpha - 4z\right) \\
&\times \partial_z x_{\infty}^{(j)}(z) - \left\{x_{\infty}^{(j)}(z)\right\}^3 - \left(\frac{1}{2}\beta + 2\right) x_{\infty}^{(j)}(z) + \mu - \alpha, \quad \omega = 2\beta + 8 + \xi.
\end{aligned}$$

Поскольку не выполнено необходимое условие Теоремы 2.13, мы видим, что исследуемая система не имеет элементарных локальных экспоненциальных инвариантов вида $E(x, z) = \exp[u_j(x, z)/\{x - x_{\infty}^{(j)}(z)\}^{n_j}]$, где $u_j(x, z) \in \mathbb{C}_{\infty}\{z\}[x]$ и $n_j \in \mathbb{N}$.

Пусть $E(x, z) = \exp[v_l(z)x^l]$, $v_l(z) \in \mathbb{C}_{\infty}\{z\}$, $l \in \mathbb{N}_0$ является элементарным локальным экспоненциальным инвариантом системы (3.354). Обозначим собственное значение этого инварианта символом $\varrho_l(x, z) \in \mathbb{C}_{\infty}\{z\}[x]$. Несложно показать, что степень относительно переменной x многочлена Пюизе $\varrho_l(x, z)$ равна $l + 3$. Вычисляя дивергенцию векторного поля, соответствующего системе (3.354), находим $\mathrm{div}\mathcal{X}_{x,z} = -(4x^3 + \beta x + \alpha)$. Следовательно, только элементарный локальный экспоненциальный инвариант $E(x, z) = \exp[v_0(z)]$ может вносит вклад в интегрируемость по Пюизе в окрестности прямой $\{(x, \infty),\ x \in \overline{\mathbb{C}}\}$. Используя проведенный выше анализ и Теорему 2.14, мы заключаем, что система (3.354) интегрируема по Пюизе в окрестности прямой $\{(x, \infty),\ x \in \overline{\mathbb{C}}\}$ тогда и только тогда, когда она имеет интегрирующий множитель

$$M(x,z)=z^{d_0}h(z)\exp[v_0(z)]\prod_{j=1}^{4}\left\{x-x_{\infty}^{(j)}(z)\right\}^{d_j},\tag{3.361}$$
$$d_j\in\mathbb{C},\quad j=0,\dots 4,\quad h(z)\in\mathbb{C}_{\infty}\{z\}.$$

Собственное значение локального инварианта $U(z)=z^{d_0}h(z)\exp[v_0(z)]$ может быть представлено в виде

$$K(x,z)=\left\{(4x-\mu)z-\omega x^3+\left(\frac{1}{2}\mu\beta+6\mu-4\alpha-e\right)x^2\right.$$
$$\left.+\mu(\alpha-\mu)x-\frac{1}{4}\mu\sigma-\delta\right\}V(z),\quad V(z)\in\mathbb{C}_{\infty}\{z\}.\tag{3.362}$$

Анализируя структуру многочленов Пюизе $\lambda_j(x,z)$ и $\mathrm{div}\mathcal{X}_{x,z}=-(4x^3+\beta x+\alpha)$, которые представляют собой ряды Пюизе, полагаем

$$V(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}h_kz^{-\frac{2+k}{4}}.\tag{3.363}$$

Используя соотношение $U(z)=\exp[\partial_z^{-1}V(z)]$, мы находим локальный инвариант $U(z)=z^{d_0}h(z)\exp[v_0(z)]$. Он принимает вид

$$U(z)=z^{h_2}\exp\left[2h_0z^{\frac{1}{2}}+4h_1z^{\frac{1}{4}}\right]\left(1-4h_3z^{-\frac{1}{4}}+o\left(z^{-\frac{1}{4}}\right)\right).\tag{3.364}$$

Условие (2.60) в нашем случае выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{4}d_j\lambda_j(x,z)+K(x,z)=4x^3+\beta x+\alpha.\tag{3.365}$$

Приравняем в этом равенстве коэффициенты, стоящие при мономах $x^lz^{\frac{k}{4}}$, $l\in\{0,1,2,3\}$. Алгебраическая подсистема, построенная на основе десяти первых нетривиальных уравнений не совместна, если не выполнены условия пункта 1 настоящей теоремы. Мы заключаем, что система (3.354) при $(\alpha,\delta,\mu,\xi,e)\neq(0,0,0,-2\beta-8,0)$ не интегрируема по Пюизе в окрестности прямой $\{(x,\infty)$, $x\in\overline{\mathbb{C}}\}$. Поскольку интегрируемая по Лиувиллю дифференциальная система должна быть интегрируема по Пюизе в окрестности любой прямой, мы видим, что рассматриваемая подсистема также не интегрируема по Лиувиллю.

Далее положим $(\alpha, \delta, \mu, \xi, e) = (0, 0, 0, -2\beta - 8, 0)$. Решение исследованной выше алгебраической подсистемы не единственно. Это означает, что интегрирующий множитель вида (3.361) также может быть не единственным. В частности, одно из решений имеет вид $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = -1$. Существование этого решения позволяет нам сделать предположение о том, что изучаемая подсистема имеет обратный интегрирующий множитель

$$M^{-1}(x, z) = \sum_{j=0}^{4} g_j(z) x^j. \tag{3.366}$$

Подставляя это представление $F(x, z) = M^{-1}(x, z)$ в уравнение в частных производных

$$\begin{gathered} \left(z - x^4 - \frac{1}{2}(\beta + 4)\, x^2 + \frac{1}{4}\sigma\right) F_x(x, z) + 4xzF_z(x, z) \\ +(4x^3 + \beta x)F(x, z) = 0 \end{gathered} \tag{3.367}$$

и приравнивая нулю коэффициенты при мономах x^j, где $1 \leq j \leq 6$, мы получаем соотношения

$$\begin{aligned} &g_3(z) = 0, \quad q_2(z) = -2zg_{4,z} + \frac{1}{2}(\beta + 8)g_4, \quad g_1(z) = 0, \\ &g_0(z) = 2z^2 g_{4,zz} - \frac{1}{2}(\beta + 8)zg_{4,z} + \frac{1}{4}(2\beta - \sigma + 16 - 4z)g_4 \end{aligned} \tag{3.368}$$

и обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $g_4(z)$:

$$16z^3 g_{4,zzz} - (\beta^2 + 8\beta + 4\sigma + 16z)zg_{4,z} + (8z + 4\sigma + \beta^2 + 8\beta)g_4 = 0. \tag{3.369}$$

Это уравнение имеет решение $g_4(z) = zI_\nu(\sqrt{z})K_\nu(\sqrt{z})$, которому соответствует обратный интегрирующий множитель и первый интеграл (3.356). Раскладывая коэффициенты этого обратного интегрирующего множителя $M^{-1}(x, z)$ в ряды Пюизе с центром в точке $z = \infty$, мы получаем локальный интегрирующий множитель (3.361), где $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = -1$. Хорошо известно, что модифицированные функции Бесселя являются функциями Лиувилля, и даже элементарными функциями, тогда и только тогда, когда порядок ν принимает полуцелые значения. Полагая $\nu = (2L-1)/2$, мы получаем условия пункта 3. Для того чтобы исключить совпадающие случаи, мы предполагаем, что L не целое, а натуральное число. $\square$

Замечание 1. Обратный интегрирующий множитель $M^{-1}(x,z)$, заданный выражением (3.356), не является функцией Дарбу даже в случае $\nu = (2L-1)/2$, $L \in \mathbb{N}$. Для нахождения интегрирующего множителя Дарбу, необходимо провести классификацию неприводимых алгебраических инвариантов при заданных ограничениях на параметры. Интегрируемые по Лиувиллю подсистемы для систем (3.351) и (3.354) имеют неприводимые алгебраические инварианты, степени которых зависят от параметров β и σ. Явные представления этих инвариантов можно найти, используя алгоритм, описанный в Разделе 3.3.

Замечание 2. Выражения (3.355) определяют неалгебраические инвариантные кривые $G_1(x,z)=0$ и $G_2(x,z)=0$ системы (3.354). Эти кривые имеют неалгебраические собственные значения

$$\begin{aligned} \Lambda_1(x,z) &= -2x^3 - \frac{1}{2}(8z\partial_z \ln I_\nu(\sqrt{z}) + \beta + 4)x, \\ \Lambda_2(x,z) &= -2x^3 - \frac{1}{2}(8z\partial_z \ln K_\nu(\sqrt{z}) + \beta + 4)x \end{aligned} \tag{3.370}$$

соответственно.

Не существует степенных рядов с центром в точке $z = \infty$, которые бы удовлетворяли уравнению (3.358). Следовательно, нетрудно показать, что система (3.354) не интегрируема по Вейерштрассу в окрестности прямой $\{(x,\infty),\ x \in \overline{\mathbb{C}}\}$.

Преобразование, заданное соотношениями (3.353), позволяет нам перенести результаты Теоремы 3.32 на систему (3.351). Также отметим, что интегрируемую подсистему Теоремы 3.32 несложно найти и прямым методом.

Действительно, полагая $(\alpha, \delta, \mu, \xi, e) = (0, 0, 0, -2\beta - 8, 0)$ в уравнении (3.358) и вводя новую зависимую функцию $x(z) = \sqrt{\psi(z)}$, мы получаем дифференциальное уравнение Риккати

$$8z\psi_z + 4\psi^2 + 2(\beta + 4)\psi - 4z - \sigma = 0. \tag{3.371}$$

Это уравнение может быть сведено к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка для модифицированных функций Бесселя. Однако, проблема доказательства неинтегрируемости уравнения (3.358) и соответствующей системы (3.351) по Пюизе или Лиувиллю при других значениях параметров является нетривиальной.

3.9 Алгебраические предельные циклы

Пусть многочлены $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в системе (1.1) имеют вещественные коэффициенты. *Предельным циклом* системы дифференциальных уравнений (1.1) называют изолированную периодическую траекторию на фазовой плоскости этой системы. Символом $\mathbb{R}[x, y]$ обозначим кольцо многочленов от двух переменных с коэффициентами из поля $\mathbb{R}$. Предельный цикл является алгебраическим, если он задан овалом неприводимой инвариантной алгебраической кривой, определяемой многочленом из кольца $\mathbb{R}[x, y]$.

Вторая часть знаменитой 16-*ой проблемы Гильберта* состоит в нахождении взаимного расположения и числа предельных циклов системы дифференциальных уравнений на плоскости вида (1.1) с коэффициентами из поля $\mathbb{R}$. Поскольку метод рядов Пюизе позволяет выполнять классификацию неприводимых инвариантных алгебраических кривых, то данный метод может быть использован для решения этой проблемы в алгебраической постановке [48]. Алгебраическая постановка второй части 16-ой проблемы Гильберта заключается в поиске взаимного расположения и числа алгебраических предельных циклов. В настоящее время верхние оценки для числа алгебраических предельных циклов получены при определенных ограничениях на исследуемую дифференциальную систему или инвариантные алгебраические кривые, содержащие предельные циклы. Например, Х. Чжан (X. Zhang) нашел верхнюю оценку при условии, что исследуемая системы (1.1) имеет инвариантные алгебраические кривые, особые точки которых исчерпываются узловыми точками [184]. Более подробно подобные результаты обсуждаются в обзоре [185]. Согласно теореме Гарнака, число связных компонент вещественной алгебраический кривой ограничено числом $(m-1)(m-2)/2+1$, где m – это степень неприводимого многочлена, порождающего кривую. М. В. Долов и В. В. Косарев показали [20], что число попарно различных неприводимых инвариантных алгебраических кривых, определяющих предельные циклы полиномиальной системы (1.1) ограничено числом $d(d+1)/2$. Здесь число d представляет собой степень рассматриваемой системы. Следовательно, если для некоторого семейства систем вида (1.1) мы можем решить проблему Пуанкаре, т.е. ограничить сверху степени неприводимых инвариантных алгебраических кривых, то мы можем решить 16-ю проблему Гильберта в алгебраической постановке, по крайней мере в части поиска числа алгебраических предельных циклов. Стоит отметить, что изучение топологии многопараметрических алгебраических кривых высоких степеней и, в частности, изучение существования и взаимного расположения овалов является очень сложной задачей.

В предыдущих разделах мы классифицировали алгебраические инварианты и связанные с ними инвариантные алгебраические кривые для следующих дифференциальных систем Льенара:

1. система Гельмгольца – ван дер Поля (3.230);
2. обобщенная система Дуффинга – ван дер Поля (3.271);
3. обобщенная система Дуффинга (3.290);

4. система Льенара пятой степени (3.327) с линейной функцией, описывающей трение.

Решим 16-ую проблему Гильберта в алгебраической постановке для перечисленных выше систем Льенара. Далее все коэффициенты этих систем предполагаются вещественнозначными.

Дивергенция векторного поля, соответствующего обобщенной системе Дуффинга (3.290), постоянна. Простым следствием теоремы Бендиксона является отсутствие предельных циклов у этой системы. Перейдем к остальным системам из нашего списка.

Теорема 3.33. *Пусть все коэффициенты системы Гельмгольца – ван дер Поля* (3.230), *обобщенной системы Дуффинга – ван дер Поля* (3.271) *и системы Льенара пятой степени* (3.327) *с линейной функцией, описывающей трение, вещественны. Тогда эти системы не имеют алгебраических предельных циклов.*

Доказательство. Прежде всего, отметим, что инвариантные алгебраические кривые первой степени относительно переменной y не могут иметь овалов. Далее, если (алгебраический) предельный цикл существует, то он окружает хотя бы одну особую точку рассматриваемой системы. Все особые точки полиномиальных систем Льенара лежат на вещественной оси. Их x-координаты удовлетворяют уравнению $g(x) = 0$. Пусть x_0 является особой точкой, окруженной алгебраическим предельным циклом, тогда инвариантная алгебраическая кривая, содержащая этот цикл, должна пересекать ось абсцисс по меньшей мере в двух различных точках x_1 и x_2. Более того, x_1 и x_2 не могут являться особыми точками рассматриваемой системы. Без ограничения общности положим $x_1 < x_0$ и $x_0 < x_2$. Проверяя эти необходимые условия для всех инвариантных алгебраических кривых, заданных инвариантами Таблицы 3.3 и Теоремы 3.29, мы видим, что эти условия не удовлетворяются. Отметим, что мы должны рассматривать только отрицательные значения параметра ε при изучении алгебраических кривых $F_5(x, y) = 0$ и $F_6(x, y) = 0$ из Таблицы 3.3. Следовательно, обобщенная система Дуффинга – ван дер Поля (3.271) и система Льенара пятой степени (3.327) с линейной функцией, описывающей трение, не имеют алгебраических предельных циклов.

Нам осталось рассмотреть инвариантные алгебраические кривые системы Гельмгольца – ван дер Поля (3.230). Эта система является квадратичной. Если квадратичная дифференциальная система на плоскости имеет предельный цикл, то он окружает особую точку типа фокус этой системы [186]. Полагая $\sigma = -\varepsilon^2$ и $\delta = -(2N - 3)(2N + 1)\varepsilon^3/16$, $N \in \mathbb{N}$, мы вычисляем особые точки системы и собственные значения матрицы Якоби в особых точках. В результате находим

$$\begin{aligned} &(x, y) = \frac{1}{4}\varepsilon\,(1 + 2N, 0): \quad \Lambda_1 = -\varepsilon, \quad \Lambda_2 = -\left(N - \frac{1}{2}\right)\varepsilon, \\ &(x, y) = \frac{1}{4}\varepsilon\,(3 - 2N, 0): \quad \Lambda_1 = -\varepsilon, \quad \Lambda_2 = \left(N - \frac{1}{2}\right)\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.372}$$

Мы заключаем, что система Гельмгольца – ван дер Поля (3.230) с инвариантными алгебраическими кривыми второй и более высоких степеней относительно переменной y не имеет фокусов. Следовательно у данного семейства систем нет предельных циклов, алгебраических и неалгебраических. □

Замечание 1. В случае гиперэллиптичесих инвариантных алгебраических кривых $(y - p(x))^2 - q(x) = 0$, где $p(x)$, $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, результат Теоремы 3.33 был получен ранее Х. Жолондеком (H. Żołądek) [127].

4 Инвариантные поверхности и интегрируемость двумерных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

4.1 Неавтономные алгебраические инвариантны и обобщенные первые интегралы Дарбу

Объектом исследования настоящей главы является следующая двумерная неавтономная система дифференциальных уравнений:

$$x_t = P(x, y, t), \quad y_t = Q(x, y, t), \quad P(x, y, t),\, Q(x, y, t) \in \mathbb{M}[x, y], \tag{4.1}$$

где $\mathbb{M}[x, y]$ – кольцо многочленов двух переменных с коэффициентами из поля мероморфных функций $\mathbb{M}$. Наша задача состоит в разработке метода нахождения неавтономных инвариантных многообразий системы (4.1). Поле $\mathbb{M}$ не является алгебраически замкнутым, что не очень удобно при работе с неавтономными инвариантами, задающими инвариантные многообразия. Алгебраическое замыкание поля $\mathbb{M}$ представляет собой поле алгеброидных функций, которое мы обозначим символом $\mathbb{A}$. Это поле может быть построено указанным ниже образом [41]. Во множестве всех рядов Пюизе вида

$$\sum_{l=0}^{+\infty} c_l t^{\frac{n_0+l}{n_1}}, \quad c_0 \neq 0, \quad c_l \in \mathbb{C}, \quad n_0 \in \mathbb{Z}, \quad n_1 \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

выделим подмножество рядов, которые, во-первых, сходятся в некоторой окрестности точки $t_0 = 0$ и, во-вторых, могут быть продолжены на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ до конечнозначных функций, не имеющих в $\mathbb{C}$ других особых точек, кроме алгебраических. В качестве окрестностей выше рассматриваются множества вида $\{t \in \mathbb{C} : 0 < |t| < \varepsilon\} \setminus \{t \in \mathbb{R} : 0 < t < \varepsilon\}$. Символом $\mathbb{A}[x, y]$ обозначим кольцо многочленов двух переменных с коэффициентами из поля $\mathbb{A}$. Элементы этого кольца будем называть обобщенными многочленами. Рассмотрим обобщенный многочлен $W(x, y, t) \in \mathbb{A}[x, y]$, заданный выражением

$$W(x,y,t) = \sum_{0 \le k_1 + k_2 \le M} w_{k_1,k_2}(t) x^{k_1} y^{k_2}, \quad w_{k_1,k_2}(t) \in \mathbb{A}. \tag{4.3}$$

Символом D_W обозначим область в $\mathbb{C}$, полученную в результате исключения нулей и особых точек коэффициентов $\{w_{k_1,k_2}(t)\}$. Число $M = \deg W(x, y, t_0)$, где $t_0 \in D_W$, назовем степенью обобщенного многочлена $W(x, y, t)$. Значение степени не зависит от выбора точки в D_W.

Исключим из $\mathbb{C}$ полюсы коэффициентов обобщенных многочленов $P(x, y, t)$ и $Q(x, y, t)$ и зададим в $\mathbb{C}^2 \times D$ векторное поле

$$\mathcal{X} = \frac{\partial}{\partial t} + P(x,y,t)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y,t)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{4.4}$$

связанное с системой (4.1). Открытое подмножество в $\mathbb{C}$, полученное после удаления полюсов мероморфных коэффициентов обобщенных многочленов $P(x, y, t)$ и $Q(x, y, t)$, обозначено символом D.

Определение 4.1. *Рассмотрим обобщенный многочлен $F(x, y, t) \in \mathbb{A}[x, y] \setminus \mathbb{A}$. Множество $F(x, y, t) = 0$ будем называть инвариантной поверхностью (или инвариантным многообразием) системы дифференциальных уравнений* (4.1) *и связанного с этой системой векторного поля $\mathcal{X}$, если существует обобщенный многочлен $\lambda(x, y, t) \in \mathbb{A}[x, y]$ такой, что выполнено условие $\mathcal{X}F = \lambda(x, y, t)F$, которое представляет собой линейное уравнение в частных производных*

$$F_t + P(x,y,t)F_x + Q(x,y,t)F_y = \lambda(x,y,t)F. \tag{4.5}$$

При этом обобщенный многочлен $\lambda(x, y, t)$ *назовем собственным значением (кофактором) инвариантной поверхности* $F = 0$ *(или инвариантного многообразия).*

Как и в автономном случае, нетрудно показать, что степень обобщенного многочлена $\lambda(x, y, t)$ не превосходит числа $d-1$, где d – это максимум степеней обобщенных многочленов $P(x, y, t)$ и $Q(x, y, t)$: $d = \max\{\deg P, \deg Q\}$. Обобщенный многочлен $F(x, y, t)$, удовлетворяющий уравнению (4.5), будем называть *неавтономным алгебраическим инвариантом* системы (4.1) и векторного поля $\mathcal{X}$. Многочлены $F(x, y, t)$ и $c(t)F(x, y, t)$, где $c(t) \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, считаем эквивалентными. В дальнейшем нас будет интересовать только один представитель из класса эквивалентности. Будем говорить, что неавтономный алгебраический инвариант $F(x, y, t)$ и инвариантная поверхность $F(x, y, t) = 0$ неприводимы, если обобщенный многочлен $F(x, y, t)$ неприводим в кольце $\mathbb{A}[x, y]$. *Собственным значением (кофактором)* неавтономного алгебраического инварианта назовем собственное значение (кофактор) соответствующей инвариантной поверхности $F = 0$.

Определение 4.2. *Пусть* $f(x, y, t)$ *и* $g(x, y, t)$ *являются взаимно простыми обобщенными многочленами из кольца* $\mathbb{A}[x, y]$. *Функцию вида* $E(x, y, t) = \exp[g(x, y, t)/f(x, y, t)]$ *будем называть неавтономным экспоненциальным инвариантом системы дифференциальных уравнений* (4.1) *и связанного с этой системой векторного поля* $\mathcal{X}$*, если существует обобщенный многочлен* $\varrho(x, y,\ t) \in \mathbb{A}[x, y]$ *такой, что функция* $E(x, y, t)$ *удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных*

$$E_t + P(x, y, t)E_x + Q(x, y, t)E_y = \varrho(x, y, t)E. \tag{4.6}$$

Обобщенный многочлен $\varrho(x, y, t)$ *назовем собственным значением (кофактором) неавтономного экспоненциального инварианта* $E(x,\ y, t)$.

Символом $\mathbb{A}(x, y)$ обозначим поле частных кольца $\mathbb{A}[x, y]$. Функцию вида

$$I(x, y, t) = f_1^{d_1} \dots f_K^{d_K} \exp[R(x, y, t)], \quad d_1, \dots, d_K \in \mathbb{C}, \quad K \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (4.7)$$

где $f_1(x, y, t)$, …, $f_K(x, y, t) \in \mathbb{A}[x, y]$ и $R(x, y, t) \in \mathbb{A}(x, y)$, называют *обобщенной функцией Дарбу*, см. [43, 45, 46, 187].

Далее дадим определение первого интеграла.

Определение 4.3. *Пусть U — это открытое подмножество ненулевой меры Лебега во множестве $\mathbb{C}^2 \times D$. Непостоянная функция $I(x, y, t)\colon U \to \mathbb{C}$ называется первым интегралом системы дифференциальных уравнений* (4.1) *и связанного с этой системой векторного поля $\mathcal{X}$, если она постоянна на всех интегральных кривых $(x(t), y(t), t)$ векторного поля $\mathcal{X}$, содержащихся в U.*

Множество непрерывно дифференцируемых функций на U обозначим $C^1(U)$. Если первый интеграл $I(x, y, t)$ принадлежит множеству $C^1(U)$, то функция $I(x, y, t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных $\mathcal{X}I = 0$. Две функции $I_1(x, y, t)$ и $I_2(x, y, t)$ из множества $C^1(U)$ являются независимыми на множестве U, если ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} I_{1,x} & I_{1,y} & I_{1,t} \\ I_{2,x} & I_{2,y} & I_{2,t} \end{pmatrix} \qquad (4.8)$$

равен 2, за исключением, возможно, подмножества нулевой меры Лебега в U. Если система дифференциальных уравнений (4.1) и векторное поле $\mathcal{X}$ имеют два независимых первых интеграла $I_1(x, y, t)$ и $I_2(x, y, t)$ на подмножестве $U \subseteq \mathbb{C}^2 \times D$, то эту систему и векторное поле называют *интегрируемыми.*

Будем говорить, что система дифференциальных уравнений (4.1) и векторное поле $\mathcal{X}$ *интегрируемы по Дарбу*, если рассматриваемая система и векторное поле имеют два независимых первых интеграла, являющихся обобщенными функциями Дарбу.

Теорема 4.1. *Обобщенная функция Дарбу вида* (4.7) *является первым интегралом дифференциальной системы* (4.1) *и векторного поля* $\mathcal{X}$ *тогда и только тогда, когда функция* $\exp[R(x,y,t)]$ *представляет собой неавтономный экспоненциальный инвариант и обобщенные многочлены* $f_1(x,y,t)$, …, $f_K(x,y,t)$ *представляют собой неавтономные алгебраические инварианты рассматриваемой системы и векторного поля* $\mathcal{X}$, *причем выполнено соотношение*

$$\sum_{k=1}^{K} d_k\lambda_k(x,y,t) + \varrho(x,y,t) = 0. \tag{4.9}$$

В этом выражении $\varrho(x,y,t)$ – *собственное значение неавтономного экспоненциального инварианта* $\exp[R(x,y,t)]$ *и* $\lambda_k(x,y,t)$ – *собственное значение неавтономного алгебраического инварианта* $f_k(x,y,t)$, *где* $1 \le k \le K$.

Доказательство этой теоремы можно найти в статьях [43–46]. В заключение настоящего раздела отметим, что любой неавтономный алгебраический инвариант $F(x,y,t) \in \mathbb{A}[x,y] \setminus \mathbb{A}[x]$ порождает неавтономное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка совместное с обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, соответствующим системе (4.1). Например, если система (4.1) выглядит следующим образом:

$$x_t = y + R(x,t), \qquad y_t = Q(x,y,t), \tag{4.10}$$

где $R(x,t) \in \mathbb{M}[x]$, $Q(x,y,t) \in \mathbb{M}[x,y]$, и имеет неавтономный алгебраический инвариант $F(x,y,t) \in \mathbb{A}[x,y] \setminus \mathbb{A}[x]$, то уравнение $F(x, x_t - R(x,t), t) = 0$ совместно с уравнением

$$x_{tt} - R_x(x,t)x_t - Q(x, x_t - R(x,t), t) - R_t(x,t) = 0. \tag{4.11}$$

В общем случае обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, соответствующее системе (4.1), может потерять полиномиальную зависимость относительно зависимой функции и ее производных.

4.2 Функциональные ряды Пюизе

Наша цель в настоящем разделе состоит в обобщении метода рядов Пюизе на неавтономный случай. Введем в рассмотрение функциональные ряды Пюизе, коэффициенты которых представляют собой алгеброидные функции из поля $\mathbb{A}$. Такие ряды будем называть обобщенными рядами Пюизе. Обобщенный ряд Пюизе с центром на элементе $x_0(t) \in \mathbb{A}$ имеет вид

$$y(x,t) = \sum_{l=0}^{+\infty} c_l(t)\{x - x_0(t)\}^{\frac{n_0+l}{n_1}}, \tag{4.12}$$

где $n_0 \in \mathbb{Z}$, $n_1 \in \mathbb{N}$, и коэффициенты $\{c_l(t)\}$ принадлежат полю $\mathbb{A}$. Без ограничения общности предполагаем, что число n_1 является взаимно простым с наибольшим общим делителем чисел $\{n_0 + l : c_l(t) \not\equiv 0,\ l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. В свою очередь, обобщенный ряд Пюизе с центром в точке $x = \infty$ выглядит следующим образом:

$$y(x,t) = \sum_{l=0}^{+\infty} b_l(t) x^{\frac{n_0-l}{n_1}}, \tag{4.13}$$

где $n_0 \in \mathbb{Z}$, $n_1 \in \mathbb{N}$ и коэффициенты $\{b_l(t)\}$ принадлежат полю $\mathbb{A}$. Опять будем предполагать, что число n_1 является взаимно простым с наибольшим общим делителем чисел $\{n_0 - l : b_l(t) \not\equiv 0,\ l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Число n_1 называют *индексом ветвления* соответствующего ряда. Множество всех обобщенных рядов Пюизе с центром на элементе $x_0(t) \in \mathbb{A}$ или в точке $x = \infty$ является полем. Обозначим эти поля символами $\mathbb{C}_{x_0(t)}\{x\}(\mathbb{A})$ и $\mathbb{C}_\infty\{x\}(\mathbb{A})$ соответственно. Несложно убедиться, что эти поля, снабженные операторами дифференцирования ∂_t и ∂_x, становятся дифференциальными полями.

Два обобщенных ряда Пюизе $y_1(x,t)$ и $y_2(x,t)$ из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}(\mathbb{A})$ будем называть *различными*, если выполнено условие $y_1(x,t) - y_2(x,t) \neq O_\infty$, где O_∞ – нулевой элемент поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}(\mathbb{A})$. Аналогично даем определение различных обобщенных рядов Пюизе с центром на элементе $x_0(t) \in \mathbb{A}$.

Для любого обобщенного многочлена из кольца $\mathbb{A}[x, y]$ справедлива обобщенная теорема Ньютона – Пюизе о разложении на множители над полем обобщенных рядов Пюизе с фиксированным центром [41].

Лемма 4.1. *Пусть обобщенный многочлен* $F(x, y, t) \in \mathbb{A}[x, y] \setminus \mathbb{A}[x]$ *является неавтономным алгебраическим инвариантом дифференциальной системы* (4.1) *и связанного с ней векторного поля* $\mathcal{X}$. *Рассмотрим обобщенный ряд Пюизе* $y(x, t)$ *из поля* $\mathbb{C}_\infty\{x\}(\mathbb{A})$ *такой, что этот ряд удовлетворяет уравнению* $F(x, y, t) = 0$. *Тогда ряд* $y(x, t)$ *также является решением следующего уравнения в частных производных*

$$y_t + P(x, y, t)y_x - Q(x, y, t) = 0. \tag{4.14}$$

Доказательство. Представим обобщенный многочлен $F(x, y, t)$ в виде произведения попарно различных неприводимых в кольце $\mathbb{A}[x, y]$ сомножителей: $F = f_1^{k_1} \ldots f_M^{k_M}$, где $f_m \in \mathbb{A}[x, y]$, $k_m \in \mathbb{N}$ и $1 \leq m \leq M$. Согласно условию теоремы, существует обобщенный многочлен $f_j(x, y, t)$, $1 \leq j \leq M$ такой, что выполнено $f_j(x, y(x, t), t) = 0$. Дифференцируя это уравнения по t и x, находим

$$\begin{gathered} f_{j,t}(x, y(x, t), t) + y_t f_{j,y}(x, y(x, t), t) = 0, \\ f_{j,x}(x, y(x, t), t) + y_x f_{j,y}(x, y(x, t), t) = 0. \end{gathered} \tag{4.15}$$

Несложно убедиться, что $f_j(x, y, t)$ является неавтономным алгебраическим инвариантом дифференциальной системы (4.1) и связанного с этой системой векторного поля $\mathcal{X}$. Следовательно, обобщенный многочлен $f_j(x, y, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$f_{j,t} + P(x, y, t)f_{j,x} + Q(x, y, t)f_{j,y} = \lambda_j(x, y, t)f_j, \tag{4.16}$$

где $\lambda_j(x, y, t) \in \mathbb{A}[x, y]$. Подставляя ряд $y = y(x, t)$ в это уравнение, находим

$$\begin{gathered} f_{j,t} + P(x, y(x, t), t)f_{j,x}(x, y(x, t), t) \\ +Q(x, y(x, t), t)f_{j,y}(x, y(x, t), t) = 0. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Далее отметим, что ряд $y(x,t)$ не может являться решением уравнения $f_{j,y}(x, y,t) = 0$. Действительно, предполагая противное, мы видим, что обобщенный многочлен $f_j(x,y,t)$ имеет кратные сомножители в кольце $\mathbb{A}[x,y]$. Этот факт противоречит неприводимости обобщенного многочлена $f_j(x,y,t)$. Таким образом, однородная система линейных алгебраических уравнений (4.15) и (4.17) относительно $f_{j,t}(x,y(x,t),t)$, $f_{j,x}(x,y(x,t),t)$ и $f_{j,y}(x,y(x,t),t)$ имеет нетривиальное решение. Значит, ее определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & y_t(x,t) \\ 0 & 1 & y_x(x,t) \\ 1 & P(x,y(x,t),t) & Q(x,y(x,t),t) \end{vmatrix} \tag{4.18}$$

равен нулю. Из этого факта следует справедливость уравнения (4.14). На этом мы заканчиваем доказательство. □

Аналогичная лемма справедлива и для обобщенных рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_{x_0(t)}\{x\}(\mathbb{A})$, где $x_0(t) \in \mathbb{A}$.

Лемма 4.2. *Пусть* $x_0(t)$ *является элементом поля* $\mathbb{A}$, *а обобщенный многочлен* $F(x,y,t) \in \mathbb{A}[x,y] \setminus \mathbb{A}[x]$ *представляет собой неавтономный алгебраический инвариант дифференциальной системы* (4.1) *и связанного с ней векторного поля* $\mathcal{X}$. *Рассмотрим обобщенный ряд Пюизе* $y(x,t)$ *из поля* $\mathbb{C}_{x_0(t)}\{x\}(\mathbb{A})$ *такой, что этот ряд удовлетворяет уравнению* $F(x,y,t) = 0$. *Тогда ряд* $y(x,t)$ *также является решением уравнения в частных производных* (4.14).

Пусть выражение $W(x,y,t) \in \mathbb{A}[x,y]$ представляет собой формальную сумму функциональных мономов $c(t)x^{q_1}y^{q_2}$ с ограниченными сверху степенями. Другими словами, предположим, что выполнено $c(t) \in \mathbb{A}$ и q_1, $q_2 \in \mathbb{Q}$ и $q_1 + q_2 \leq K$, где $K \in \mathbb{N}$. Введем оператор проектирования $\{W(x,y,t)\}_+$, результатом действия которого является сумма функциональных мономов выражения $W(x,y,t)$, имеющих целые неотрицательные степени: q_1, $q_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Мы видим, что проекция $\{W(x,y,t)\}_+$ определяет полиномиальную по отношению к переменным x и y часть выражения $W(x,y,t)$. Аналогично определяем проекцию $\{W(x,y,t)\}_- = W(x,y,t) - \{W(x,y,t)\}_+$, представляющую собой неполиномиальную часть выражения $W(x,y,t)$.

Нашим основным результатом относительно существования неавтономных алгебраических инвариантов дифференциальной системы (4.1) и связанного с ней векторного поля $\mathcal{X}$ является следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть обобщенный многочлен* $F(x,y,t) \in \mathbb{A}[x,y] \setminus \mathbb{A}[x]$ *степени* $N \in \mathbb{N}$ *относительно переменной* y *является неприводимым неавтономным алгебраическим инвариантом дифференциальной системы* (4.1) *и связанного с ней векторного поля* $\mathcal{X}$*. Тогда существуют обобщенный многочлен* $\mu(x,t) \in \mathbb{A}[x]$ *и попарно различные обобщенные ряды Пюизе* $y_{1,\infty}(x,t)$, …, $y_{N,\infty}(x,t)$ *из поля* $\mathbb{C}_\infty\{x\}$ $(\mathbb{A})$*, которые удовлетворяют уравнению* (4.14)*, такие, что* $F(x,y,t)$ *представляется в виде*

$$F(x,y,t) = \left\{\mu(x,t)\prod_{j=1}^{N}\{y - y_{j,\infty}(x,t)\}\right\}_+ . \tag{4.19}$$

Более того, значение параметра N *не превосходит числа различных обобщенных рядов Пюизе из поля* $\mathbb{C}_\infty\{x\}(\mathbb{A})$*, удовлетворяющих уравнению* (4.14)*, если это число конечно.*

Доказательство. Из обобщенной теоремы Ньютона – Пюизе [41] следует, что обобщенный многочлен $F(x,y,t)$ можно представить в виде

$$F(x,y,t) = \mu(x,t)\prod_{j=1}^{N}\{y - y_{j,\infty}(x,t)\}, \tag{4.20}$$

где $y_{1,\infty}(x,t)$, …, $y_{N,\infty}(x,t)$ – обобщенные ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}(\mathbb{A})$ и $\mu(x,t) \in \mathbb{A}[x]$. Пользуясь Леммой 4.1, мы видим, что обобщенные ряды Пюизе из представления (4.20) удовлетворяют уравнению (4.14). В силу того, что обобщенный многочлен $F(x, y, t)$ неприводим в кольце $\mathbb{A}[x, y]$, все эти ряды попарно различны. Далее заключаем, что неполиномиальная часть выражения (4.20) должна обращаться в нуль. В результате получаем соотношение (4.19).

Если число попарно различных рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}(\mathbb{A})$, которые удовлетворяют уравнению (4.14), конечно, то степень обобщенного многочлена $F(x, y, t)$ относительно переменной y ограничена этим числом. Действительно, пусть степень обобщенного многочлена $F(x, y, t)$ относительно переменной y превышает число таких рядов. Тогда обобщенный многочлен $F(x, y, t)$ приводим в кольце $\mathbb{A}[x, y]$. $\square$

Следствие 1. Если не существует обобщенных рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}(\mathbb{A})$, удовлетворяющих уравнению (4.14), или, в противном случае, функции вида (4.20), построенные при помощи всевозможных комбинаций допустимых обобщенных рядов Пюизе, не являются многочленами относительно переменных x и y, то неавтономные алгебраические инварианты дифференциальной системы (4.1) и связанного с ней векторного поля $\mathcal{X}$, если существуют, то имеют вид $F(x, t) \in \mathbb{A}[x]$. Здесь допустимым обобщенным рядом Пюизе мы назвали ряд из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}(\mathbb{A})$, удовлетворяющий уравнению (4.14).

Далее наша цель состоит в вычислении собственного значения $\lambda(x, y, t)$ неавтономного алгебраического инварианта $F(x, y, t)$. Функции $f_1(t)$ и $f_2(t) \in \mathbb{A}$ будем называть *различными*, если выполнено $f_1(t) - f_2(t) \neq O_{\mathbb{A}}$, где $O_{\mathbb{A}}$ – нулевой элемент поля $\mathbb{A}$.

Теорема 4.3. *Пусть обобщенный многочлен $F(x, y, t) \in \mathbb{A}[x, y] \setminus \mathbb{A}[x]$, заданный выражением* (4.20)*, является неавтономным алгебраическим инвариантом дифференциальной системы* (4.1) *и связанного с ней векторного поля $\mathcal{X}$. Тогда собственное значение $\lambda(x, y, t)$ инварианта $F(x, y, t)$ принимает* *вид*

$$\lambda(x,y,t)=\left\{\sum_{m=0}^{+\infty}\left[\sum_{j=1}^{N}\frac{\{Q(x,y,t)-P(x,y,t)\partial_x(y_{j,\infty})-\partial_t(y_{j,\infty})\}(y_{j,\infty})^m}{y^{m+1}}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{l=1}^{L}\frac{\nu_l\{P(x,y,t)-\partial_t(x_l)\}x_l^m}{x^{m+1}}\right]\right\}_+, \tag{4.21}$$

где функции $x_1(t)$, …, $x_L(t)\in\mathbb{A}$ *являются попарно различными нулями обобщенного многочлена* $\mu(x,t)$ *с кратностями* $\nu_1\in\mathbb{N}$, …, $\nu_L\in\mathbb{N}$, $L\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ *соответственно. Если* $\mu(x,t)=\mu_0(t)$, *где* $\mu_0(t)\in\mathbb{A}$, *то без ограничения общности можно положить* $\mu_0(x,t)=1$. *В этом случае мы предполагаем, что* $L=0$ *и второй ряд отсутствует в выражении* (4.21).

Доказательство. Начнем доказательство теоремы с разложения неавтономного алгебраического инварианта $F(x,y,t)$ на множители как в представлении (4.20). Из алгебраической замкнутости поля $\mathbb{A}$ следует, что обобщенный многочлен $\mu(x,t)$ имеет вид

$$\mu(x,t)=\prod_{l=1}^{L}\{x-x_l(t)\}^{\nu_l},\quad \nu_l\in\mathbb{N},\quad L\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{4.22}$$

где без ограничения общности коэффициент при старшей степени относительно переменной x равен 1. Если $\mu(x,t)=\mu_0(t)\in\mathbb{A}$, то мы полагаем $\mu_0(t)=1$ и $L=0$. Из формулы (4.20) следует справедливость соотношений

$$\partial_t(\ln F)=\frac{\partial_t\mu}{\mu}-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial_t(y_{j,\infty})}{y-y_{j,\infty}},\quad \partial_x(\ln F)=\frac{\partial_x\mu}{\mu}-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial_x(y_{j,\infty})}{y-y_{j,\infty}},$$
$$\partial_y(\ln F)=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{y-y_{j,\infty}}. \tag{4.23}$$

Далее разложим логарифмические производные $\partial_t(\ln F)$, $\partial_x(\ln F)$ и $\partial_y(\ln F)$ в формальные ряды Лорана с центром в точке $y=\infty$. Подставляя получившиеся выражения в равенство (4.5), находим

$$\lambda(x,y,t)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left[\sum_{j=1}^{N}\frac{\{Q(x,y,t)-P(x,y,t)\partial_x(y_{j,\infty})-\partial_t(y_{j,\infty})\}(y_{j,\infty})^m}{y^{m+1}}\right.\qquad\qquad\left.+\sum_{l=1}^{L}\frac{\nu_l\{P(x,y,t)-\partial_t(x_l)\}x_l^m}{x^{m+1}}\right],\tag{4.24}$$

где логарифмические производные

$$\frac{\partial_t\mu}{\mu}=-\sum_{l=1}^{L}\frac{\nu_l\partial_t(x_l)}{x-x_l},\quad \frac{\partial_x\mu}{\mu}=\sum_{l=1}^{L}\frac{\nu_l}{x-x_l}\tag{4.25}$$

также разложены в формальные ряды Лорана с центром в точке $x=\infty$. Вспомним, что собственное значение $\lambda(x,y,t)$ является многочленом относительно переменных x и y. Этот факт позволяет применить оператор проектирования $\{\cdot\}_+$ в выражении (4.24). □

Заметим, что роли переменных x и y в Теоремах 4.2 и 4.3 могут быть изменены. Далее покажем, что степень обобщенного многочлена $\mu(x,t)$, являющегося коэффициентом при старшем слагаемом относительно переменной y в инварианте $F(x,y,t)$, определяется обобщенными рядами Пюизе вида (4.12), удовлетворяющими уравнению (4.14).

Лемма 4.3. *Пусть обобщенный многочлен* $F(x,y,t)\in\mathbb{A}[x,y]\backslash\mathbb{A}[x]$ *является неприводимым неавтономным алгебраическим инвариантом дифференциальной системы* (4.1) *и связанного с ней векторного поля* $\mathcal{X}$. *Для каждого нуля* $x_0(t)\in\mathbb{A}$ *обобщенного многочлена* $\mu(x,t)$ *найдется хотя бы один обобщенный ряд Пюизе вида* (4.12), *удовлетворяющий уравнению* (4.14), *такой, что выполнено неравенство* $n_0<0$.

Доказательство. Существуют единственным образом определенные обобщенные ряды Пюизе $y_{1,x_0}(x,t)$, …, $y_{1,x_0}(x,t)$ из поля $\mathbb{C}_{x_0(t)}\{x\}(\mathbb{A})$ такие, что справедливо разложение на множители

$$F(x,y,t)=\mu(x,t)\prod_{j=1}^{N}\{y-y_{j,x_0}(x,t)\},\tag{4.26}$$

где, как и ранее, N – это степень обобщенного многочлена $F(x,y,t)$ относительно переменной y . Из Леммы 4.2 следует, что множество обобщенных рядов Пюизе $\{y_{j,\,x_0}(x,t)\}$, появляющихся в представлении (4.26), является подмножеством всех обобщенных рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_{x_0(t)}\{x\}(\mathbb{A})$, удовлетворяющих уравнению (4.14). Предположим, что при фиксированном $x_0(t)$ для всех обобщенных рядов Пюизе вида (4.12), удовлетворяющих уравнению (4.14), справедливо неравенство $n_0 \geq 0$. Следовательно, все ряды в представлении (4.26) также удовлетворяют этому условию. В силу того, что $x_0(t)$ является нулем обобщенного многочлена $\mu(x,t)$, мы видим, что инвариант $F(x,y,t)$, заданный выражением (4.26), приводим в кольце $\mathbb{A}[x,y]$. Мы пришли к противоречию. Таким образом, хотя бы один обобщенный ряд Пюизе с центром на элементе $x_0(t) \in \mathbb{A}$, имеющий отрицательный показатель степени в доминантном члене, удовлетворяет уравнению (4.14). $\square$

Следствие 1. Если для всех $x_0(t) \in \mathbb{A}$ обобщенные ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_{x_0(t)}\{x\}(\mathbb{A})$, удовлетворяющие уравнению (4.14), имеют неотрицательные показатели степеней в доминантных членах, то старшие коэффициенты относительно переменной y неавтономных алгебраических инвариантов дифференциальной системы (4.1) и связанного с ней векторного поля $\mathcal{X}$ можно положить равными единице.

Лемма 4.4. *Пусть $x_0(t)$ является элементом поля $\mathbb{A}$. Предположим, что лишь конечное число попарно различных обобщенных рядов Пюизе вида* (4.12), *имеющих отрицательные показатели степеней в доминантных членах:*

$$\begin{gathered} y_{j,\,x_0}(x,t) = c_{0,\,x_0}^{(j)}(t)\{x - x_0(t)\}^{-q_j} + \ldots, \quad c_{0,\,x_0}^{(j)}(t) \not\equiv 0, \\ q_j \in \mathbb{Q}, \quad q_j > 0, \quad 1 \leq j \leq J \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{4.27}$$

удовлетворяет уравнению (4.14). *Если обобщенный многочлен $F(x,y,t) \in \mathbb{A}[x,y] \setminus \mathbb{A}[x]$ является неприводимым неавтономным алгебраическим инвариантом дифференциальной системы* (4.1) *и связанного с ней векторного* *поля $\mathcal{X}$, то для кратности $m_0 \in \mathbb{N}_0$ нуля $x_0(t)$ обобщенного многочлена $\mu(x,t)$ справедливо неравенство*

$$m_0 \leq \sum_{j=1}^{J} q_j. \tag{4.28}$$

Если элемент $x_0(t)$ не является нулем обобщенного многочлена $\mu(x,t)$, то полагаем $m_0 = 0$.

Доказательство. Рассмотрим разложение на множители обобщенного многочлена $F(x, y,\, t)$, заданное выражением (4.26). Из Леммы 4.2 следует, что обобщенные ряды Пюизе, появляющиеся в равенстве (4.26), удовлетворяют уравнению (4.14). Представим обобщенный многочлен $\mu(x,t)$ в виде $\mu(x,t) = \mu_0(t)\{x - x_0(t)\}^{m_0}\psi(x,t)$, где $\mu_0(t) \in \mathbb{A}$, $\psi(x,t) \in \mathbb{A}[x]$, $\mu_0(t) \not\equiv 0$, $\psi(x_0(t),t) \not\equiv 0$ и $m_0 \in \mathbb{N}_0$. Мы видим, что множитель $\{x - x_0(t)\}^{m_0}$ должен компенсировать доминантные члены обобщенных рядов Пюизе таким образом, чтобы получающееся выражение представляло собой неприводимый элемент кольца $\mathbb{A}[x,y]$. Кратность нуля $x_0(t)$ обобщенного многочлена $\mu(x,t)$ является максимальной, если все ряды, представленные в формуле (4.27), появляются в представлении (4.26), а остальные ряды Пюизе из данного представления имеют ненулевые коэффициенты при $\{x - x_0(t)\}^0$. Поскольку обобщенный многочлен $F(x,y,t)$ неприводим в кольце $\mathbb{A}[x,y]$, мы видим, что каждый из рядов в формуле (4.27) может появляться в представлении (4.26) только с кратностью 1. Предполагая, что неравенство (4.28) не верно, мы приходим к противоречию. Действительно, в этом случае обобщенный многочлен $F(x,y,t)$, заданный выражением (4.26), приводим в кольце $\mathbb{A}[x,y]$. Доказательство закончено. □

Далее в этом разделе ряды Пюизе вида (4.12) или (4.13) без всяких ограничений на коэффициенты и элемент $x_0(t)$ будем называть формальными функциональными рядами Пюизе. Рассмотрим проблему нахождения формальных функциональных рядов Пюизе, удовлетворяющих дифференциальному уравнению в частных производных вида

$$y_t + P(x, y, t)y_x - Q(x, y, t) = 0, \tag{4.29}$$

где P и Q – многочлены относительно переменной x и функции $y(x, t)$. Дополнительно предполагаем, что коэффициенты этих многочленов от нескольких переменных являются мероморфными функциями. Выражение, стоящее слева от знака равенства в уравнении (4.29), можно рассматривать как сумму обобщенных дифференциальных мономов

$$M[y(x, t), x; t] = c(t)x^{l_0}y^{l_1}(y_x)^{l_2}(y_t)^{l_3}, \tag{4.30}$$

где l_0, …, $l_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $c(t) \in \mathbb{M}$. Символом $W[y(x, t), x; t]$ обозначим многочлен относительно переменных x, функции $y(x, t)$ и ее частных производных с коэффициентами из поля $\mathbb{M}$. Такой многочлен назовем дифференциальным многочленом. Будем работать в рамках аналитической теории дифференциальных уравнений, предполагая, что x и t – комплекснозначные переменные, а $y(x, t)$ – комплекснозначная зависимая функция.

Определение 4.4. *Будем говорить, что дифференциальный многочлен* $E_0[y(x,\ t),\ x;\ t]$ *является доминантным балансом для точки* $x = \infty$ *дифференциального уравнения в частных производных* (4.29), *если выполнены следующие условия:*

(i) каждый обобщенный дифференциальный моном $M[y(x, t), x; t]$, *появляющийся в дифференциальном многочлене* $E_0[y(x, t), x; t]$, *также является дифференциальным мономом исходного уравнения* (4.29);

(ii) существуют число $s \in \mathbb{C}$ *и функция* $y(x, t) = b_0(t)x^r$ *(возможно, не единственная), где* $b_0(t) \not\equiv 0$, $r \in \mathbb{C}$, *такие, что для каждого дифференциального монома* $M[y(x, t), x; t]$ *дифференциального многочлена* $E_0[y(x, t),\ x; t]$ *найдется функция* $C_M(t)$, *для которой выполнено* $M[b_0(t)x^r, x; t] = C_M(t)x^s$;

(iii) найдутся функция $b_0(t)$ и число r, удовлетворяющие предыдущим условиям, такие, что для всех дифференциальных мономов $L[y(x,t),x;t]$ уравнения (4.29)*, которые не входят в дифференциальный многочлен $E_0[y(x,t),\ x;\ t]$, справедливо равенство $L[b_0(t)x^r,\ x;t] = C_L(t)x^{p_L}$, где $Re\ p_L < Re\ s$.*

Определение доминантных балансов для точки $x = 0$ дается аналогично. Необходимо лишь поменять знак неравенства в третьем условии: $Re\ p_L > Re\ s$. Для того чтобы построить доминантные балансы для элемента $x = x_0(t)$ в уравнении в частных производных (4.29), нужно сделать замену $\tilde{x} = x - x_0(t)$.

Пусть дифференциальный многочлен $E_0[y(x,t),x;t]$ является доминантным балансом уравнения (4.29) для точки $x = \infty$ (или $x = 0$). Если уравнение $E_0[y(x,t),x;t] = 0$ имеет нетривиальное решение $y(x,t) = b(t)x^r$ такое, что функция $b(t)$ и ее производные ограничены на некотором открытом подмножестве $D_0 \subset \mathbb{C}$ и условие (iii) выполнено для заданной функции $b_0(t)$ и числа r, тогда функция $y(x,t) = b(t)x^r$ является асимптотикой решений исходного дифференциального уравнения (4.29) при $x \to \infty$ $(x \to 0)$ и $t \in D_0$.

Предположим, что функция $y(x,t) = b_0(t)x^r$, $b_0(t) \not\equiv 0$ является решением уравнения $E_0[y(x,t),x;t] = 0$ и условие (iii) выполнено для заданной функции $b_0(t)$ и числа r. Тогда мы можем построить асимптотический ряд, удовлетворяющий уравнению (4.29), с доминантным членом, заданным функцией $y(x,t) = b_0(t)x^r$. Отметим, что функция $b_0(t)$ определяется как решение или алгебраического, или обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, коэффициенты которого выражаются через коэффициенты уравнения (4.29).

Рассмотрим доминантный баланс $E_0[y(x,t),x;t]$ уравнения (4.29) для точки $x = \infty$. Опишем метод нахождения формальных функциональных рядов Пюизе вида (4.13), которые удовлетворяют уравнению (4.29) и соответствуют данному балансу $E_0[y(x,t),x;t]$. Уравнение $E_0[y(x,t),x;t] = 0$ называют укороченным уравнением. Данный метод аналогичен методу построения функциональных рядов Лорана, удовлетворяющих уравнениям в частных производных [188].

На *первом шаге* необходимо найти все решения $y(x,t) = b_0(t)x^r$ укороченного уравнения $E_0[y(x),x] = 0$ такие, что выполнено условие (iii) и $r \in \mathbb{Q}$.

На *втором шаге* необходимо вычислить формальную производную по Гато для баланса $E_0[y(x,t),\, x;t]$ на решении $y(x,t) = b_0(t)x^r$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta E_0}{\delta y}[b_0(t)x^r, x; t] &= \lim_{s\to 0} \frac{E_0[b_0(t)x^r + sB(t)x^{r-j}, x; t] - E_0[b_0(t)x^r, x; t]}{s} \\ &= \mathfrak{L}(t; j)B(t)x^{\tilde{r}}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

В этом выражении $\mathfrak{L}(t;j)$ – это линейный дифференциальный оператор. Пусть оператор $\mathfrak{L}(t;j)$ не является нулевым при всех $j \in \mathbb{C}$, т. е. $\mathfrak{L}(t;j) \not\equiv 0$. Число $j_0 \in \mathbb{C}$ такое, что при любом допустимом t выполнено условие $\mathfrak{L}(t;j_0) \equiv 0$, назовем показателем Ковалевской соответствующего доминантного баланса и асимптотики $y(x,t) = b_0(t)x^r$. Заметим, что доминантные балансы уравнения в частных производных первого порядка имеют не более одного показателя Ковалевской.

Третий шаг состоит в проверке существования формального функционального ряда Пюизе вида (4.13). Пусть показатель Ковалевской j_0 является положительным рациональным числом. Представим его в виде $j_0 = k_0/k_1$, где k_0 и k_1 взаимно простые натуральные числа. Если показатель Ковалевской j_0 не является положительным рациональным числом, то положим $k_1 = 1$. Пусть, число r имеет вид $r = m_0/m_1$, где m_0 и m_1 взаимно простые целые числа и $m_1 > 0$. Тогда индекс ветвления n_1 соответствующего формального функционального ряда Пюизе равен $\mathrm{lcm}(k_1, m_1)$, где символом $\mathrm{lcm}(k_1, m_1)$ обозначено наименьшее общее кратное чисел k_1 и m_1. Число n_0 в соотношении (4.13) равно rn_1. Подставляя соответствующий ряд (4.13) в уравнение (4.29), мы находим рекуррентное соотношение для коэффициентов ряда. Это соотношение имеет вид

$$\mathfrak{L}\left(t;\frac{k}{n_1}\right)b_k(t)=U_k[b_0(t),\ldots,b_{k-1}(t);t],\quad k\in\mathbb{N},\tag{4.32}$$

где U_k – это дифференциальный многочлен относительно $b_0(t)$, …, $b_{k-1}(t)$. При наличии положительного рационального показателя Ковалевской $j_0\in\mathbb{Q}$, $j_0>0$, найденного на втором шаге, необходимо проверить выполнение *условия совместности* $U_{n_1j_0}=0$, $n_1j_0\in\mathbb{N}$. Если условие совместности не выполняется, то рассматриваемый формальный функциональный ряд Пюизе не удовлетворяет уравнению (4.29). В противном случае соответствующий формальный функциональный ряд Пюизе удовлетворяет уравнению (4.29) и имеет произвольный коэффициент $b_{n_1j_0}(t)$.

Замечание 1. Для того чтобы найти все формальные функциональные ряды вида (4.13), которые удовлетворяют уравнению (4.29), необходимо повторить описанную выше процедуру для всех доминантных балансов исходного уравнения для точки $x=\infty$ и для всех решений вида $y(x,t)=b_0(t)x^r$ соответствующих укороченных уравнений, где $r\in\mathbb{Q}$.

Замечание 2. Аналогичный алгоритм позволяет находить формальные функциональные ряды Пюизе с центром в точке $x=0$, которые удовлетворяют уравнению (4.29). В данном случае формальную производную по Гато необходимо вычислять по формуле

$$\begin{aligned}\frac{\delta E_0}{\delta y}[b_0(t)x^r,x;t]&=\lim_{s\to0}\frac{E_0[b_0(t)x^r+sB(t)x^{r+j},x;t]-E_0[b_0(t)x^r,x;t]}{s}\\&=\mathfrak{L}(t;j)B(t)x^{\tilde r}.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Для того чтобы найти формальные функциональные ряды Пюизе с центром на функции $x=x_0(t)$, необходимо в уравнении (4.29) выполнить замену независимой переменной x: $\tilde x=x-x_0(t)$ и рассмотреть случай $\tilde x\to0$.

Метод нахождения неавтономных алгебраических инвариантов $F(x,y,t)$ дифференциальной системы (4.1) и связанного с ней векторного поля $\mathcal{X}$ аналогичен описанному в Разделе 1.4 методу построения автономных алгебраических инвариантов.

На *первом шаге* следует построить все формальные функциональные ряды Пюизе с центром на бесконечности и произвольных функциях, удовлетворяющие уравнению в частных производных (4.14).

На *втором шаге* с помощью Теорем 4.2, 4.3 и Лемм 4.3, 4.4 необходимо представить обобщенный многочлен, определяющий неавтономный алгебраический инвариант, в виде (4.19), а также записать выражение (4.21) для собственного значения инварианта. На этом шаге удобнее работать с формальными рядами, поскольку не всегда просто из множества формальных функциональных рядов Пюизе выделить обобщенные ряды. Необходимо рассмотреть всевозможные комбинации попарно различных формальных функциональных рядов Пюизе в представлении (4.19). Далее следует составить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определяемую условием

$$\left\{\mu(x,t)\prod_{j=1}^{N}\{y-y_{j,\infty}(x,t)\}\right\}_{-}=0. \tag{4.34}$$

Заметим, что некоторые из уравнений могут быть алгебраическими, а не дифференциальными. Эта система содержит бесконечное число уравнений. На практике необходимо рассмотреть подсистему, состоящую из нескольких уравнений. Уравнения, возникающие при требовании обращения в нуль неполиномиальной части выражения в скобках из соотношения (4.21), также могут учитываться.

На *третьем шаге* следует решить систему второго шага и выполнить проверку, подставляя полученные обобщенные многочлены в уравнение (4.5).

Выше мы рассмотрели задачу нахождения неавтономных алгебраических инвариантов, таких что выполнено условие $F_y(x,y,t)\not\equiv 0$. Неавтономные алгебраические инварианты вида $F=F(x,t)$ можно найти, подставив выражение $F=F(x,t)$ в уравнение (4.5) и потребовав обращения в нуль коэффициентов при различных степенях переменной y.

Поскольку нахождение формальных функциональных рядов Пюизе, удовлетворяющих уравнению в частных производных (4.29), может потребовать решения обыкновенных дифференциальных уравнений, то при работе с формальными рядами метод, описанный выше, способен давать более общие неавтономные алгебраические инварианты. Другими словами, могут быть построены инварианты $F(x, y, t)$ такие, что коэффициенты многочлена $F(x, y, t)$ не принадлежат полю $\mathbb{A}$.

4.3 Неавтономная система Дуффинга

В этом разделе мы будем исследовать существование неавтономных алгебраических инвариантов неавтономной системы Дуффинга

$$x_t = y, \quad y_t = -(\alpha y + \varepsilon x^3 + \sigma x + h(t)), \quad h(t) \in \mathbb{M}, \quad \alpha\varepsilon \neq 0. \tag{4.35}$$

Эта система относится к семейству неавтономных систем Льенара. Выражая y из первого уравнения системы и подставляя во второе, получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$x_{tt} + \alpha x_t + \varepsilon x^3 + \sigma x + h(t) = 0. \tag{4.36}$$

Уравнение (4.36) называют неавтономным уравнением Дуффинга. Оно описывает нелинейные осцилляторы с постоянным трением, задаваемым параметром α, и кубической функцией $\varepsilon x^3 + \sigma x$, определяющей возвращающую силу. Функция $h(t)$ характеризует внешнее возмущение. Уравнение (4.36) используется для моделирования многих колебательных явлений в различных областях науки, в частности, в химии, электронике и биологии [176, 189].

Автономный случай рассматривался в Разделе 3.5. Отметим, что применение метода функциональных рядов Пюизе к автономному уравнению

(4.35) порождает классификацию алгебраических инвариантов, полученную в разделе Разделе 3.5. Далее положим $h(t) \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{C}$.

Теорема 4.4. *Система дифференциальных уравнений* (4.35) *имеет неавтономные алгебраические инварианты тогда и только тогда, когда выполнено*

$$\sigma = \frac{2}{9}\alpha^2, \quad h(t) = h_0 \exp(-\alpha t), \quad h_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{4.37}$$

При этих ограничениях существует единственное семейство неприводимых неавтономных алгебраических инвариантов, принимающее вид

$$\begin{gathered} F(x, y, t) = y^2 + \frac{2}{3}\alpha x y + \frac{1}{2}\varepsilon x^4 + \frac{1}{9}\alpha^2 x^2 + 2h_0 \exp(-\alpha t) x \\ -C_0 \exp\left(-\frac{4}{3}\alpha t\right), \end{gathered} \tag{4.38}$$

где $C_0 \in \mathbb{C}$ *– произвольная постоянная. Собственное значение этих инвариантов не зависит от* x *и* y*:* $\lambda(x, y, t) = -4\alpha/3$.

Доказательство. Неавтономные алгебраические инварианты системы (4.35) удовлетворяют следующему линейному уравнению в частных производных:

$$F_t + y F_x - \{\alpha y + \varepsilon x^3 + \sigma x + h(t)\} F_y = \lambda(x, y, t) F. \tag{4.39}$$

Подставляя функцию $F = F(x, t)$ в это уравнение, мы видим, что система (4.35) не имеет неавтономных алгебраических инвариантов, не зависящих от y.

Пусть неприводимый обобщенный многочлен $F(x, y, t) \in \mathbb{A}[x, y] \setminus \mathbb{A}[x]$ представляет собой неавтономный алгебраический инвариант системы (4.35). Символом $\mu(x, t)$ обозначим коэффициент при старшей степени относительно переменной y обобщенного многочлена $F(x, y, t)$. Уравнение в частных производных для функциональных рядов Пюизе, появляющихся в разложении на множители неавтономных алгебраических инвариантов, принимает вид

$$y_t + y y_x + \alpha y + \varepsilon x^3 + \sigma x + h(t) = 0. \tag{4.40}$$

Для всех функций $x_0(t)$ формальные функциональные ряды Пюизе вида (4.12), удовлетворяющие уравнению (4.40), имеют неотрицательные показатели степеней в доминантных членах. Следовательно, это же утверждение справедливо и для обобщенных рядов Пюизе. Используя Лемму 4.3 и ее следствие, находим $\mu(x,t) = \mu_0(t)$. Без ограничения общности полагаем $\mu_0 = 1$.

Существует только один доминантный баланс, который порождают формальные функциональные ряды Пюизе с центром в точке $x = \infty$. Этому балансу соответствуют следующее укороченное уравнение и асимптотики при $x \to \infty$:

$$yy_x + \varepsilon x^3 = 0, \quad y^{(1,2)}(x,t) = \pm\frac{\sqrt{-2\varepsilon}}{2}x^2. \tag{4.41}$$

Полученные асимптотики имеют единственный показатель Ковалевской: $j_0 = 4$. Анализируя рекуррентные соотношения вида (4.32), соответствующие исследуемым асимптотикам, находим $n_0 = 1$. Условие совместности для асимптотики $y^{(1,2)}(x,t)$ принимает вид $h_t + \alpha h \pm \sqrt{-2\varepsilon}\alpha^2(9\sigma - 2\alpha^2)/(27\varepsilon) = 0$. При выполнении условия совместности для соответствующей асимптотики существует семейство рядов с доминантным поведением $y(x,t) = \pm\sqrt{-2\varepsilon}x^2/2$, удовлетворяющее уравнению (4.40) и имеющее произвольную коэффициентную функцию при мономе x^{-2}. Эти ряды представляют собой формальные функциональные ряды Лорана вида

$$y^{(k)}(x,t) = \pm\frac{\sqrt{-2\varepsilon}}{2}x^2 - \frac{1}{3}\alpha x + \sum_{l=2}^{+\infty} b_l^{(k)}(t)x^{2-l}, \quad k = 1,2. \tag{4.42}$$

Далее воспользуемся Теоремой 4.2. Раскладывая многочлен $F(x,y,t)$ на множители над полем $\mathbb{C}_\infty\{x\}(A)$, получаем

$$F(x,y,t) = \prod_{j=1}^{N_1}\left(y - y_j^{(1)}(x,t)\right)\prod_{j=1}^{N_2}\left(y - y_j^{(2)}(x,t)\right), \tag{4.43}$$

где мы ввели нижний индекс j для нумерации рядов. Кроме того, мы предполагаем, что выполнено $N_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k = 1,\ 2$ и $N_1 + N_2 > 0$. Отметим, что соответствующее произведение отсутствует в представлении (4.43), если $N_k = 0$, где $k = 1$ или $k = 2$. Поскольку многочлен $F(x, y, t)$ в представлении (4.43) неприводим, мы заключаем, что ряды $y_1^{(k)}(x, t)$, ..., $y_{N_k}^{(k)}(x, t)$ в силу Теоремы 4.2 должны быть попарно различными. Таким образом, коэффициенты $b_{4,j}^{(k)}(t)$, $j = 1, \ldots, N_k$ также должны быть попарно различными. Далее потребуем, чтобы неполиномиальная часть выражения (4.43) обращалась в нуль. Коэффициенты, стоящие при мономах $y^{N_1+N_2-1}x^{2-l}$, $l = 3$, 4, ..., порождают систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{N_1} b_{l,j}^{(1)}(t) + \sum_{j=1}^{N_2} b_{l,j}^{(2)}(t) = 0, \quad l \in \mathbb{N}, \quad l \geq 3. \tag{4.44}$$

Заметим, что некоторые из уравнений на самом деле являются алгебраическими. При $l = 3$ соответствующее уравнение выглядит следующим образом:

$$27\sqrt{-2\varepsilon}(N_1 - N_2)h(t) + 2(N_1 + N_2)\alpha(2\alpha^2 - 9\sigma) = 0. \tag{4.45}$$

Из этого уравнения следует, что $h(t)$ не зависит от t, если $N_1 \neq N_2$. Этот случай далее не рассматриваем. Пусть теперь $N_1 = N_2$. Тогда из уравнения (4.45) получаем $\sigma = 2\alpha^2/9$. Используя условия совместности, находим функцию $h(t)$. Она принимает вид $h(t) = h_0 \exp(-\alpha t)$. Введем в рассмотрение величины $B_m^{(k)}(t) = \left\{b_{4,1}^{(k)}(t)\right\}^m + \ldots + \left\{b_{4,N_1}^{(k)}(t)\right\}^m$, где $m \in \mathbb{N}$. Тогда уравнения (4.44) при $l = 4$ и $l = 5$ можно представить в виде

$$B_1^{(1)}(t) + B_1^{(2)}(t) = 0, \quad 3\partial_t B_1^{(1)}(t) + 4\alpha B_1^{(1)}(t) = 0. \tag{4.46}$$

Решая эти уравнения, находим

$$B_1^{(1)}(t) = b_1 \exp\left(-\frac{4}{3}\alpha t\right), \quad B_1^{(2)}(t) = -B_1^{(1)}(t), \quad b_1 \in \mathbb{C}. \tag{4.47}$$

Пусть $N_1 = N_2 = 1$. Тогда непосредственной проверкой убеждаемся, что система (4.35) имеет семейство неавтономных алгебраических инвариантов (4.38) с собственным значением $\lambda(x, y, t) = -4\alpha/3$. Для удобства мы положили

$b_1 = -\sqrt{-2\varepsilon}C_0/(2\varepsilon)$, где C_0 – произвольная постоянная. Рассматривая следующие уравнения системы (4.44) и применяя метод математической индукции, несложно найти функции $B_m^{(1,2)}(t)$ при $m \geq 2$. Они принимают вид

$$B_m^{(1)}(t) = b_m \exp\left(-\frac{4m}{3}\alpha t\right), \quad B_2^{(2)}(t) = (-1)^m B_2^{(1)}(t), \quad b_m \in \mathbb{C}. \tag{4.48}$$

Учитывая произвольность параметра C_0, мы убеждаемся, что других неприводимых неавтономных алгебраических инвариантов исследуемая система не имеет. Теорема доказана. $\square$

Анализируя результаты Теоремы 4.4, несложно заметить, что семейство неавтономных алгебраических инвариантов (4.38) порождает неавтономный первый интеграл

$$\begin{gathered} I(x,y,t) = \left(y^2 + \frac{2}{3}\alpha xy + \frac{1}{2}\varepsilon x^4 + \frac{1}{9}\alpha^2 x^2 \right. \\ \left. +2h_0 \exp(-\alpha t)x\right) \exp\left(\frac{4}{3}\alpha t\right), \end{gathered} \tag{4.49}$$

системы (4.44). Этот первый интеграл существует при выполнении условий (4.37) и является обобщенным первым интегралом Дарбу. Найдем общее решение системы (4.44) с первым интегралом (4.49). Заметим, что наличие первого интеграла позволяет понизить порядок в соответствующей системе. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$(x_t)^2 + \frac{2}{3}\alpha x x_t + \frac{1}{2}\varepsilon x^4 + \frac{1}{9}\alpha^2 x^2 + 2h_0 \exp(-\alpha t)x - C_0 \exp\left(-\frac{4}{3}\alpha t\right) = 0. \tag{4.50}$$

Будем искать общее решение этого уравнения в виде $x(t) = s(t)X(z)$, $z = \psi(t)$. Подберем функции $s(t)$ и $\psi(t)$ таким образом, чтобы после соответствующей подстановки обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $X(z)$ становилось автономным. В результате получим $s(t) = \exp(-\alpha t/3)$, $\psi(t) = -3\exp(-\alpha t/3)/\alpha$ и

$$(X_z)^2 + \frac{1}{2}\varepsilon X^4 + 2h_0 X - C_0 = 0. \tag{4.51}$$

Хорошо известно, что уравнение (4.51) интегрируется в эллиптических функциях. Для построения общего решения воспользуемся методом, который будет описан в Разделе 5.3. Асимптотический анализ решений уравнения (4.51) показывает, что общее решение имеет полюсы первого порядка с вычетами $\pm\sqrt{-2\varepsilon}/\varepsilon$. В силу автономности уравнения (4.51), любому решению $X(z)$ соответствует семейство решений $X(z-z_0)$, где $z_0 \in \mathbb{C}$ – произвольная постоянная. При проведении вычислений эту постоянную будем опускать. Согласно алгоритму Раздела 5.3 будем искать эллиптические решения уравнения (4.51) в виде

$$X(z) = \frac{\sqrt{-2\varepsilon}}{\varepsilon}\zeta(z; g_2, g_3) - \frac{\sqrt{-2\varepsilon}}{\varepsilon}\zeta(z-a; g_2, g_3) + g_0, \tag{4.52}$$

где $\zeta(z; g_2, g_3)$ – дзета-функций Вейерштрасса, g_2, g_3, a, g_0 – комплекснозначные параметры, подлежащие определению. Параметры g_2 и g_3 называют модулярными инвариантами решетки периодов эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(z; g_2, g_3)$. Параметр a определяет положение в параллелограмме периодов полюса с вычетом $-\sqrt{-2\varepsilon}/\varepsilon$. Далее введем обозначения

$$b = \wp(a; g_2, g_3), \quad e = \wp_z(a; g_2, g_3), \quad g_0 = g_1 - \frac{\sqrt{-2\varepsilon}}{\varepsilon}\zeta(a; g_2, g_3). \tag{4.53}$$

Заметим, что эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(z; g_2, g_3)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(\wp_z)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3. \tag{4.54}$$

Следовательно, справедливо равенство $e^2 = 4b^3 - g_2 b - g_3$, которое позволяет выразить инвариант g_3 через остальные параметры. Раскладывая функцию (4.52) в ряды Лорана в окрестности полюсов $z = 0$ и $z = a$, находим

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \frac{\sqrt{-2\varepsilon}}{\varepsilon z} + g_1 + \frac{\sqrt{-2\varepsilon}b}{\varepsilon}z + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k^{(1)} z^k; \\ X_2(z) &= -\frac{\sqrt{-2\varepsilon}}{\varepsilon(z-a)} + g_1 - \frac{\sqrt{-2\varepsilon}b}{\varepsilon}(z-a) + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k^{(2)} (z-a)^k, \end{aligned} \tag{4.55}$$

где коэффициенты $\left\{c_k^{(1,2)}, k \geq 2\right\}$ выражаются через параметры b, e, g_2, g_3 и ε. Подставляя ряды (4.55) в уравнение (4.51) и приравнивая нулю коэффициенты при отрицательных и нулевой степени относительно переменных z и $z-a$, приходим к алгебраической системе. Решая эту систему, получаем

$$g_1 = 0, \quad b = 0, \quad e = \frac{\sqrt{-2\varepsilon}h_0}{4}, \quad g_2 = -\frac{\varepsilon C_0}{2}, \quad g_3 = \frac{\varepsilon h_0^2}{8}. \tag{4.56}$$

Заметим, что для вычисления инварианта g_3 мы воспользовались уравнением $e^2 = 4b^3 - g_2 b - g_3$. Далее с помощью формулы сложения

$$\zeta(z-a) = \zeta(z) - \zeta(a) + \frac{1}{2}\frac{\wp_z(z) + \wp_z(a)}{\wp(z) - \wp(a)} \tag{4.57}$$

и равенства $g_0 = g_1 - \sqrt{-2\varepsilon}\zeta(a; g_2, g_3)/\varepsilon$ перепишем решение (4.52) следующим образом:

$$X(z) = g_1 - \frac{\sqrt{-2\varepsilon}}{2\varepsilon}\frac{\wp_z(z) + e}{\wp(z) - b}. \tag{4.58}$$

Тогда функция

$$X(z) = \frac{\varepsilon h_0 - 2\sqrt{-2\varepsilon}\wp_z\left(z - z_0; -\frac{\varepsilon C_0}{2}, \frac{\varepsilon h_0^2}{8}\right)}{4\varepsilon\wp\left(z - z_0; -\frac{\varepsilon C_0}{2}, \frac{\varepsilon h_0^2}{8}\right)} \tag{4.59}$$

является общим решением уравнения (4.51). Возвращаясь к исходным переменным, мы видим, что общее решение неавтономного уравнения Дуффинга

$$x_{tt} + \alpha x_t + \varepsilon x^3 + \frac{2}{9}\alpha^2 x + h_0 \exp\left(-\alpha t\right) = 0 \tag{4.60}$$

можно представить в виде

$$x(t) = \frac{\left\{\varepsilon h_0 + 2\sqrt{-2\varepsilon}\wp_z\left(\frac{3}{\alpha}\exp\left(-\frac{\alpha}{3}t\right) + z_0; g_2, \frac{\varepsilon h_0^2}{8}\right)\right\}\exp\left(-\frac{\alpha}{3}t\right)}{4\varepsilon\wp\left(\frac{3}{\alpha}\exp\left(-\frac{\alpha}{3}t\right) + z_0; g_2, \frac{\varepsilon h_0^2}{8}\right)}, \tag{4.61}$$

где z_0 и g_2 – произвольные постоянные, а производная по переменной z означает производную по аргументу. Заметим, что мы воспользовались свойством четности функции $\wp(z)$ и свойством нечетности функции $\wp_z(z)$.

4.4 Неавтономная система Дуффинга – ван дер Поля

В качестве еще одной иллюстрации работы метода рядов Пюизе в неавтономном случае рассмотрим следующую двумерную неавтономную систему

$$x_t = y, \quad y_t = -(3x^2 + \alpha)y - (\varepsilon x^3 + \sigma x) - h(t), \quad h(t) \in \mathbb{M}, \quad \varepsilon \neq 0. \quad (4.62)$$

Эта система также принадлежит семейству неавтономных систем Льенара. Исключая переменную y из уравнений системы, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка вида

$$x_{tt} + (3x^2 + \alpha)x_t + (\varepsilon x^3 + \sigma x) + h(t) = 0. \quad (4.63)$$

Уравнение (4.63) называют неавтономным уравнением Дуффинга – ван дер Поля [190]. Оно описывает нелинейные осцилляторы с квадратичной функцией $3x^2 + \alpha$, задающей трение, и кубической функцией $\varepsilon x^3 + \sigma x$, определяющей возвращающую силу. Функция $h(t)$ характеризует внешнее возмущение.

Система (4.62) используется для моделирования управляемого магнитного генератора, динамики плотности заряда в плазме радиочастотного газового разряда [191]. В научных работах исследуется существование периодических и хаотических траекторий, бифуркации и другие качественные свойства решений этого уравнения [191–193].

Поскольку автономный случай рассматривался в Разделе 3.4, мы положим $h(t) \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{C}$. Действительно, применение метода рядов Пюизе в неавтономном случае к автономной системе (4.62) приводит к результатам, уже изложенным в Разделе 3.4. Заметим, что наибольший интерес с прикладной точки зрения представляет собой система (4.62) при наличии периодической внешней силы, заданной, в частности, выражением $h(t) = h_0 \cos(\omega t)$, где h_0, $\omega \in \mathbb{R}$, см. [191–193].

Теорема 4.5. *Пусть функция $h(t) \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{C}$ выбрана таким образом, что линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение первого* *порядка*

$$w_t + \varepsilon w + h(t) = 0 \tag{4.64}$$

имеет решение вида $W(t) \in \mathbb{A}$. *Тогда только при выполнении условия* $\sigma = \varepsilon(\alpha - \varepsilon)$ *дифференциальная система* (4.62) *имеет неавтономные алгебраические инварианты. При этом единственное семейство неприводимых неавтономных алгебраических инвариантов выглядит следующим образом:*

$$F(x, y, t) = y + x^3 + (\alpha - \varepsilon)x - W(t) - C_0 \exp\{-\varepsilon t\}, \tag{4.65}$$

где $C_0 \in \mathbb{C}$ *– произвольная постоянная. Собственное значение этих инвариантов не зависит от* x, y *и имеет вид* $\lambda(x, y, t) = -\varepsilon$.

Доказательство. Неавтономные алгебраические инварианты системы (4.62) удовлетворяют следующему линейному уравнению в частных производных:

$$F_t + yF_x - \{(3x^2 + \alpha)y + \varepsilon x^3 + \sigma x + h(t)\}F_y = \lambda(x, y, t)F. \tag{4.66}$$

Подставляя функцию $F = F(x, t)$ в это уравнение, убеждаемся что не существует инвариантов, не зависящих от y.

Пусть неприводимый обобщенный многочлен $F(x, y, t) \in \mathbb{A}[x, y] \setminus \mathbb{A}[x]$ является неавтономным алгебраическим инвариантом системы (4.62). Уравнение (4.14) принимает вид

$$y_t + yy_x + (3x^2 + \alpha)y + \varepsilon x^3 + \sigma x + h(t) = 0. \tag{4.67}$$

Для всех функций $x_0(t)$ формальные функциональные ряды Пюизе вида (4.12), удовлетворяющие уравнению (4.67), имеют неотрицательные показатели степеней в доминантных членах. Следовательно, это же утверждение справедливо и для обобщенных рядов Пюизе. Символом $\mu(x, t)$ обозначим старший коэффициент относительно переменной y инварианта $F(x, y, t)$. Используя Лемму 4.3 и ее следствие, находим $\mu(x, t) = \mu_0(t)$. Без ограничения общности полагаем $\mu_0 = 1$.

Существует только два доминантных баланса, которые порождают формальные функциональные ряды Пюизе с центром в точке $x = \infty$. Этим балансам соответствуют следующие укороченные уравнения и асимптотики при $x \to \infty$:

$$\begin{aligned} (I): \quad & y(y_x + 3x^2) = 0, \quad y(x,t) = -x^3; \\ (II): \quad & x^2(3y + \varepsilon x) = 0, \quad y(x,t) = -\frac{\varepsilon}{3}x. \end{aligned} \tag{4.68}$$

В случае (I) соответствующей семейство формальных функциональных рядов Пюизе имеет единственный показатель Ковалевской: $j_0 = 3$. Условие совместности выполняется автоматически. Таким образом, существует семейство рядов с доминантным поведением $y(x,t) = -x^3$, удовлетворяющее уравнению (4.67) и имеющее произвольную коэффициентную функцию при мономе x^0. Эти ряды представляют собой формальные функциональные ряды Лорана. Доминантный баланс в случае (II) не имеет показателей Ковалевской. Следовательно, все его коэффициенты определяются единственным образом. Анализируя рекуррентные соотношения вида (4.32) для исследуемых балансов, находим $n_0 = 1$. Соответствующие ряды принимают вид

$$\begin{aligned} (I): \quad & y(x,t) = -x^3 + (\varepsilon - \alpha)x + \sum_{l=3}^{+\infty} b_l(t)x^{3-l}; \\ (II): \quad & y(x,t) = -\frac{\varepsilon}{3}x + \sum_{l=2}^{+\infty} a_l(t)x^{1-l}. \end{aligned} \tag{4.69}$$

В случае (II) ряд является обобщенным рядом Лорана. Любой ряд семейства в случае (I) является обобщенным рядом Лорана, если произвольный коэффициент $b_3(t)$ и его производные принадлежат полю $\mathbb{A}$.

Применим Теорему 4.2. Раскладывая многочлен $F(x,y,t)$ на множители над полем $\mathbb{C}_\infty\{x\}(\mathbb{A})$, получаем

$$F(x,y,t) = \prod_{j=1}^{N-k} \left(y + x^3 - (\varepsilon - \alpha)x - b_0^{(j)}(t) - \ldots\right) \left(y + \frac{\varepsilon}{3}x - \ldots\right)^k, \tag{4.70}$$

где мы ввели индекс j для нумерации рядов с различными коэффициентами

$b_3(t)$. Многочлен $F(x,y,t)$ в выражении (4.70) неприводим. Мы заключаем, что ряды $y_1(x,t)$, …, $y_{N-k}(x,t)$ в силу Теоремы 4.2 должны быть попарно различными. Таким образом, коэффициенты $b_0^{(j)}(t)$, $j=1,\ldots,N-k$ также должны быть попарно различными и $k=0$ или $k=1$.

Начнем со случая $k=1$. Вычислим первые несколько коэффициентов построенных рядов. Потребуем, чтобы неполиномиальная часть представления (4.70) обращалась в нуль. В результате получим необходимые условия существования неавтономных алгебраических инвариантов. Вычисляя коэффициенты при $y^{N-1}x^{-l}$, $l\in\mathbb{N}$ в представлении обобщенного многочлена $F(x,y,t)$, найдем следующие соотношения:

$$a_{l+1}(t)+\sum_{j=1}^{N-1}b_{l+3}^{(j)}(t)=0,\quad l\in\mathbb{N}. \tag{4.71}$$

Эти соотношения представляют собой или алгебраические уравнения, или обыкновенные дифференциальные уравнения. Для удобства введем в рассмотрение величины $B_m(t)=\left\{b_0^{(1)}(t)\right\}^m+\ldots+\left\{b_0^{(N-1)}(t)\right\}^m$, где $m\in\mathbb{N}$. Заметим, что справедливы соотношения

$$B_{2,\,t}=2\sum_{j=1}^{N-1}b_0^{(j)}b_{0,\,t}^{(j)};\quad B_{2,\,tt}=2\sum_{j=1}^{N-1}\left(b_0^{(j)}b_{0,\,tt}^{(j)}+\{b_{0,\,t}^{(j)}\}^2\right);\quad \ldots \tag{4.72}$$

Рассмотрим подсистему, состоящую из семи первых уравнений системы (4.71). Эта подсистема несовместна. Следовательно, в случае $k=1$ не существует неавтономных алгебраических инвариантов.

Далее исследуем случай $k=0$. Введем обратимую замену переменных $x=s$, $y=z-s^3+(\varepsilon-\alpha)s\leftrightarrow s=x$, $z=y+x^3-(\varepsilon-\alpha)x$. Переменную t не меняем. В новых переменных получаем следующую дифференциальную систему

$$s_t=z-s^3+(\varepsilon-\alpha)s,\quad z_t=-\varepsilon z+(\varepsilon\{\varepsilon-\alpha\}-\sigma)s-h(t). \tag{4.73}$$

Существует взаимно однозначное соответствие между неприводимыми неавтономными алгебраическими инвариантами $F(x,y,t)$ системы (4.62) и неприводимыми неавтономными алгебраическими инвариантами $G(x, y, t)$ системы (4.73). Разложение на множители в кольце $\mathbb{C}_\infty\{s\}(\mathbb{A})[z]$ инвариантов системы (4.73) имеет вид

$$G(s, z, t) = \left(z - s^3 + \left\{\frac{4\varepsilon}{3} - \alpha\right\} s - \ldots\right)^k \prod_{j=1}^{N-k} \left(z - b_0^{(j)}(t) - \ldots\right), \qquad (4.74)$$

где индекс k имеет тот же смысл, что и в выражении (4.70). Напомним, что мы исследуем случай $k = 0$. Мы видим, что неприводимые неавтономные алгебраические инварианты системы (4.73) в этом случае имеют вид $G(s, z, t) = z - b_0^{(j)}(t)$ и существуют, если ряды из семейства (I) обрываются на нулевом члене. Отметим, что коэффициент $b_0^{(j)}(t)$ может не принадлежать полю $\mathbb{A}$. Ряды из семейства (I) обрываются на нулевом члене тогда и только тогда, когда $\sigma = \varepsilon(\alpha - \varepsilon)$ и $b_0^{(j)}(t)$ является решением уравнения (4.64). По условию теоремы это уравнение имеет решение $W(t)$ из поля $\mathbb{A}$. Тогда мы заключаем, что многочлен $G(x, y, t) = z - W(t) - C_0 \exp\{-\varepsilon t\}$ является элементом кольца $\mathbb{A}[s, z]$. Далее мы возвращаемся к исходным переменным.

Собственное значение семейства неавтономных алгебраических инвариантов (4.65) находим с помощью Теоремы 4.3. В результате получаем $\lambda(x, y, t) = -\varepsilon$. На этом шаге мы завершаем доказательство теоремы. $\square$

Замечание 1. Если обыкновенное дифференциальное уравнение (4.64) не имеет решений из поля $\mathbb{A}$, то выражение (4.65) по-прежнему определяет единственное семейство неприводимых неавтономных алгебраических инвариантов системы (4.62). Однако, в этом случае инварианты не являются элементами кольца $\mathbb{A}[x, y]$.

Теорема 4.6. *Предположим, что мы находимся в условиях Теоремы 4.5. Дифференциальная система* (4.62) *не интегрируема с двумя независимыми обобщенными первыми интегралами Дарбу. Только при выполнении условия* $\sigma = \varepsilon(\alpha - \varepsilon)$ *система* (4.62) *имеет один независимый первый интеграл,* *который является обобщенной функцией Дарбу:*

$$I_1(x,y,t) = \left\{y + x^3 + (\alpha-\varepsilon)x - W(t)\right\}\exp(\varepsilon t). \tag{4.75}$$

Доказательство. Вспомним, что собственное значение семейства неавтономных алгебраических инвариантов (4.65) постоянно. Следовательно, функция (4.75) является первым интегралом дифференциальной системы (4.62) при выполнении условия $\sigma = \varepsilon(\alpha-\varepsilon)$. Этот первый интеграл представляет собой обобщенную функцию Дарбу.

Сначала рассмотрим случай $\sigma = \varepsilon(\alpha-\varepsilon)$. Предположим, что существует еще один обобщенный первый интеграл Дарбу $I_2(x,y,t)$, не зависимый по отношению к первому интегралу $I_1(x,y,t)$. Мы установили в Теореме 4.5, что рассматриваемая система имеет единственное семейство неприводимых неавтономных алгебраических инвариантов, заданных соотношением (4.65). Следовательно, искомый первый интеграл имеет вид

$$I_2(x,y,t) = \prod_{k=1}^{K}\left(y + x^3 + (\alpha-\varepsilon)x - W(t) - \frac{C_k}{\exp\{\varepsilon t\}}\right)^{d_k}\exp[R(x,y,t)], \tag{4.76}$$

где d_1, …, $d_K \in \mathbb{C}$ и $R(x,y,t) \in \mathbb{A}(x,y)$. Выражая переменную y из первого интеграла $I_1(x,y,t)$ и переопределяя $I_2(x,y,t)$, мы можем без ограничения общности предположить, что независимый по отношению к $I_1(x,y,t)$ обобщенный первый интеграл Дарбу выглядит следующим образом: $\tilde{I}_2(x,y,t) = \exp[\tilde{R}(x,y,t)]$, где $\tilde{R}(x,y,t) \in \mathbb{A}(x,y)$. Далее мы заключаем, что функция $\tilde{R}(x,y,t)$ является обобщенным рациональным первым интегралом системы (4.62). В этом случае числитель и знаменатель функции $\tilde{R}(x,y,t)$ представляют собой неавтономные алгебраические инварианты исследуемой системы. Следовательно, первые интегралы $I_1(x,y,t)$ и $I_2(x,y,t)$ зависимы. Мы пришли к противоречию.

Предположим, что при $\sigma \neq \varepsilon(\alpha-\varepsilon)$ система (4.62) имеет обобщенный первый интеграл Дарбу. Тогда он выглядит следующим образом: $I(x,y,t) =$

$\exp[R(x, y, t)]$, где $R(x, y, t) \in \mathbb{A}(x, y)$. Значит, как и ранее, функция $R(x, y, t)$ является обобщенным рациональным первым интегралом системы (4.62). В силу того, что исследуемая система при $\sigma \neq \varepsilon(\alpha - \varepsilon)$ не имеет неавтономных алгебраических инвариантов, мы видим, что первые интегралы, являющиеся обобщенными функциями Дарбу, также не существуют. $\square$

В заключение этого раздела отметим, что описанный в настоящей главе метод может быть использован при выполнении классификации неавтономных алгебраических инвариантов для многих других неавтономных двумерных дифференциальных систем. В частности, еще один пример неавтономной системы Льенара рассматривался в статье [194].

5 Мероморфные решения автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений

5.1 Существование мероморфных решений и теория Неванлинны

Изучение аналитического продолжения решений, определяемых теоремой о локальном существовании и единственности, является одной из важнейших задач аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Если область существования может быть продолжена на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ за исключением, быть может, счетного числа точек, являющихся полюсами однозначного решения, то соответствующее решение – мероморфная функция. Хорошо известно, что во многих случаях важные с прикладной точки зрения решения дифференциальных уравнений являются мероморфными функциями. Более того, для большого числа дифференциальных уравнений все известные точные решения мероморфны [28]. Существование, явные представления, характеристики роста и другие свойства мероморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений интенсивно изучаются в последние годы [36, 41, 42, 87, 89, 90, 195–200].

Рассмотрим автономное алгебраическое обыкновенное дифференциальное уравнение порядка k, имеющее вид (1.9). Определение степени дифференциального монома алгебраического обыкновенного дифференциального уравнения было дано в Разделе 1.5. Дифференциальный моном, имеющий наибольшую степень среди всех дифференциальных мономов рассматриваемого дифференциального уравнения, будем называть *доминантным дифференциальным мономом.* Следующее свойство достаточно часто является ключевым в работах, посвященных классификации мероморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Свойство конечности. Лишь конечное конечное число формальных рядов Лорана вида

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{k-p}, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

удовлетворяет уравнению (1.9).

Классификация мероморфных решений для некоторых семейств автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих свойством конечности, выполнена, например, в работах [42, 87, 88, 90, 91]. Если уравнение (1.9) имеет свойство конечности и один доминантный дифференциальный моном, тогда все его трансцендентные мероморфные решения исчерпываются эллиптическими и просто-периодическими вида $R(\exp[bt])$, где $R(s)$ – рациональная функция и $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Этот результат был получен А. Е. Еременко [42]. В следующем разделе будет показано, что аналогичная теорема справедлива и для уравнений (1.9), обладающих свойством конечности и двумя доминантными дифференциальными мономами вида $\lambda x^l \{x_t - \mu x\}$, где $\lambda\mu \neq 0$ и $l \in \mathbb{N}$. Основными инструментами при выводе структуры мероморфных решений обыкновенных дифференциальных уравнений со свойством конечности являются лемма Клуни и другие результаты теории Неванлинны.

Лемма 5.1. *Предположим, что ряд Лорана* (5.1) *с однозначно определенными коэффициентами и числом* $p \in \mathbb{N}$ *удовлетворяет алгебраическому обыкновенному дифференциальному уравнению, тогда это уравнение име-*

ет не более одного мероморфного решения, которое можно разложить в окрестности точки $t = 0$ в заданный ряд Лорана.

Эта лемма легко доказывается с помощью свойств рядов Лорана и единственности аналитического продолжения.

Символом $T(r,x)$ обозначим характеристическую функцию Неванлинны мероморфной функции $x(t)$. Напомним, что справедливо равенство $T(r,x) = m(r,x) + N(r,x)$, где $m(r,x)$ – функция приближения и $N(r,x)$ – интегрированная функция числа полюсов. Эти функции определяются равенствами

$$\begin{aligned} m(r,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |x(re^{i\varphi})| d\varphi, \\ N(r,x) &= \int_0^r \frac{n(s,x)-n(0,x)}{s} ds + n(0,x)\ln r, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $\ln^+(q) = \max\{\ln q, 0\}$ и $n(s,x)$ обозначает количество полюсов функции $x(t)$ в круге $\{t \in \mathbb{C} : |t| \le s\}$. Каждый полюс подсчитывается в соответствии с его кратностью.

Лемма 5.2 (Лемма Клуни)**.** *Пусть трансцендентная мероморфная функция $x(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению вида*

$$x^l P(t,x,x_t,\ldots) = Q(t,x,x_t,\ldots), \quad l \in \mathbb{N}, \tag{5.3}$$

где P, Q — это многочлены относительно функции $x(t)$ и ее производных с рациональными коэффициентами. Если степень многочлена Q не превосходит числа l, то справедлива оценка

$$m(r, P(t,x,x_t,\ldots)) = O(\ln\{rT(r,x)\}), \quad r \to \infty, \tag{5.4}$$

возможно, вне множества значений r конечной линейной меры.

Доказательство этой леммы приведено в книгах [201–203]. Напомним, что порядком ϱ мероморфной функции $x(t)$ называют число, заданное соотношением

$$\varrho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln T(r,x)}{\ln r}. \tag{5.5}$$

Если порядок ϱ конечен, то мероморфную функцию $x(t)$ называют мероморфной функцией конечного порядка.

5.2 Дифференциальные уравнения с двумя доминантными дифференциальными мономами

В этом разделе мы рассмотрим автономные алгебраические обыкновенные дифференциальные уравнения, обладающие двумя доминантными дифференциальными мономами, которые образуют следующий доминантный баланс

$$\lambda x^l\{x_t - \mu x\}, \quad \lambda\mu \neq 0, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

При доказательстве Теорем 5.1 и 5.2 мы предполагаем, что все асимптотические соотношения справедливы при достаточно больших значениях параметра r, возможно, вне множества значений r конечной линейной меры, как в Лемме 5.2.

Теорема 5.1. *Если дифференциальное уравнение* (1.9) *с двумя доминантными дифференциальными мономами, заданными выражением* (5.6)*, имеет трансцендентное мероморфное решение с конечным числом полюсов, то это решение имеет вид*

$$x(t) = h_0 + h_1 \exp\left[\mu t\right], \tag{5.7}$$

где $h_0 \in \mathbb{C}$ *и* $h_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *— некоторые постоянные.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ является трансцендентным мероморфным решением уравнения (1.9). Также предположим, что $x(t)$ имеет конечно число полюсов. Следовательно, мы можем представить $x(t)$ в виде

$$x(t) = X(t) + R_1(t), \tag{5.8}$$

где $X(t)$ – трансцендентная целая функция, а $R_1(t)$ – рациональная функция. Применяя Лемму Клуни 5.2 к уравнению (1.9), получаем $m(r, x_t - \mu x) =$

$O(\ln\{rT(r,x)\})$. Поскольку $x(t)$ имеет конечное число полюсов, мы видим, что интегрированная функция числа полюсов ведет себя следующим образом: $N(r,x) = O(\ln r)$. Приходим к асимптотическому соотношению $N(r, x_t - \mu x) = O(\ln r)$. Оценим характеристическую функцию Неванлинны. В результате получаем $T(r, x_t - \mu x) = O(\ln\{rT(r,x)\})$. Из этого соотношения следует, что $x(t)$ имеет конечный порядок и $T(r, x_t - \mu x) = O(\ln r)$. Далее заключаем, что функция $x_t - \mu x$ является рациональной. Обозначим эту функцию символом $R_2(t)$ и рассмотрим дифференциальное уравнение $x_t - \mu x = R_2(t)$. Подставляя представление (5.8) в это уравнение, находим $X_t - \mu X = S_1(t)$, где $S_1(t) = R_2 + \mu R_1 - R_{1,t}$. Мы утверждаем, что $S_1(t)$ является многочленом. Действительно, предполагая противное и выполняя в уравнении $X_t - \mu X = S_1(t)$ сингулярный анализ в окрестности полюса $t_0 \in \mathbb{C}$ функции $S_1(t)$, мы видим, что t_0 является или полюсом, или точкой ветвления для $X(t)$. Но $X(t)$ – целая функция. Пришли к противоречию.

Общее решение дифференциального уравнения $X_t - \mu X = S_1(t)$ принимает вид

$$X(t) = h_1 \exp(\mu t) + S_2(t). \tag{5.9}$$

В этом выражении $S_2(t)$ – многочлен и $h_1 \in \mathbb{C}$ – произвольная постоянная. Таким образом, мы получаем общее представление для трансцендентных мероморфных решений с конечным числом полюсов. Оно выглядит следующим образом:

$$x(t) = h_1 \exp(\mu t) + R_3(t), \tag{5.10}$$

где $R_3(t) = R_1(t) + S_2(t)$ – рациональная функция. Если $h_1 = 0$, то $x(t)$ не является трансцендентной функцией. Поэтому полагаем $h_1 \neq 0$. Подставляя выражение (5.10) в уравнение (1.9) и приравнивая нулю коэффициент при $\exp(l\mu t)$, находим $R_{3,t} - \mu R_3 + A = 0$, где $A \in \mathbb{C}$ – некоторая константа. Любое рациональное решение такого дифференциального уравнения является константой. На этом мы завершаем доказательство. □

Теорема 5.2. *Предположим, что существует* $M \in \mathbb{N}$ *попарно различных рядов Лорана*

$$x^{(j)}(t) = \sum_{n=1}^{p_j} \frac{a_{-n}^{(j)}}{t^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(j)} t^n, \quad p_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \ldots, M, \tag{5.11}$$

удовлетворяющих уравнению (1.9) *с двумя доминантными дифференциальными мономами, заданными выражением* (5.6)*. Если дифференциальное уравнение* (1.9) *имеет трансцендентное мероморфное решение с бесконечным числом полюсов, то это решения являются либо эллиптическим, либо про-*

сто-периодическим вида

$$x(t) = \delta \left\{ \sum_{j=1}^{M} \varepsilon_j \sum_{n=1}^{p_j} \frac{(-1)^{n-1} a_{-n}^{(j)}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \right\} \cot\left(\delta\{t - t_j\}\right) \\ + h_0 + h_1 \exp\left(\mu t\right), \tag{5.12}$$

где t_1*, …,* t_M *– попарно различные полюсы, лежащие в полосе периодов. При этом* $\varepsilon_j = 1$*, если решение* $x(t)$ *имеет полюсы с рядом Лорана* $x^{(j)}(t)$*, или* $\varepsilon_j = 0$ *в противном случае,* h_0 *и* h_1 *— некоторые постоянные. Если* $h_1 \neq 0$*, то существует число* $q \in \mathbb{Q}/\{0\}$*,* $q > 0$ *такое, что выполнено соотношение* $2\delta = q\mu i$*.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ является трансцендентным мероморфным решением уравнения (1.9) и имеет бесконечное число полюсов. Поскольку число попарно различных рядов Лорана вида (5.1), которые удовлетворяют уравнению (1.9), конечно, мы видим, что существуют два различных полюса α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ такие, что функции $x(t + \alpha_1)$ и $x(t + \alpha_2)$ раскладываются в один и тот же ряд Лорана в окрестности начала координат. Кроме того, эти функции удовлетворяют уравнению (1.9) в силу автономности последнего. Из Леммы 5.1 получаем равенство $x(t + \alpha_1) \equiv x(t + \alpha_2)$. Откуда следует условие периодичности функции $x(t)$: $x(t) \equiv x(t + \alpha_2 - \alpha_1)$. Периодическая мероморфная функция является или эллиптической, или просто-периодической. Если

$x(t)$ – эллиптическая функция, то теорема доказана. Далее предположим, что $x(t)$ – просто-периодическая мероморфная функция. Аналогично предыдущим рассуждениям, мы приходим к выводу, что $x(t)$ не может иметь более M различных полюсов в полосе периодов.

Ряды Лорана вида (5.1), удовлетворяющие уравнению (1.9), приведены в соотношении (5.11). Используя равенство

$$\frac{\pi}{T}\cot\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \frac{1}{t} + \sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0}\left(\frac{1}{t-nT}+\frac{1}{nT}\right), \tag{5.13}$$

где $T \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ является основным периодом функции $\cot(\pi t/T)$, мы видим, что $x(t)$ можно представить в виде

$$\begin{gathered} x(t) = X(t) + R_1(t), \\ R_1(t) = \delta\left\{\sum_{j=1}^{M}\varepsilon_j\sum_{n=1}^{p_j}\frac{(-1)^{n-1}a_{-n}^{(j)}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\right\}\cot\left(\delta\{t-t_j\}\right), \quad \delta = \frac{\pi}{T}, \end{gathered} \tag{5.14}$$

где $t_1, \ldots, t_M$ – попарно различные полюсы, лежащие в полосе периодов, $\varepsilon_j = 1$, если $x(t)$ имеет полюсы с рядом Лорана $x^{(j)}(t)$ и $\varepsilon_j = 0$ в противном случае, и $X(t)$ – периодическая целая функция. Применяя Лемму Клуни 5.2 к уравнению (1.9), находим $m(r, x_t - \mu x) = O(\ln\{rT(r,x)\})$. Интегрированная функция числа полюсов может быть оценена следующим образом: $N(r,x) = O(r)$. В результате приходим к асимптотическому соотношению $N(r, x_t - \mu x) = O(r)$. Следовательно, $x(t)$ является просто-периодической мероморфной функцией конечного порядка и выполнено условие $T(r, x_t - \mu x) = O(r)$.

Мы видим, что существует число $\sigma \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, такое что функция $x_t - \mu x$ является рациональной относительно $\exp(\sigma t)$. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение $x_t - \mu x = R_2(t)$, где $R_2(t)$ рациональная функция относительно $\exp(\sigma t)$. Подставляя представление (5.14) в это уравнение, мы находим обыкновенное дифференциальное уравнение для периодической целой функции $X(t)$. Это уравнение имеет вид $X_t - \mu X = S(t)$, где $S(t) = R_2 - R_{1,t} + \mu R_1$. Мы утверждаем, что мероморфная функция $S(t)$ не имеет полюсов. Действительно, предполагая противное и выполняя сингулярный анализ в уравнении $X_t-\mu X = S(t)$ в окрестности полюса $t_0 \in \mathbb{C}$ функции $S(t)$, мы видим, что t_0 является полюсом или точкой ветвления целой функции $X(t)$. Пришли к противоречию. Следовательно, функцию $S(t)$ можно представить в виде $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$, где $S_1(t)$ – многочлен относительно $\exp(\sigma t)$ и $S_2(t)$ – многочлен относительно $\exp(-\sigma t)$. Общее решение дифференциального уравнения $X_t - \mu X = S_1(t) + S_2(t)$, являющееся периодической функцией, выглядит следующим образом:

$$X(t) = h_1 \exp{(\mu t)} + Q_1(t) + Q_2(t), \tag{5.15}$$

где $h_1 \in \mathbb{C}$ – произвольная постоянная и $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ – многочлены относительно $\exp(\sigma t)$, $\exp(-\sigma t)$ соответственно. Подставляя соотношение (5.15) в выражение (5.14), находим

$$\begin{gathered} x(t) = \delta \left\{ \sum_{j=1}^{M} \varepsilon_j \sum_{n=1}^{p_j} \frac{(-1)^{n-1} a_{-n}^{(j)}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \right\} \cot{(\delta\{t - t_j\})} + h_1 \exp{(\mu t)} \\ + Q_1(t) + Q_2(t). \end{gathered} \tag{5.16}$$

Отметим, что параметры σ, δ и μ не являются независимыми, поскольку функция (5.16) является просто-периодической мероморфной. Обозначим основной период этой функции символом $\tau \in \mathbb{C}$. Тогда эти параметры выражаются через τ.

Далее рассмотрим следующее асимптотическое представление

$$\begin{gathered} x(t) = A_1 \exp{(\theta_1 t)} + A_2 \exp{(\theta_2 t)} + o\left\{\exp{(\theta_2 t)}\right\}, \\ \mathrm{Re}(\theta_1 t) > \mathrm{Re}(\theta_2 t), \quad t \to \infty, \end{gathered} \tag{5.17}$$

где $A_1 \neq 0$, A_2, θ_1, θ_2 – константы, а переменная t стремится к бесконечности вдоль такого пути, что выполнено условие $\mathrm{Re}(\theta_1 t) > 0$. Подставляя это представление в уравнение (1.9) и приравнивая нулю коэффициенты при $\exp(\theta_1\{l+1\}t)$, $\exp(\{\theta_1 l + \theta_2\}t)$, находим $\theta_1 = \mu$ и $\theta_2 = 0$.

Выражение (5.17) является асимптотикой для решения (5.16). Анализируя эти соотношения, получаем

$$x(t) = \delta \left\{ \sum_{j=1}^{M} \varepsilon_j \sum_{n=1}^{p_j} \frac{(-1)^{n-1} a_{-n}^{(j)}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \right\} \cot\left(\delta\{t - t_j\}\right) \tag{5.18}$$

$$+h_1 \exp\left(\mu t\right) + h_0,$$

Завершая доказательство, нам остается отметить, что функции $\cot\left(\delta\left\{t - t_j\right\}\right)$, $1 \le j \le M$ и $\exp\left(\mu t\right)$ должны иметь совпадающий период. Следовательно, если $h_1 \neq 0$, то существует такое положительное число $q \in \mathbb{Q}$, что выполнено соотношение $2\delta = q\mu i$. □

Если существует бесконечное число рядов Лорана (5.1), удовлетворяющих уравнению (1.9) с двумя доминантными дифференциальными мономами вида (5.6), то результаты Теоремы 5.2 могут быть использованы для классификации мероморфных просто-периодических решений с конечным числом полюсов в полосе периодов. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.3. *Пусть дифференциальное уравнение* (1.9) *с двумя доминантными дифференциальными мономами, заданными выражением* (5.6), *имеет просто-периодическое мероморфное решение с конечным числом полюсов в полосе периодов. Тогда такое решение имеет вид* (5.12).

Далее докажем простое утверждение, позволяющее связать параметры δ и μ, появляющиеся в представлении (5.12).

Лемма 5.3. *Пусть t стремится к бесконечности вдоль такого пути, что выполнено условие $Re\{\mu t\} > 0$. Тогда для функции* (5.12) *справедливо асимптотическое представление*

$$x(t) = h_1 \exp\left[\mu t\right] + h_0 + \frac{q\mu}{2} \sum_{j=1}^{M} \varepsilon_j a_{-1}^{(j)} + o(1),\ Re\{\mu t\} > 0,\ t \to \infty. \tag{5.19}$$

Доказательство. Подставим равенство $2\delta = q\mu i$, где $q \in \mathbb{Q}/\{0\}$ и $q > 0$, в соотношение

$$\cot\left[\delta\left\{t - t_j\right\}\right] = \frac{\{1 + \exp[-2i\delta(t - t_j)]\}\, i}{1 - \exp[-2i\delta(t - t_j)]} \tag{5.20}$$

В результате получим

$$\cot\left[\delta\left\{t - t_j\right\}\right] = \frac{\{1 + \exp[q\mu(t - t_j)]\}\, i}{1 - \exp[q\mu(t - t_j)]}. \tag{5.21}$$

Вычисляя предел при $t \to \infty$, $\operatorname{Re}\{\mu t\} > 0$, находим

$$\begin{gathered} \cot\left[\delta\left\{t - t_j\right\}\right] = -i + o(1), \quad \operatorname{Re}\{\mu t\} > 0, \quad t \to \infty, \\ \frac{d^n}{dt^n}\cot\left[\delta\left\{t - t_j\right\}\right] = o(1), \quad \operatorname{Re}\{\mu t\} > 0, \quad t \to \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{5.22}$$

Далее подставляем эти асимптотические соотношения в выражение (5.12). □

Отметим, что с помощью равенства $i\cot(is) = \coth s$ тригонометрическая функция $\cot(is)$ преобразуется в гиперболическую $\coth s$. Следовательно, используя подстановку $\delta = i\omega$, мы можем привести соотношение (5.12) к виду

$$\begin{gathered} x(t) = \omega\left\{\sum_{j=1}^{M}\varepsilon_j\sum_{n=1}^{p_j}\frac{(-1)^{n-1}a_{-n}^{(j)}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\right\}\coth\left(\omega\{t - t_j\}\right) \\ +h_0 + h_1\exp\left[\mu t\right], \end{gathered} \tag{5.23}$$

где $2\omega = q\mu$, $q \in \mathbb{Q}/\{0\}$, $q > 0$, если $h_1 \neq 0$.

В рамках Теорем 5.1 и 5.2 получено общее представление всех трансцендентных мероморфных решений уравнений вида (1.9), обладающих свойством конечности и двумя доминантными дифференциальными мономами (5.6). Далее возникает проблема поиска этих решений в явном виде. В следующем разделе будет показано, что метод рядов Пюизе может быть использован для построения и классификации трансцендентных мероморфных решений, являющихся или эллиптическими функциями, или композицией рациональной и экспоненциальной функций.

5.3 Алгоритм нахождения $\mathbb{W}$-мероморфных решений в явном виде

Определим $\mathbb{W}$ как множество всех трансцендентных мероморфных функций, которые являются или эллиптическими, или просто-периодическими вида $R(\exp\{\alpha t\})$, где $R(s)$ – рациональная функция и $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Это название было дано А. Е. Еременко в честь К. Вейерштрасса (K. Weierstrass).

Множество $\mathbb{W}$ обладает двумя замечательными свойствами. Во-первых, любая функция $x(t)$ из $\mathbb{W}$ имеет алгебраическую теорему сложения. Пусть существует неприводимый многочлен трех переменных $G(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3] \setminus \mathbb{C}$ такой, что для любых $t \in \mathbb{C}$ и $s \in \mathbb{C}$ справедливо соотношение $G(x(t), x(s), x(t+s)) = 0$. Тогда будем говорить, что для мероморфной функции $x(t)$ справедлива алгебраическая теорема сложения. Отметим, что коэффициенты многочлена G не должны зависеть от t и s. Хорошо известно, что не существует трансцендентных мероморфных функций, отличных от функций из $\mathbb{W}$, обладающих алгебраической теоремой сложения. Этот факт был доказан К. Вейерштрассом (K. Weierstrass). Во-вторых, любая функция $x(t)$, принадлежащая множеству $\mathbb{W}$, является решением автономного алгебраического обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $F(x, x_t) = 0$, где $F(x, y)$ – неприводимый многочлен двух переменных [40]. Таким образом, мы заключаем, что решения уравнения (1.9) из множества $\mathbb{W}$ являются алгебраически инвариантными решениями. Следовательно, мы можем использовать метод рядов Пюизе для нахождения $\mathbb{W}$-мероморфных решений.

Для построения некоторых $\mathbb{W}$-мероморфных решений М. Мюзетт (M. Musette) и Р. Конт (R. Conte) предложили метод [30, 32], который назвали методом вспомогательного уравнения. Отметим, что этот метод не позволяет находить все $\mathbb{W}$-мероморфные решения для уравнений вида (1.9), не обладающих свойством конечности и (или) имеющих несколько доминантных дифференциальных мономов. В то же время метод рядов Пюизе, описанный в Разделе 1.4, лишен этого недостатка и для широких классов уравнений (1.9) без свойства конечности и (или) с несколькими доминантными дифференциальными мономами позволяет находить все $\mathbb{W}$-мероморфные решения. Отметим особенности метода, в случае если нас интересуют именно решения из множества $\mathbb{W}$.

Теорема 5.4. *Пусть $x(t)$ является $\mathbb{W}$-мероморфным решением уравнения* (1.9). *Тогда существует неприводимый в кольце $\mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}[x]$ многочлен $F(x,y)$ и число $N \in \mathbb{N}$ такие, что $x(t)$ удовлетворяет алгебраическому обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка $F(x,x_t) = 0$, где многочлен $F(x,y)$ имеет вид*

$$F(x,y) = \left\{ \prod_{j=1}^{N} \{y - y_{j,\infty}(x)\} \right\}_{+} . \tag{5.24}$$

В этом выражении $y_{1,\infty}(x)$, …, $y_{N,\infty}(x)$ – попарно различные ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$, которые

(A): являются решениями уравнения (1.11)*;*

(B): имеют доминантный моном вида $b_0^{(j)}x$ или $b_0^{(j)}x^{(p_j+1)/p_j}$, где $b_0^{(j)} \neq 0$ и $p_j \in \mathbb{N}$ – порядок некоторого полюса $x(t)$;

(C): удовлетворяют условиям

$$\left\{ \sum_{j=1}^{N} (y_{j,\infty}(x))^k \right\}_{-} = 0, \quad 1 \le k \le N. \tag{5.25}$$

Доказательство. Хорошо известно, что любое $\mathbb{W}$-мероморфное решение уравнения (1.9) также удовлетворяет уравнению $F(x,x_t) = 0$, где многочлен

$F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C}[x]$ неприводим в кольце $\mathbb{C}[x,y]$, см. [40]. Справедливость представления (5.24) и условия (A) следует из Теоремы 1.1 и Леммы 1.2 соответственно.

Как и ранее, символом $\mu(x) \in \mathbb{C}[x]$ обозначим старший коэффициентом многочлена $F(x,y)$ относительно переменной y. Покажем, что $\mu(x)$ является константой. От противного. Пусть $x_0 \in \mathbb{C}$ – нуль многочлена $\mu(x)$. Разложим многочлен $F(x,y)$ на множители в кольце $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}[y]$. В результате получим

$$F(x,y) = \mu(x) \prod_{j=1}^{N} \{y - y_{j,x_0}(x)\}, \tag{5.26}$$

где по Лемме 1.3 ряды Пюизе $y_{1,x_0}(x)$, …, $y_{N,x_0}(x)$ из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$ удовлетворяют уравнению (1.11). Существует индекс j_0 такой, что показатель степени доминантного члена ряда $y_{j_0,x_0}(x)$ имеет отрицательный знак. Действительно, предполагая противное, мы видим, что алгебраические кривые $F(x,y) = 0$ и $x - x_0 = 0$ пересекаются на бесконечном множестве точек. В соответствии с теоремой Безу, эти кривые имеют общую компоненту. Эта компонента имеет вид $x - x_0 = 0$. Следовательно, многочлен $F(x,y)$ приводим в кольце $\mathbb{C}[x,y]$. Пришли к противоречию. Далее рассмотрим диаграмму Ньютона для обыкновенного дифференциального уравнения $x_t = y_{j_0,x_0}(x(t))$. Несложно убедиться, что выражение $x_t - b_0^{(j_0)}(x-x_0)^r$ является доминантным балансом этого уравнения. Напомним, что справедливы следующие условия: $r \in \mathbb{Q}$ и $r < 0$. Решая уравнение $x_t - b_0^{(j_0)}(x-x_0)^r = 0$, находим $x(t) - x_0 = \tilde{b}_0^{(j_0)}(t-t_0)^{-1/(r-1)}$, где $t_0 \in \mathbb{C}$ и $\tilde{b}_0^{(j_0)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Это выражение определяет асимптотическое поведение функции $x(t)$ в окрестности точки $t_0 \in \mathbb{C}$. Функция $x(t)$ с такой асимптотикой не является однозначной, поскольку $1/(r-1) \notin \mathbb{Z}$. Мы пришли к противоречию, см. также [204]. Таким образом, многочлен $\mu(x)$ не имеет нулей. Без ограничения общности полагаем $\mu(x) \equiv 1$.

Далее исследуем доминантное поведение рядов в представлении (5.24). Уравнение $F(x,y) = 0$ определяет компактную риманову поверхность, которую обозначим символом R. Получающееся множество R обладает комплексной структурой, описываемой локальными картами. Мероморфная функция x порождает отображение $f : \mathbb{C} \to R$, определяемой выражением $f(t) = (x(t), x_t(t))$. Отметим, что если x является эллиптической функцией, то f можно определить как непостоянное голоморфное отображение тора $\mathbb{C}/\Lambda$ на поверхность R. Здесь Λ представляет собой решетку, образованную двумя основными периодами функции x. Также введем проекцию $\pi : R \to \overline{\mathbb{C}}_x$ по правилу $\pi(x, y) = x$. Пусть $P \subset R$ – это множество точек, проектируемых отображением π в $x = \infty$. Рассмотрим точку $s \in P$. Если s не имеет прообразов относительно отображения f, то x не может быть эллиптической функцией и, следовательно, x является рациональной функцией относительно $\exp(\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Справедливо следующее асимптотическое представление: $x(t) = \exp(\omega t)(a_0 + o(1))$, $x_t(t) = \exp(\omega t)(a_0\omega + o(1))$, $a_0\omega \neq 0$, $|t| > r_0$, $\varphi_1 < \arg t < \varphi_2$. Это представление определяет ряд Пюизе $y_{j,\infty}(x)$ с доминантным поведением $b_0^{(j)}x$. Пусть теперь s имеет прообраз относительно преобразования f. Тогда этот прообраз является некоторым полюсом $t_0 \in \mathbb{C}$ функции x. Обозначим символом $p_j \in \mathbb{N}$ порядок этого полюса. Используя представления в окрестности полюса: $x(t) = (t - t_0)^{-p_j}(e_0 + o(1))$ и $x_t(t) = (t - t_0)^{-p_j-1}(-p_j e_0 + o(1))$, $e_0 \neq 0$, $t \to t_0$, мы находим доминантное поведение соответствующего ряда Пюизе. Оно имеет вид $b_0^{(j)}x^{(p_j+1)/p_j}$. Условие (B) доказано, см. также [196].

Несложно убедиться, что условие (C) является следствием Леммы 1.5.

□

Следствие 1. Если не существует рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$ с доминантным поведением вида $b_0^{(j)}x$ или $b_0^{(j)}x^{(p_j+1)/p_j}$, $b_0^{(j)} \neq 0$, которые удовлетворяют уравнению (1.11), то уравнение (1.9) не имеет $\mathbb{W}$-мероморфных решений.

Следствие 2. Пусть $x(t)$ является эллиптической функцией. Тогда ряды Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$ с доминантным поведением вида $b_0^{(j)}x$, $b_0^{(j)} \neq 0$ не могут появляться в представлении (5.24) многочлена $F(x, y)$. Действительно, параллелограмм периодов эллиптической функции является ограниченным множеством, поэтому любая точка $s \in P$ имеет прообраз относительно преобразования π.

Следствие 3. Пусть x является просто-периодической $\mathbb{W}$-мероморфной функцией. Если в представлении (5.24) появляются несколько различных рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{x\}$ с доминантным поведением вида $b_0^{(j)}x$, $b_0^{(j)} \neq 0$, то такие ряды имеют не более двух различных старших коэффициентов $b_0^{(j)}$. Это утверждение следует из разложения рациональной функции на простейшие дроби, в которое необходимо подставить $\exp(\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Отметим, что параметр N в представлении (5.24) ограничен, если число различных рядов Пюизе, удовлетворяющих условиям (A) и (B) Теоремы 5.4, конечно. В этом случае, решая алгебраическую систему, возникающую из условия (C), мы можем построить все обыкновенные дифференциальные уравнения вида $F(x, x_t) = 0$, определяющие $\mathbb{W}$-мероморфные решения уравнения (1.9). Наиболее сложны для анализа случаи, когда параметр N заранее неизвестен и все ряды Пюизе в представлении (5.24) имеют хотя бы один произвольный коэффициент (произвольный в том смысле, что он не может быть найден из уравнения (1.11)). В такой ситуации для решения алгебраической системы, возникающей из условия (C), может применяться Теорема 1.5.

Далее покажем, что рады Лорана (5.1), удовлетворяющие уравнению (1.9), порождают ряды Пюизе, появляющиеся в представлении (5.24).

Лемма 5.4. *Пусть* $E[x(t)]$ *является доминантным балансом для точки* $t = 0$ *уравнения* (1.9). *Если этот баланс порождает ряд Лорана* (5.1) *с доминантным поведением* $x(t) = a_0 t^{-p}$, $t \to 0$, *то у уравнения* (1.11) *есть доминантный баланс* $W[y(x), x]$, *которому соответствуют* p *рядов Пюизе с доминантным поведением* $y(x) = -pa_0^{-1/p}x^{(p+1)/p}$, $x \to \infty$. *Более того, для каждого показателя Ковалевской* $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *баланса* $E[x(t)]$ *на функ-*

ции $x(t) = a_0 t^{-p}$ существует показатель Ковалевской $l_0 = k_0/p$ баланса $W[y(x), x]$ на функции $y(x) = -pa_0^{-1/p} x^{(p+1)/p}$.

Доказательство. По построению преобразование $y(x) = x_t(t)$, $x = x(t)$ связывает доминантные балансы уравнений (1.9) и (1.11). Меняя зависимую и независимую переменные в ряде (5.1), получаем p рядов Пюизе с доминантным поведением $t = a_0^{1/p} x^{-1/p}$, $x \to \infty$. Далее продифференцируем ряд (5.1) по переменной t и подставим полученные ряды Пюизе $t = a_0^{1/p} x^{-1/p} + \ldots$ в этот ряд. В результате найдем p рядов Пюизе вида (1.13), где $n_0 = p$, $n_1 = p + 1$ и $b_0 = -pa_0^{-1/p}$.

Пусть $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ является показателем Ковалевской баланса $E[x(t)]$ на функции $x(t) = a_0 t^{-p}$. Повторяя предыдущие действия, отслеживаем коэффициент a_{k_0}. Первое появление коэффициента a_{k_0} в получающихся рядах Пюизе происходит при мономе $x^{(p+1)/p - k_0/p}$. Таким образом, мы заключаем, что число $l_0 = k_0/p$ является показателем Ковалевской баланса $W[y(x), x]$ на функции $y(x) = -pa_0^{-1/p} x^{(p+1)/p}$. □

Замечание 1. Соотношение $l_0 = k_0/p$ справедливо для всех показателей Ковалевской балансов $E[x(t)]$ и $W[y(x), x]$ на соответствующих функциях, за исключением показателя $k_0 = -1$. Также условия совместности для соответствующих показателей Ковалевской порождают одни и те же алгебраические многообразия относительно коэффициентов исходных уравнений.

Замечание 2. Поскольку показатели Ковалевской $k_0 \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ баланса $E[x(t)]$ не порождают произвольные коэффициенты рядов Лорана (5.1), соответствующие им показатели Ковалевской k_0/p баланса $W[y(x), x]$ можно не учитывать при нахождении алгебраических инвариантов, соответствующих $\mathbb{W}$-мероморфным решениям. Другими словами, коэффициенты, соответствующие этим показателям, можно считать нулевыми. Отметим, что это замечание справедливо только для рядов Пюизе из Теоремы 5.4 с доминантным поведением $b_0 x^{(p+1)/p}$.

Предположим, что мы нашли все неприводимые алгебраические инварианты уравнения (1.9) такие, что справедливы все ограничения Теоремы 5.4. Выбирая инварианты, для которых выполняются дополнительные ограничения, указанные ниже, мы можем найти все мероморфные решения уравнения (1.9) из множества $\mathbb{W}$. Символом $\triangle_y F(x,y)$ обозначим дискриминант $F(x,y)$ относительно переменной y. Дополнительные ограничения имеют вид:

1. любой нуль $x_0 \in \mathbb{C}$ дискриминанта $\triangle_y F(x,y)$ является постоянным решением уравнения $F(x,x_t)=0$;
2. для любого $x_0 \in \mathbb{C}$, являющегося нулем дискриминанта $\triangle_y F(x,y)$, каждый ряд Пюизе $y_{x_0}(x)$ из поля $\mathbb{C}_{x_0}\{x\}$, который удовлетворяет уравнению $F(x,y)=0$ и имеет индекс ветвления m, отличный от 1, принимает вид
$$y_{x_0}(x) = c_0 + c_n (x-x_0)^{\frac{n}{m}} + \ldots, \quad n \geq m-1; \tag{5.27}$$
3. индекс ветвления любого ряда Пюизе $y_{j,\infty}(x)$, появляющегося в представлении (5.24) и имеющего доминантное поведение $b_0^{(j)} w^{(p_j+1)/p_j}$, $b_0^{(j)} \neq 0$, равен $p_j \in \mathbb{N}$.

Эти условия называют условиями Фукса [41]. Если род алгебраической кривой $F(x,y)=0$, заданной инвариантом $F(x,y)$, равен нулю, то уравнение $F(x,x_t)=0$ интегрируется в просто-периодических мероморфных функциях. В этом случае рациональная параметризация алгебраической кривой $F(x,y)=0$ может быть использована для нахождения решений в явном виде. Аналогичный подход использовался в Разделе 1.6.

Если род алгебраической кривой $F(x,y)=0$, заданной инвариантом $F(x,y)$, равен единице, то уравнение $F(x,x_t)=0$ интегрируется в эллиптических функциях. Любую эллиптическую функцию можно представить в виде рациональной функции от эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(t;g_2,g_3)$

и ее производной $\wp_t(t; g_2, g_3)$, см. [66]. Напомним, что эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(t;\, g_2,\, g_3)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$(\wp_t)^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \quad g_2, g_3 \in \mathbb{C}. \tag{5.28}$$

Также существует прямой метод нахождения решений из множества $\mathbb{W}$. Этот метод основан на разложениях Эрмита $\mathbb{W}$-мероморфных функций [90–92, 199, 199, 205]. Просто-периодические мероморфные функции можно представить следующим образом:

$$\begin{gathered} x(t) = \omega \left\{ \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{p_m} \frac{(-1)^{k-1} a_{p_m-k}^{(m)}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \right\} \coth\left(\omega\{t - t_m\}\right) \\ + \sum_{k=K_1}^{K_2} h_k \exp\left[2\omega k t\right], \end{gathered} \tag{5.29}$$

где K_1, $K_2 \in \mathbb{Z}$, коэффициенты $\left\{a_{p_m-k}^{(m)},\, k = 1, \ldots, p_m\right\}$ задаются главными частями рядов Лорана в окрестности полюсов $\{t_m \in \mathbb{C},\, m = 1, \ldots, M\}$ порядков $\{p_m \in \mathbb{N},\, m = 1, \ldots, M\}$. Эти ряды имеют вид

$$x^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{(m)} (t - t_m)^{k - p_m}, \quad p_m \in \mathbb{N} \tag{5.30}$$

и удовлетворяют уравнению $F(x, x_t) = 0$. Напомним, что многочлен $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ является алгебраическим инвариантом уравнения (1.9) и удовлетворяет условиям Теоремы 5.4. Без ограничения общности положим $K_1 \leq 0$ и $K_2 \geq 0$. Целая часть

$$h(t) = \sum_{k=K_1}^{K_2} h_k \exp\left[2\omega k t\right] \tag{5.31}$$

в выражении (5.29) отлична от константы тогда и только тогда, когда представление (5.24) многочлена $F(x, y)$ содержит хотя бы один ряд Пюизе с доминантным поведением $b_0^{(j)} x$, $b_0^{(j)} \neq 0$. Это утверждение является следствием следующего факта. Функции $x(t)$, заданные выражением (5.29), имеют экспоненциальные асимптотики $x(t) = A\exp(\alpha t)$, $A\alpha \neq 0$, $t \to \infty$, $\mathrm{Re}\,\alpha t > 0$ в том и только том случае, когда целая часть непостоянна. Решения автономного обыкновенного дифференциального уравнения $F(x, x_t) = 0$ имеют подобные асимптотики, если граница многоугольника Ньютона этого уравнения содержит горизонтальное ребро. Такие ребра не могут определяться рядами Пюизе с доминантным поведением $b_0^{(j)} x^{(p_j+1)/p_j}$, $p_j \in \mathbb{N}$, $b_0^{(j)} \neq 0$. Ряды Пюизе, отвечающие за целую часть, имеют вид

$$\begin{aligned} y_{j_1,\infty}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} b_k^{(j_1)} x^{\frac{|K_1|-k}{|K_1|}}, \quad b_0^{(j_1)} = 2\omega K_1, \quad j_1 = 1, \dots, |K_1|,\ K_1 \neq 0, \\ y_{j_2,\infty}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} b_k^{(j_2)} x^{\frac{K_2-k}{K_2}}, \quad b_0^{(j_2)} = 2\omega K_2, \quad j_2 = 1, \dots, K_2,\ K_2 \neq 0. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Эллиптические функции можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t) = \left\{ \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=2}^{p_m} \frac{(-1)^k a_{p_m-k}^{(m)}}{(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \right\} \wp(t - t_m) \\ + \sum_{m=1}^{M} a_{p_m-1}^{(m)} \zeta(t - t_m) + h_0, \end{aligned} \tag{5.33}$$

где $h_0 \in \mathbb{C}$ – некоторая постоянная и $\zeta(t) = \zeta(t; g_2, g_3)$ обозначает дзета-функцию Вейерштрасса. Отметим, что, если эллиптические решения (5.33) существуют, то должно выполняться условие на вычеты

$$\sum_{m=1}^{M} a_{p_m-1}^{(m)} = 0. \tag{5.34}$$

Коэффициенты $\left\{ a_{p_m-k}^{(m)},\ k = 1, \dots, p_m \right\}$ в выражении (5.33) опять задаются главными частями рядов Лорана (5.30), которые удовлетворяют уравнению $F(x, x_t) = 0$, где $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ – соответствующий алгебраический инвариант уравнения (1.9).

Используя метод рядов Пюизе, мы можем дополнить Теорему 5.2.

Лемма 5.5. *Предположим, что мы находимся в условиях Теоремы 5.2. Если* $h_1 \neq 0$ *в выражении* (5.12), *то* $q = 1$.

Доказательство. Понижая порядок в исходном уравнении, мы видим что получающееся уравнение для функции $y(x)$ имеет доминантный баланс $\lambda x^l(y - \mu x)$. Этот баланс не имеет показателей Ковалевской и порождает единственный ряд Пюизе с доминантным поведением $y(x) = b_0^{(j)}x$, $x \to \infty$, причем $b_0^{(j)} = \mu$. Более того, индекс ветвления этого ряда равен единице. Мы видим, что в соотношении (5.32) выполнено $K_2 = 1$. Сравнивая выражения (5.23) и (5.29), находим $2\omega = \mu$. Из соотношения $\delta = i\omega$ следует $2\delta = \mu i$ и $q = 1$. □

Для нахождения в явном виде решений, заданных выражениями (5.29) и (5.33) мы предлагаем следующий алгоритм.

На *первом шаге* необходимо разложить решения (5.29) и (5.33) в ряды Лорана в окрестности полюсов $t_1, \ldots, t_M$. Для облегчения вычислений удобно вместо t_m ввести следующие переменные: $G_m \overset{def}{=} \exp[2\omega t_m]$, $A_m \overset{def}{=} \wp(t_m)$, $B_m \overset{def}{=} \wp_t(t_m)$. Также величина h_0 в выражении (5.33) должна быть заменена на

$$g_0 \overset{def}{=} h_0 - \sum_{m=1}^{M} a_{p_m-1}^{(m)}\zeta(t_m) - \sum_{m=1}^{M} a_{p_m-2}^{(m)}\wp(t_m). \tag{5.35}$$

Отметим, что величины A_m и B_m не являются независимыми. Они удовлетворяют соотношению $B_m^2 = 4A_m^3 - g_2A_m - g_3$, являющемуся следствием уравнения (5.28).

Также в случае просто-периодических мероморфных решений с непостоянной целой частью необходимо в выражении (5.29) сделать замену независимой переменной t в соответствии с равенствами: $s = \exp[2\omega t]$, если $K_2 > 0$, и $z = \exp[-2\omega t]$, если $K_1 < 0$. Далее нужно найти ряды Лорана в окрестностях точек $s = \infty$ и $z = \infty$ в получающихся соотношениях.

На *втором шаге* нужно подставить все ряды Лорана первого шага в уравнение $F(x, x_t) = 0$. Если $K_2 > 0$ и/или $K_1 < 0$, новые переменные s и/или z должны быть введены в рассматриваемом уравнении $F(x, x_t) = 0$. Затем нужно приравнять нулю коэффициенты при $(t - t_m)^k$, где $k \leq 0$, $m = 1$,

$\ldots$, M и коэффициенты при s^k, z^k, где $k \geq 0$.

На *третьем шаге* необходимо решить алгебраическую систему второго шага. Напомним, что в случае эллиптических решений в систему нужно добавить уравнения $B_m^2 = 4A_m^3 - g_2 A_m - g_3$, $m = 1, \ldots, M$. Требуется найти следующие величины:

$$\begin{aligned} &\text{род } 0: \quad \omega,\, G_1, \ldots, G_M,\, h_{K_1}, \ldots, h_{K_2}; \\ &\text{род } 1: \quad g_0,\, g_2,\, g_3,\, A_1,\, B_1, \ldots, A_M,\, B_M. \end{aligned} \tag{5.36}$$

При этом мы предполагаем, что коэффициенты $\left\{a_{p_m-k}^{(m)},\, k = 1, \ldots, p_m\right\}$, $\{p_m\}$, где $m = 1, \ldots, M$, были найдены на первом шаге, а числа M, K_1 и K_2 были определены из представления (5.24) и индексов ветвления рядов Пюизе, появляющихся в этом представлении, см. также (5.32).

На *четвертом шаге* используется теоремы и формулы сложения, для того чтобы переписать решения (5.29) и (5.33) через найденные величины (5.36). В результате получаем:

- просто-периодические мероморфные решения

$$\begin{aligned} x(t) = \omega \left\{ \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{p_m} \frac{(-1)^{k-1} a_{p_m-k}^{(m)}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \right\} \frac{1 - L_m \coth(\omega t)}{\coth(\omega t) - L_m} \\ + \sum_{k=K_1}^{K_2} h_k \exp\left[2\omega k t\right]; \end{aligned} \tag{5.37}$$

- эллиптические решения

$$\begin{aligned} x(t) = \left\{ \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=2}^{p_m} \frac{(-1)^{k} a_{p_m-k}^{(m)}}{(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \right\} \left(\frac{1}{4} \left[\frac{\wp_t(t) + B_m}{\wp(z) - A_m} \right]^2 - \wp(t) \right) \\ + \sum_{m=1}^{M} \frac{a_{p_m-1}^{(m)} (\wp_t(t) + B_m)}{2(\wp(t) - A_m)} + g_0. \end{aligned} \tag{5.38}$$

В выражении (5.37) мы ввели обозначение $L_m = (G_m + 1)/(G_m - 1)$. Формула сложения для функции $\zeta(t; g_2, g_3)$ и теорема сложения для функции $\wp(t; g_2, g_3)$, используемые на четвертом шаге, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \zeta(z - s) &= \zeta(z) - \zeta(s) + \frac{1}{2}\frac{\wp_z(z) + \wp_z(s)}{\wp(z) - \wp(s)}, \\ \wp(z - s) &= -\wp(z) - \wp(s) + \frac{1}{4}\left[\frac{\wp_z(z) + \wp_z(s)}{\wp(z) - \wp(s)}\right]^2. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Если в представлении (5.24) нет рядов Пюизе с доминантным поведением $b_0^{(j)}x$, $b_0^{(j)} \neq 0$, то целая часть (5.31) отсутствует в выражении (5.29). В этом случае на первом шаге удобнее использовать величины $L_m = \coth(\omega t_m)$ вместо G_m.

Замечание 1. Без ограничения общности можно положить $t_1 = 0$. Следовательно величины A_1, B_1, G_1 (L_1), а также формулы и теоремы сложения можно не использовать в случае функций, содержащих t_1.

Замечание 2. Алгоритм, описанный выше, можно применять непосредственно к уравнению (1.9) вместо уравнения $F(x, x_t) = 0$. Но числа M, K_1 и K_2 должны быть вычислены с помощью метода рядов Пюизе.

Замечание 3. Функция $\coth(\omega t)$ имеет полюс в точке $t = 0$ вещественной прямой. Полезно использовать инвариантность уравнения $F(x, x_t) = 0$ относительно преобразования $t \mapsto t - t_0$, для того чтобы получить простопериодические мероморфные решения, не имеющие особых точек на вещественной оси. Справедливо соотношение

$$\coth\left(s - \frac{\pi i}{2}\right) = \tanh s. \tag{5.40}$$

Если значения величины ω являются чисто мнимыми, то формула $i\coth(is) = \cot s$ преобразует гиперболическую функцию $\coth(is)$ в тригонометрическую функцию $\cot s$.

В заключение этого раздела отметим, что метод разложений Эрмита использовался для нахождения $\mathbb{W}$-мероморфных решений в работах [90–93, 205, 206].

5.4 Уравнение Дуффинга – ван дер Поля

В этом разделе мы будем рассматривать уравнение

$$x_{tt} + (3x^2 + \alpha)x_t + \varepsilon x^3 + \sigma x = 0, \quad \varepsilon \neq 0, \tag{5.41}$$

известное как уравнение Дуффинга – ван дер Поля. Параметры α, σ, ε считаются комплекснозначными. Напомним, что в Разделе 3.4 мы классифицировали алгебраические инварианты и решили проблему интегрируемости по Лиувиллю для более общего уравнения, содержащего уравнение Дуффинга – ван дер Поля (5.41) как частный случай. В настоящем разделе мы проведем классификацию мероморфных решений для уравнения, которое можно получить из уравнения Дуффинга – ван дер Поля (5.41) простым преобразованием. Отметим, что уравнение (5.41) не имеет решений в виде рядов Лорана (5.1) в окрестности полюса в точке $t = 0$. Однако, используя степенную геометрию, мы находим два семейства рядов Пюизе, удовлетворяющих уравнению (5.41) и характеризующих решения с алгебраическим полюсом в точке $t = 0$. Эти ряды выглядят следующим образом:

$$x^{(1,2)}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k^{(1,2)} t^{\frac{k-1}{2}}, \quad b_0^{(1,2)} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{5.42}$$

и имеют произвольный коэффициент $b_3^{(1,2)}$. Анализируя структуру этих рядов, мы видим, что обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $w(t) = x^2(t)$ удовлетворяют ряды Лорана вида (5.1). Более того, это уравнение обладает свойством конечности согласно определению Раздела 5.1. Выполняя преобразование $x(t) = \sqrt{w(t)}$ в уравнении (5.41), получаем

$$2ww_{tt} - w_t^2 + 2w(3w + \alpha)w_t + 4w^2(\varepsilon w + \sigma) = 0. \tag{5.43}$$

$\mathcal{N}$	(α,σ)	$w(t)$
1	$\left(\alpha, \frac{1}{9}\{3\alpha-\varepsilon\}\varepsilon\right)$	$\exp\left(-\frac{2}{3}\varepsilon t\right)$
2	$(\alpha, \{\alpha-\varepsilon\}\varepsilon)$	$\frac{1}{2}\left(\{\varepsilon-\alpha\}\operatorname{cth}[\{\varepsilon-\alpha\}t]+\varepsilon-\alpha\right)$
3	$-\frac{2}{3}\left(1,2\varepsilon\right)\varepsilon$	$\frac{1}{6}\varepsilon\left(\operatorname{cth}\left[\frac{1}{3}\varepsilon t\right]+7-2\exp\left[-\frac{2}{3}\varepsilon t\right]\right)$
4	$\frac{2}{9}\left(9,4\varepsilon\right)\varepsilon$	$\frac{1}{6}\varepsilon\left(\operatorname{cth}\left[\frac{1}{3}\varepsilon t\right]-1-2\exp\left[-\frac{2}{3}\varepsilon t\right]\right)$

Таблица 5.1: Мероморфные решения уравнения (5.43).

Заметим, что уравнение (5.43) имеет два доминантных дифференциальных монома, порождающих доминантный баланс $w^2(6w_t+4\varepsilon w)$. Найдем все мероморфные решения уравнения (5.43).

Теорема 5.5. *Все трансцендентные мероморфные решения уравнения* (5.43) *являются просто-периодическими. Они приведены в Таблице 5.1, где произвольный коэффициент $t_0 \in \mathbb{C}$, возникающий из инвариантности уравнения* (5.43) *относительно преобразования $t \mapsto t - t_0$, опущен. Нецелые мероморфные решения имеют один простой полюс в полосе периодов.*

Доказательство. Единственный доминантный баланс, который порождает ряды Лорана вида (5.1), удовлетворяющие уравнению (5.43), выглядит следующим образом: $2ww_{tt}-w_t^2+6w^2w_t$. Поскольку соответствующее уравнение $2ww_{tt}-w_t^2+6w^2w_t=0$ имеет единственное степенное решение $w(t)=1/(2t)$ без целых неотрицательных показателей Ковалевской, мы видим, что уравнение (5.43) обладает свойством конечности. Выполнены все условия Теоремы 5.2. Уравнение (5.43) не имеет эллиптических решений, потому что не выполняется необходимое условие на вычеты в полюсах, см. (5.34). Решая уравнение $w^2(6w_t+4\varepsilon w)=0$, находим экспоненциальную асимптотику: $w(t)=\exp(-2\varepsilon t/3)+O(1)$, $\mathrm{Re}\ (\varepsilon t)<0$, $t\to\infty$. Таким образом, мы можем представить просто-периодические мероморфные решения в виде

$$w(t)=\frac{1}{2}\nu\omega\operatorname{cth}(\omega t)+h_0+h_1\exp\left(-\frac{2}{3}\varepsilon t\right),\quad h_0,h_1,\omega\in\mathbb{C},\tag{5.44}$$

где параметр ν равен нулю, если соответствующее решение не имеет полюсов и параметр ν равен единице в противном случае. Заметим, что параметр t_0 описанный в условии теорем опущен в соотношении (5.44). Из Леммы 5.5 следует равенство $\omega = \varepsilon/3$, если $h_1 \neq 0$. Далее мы раскладываем функцию (5.44) в ряд Лорана в окрестности точки $t = 0$. Подставляя получающийся ряд в уравнение (5.43) и приравнивая нулю коэффициенты при t^k, $k \leq 0$, мы получаем алгебраическую систему. Еще одно алгебраическое уравнение получаем, если выполним тоже самое по отношению к переменной $s = \exp(-2\varepsilon t/3)$. Решая эту систему, мы находим мероморфные решения в явном виде и ограничения на параметры α, σ и ε, при которых эти решения существуют. Полученные результаты приведены в Таблице 5.1. $\square$

Теорема была доказана в работе [205]. Решения уравнения Дуффинга – ван дер Поля (5.41), соответствующие функциям под номерами 3 и 4 из Таблицы 5.1, найдены в Разделе 3.4, см. соотношение (3.282).

5.5 Система Лоренца

В качестве еще одного приложения метода построения мероморфных решений, предложенного в диссертационной работе, рассмотрим модель Лоренца [207], заданную следующей системой полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_t = \sigma(y - x), \\ y_t = rx - y - zx, \\ z_t = xy - \beta z. \end{cases} \tag{5.45}$$

Эта система была разработана американским метеорологом и математиком Э. Н. Лоренцем для описания геофизической конвекции жидкости [207]. Также система (5.45) находит свое применение в теории электрических цепей, химических реакций, лазерной физике и других областях науки [208]. Система

Лоренца привлекает большое внимание хаотическим поведением своих решений и странным аттрактором, существующим при определенных значениях параметров (β, σ, r). Детальное описание численных исследований и других свойств приводятся, например, в монографии К. Спарроу (C. Sparrow) [208]. В настоящей диссертационной работе мы, напротив, будем интересоваться аналитическими свойствами решений системы (5.45).

Параметры (β, σ, r) будем считать комплекснозначными. Если $\sigma = 0$, то система Лоренца (5.45) становится линейной. Общие решения рассматриваемой системы при $\sigma \neq 0$ выражаются или через эллиптические функции, или через трансценденты Пенлеве, если параметры (β, σ, r) принимают следующие значения [209]:

$$(\beta, \sigma, r) = \left(0, \frac{1}{3}, r\right), \quad (\beta, \sigma, r) = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right), \quad (\beta, \sigma, r) = \left(2, 1, \frac{1}{9}\right). \quad (5.46)$$

Важно отметить, что во всех этих случаях система Лоренца (5.45) проходит тест на свойство Пенлеве [32]. Общие решения системы Лоренца (5.45) при указанных выше значениях параметров являются просто-периодическими мероморфными функциями. В связи с этим возникает интересный вопрос: могут ли существовать периодические мероморфные решения при других значениях параметров? Наша дальнейшая цель состоит в изучении существования точных мероморфных решений системы Лоренца (5.45).

Отметим, что система Лоренца (5.45) при определенных ограничениях на параметры (β, σ, r) имеет неавтономные первые интегралы Дарбу с экспоненциальным множителем, зависящим от времени [210, 211]. Классификация таких первых интегралов [212] выполнена Дж. Ллибре (J. Llibre) и X. Чжаном (X. Zhang) , см. также [213].

Далее предполагаем, что параметры (β, σ, r) не принимают значений из соотношения (5.46), при которых система Лоренца (5.45) становится интегрируемой, в том смысле что ее общие решения выражаются через решения уравнений и систем меньшей размерности. Также полагаем $\sigma \neq 0$. Решая первое и второе уравнения системы относительно $y(t)$ и $z(t)$, получаем

$$y(t) = \frac{x_t}{\sigma} + x, \quad z(t) = -\frac{x_{tt}}{\sigma x} - \frac{(\sigma+1)x_t}{\sigma x} + r - 1. \tag{5.47}$$

Если $x(t)$ является мероморфной функцией, то $y(t)$ и $z(t)$ обладают тем же свойством. Подставляя соотношения (5.47) в третье уравнение системы (5.45), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\begin{gathered} xx_{ttt} - \{x_t - (1+\beta+\sigma)x\}x_{tt} - (\sigma+1)x_t^2 + x\{x^2 + \beta(\sigma+1)\}x_t \\ +\sigma x^4 + \beta\sigma(1-r)x^2 = 0 \end{gathered} \tag{5.48}$$

Отметим, что, если ввести новую зависимую переменную по правилу $w = x^2$, то мы найдем еще одно обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\begin{gathered} w^2 w_{ttt} - w\{2w_t - (1+\beta+\sigma)w\}w_{tt} + w_t^3 - \left(1 + \sigma + \frac{\beta}{2}\right) w w_t^2 \\ +w^2\{w + \beta(\sigma+1)\}w_t + 2\sigma w^4 + 2\beta\sigma(1-r)w^3 = 0. \end{gathered} \tag{5.49}$$

С уравнением (5.49) работать легче, чем с уравнением (5.48), потому что уравнению (5.49) удовлетворяет только одно семейство рядов Лорана вида (5.1), в то время как уравнению (5.48) удовлетворяют два таких семейства. Будем использовать степенную геометрию и методы Пенлеве для построения рядов Лорана, удовлетворяющих уравнению (5.49). Это уравнение автономно, поэтому мы интересуемся рядами Лорана в окрестности начала координат. Начнем с доминантного баланса $w^2 w_{ttt} - 2ww_t w_{tt} + w_t^3 + w^3 w_t$, которому соответствуют следующие степенные асимптотики и показатели Ковалевской:

$$w(t) = -\frac{4}{t^2}; \quad j = -1, \quad 2, \quad 4. \tag{5.50}$$

Соответствующие ряды Лорана имеют вид

$$w(t) = -\frac{4}{t^2} + \frac{4(1 - 3\sigma + 2\beta)}{3t} + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k t^{k-2} \tag{5.51}$$

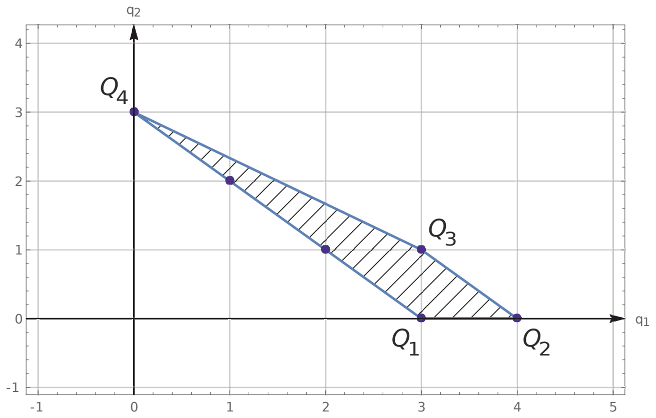


Рис. 5.1: Многоугольник Ньютона уравнения (5.54) при $\sigma \neq 0$.

и существуют тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий: $\beta = 1 - 3\sigma$, $\beta = 2\sigma$. Это семейство рядов содержит два произвольных коэффициента a_2 и a_4 в интегрируемых случаях (5.46). В остальных случаях коэффициент a_2 не является произвольным. В результате мы заключаем, что уравнение (5.49) необходимо имеет мероморфные решения хотя бы с одним полюсом только при выполнении одного из условий: $\beta = 1 - 3\sigma$, $\beta = 2\sigma$.

Отметим, что существует еще один доминантный баланс уравнения (5.49) для точки $t = 0$. Этот баланс порождает уравнение $w^2 w_{ttt} - 2w w_t w_{tt} + w_t^3 = 0$ и асимптотики $w(t) = c_0$, $w(t) = c_0 t^2$, где c_0 – произвольный ненулевой коэффициент. Такие асимптотики не могут являться доминантными членами рядов Лорана вида (5.49).

Уравнение (5.49) имеет два доминантных дифференциальных монома, которые образуют следующий доминантный баланс

$$w^3(w_t + 2\sigma w). \tag{5.52}$$

Мы можем применить к уравнению (5.49) Теоремы 5.1 и 5.3. Проведем классификацию трансцендентных мероморфных решений уравнения (5.49), имеющих конечное число полюсов.

Теорема 5.6. *Все трансцендентные мероморфные решения уравнения* (5.49)

N	(β, σ, r)	$w(t)$
1	$(-2, -1, r)$	$-4\wp\left(t; g_2, \frac{\{r-1\}\{9g_2-4r^2+8-4\}}{27}\right) + \frac{4}{3}(1-r)$
2	$\left(2\sigma, \sigma, \frac{\{\sigma-2\}\{1-2\sigma\}}{9\sigma}\right)$	$-\frac{(\sigma+1)^2}{9}\left(\mathrm{cth}\left[\frac{(\sigma+1)t}{6}\right] - 1\right)^2$
3	$(1-3\sigma, \sigma, 12\sigma-3)$	$-(3\sigma-1)^2\left(\mathrm{cth}\left[\frac{(3\sigma-1)t}{2}\right] + 1\right)^2$
4	$\frac{1}{11}(2, 1, -16)$	$-\frac{4}{121}\left(\coth^2\left\{\frac{t}{11}\right\} - 4\coth\left\{\frac{t}{11}\right\} + 3 + 4\exp\left[-\frac{2t}{11}\right]\right)$
5	$\frac{1}{7}(4, 1, -8)$	$-\frac{4}{49}\left(\coth^2\left\{\frac{t}{7}\right\} - 4\coth\left\{\frac{t}{7}\right\} + 3 + 4\exp\left[-\frac{2t}{7}\right]\right)$

Таблица 5.2: Нецелые $\mathbb{W}$-мероморфные решения уравнения (5.49).

с конечным числом полюсов имеют вид

$$\beta r = 0: \quad w(t) = h_1 \exp(-2\sigma t), \tag{5.53}$$

где $h_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *– произвольная постоянная.*

Теорема 5.6 является прямым следствием теоретических результатов Раздела 5.2, см. Теорему 5.1. С помощью замены $w_t(t) = y(x)$, $w(t) = x$ понизим порядок в уравнении (5.49). В результате получим

$$\begin{gathered} x^2y^2y_{xx} + x^2yy_x^2 + x(\{\beta+\sigma+1\}xy - 2y^2)y_x + y^3 - \frac{1}{2}x(\beta+2\sigma+2)y^2 \\ +(x+\beta\{\sigma+1\})x^2y + 2(x-\beta\{r-1\})\sigma x^3 = 0. \end{gathered} \tag{5.54}$$

Далее воспользуемся Теоремой 5.4 и методом Раздела 5.3 для нахождения всех $\mathbb{W}$-мероморфных решений уравнения (5.49). По определению все эллиптические решения принадлежат $\mathbb{W}$. Также из Теоремы 5.3 следует, что все просто-периодические мероморфные решения уравнения (5.49), имеющие конечное число полюсов в полосе периодов, являются $\mathbb{W}$-мероморфными функциями.

Теорема 5.7. *Пусть параметры* (β, σ, r) *не принимают значений, указанных в соотношении* (5.46) *и* $\sigma \neq 0$. *Все целые* $\mathbb{W}$*-мероморфные решения уравнения* (5.49) *имеют вид* (5.53). *Все нецелые* $\mathbb{W}$*-мероморфные решения* *уравнения* (5.49) *являются или эллиптическими с одним полюсом второго порядка в параллелограмме периодов, или просто-периодическими с одним полюсом второго порядка в полосе периодов. Эти решения приведены в Таблице 5.2, где произвольный параметр* $t_0 \in \mathbb{C}$, *возникающий из инвариантности уравнения* (5.49) *относительно преобразования* $t \mapsto t - t_0$, *опущен.*

Доказательство. Найдем все алгебраические инварианты уравнения (5.49), которые удовлетворяют условиям Теоремы 5.4. Многоугольник Ньютона уравнения (5.54) представлен на Рисунке 5.5. Уравнение (5.54) имеет только два доминантных баланса, которые порождают ряды Пюизе с центром в точке $x = \infty$. Эти балансы определяются ребрами: $[Q_3, Q_4]$ и $[Q_2, Q_3]$. Укороченные уравнения для этих балансов имеют вид

$$\begin{aligned} &[Q_3, Q_4]: \quad x^2y^2y_{xx} + x^2yy_x^2 - 2xy^2y_x + y^3 + x^3y = 0; \\ &[Q_2, Q_3]: \quad x^3(y + 2\sigma x) = 0. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Степенные решения этих уравнений выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} &[Q_3, Q_4]: \quad y^{(1,2)}(x) = b_0^{(1,2)}x^{\frac{3}{2}}, \quad b_0^{(1,2)} = \pm i; \\ &[Q_2, Q_3]: \quad y^{(3)}(x) = -2\sigma x. \end{aligned} \tag{5.56}$$

Укороченное уравнение и соответствующая асимптотика для ребра $[Q_3, Q_4]$ имеют два целых показателя Ковалевской: $n_1 = 1$ и $n_2 = 2$. Анализируя условия совместности для этих показателей, мы видим. что уравнению (5.54) удовлетворяют два семейства рядов Пюизе

$$y_\infty^{(1,2)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^{(1,2)}x^{\frac{3-n}{2}}, \quad b_0^{(1,2)} = \pm i \tag{5.57}$$

тогда и только тогда, когда или $\beta = 2\sigma$, или $\beta = 1 - 3\sigma$. Каждый из рядов этих семейств $y_\infty^{(1,2)}(x)$ имеет только один произвольный коэффициент $b_4^{(1,2)}$, если параметры (β, σ, r) не принимают значений из соотношения (5.46). Укороченное уравнение и соответствующая асимптотика для ребра $[Q_2, Q_3]$ не имеют показателей Ковалевской. Следовательно, существует единственный ряд Пюизе

$$y_{\infty}^{(3)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{1-n}, \quad c_0 = -2\sigma \tag{5.58}$$

с доминантным поведением $y(x) = -2\sigma x$, удовлетворяющий уравнению (5.54). Заметим, что для рядов (5.57) и (5.58) выполнено условие (B) из Теоремы 5.4. Далее положим $b_4^{(m)} = b_0^{(m)}\alpha$, $m = 1$, 2. Эта подстановка делает ряды $y_{\infty}^{(1)}(x)$ и $y_{\infty}^{(2)}(x)$ сопряженными. Введем нижний индекс j и параметры $\{\alpha_j$, $j = 1$, …, $M \in \mathbb{N}\}$. Тогда искомые алгебраические инварианты можно представить в виде

$$F(x,y) = \left\{ \prod_{j=1}^{M} \left(y - y_{j,\infty}^{(1)}(x)\right) \left(y - y_{j,\infty}^{(2)}(x)\right) \left(y - y_{\infty}^{(3)}(x)\right)^k \right\}_+, \tag{5.59}$$

где $k = 0$ или $k = 1$. Также мы предполагаем, что произведение в выражении (5.59) отсутствует, если $M = 0$. Пусть $M = 0$. Мы берем $k = 1$ и получаем целые решения (5.53).

Далее считаем, что выполнено условие $M \in \mathbb{N}$. Случаи $k = 0$ и $k = 1$ будем исследовать по отдельности. Вычисляя первый двенадцать коэффициентов рядов $y_{\infty}^{(m)}(x)$, $m = 1$, 2 и первые пять коэффициентов ряда $y_{\infty}^{(3)}(x)$, мы строим алгебраическую систему с помощью условия (C) из Теоремы 5.4. Для удобства введем следующие величины

$$C_l = \sum_{j=1}^{M} (\alpha_j)^l, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{5.60}$$

Начнем со случая $k = 0$. Решая систему, мы находим ограничения на параметры (β, σ, r), приведенные в первых трех строках Таблицы 5.2 и следующие равенства $C_1 = \varrho_1 M$, $C_2 = \varrho_1^2 M$, где параметр ϱ_1 зависит от σ и r. Также напомним, что должно выполняться одно из условий: $\beta = 2\sigma$ и $\beta = 1 - 3\sigma$. Далее проверяем существование алгебраических инвариантов (5.59) при $k = 0$, $M = 1$ и соответствующих ограничениях на параметры (β, σ, r) из первых трех строк Таблицы 5.2. Поскольку такие алгебраические инварианты действительно существуют, из Теоремы 1.5 следует, что нет других неприводимых алгебраических инвариантов при $k = 0$.

Далее рассмотрим случай $k = 1$. Решая алгебраическую систему, мы находим $M = 1$ и значения параметров (β, σ, r), приведенные в четвертой и пятой строках Таблицы 5.2.

Нам осталось найти $\mathbb{W}$-мероморфные решения, соответствующие построенным инвариантам, в явном виде. Воспользуемся методом, предложенным в Разделе 5.3. Если $\sigma = -1$ и $\beta = -2$, то род алгебраической кривой $F(x, y) = 0$, где многочлен $F(x, y)$ представляет собой алгебраический инвариант, равен единице. Мы полагаем $M = 1$, $t_1 = 0$ и работаем с выражением (5.33). В результате находим семейство эллиптических решений, представленное в первой строке Таблицы 5.2. Инвариант $g_2 \in \mathbb{C}$ эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(t; g_2, g_3)$ является произвольным. Также напомним, что эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(t; g_2, g_3)$ вырождается и становится или простопериодической, или рациональной при выполнении условия $g_2^3 - 27g_3^2 = 0$.

Во всех остальных случаях род инвариантных алгебраических кривых равен нулю. Следовательно, искомые решения определяются выражением (5.29). Анализируя структуру алгебраических инвариантов (5.59) и соответствующих рядов Пюизе, мы находим $M = 1$, $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $t_1 = 0$, если параметры (β, σ, r) принимают значения, указанные во второй и третьей строках Таблицы 5.2. Наконец, в оставшихся случаях полагаем $M = 1$, $K_1 = 1$, $K_2 = 0$ и $t_1 = 0$. □

Замечание 1. Несложно установить, что для любого $x_0 \in \mathbb{C}$ решения уравнения (5.54) не имеют асимптотик вида $y(x) = e_0(x - x_0)^{\nu}$, где $e_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\nu \in \mathbb{Q}$ и $\nu < 0$. Используя Лемму 1.3 и Теорему 5.7, мы заключаем, что решения из Таблицы 5.2 и выражения (5.53) являются не только единственными $\mathbb{W}$-мероморфными решениями уравнения (5.49), но и единственными

Параметр g_0 и инварианты g_2, g_3	Ограничения на параметры $(\alpha, \delta, \sigma, \varepsilon)$
$g_0 = \frac{1719\,\varepsilon^4}{277124848} - \frac{519\,\varepsilon^2\sigma}{11451440} + \frac{71\,\sigma^2}{851760}$ $g_2 = -\frac{\left(504\,\varepsilon^2-2057\,\sigma\right)\left(48\,\varepsilon^2-121\,\sigma\right)}{207843636}$ $g_3 = \frac{41\,\sigma^3}{2372760} - \frac{265\,\varepsilon^2\sigma^2}{12760176} + \frac{9521\,\varepsilon^4\sigma}{1286651080} - \frac{51291\,\varepsilon^6}{62273912272}$	$\delta = \frac{\varepsilon\left(2420\,\sigma-531\,\varepsilon^2\right)}{17303}$ $\alpha = \frac{1484946675\,\varepsilon^8}{1371396096053984} - \frac{66413475\,\varepsilon^6\sigma}{5666926016752} + \frac{145385169\,\varepsilon^4\sigma^2}{3278386951840} - \frac{456453\,\varepsilon^2\sigma^3}{6773526760} + \frac{93\,\sigma^4}{2798978}$

Таблица 5.3: Параметры эллиптических решений (5.70).

алгебраически инвариантными решениями рассматриваемого уравнения.

Непосредственными вычислениями легко убедиться, что функция $x(t) = \sqrt{w(t)}$ принадлежит множеству $\mathbb{W}$ для любого решения $w(t)$ из Таблицы 5.2. Здесь необходимо рассматривать обе ветви квадратного корня. Если $x(t)$ является $\mathbb{W}$-мероморфной функцией, то тот же вывод можно сделать относительно функций $y(t)$ и $z(t)$, заданных равенствами (5.47). Следовательно, соотношение $x(t) = \sqrt{w(t)}$ и результаты Теоремы 5.7 определяют все $\mathbb{W}$-мероморфные решения системы Лоренца. Отметим, что решения из первых трех строк Таблицы 5.2 были ранее найдены в статье [214]. При этом остальные решения являются новыми. Также отсутствие других $\mathbb{W}$-мероморфных решений в неинтегрируемых случаях является еще одним новым результатом. В явном виде запишем новые просто-периодические решения уравнения (5.48). Они принимают вид

$$\begin{aligned} N = 4:\ x(t) &= \pm\frac{i}{11}\left(\coth\left\{\frac{t}{22}\right\} - \coth^{-1}\left\{\frac{t}{22}\right\} - 4\exp\left[-\frac{t}{11}\right]\right); \\ N = 5:\ x(t) &= \pm\frac{i}{7}\left(\coth\left\{\frac{t}{14}\right\} - \coth^{-1}\left\{\frac{t}{14}\right\} - 4\exp\left[-\frac{t}{7}\right]\right), \end{aligned} \tag{5.61}$$

где N соответствует номеру строки из Таблицы 5.2. Эти решения имеют два различных полюса в полосе периодов. Также их можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} &N=4:\ x(t)=\pm\frac{i}{11}\left(\coth\left\{\frac{t}{22}\right\}-\coth\left\{\frac{t}{22}-\frac{\pi i}{2}\right\}-4\exp\left[-\frac{t}{11}\right]\right);\\ &N=5:\ x(t)=\pm\frac{i}{7}\left(\coth\left\{\frac{t}{14}\right\}-\coth\left\{\frac{t}{14}-\frac{\pi i}{2}\right\}-4\exp\left[-\frac{t}{7}\right]\right). \end{aligned} \qquad (5.62)$$

Используя равенства (5.47), несложно вычислить соответствующие функции $y(t)$ и $z(t)$. Мы не приводим эти формулы в явном виде.

5.6 Редукция к переменным бегущей волны обобщенного уравнения Розенау – Кортевега – де Вриза и уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса пятого порядка

Целью настоящего раздела является поиск всех $\mathbb{W}$-мероморфных решений следующего обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка:

$$x_{tttt}+\varepsilon x_{ttt}+\sigma x_{tt}+\delta x_t+\nu x^2+\mu x+\alpha=0, \quad \nu\neq 0. \qquad (5.63)$$

Все параметры предполагаются комплекснозначными. Уравнение (5.63) возникает как редукция к переменным бегущей волны обобщенного уравнения Розенау – Кортевега – де Вриза

$$u_\tau+\beta_0 u_s+\beta_1 u u_s+\beta_2 u_{ss}+\beta_3 u_{sss}+\beta_4 u_{ssss}+\beta_5 u_{ssss\tau}=0 \qquad (5.64)$$

и уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса пятого порядка

$$u_\tau+\tilde\beta_1 u u_s+\tilde\beta_2 u_{ss}+\tilde\beta_3 u_{sss}+\tilde\beta_4 u_{ssss}+\tilde\beta_5 u_{sssss}=0. \qquad (5.65)$$

Эти уравнения в частных производных используются для описания нелинейных волн в средах с дисперсией, диссипацией и диффузией. Уравнение (5.64)

$$\begin{array}{|l|}\hline e_4 = \omega^4, \qquad e_3 = -\frac{\omega^3\varepsilon}{11}, \qquad e_2 = \frac{\omega^2\left(121\,\sigma - 12584\omega^2 - 9\,\varepsilon^2\right)}{9438}, \\ e_1 = \frac{\omega\left(651222\omega^2\varepsilon - 531\,\varepsilon^3 + 2420\,\varepsilon\,\sigma - 17303\,\delta\right)}{7163442}, \\ e_0 = \frac{14\,\omega^4}{45} + \frac{\omega^2\varepsilon^2}{1573} - \frac{220813\,\varepsilon^4}{31869357520} - \frac{\omega^2\sigma}{117} + \frac{90847\,\varepsilon^2\sigma}{2370448080} - \frac{31\,\varepsilon\,\delta}{637560} - \frac{31\,\sigma^2}{851760} \\ \hline \end{array}$$

Таблица 5.4: Значения параметров просто-периодических мероморфных решений (5.71).

как частный случай содержит уравнение Розенау [215]. Уравнение (5.65) при определенных ограничениях на параметры становится уравнением Кавахары [216] и его обобщениями [217, 218].

Проводя преобразования параллельного переноса, поворота и подобия, мы можем без ограничения общности положить $\nu = -840$ и $\mu = 0$. Если $\varepsilon = 0$ и $\delta = 0$, то умножая уравнение (5.63) на x_t и интегрируя результат, мы получаем первый интеграл

$$x_t x_{ttt} - \frac{1}{2}x_{tt}^2 + \frac{\sigma}{2}x_t^2 + \frac{\nu}{3}x^3 + \frac{\mu}{2}x^2 + \alpha x + C = 0. \tag{5.66}$$

Здесь $C \in \mathbb{C}$ – постоянная интегрирования. Все мероморфные решения уравнения (5.66) найдены в статье [91]. Далее предполагаем, что выполнено условие $|\varepsilon| + |\delta| \neq 0$. Будем исследовать уравнение

$$x_{tttt} + \varepsilon x_{ttt} + \sigma x_{tt} + \delta x_t - 840x^2 + \alpha = 0, \quad |\varepsilon| + |\delta| \neq 0. \tag{5.67}$$

Существует единственное семейство рядов Лорана с полюсом в начале координат, удовлетворяющее уравнению (5.67). Это семейство принимает вид (5.1) при $p = 4$ и $a_0 = 1$. Соответствующее укороченное уравнение и степенная асимптотика имеют единственный неотрицательный целый показатель Ковалевской. Он равен $k_0 = 12$. Следовательно, коэффициент a_{12} произволен при выполнении условия совместности

$$\varepsilon(10737\varepsilon^3 - 4961\varepsilon\sigma + 19844\delta)\alpha + p(\delta, \sigma, \varepsilon) = 0. \tag{5.68}$$

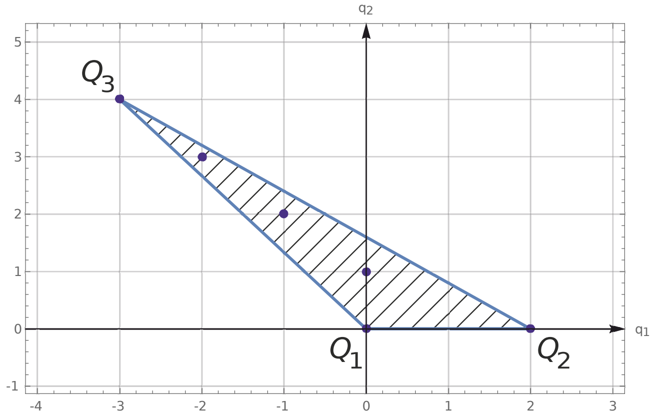


Рис. 5.2: Многоугольник Ньютона уравнения (5.69) при условии $\alpha \neq 0$.

В этом выражении $p(\delta, \sigma, \varepsilon)$ – многочлен своих аргументов. Поскольку этот многочлен имеет достаточно громоздкий вид, мы его явно не записываем. Условие (5.68) можно получить, подставляя ряд (5.1) при $p = 4$ и $a_0 = 1$ в уравнения (5.67) и приравнивая нулю коэффициенты при z^{k-4}, $1 \leq k \leq 12$ в получающемся выражении. Используя соотношение (1.10), мы понижаем порядок в уравнении (5.67). В результате находим следующее неавтономное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$y^3 y_{xxx} + y^2(4y_x + \varepsilon)y_{xx} + yy_x^3 + \varepsilon yy_x^2 + \sigma yy_x + \delta y - 840x^2 + \alpha = 0. \qquad (5.69)$$

Бесконечное число рядов Лорана вида (5.1), удовлетворяющих уравнению (5.67), порождает бесконечное число рядов Пюизе с центром в точке $x = \infty$, для которых выполнены условия (A) и (B) из Теоремы 5.4. Для нахождения всех $\mathbb{W}$-мероморфных решений уравнения (5.67) воспользуемся Теоремой 1.5. Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 5.8. *Любое* $\mathbb{W}$*-мероморфное решение уравнения* (5.67) *является или эллиптическим с одним полюсом четвертого порядка в параллелограмме периодов, или просто-периодическим с одним полюсом четвертого порядка в полосе периодов. Эти решения выглядят следующим образом:*

	Ограничения на параметры $(\alpha, \delta, \sigma, \varepsilon)$ и параметр ω
1	$\alpha = \frac{84873784905\,\varepsilon^8}{4659939288142997914888}$, $\delta = \frac{1072521\,\varepsilon^3}{36517316}$, $\sigma = \frac{52659\,\varepsilon^2}{174724}$, $\omega = \frac{9\varepsilon}{836}$
2	$\alpha = \frac{723345\,\varepsilon^8}{461045792768}$, $\delta = \frac{17797\,\epsilon^3}{120032}$, $\sigma = \frac{15371\,\epsilon^2}{60016}$, $\omega = \frac{\varepsilon}{8}$
3	$\alpha = \frac{1913625\,\varepsilon^8}{1798172624027648}$, $\delta = \frac{14643\,\varepsilon^3}{340736}$, $\sigma = \frac{2565\,\varepsilon^2}{7744}$, $\omega = \frac{3\varepsilon}{176}$
4	$\alpha = \frac{875\,\varepsilon^8}{937605745494}$, $\delta = \frac{562\,\varepsilon^3}{11979}$, $\sigma = \frac{380\,\varepsilon^2}{1089}$, $\omega = \frac{\varepsilon}{66}$
5	$\alpha = \frac{105\,\varepsilon^8}{27437936768}$, $\delta = \frac{29\,\varepsilon^3}{484}$, $\sigma = \frac{179\,\varepsilon^2}{484}$, $\omega = \frac{\varepsilon}{44}$
6	$\alpha = \frac{349920\,\varepsilon^8}{176533755935383}$, $\delta = \frac{23283\,\varepsilon^3}{456533}$, $\sigma = \frac{27\,\varepsilon^2}{77}$, $\omega = \frac{3\varepsilon}{154}$
7	$\alpha = \frac{105\,\varepsilon^8}{428717762}$, $\delta = -\frac{254\,\varepsilon^3}{1331}$, $\sigma = -\frac{4\,\varepsilon^2}{121}$, $\omega = \frac{\varepsilon}{22}$
8	$\alpha = \frac{76545\,\varepsilon^8}{27437936768}$, $\delta = -\frac{2151\,\varepsilon^3}{5324}$, $\sigma = -\frac{81\,\varepsilon^2}{484}$, $\omega = \frac{3\varepsilon}{44}$
$9, 10$	$\alpha = \frac{\left(1426827280519935\,\varepsilon^2 + 208296284212054500\,\theta\right)\varepsilon^6}{7888096774124350468256}$, $\delta = \frac{\left(3420428\,\theta - 74340\,\varepsilon^2\right)\varepsilon}{1228513}$, $\sigma = -4\,\theta, \qquad \omega = \sqrt{\theta}, \qquad \theta^2 + \frac{123287\varepsilon^2}{8109904}\theta + \frac{392181\,\varepsilon^4}{3925193536} = 0$

Таблица 5.5: Ограничения на параметры, при которых существуют просто-периодические мероморфные решения (5.71). Решения под номерами 9 и 10 имеют комплекснозначные коэффициенты, если $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

1. *эллиптические решения*

$$\begin{aligned} x(t) &= \wp^2(t - t_0; g_2, g_3) + \frac{\varepsilon}{22}\wp_t(t - t_0; g_2, g_3) \\ &+ \left(\frac{\sigma}{78} - \frac{3\,\varepsilon^2}{3146}\right)\wp(t - t_0; g_2, g_3) + g_0; \end{aligned} \tag{5.70}$$

2. *просто-периодические решения*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{4} e_k \tanh^k\{\omega(t - t_0)\}. \tag{5.71}$$

Значения параметров этих решений и ограничения на параметры исходного уравнения приведены в Таблице 5.3 (эллиптические решения) и Таблицах 5.4, 5.5 (просто-периодические решения).

Доказательство. Построим ряды Пюизе с центром в точке $x = \infty$, которые удовлетворяют условиям (A) и (B) из Теоремы 5.4. Многоугольник Ньютона уравнения (5.69) приведен на Рисунке 5.6. Единственный доминантный баланс, порождающий ряды Пюизе с центром в точке $x = \infty$, соответствует ребру $[Q_2, Q_3]$. Этот баланс имеет вид $W[y(x), x] = y^3 y_{xxx} + 4y^2 y_x y_{xx} + y y_x^3 - 840x^2$. Найдем степенные решения уравнения $W[y(x), x] = 0$. В результате имеем $y(x) = b_0^{(l)} x^{5/4}$, где $b_0^{(l)}$, $l = 1, 2, 3, 4$ – различные корни уравнения $b_0^4 - 256 = 0$. Показатели Ковалевской баланса $W[y(x), x]$ на степенных решениях равны 3, $(11 \pm \sqrt{-159})/8$. Следовательно, мы получаем четыре семейства рядов Пюизе

$$y_\infty^{(l)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^{(l)} x^{\frac{5-n}{4}}, \quad l = 1, 2, 3, 4, \tag{5.72}$$

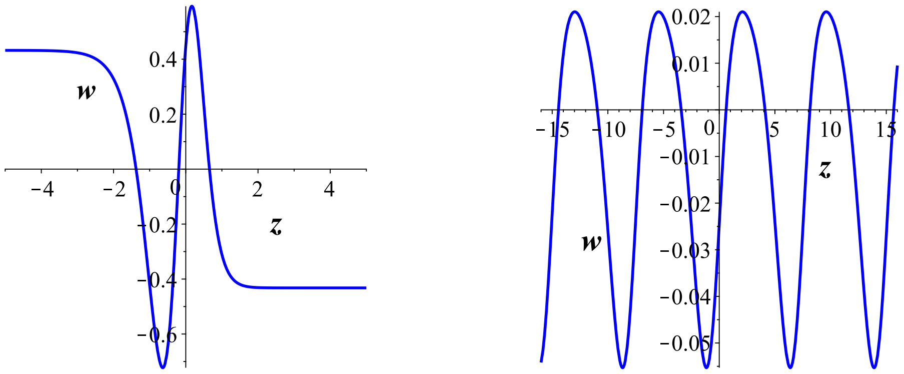
каждый из которых обладает одним произвольным коэффициентом $b_{12}^{(l)}$. Эти ряды существуют тогда и только тогда, когда выполнено условие (5.68). Мы заключаем, что уравнение (5.67) не имеет $\mathbb{W}$-мероморфных решений, если не выполнено условие (5.68).

Предположим, что представление (5.24) содержит M наборов из четырех сопряженных рядов (5.72). Следовательно, справедливо равенство $N = 4M$. Положим $b_{12}^{(l)} = b_0^{(l)} \beta$. Эта подстановка делает ряды (5.72) сопряженными. Для различения рядов введем нижний индекс m и следующие величины

$$C_k = \sum_{m=1}^{M} \beta_m^k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.73}$$

Далее вычислим 25 первых коэффициента для каждого ряда из соотношения (5.72). Условие (C) из Теоремы 5.4 и уравнение (5.68) порождают алгебраическую систему. Отметим, что только те уравнения нетривиальны, которые содержат $\left(b_0^{(l)}\right)^{-k}$, где $k \in \mathbb{N}$ и $k \mod 4 = 0$. Решая подсистему, построенную по первым 25 коэффициентам и уравнению (5.68), мы получаем ограничения на параметры исходного уравнения, которые приведены в Таблицах 5.3, 5.5 и следующие равенства

$$C_1 = \varrho_1 M, \quad C_2 = \varrho_1^2 M, \tag{5.74}$$



(a) Решение (5.71): номер 2 в Таблице 5.5, $t_0 = 0$ и $\varepsilon = 10$

(b) Решение (5.70): $t_0 = -\tau_3$, $\sigma = 34$ и $\varepsilon = 11$

Рис. 5.3: Графики $\mathbb{W}$-мероморфных решений уравнения (5.67).

где ϱ_1 фиксировано. Полагая $N = 4$ $(M = 1)$ в представлении (5.24), мы видим, что соответствующие уравнения $F(x, y) = 0$ совместны с уравнением (5.69), если выполнены ограничения из Таблиц 5.3, 5.5. Также многочлены $F(x, y)$ неприводимы. Существование этих совместных уравнений дает систему $C_k = \varrho_1^k M$, $k \in \mathbb{N}$. Из Теоремы 1.5 следует, что $M = 1$, $\beta_1 = \varrho_1$ и не существуют других неприводимых алгебраических уравнений $F(x, y) = 0$, совместных с уравнением (5.69). Далее мы используем метод Раздела 5.3, для того чтобы найти $\mathbb{W}$-мероморфные решения в явном виде. Мы полагаем $M = 1$, $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $t_1 = 0$ и работаем с выражениями (5.29) и (5.33). $\square$

Замечание 1. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для любого $x_0 \in \mathbb{C}$ решения уравнения (5.69) не имеют асимптотик вида $y(x) = e_0(x-x_0)^{\nu}$, где $e_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\nu \in \mathbb{Q}$ и $\nu < 0$. Из Леммы 1.3 и Теоремы 5.7 следует, что решения, полученные в Теореме 5.8, являются не только единственными $\mathbb{W}$-мероморфными решениями уравнения (5.67), но также единственными алгебраически инвариантными решениями рассматриваемого уравнения.

Далее отберем $\mathbb{W}$-мероморфные решения уравнения (5.67), важные с физической точки зрения. Мы нумеруем решения в соответствии с первым столбцом Таблицы 5.5. Просто-периодические мероморфные решения под номерами $1-8$ вещественнозначны и ограничены на вещественной оси, если

$\varepsilon \in \mathbb{R}$ и $z_0 \in \mathbb{R}$. График решения под номером 2 приведен на рисунке 5.3(a).

Пусть выполнено условие $\Delta = 0$, где $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$. Тогда эллиптические решения (5.70) вырождаются в просто-периодические и с помощью соотношения (5.40) могут быть преобразованы к виду (5.71). Уравнение $\Delta = 0$ имеет два вещественнозначных решения

$$\sigma = \frac{35\varepsilon^2}{121}, \quad \sigma = \frac{45\varepsilon^2}{176}, \tag{5.75}$$

если $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Также существуют комплекснозначные решения. Мы их в явном виде не приводим.

Эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(t)$ имеет полюс второго порядка в точке $t = 0$. Если $\Delta > 0$, то мы можем воспользоваться специальной теоремой сложения и преобразовать решение (5.70), так чтобы получающаяся функция была вещественнозначной и ограниченной на вещественной оси при условиях $\sigma \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Если выполнены неравенства

$$\frac{45\varepsilon^2}{176} < \sigma < \frac{35\varepsilon^2}{121}, \tag{5.76}$$

то мы находим $\Delta > 0$. В этом случае уравнение

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0 \tag{5.77}$$

имеет три различных корня, которые мы обозначим символами $d_1 > d_2 > d_3$. Функция $\wp(z)$ ограничена на прямой $z = t + \tau_3$, где $\wp(\tau_3) = d_3$. Следовательно, полагая $z_0 = -\tau_3$ в выражении (5.70) и используя теорему сложения

$$\wp(t + \tau_3) = d_3 + \frac{(d_3 - d_1)(d_3 - d_2)}{\wp(t) - d_3}, \tag{5.78}$$

мы получаем решение с требуемыми свойствами. Пример вещественнозначного и ограниченного на вещественной оси эллиптического решения приведен на Рисунке 5.3(b).

Заключение

В диссертационной работе представлен ряд методов, предназначенных для интегрирования и построения точных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Основным результатом диссертационной работы является метод рядов Пюизе и несколько его модификаций, направленных на решение некоторых важных математических задач. Все этапы метода имеют строгую теоретическую основу. Метод рядов Пюизе позволяет находить и классифицировать инвариантные алгебраические кривые для автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений и полиномиальных дифференциальных систем. Метод также может использоваться для построения $\mathbb{W}$-мероморфных решений дифференциальных уравнений и систем. Метод основан на разложениях многочленов на множители в кольцах многочленов с коэффициентами из полей рядов Пюизе. Кроме того, разработано обобщение метода рядов Пюизе на случай неавтономных двумерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом обобщении используются функциональные ряды Пюизе. Отметим основные особенности и преимущества метода:

1. Метод не требует априорной информации о степенях неприводимых алгебраических инвариантов.
2. Вторая часть метода в автономном случае является число алгебраической. Следовательно, для решения алгебраических систем могут быть использованы мощные вычислительные алгоритмы, основанные на ре-

зультантах, базисах Гребнера и т. п. Метод может применяться в случае дифференциальных уравнений, содержащих параметры.

3. Метод допускает компьютерную реализацию в системах символьных вычислений, таких как Maple, Wolfram Mathematica, Matlab.
4. Метод не имеет ограничений при использовании и работает даже в случае бесконечного числа допускаемых рядов Пюизе.
5. Насколько известно автору, метод является единственным в научной литературе, позволяющим находить не некоторые, а все неприводимые алгебраические инварианты для широких классов обыкновенных дифференциальных уравнений порядков выше второго.

Мы показали, что метод рядов Пюизе может использоваться для решения проблемы Пуанкаре в тех случаях, когда не работают известные оценки. Метод также оказывается чрезвычайно полезным при исследовании проблемы интегрируемости для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и двумерных полиномиальных дифференциальных систем. В рамках теории интегрируемости Дарбу метод позволяет находить необходимые и достаточные условия интегрируемости по Дарбу или Лиувиллю. При этом достаточно часто выполнять классификацию инвариантов необходимо не в общем случае, а при определенных ограничениях на параметры системы. Отметим, что большинство других методов построения первых интегралов, как правило, дают только достаточные условия интегрируемости по Дарбу или Лиувиллю. Это такие методы, как методы, основанные на существовании симметрий, классических или обобщенных, методы локальных и нелокальных преобразований и т.п. Следовательно, подобные методы не могут быть использованы для нахождения всех значений параметров, при которых многопараметрическое семейство обыкновенных дифференциальных уравнений интегрируемо.

Метод рядов Пюизе может применяться и при проведении классификации алгебраических предельных циклов двумерных полиномиальных дифференциальных систем. Следовательно, метод вносит весомый вклад в решение второй части шестнадцатой проблемы Гильберта в алгебраической постановке.

Метод рядов Пюизе является простым и наглядным инструментом для построения точных решений обыкновенных дифференциальных уравнений. В огромном количестве исследований, посвященных проблеме поиска точных решений, не рассматриваются такие вопросы, как найдены ли все решения в рамках заданного класса функций, являются ли построенные решения новыми или это известные решения, записанные по-другому. В отличие от метода подстановок и других подобных подходов, метод рядов Пюизе может быть использован для нахождения и классификаций точных решений, которые, в дополнение к исходному уравнению, удовлетворяют алгебраическому обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка. В частности, метод позволяет находить все эллиптические решения и все просто-периодические мероморфные решения, которые являются суперпозицией экспоненты и рационального отображения. Для широких классов уравнений разработанный метод позволяет находить все такие решения, даже если исходное дифференциальное уравнение имеет бесконечное число локальных решений, описываемых рядами Лорана в окрестности полюсов, и/или с несколькими доминантными дифференциальными мономами.

Перечислим наиболее важные теоретические результаты диссертационной работы.

1. Предложен метод нахождения и классификации алгебраических инвариантов автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Разработан метод построения неавтономных алгебраических инвариантов и инвариантных поверхностей для двумерных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Предложен метод построения $\mathbb{W}$-мероморфных решений автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Найден общий вид мероморфных решений автономных обыкновенных дифференциальных уравнений с конечным числом локальных решений, описываемых рядами Лорана в окрестности полюсов, и двумя доминантными дифференциальными мономами вида $\lambda x^l\{x_t - \mu x\}$, где $\lambda\mu \neq 0$ и $l \in \mathbb{N}$.

5. Доказана разрешимость проблемы Пуанкаре в классической постановке для семейств автономных алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих свойством конечности.

6. Получено явное представление для собственных значений инвариантных алгебраических кривых двумерных систем полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений.

7. Предложена локальная теория интегрируемости, названная интегрируемостью по Пюизе.

8. Доказано, что типичная нелинейная полиномиальная система Льенара $x_t = y$, $y_t = -f(x)y - g(x)$ не имеет конечных инвариантных алгебраических кривых и не интегрируема по Лиувиллю при выполнении условия $\deg g > \deg f$.

9. Решена проблема интегрируемости по Лиувиллю для полиномиальных систем Льенара $x_t = y$, $y_t = -f(x)y - g(x)$ и для соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений $x_{tt} + f(x)x_t + g(x) = 0$ при

выполнении условия $\deg g \neq 2\deg f + 1$. Аналогичные результаты получены и в случае $\deg g = 2\deg f + 1$ для нерезонансных на бесконечности систем.

10. Найдено необходимое условие существования экспоненциальных инвариантов с неполиномиальным аргументом.

Новые методы, разработанные в диссертационной работе, используются для решения проблемы интегрируемости и для классификации решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в физике, биологии, экономике и других областях науки. Перечислим основные результаты, полученные для уравнений, важных с прикладной точки зрения.

1. Классифицированы алгебраические инварианты для уравнений Дуффинга, Дуффинга – ван дер Поля, Гельмгольца – ван дер Поля и их обобщений. Найдены новые алгебраически инвариантные решения уравнений Дуффинга – ван дер Поля.

2. Решена проблема интегрируемости по Лиувиллю для уравнений Дуффинга, Дуффинга – ван дер Поля, Гельмгольца – ван дер Поля и их обобщений.

3. Доказано, что проблема Пуанкаре в классической постановке не имеет решения для уравнений Гельмгольца – ван дер Поля.

4. Классифицированы инвариантные поверхности для неавтономных уравнений Дуффинга и Дуффинга – ван дер Поля при наличии произвольной вынуждающей силы.

5. Найдены новые семейства интегрируемых по Лиувиллю полиномиальных дифференциальных систем Льенара $x_t = y$, $y_t = -f(x)y - g(x)$. Эти семейства параметризованы производными многочленами.

6. Классифицированы алгебраические инварианты для обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, возникающих при переходе к переменным бегущей волны в дисперсионном уравнении Курамото – Сивашинского и модифицированном уравнении Курамото – Сивашинского. Получены новые алгебраически инвариантные решения модифицированного уравнения Курамото – Сивашинского.

7. Найдены все $\mathbb{W}$-мероморфные решения для семейства обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, связанного с системой Лоренца, построены ранее неизвестные мероморфные решения системы Лоренца.

8. Получены все $\mathbb{W}$-мероморфные решения для семейства обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, возникающего при переходе к переменным бегущей волны в обобщенном уравнении Розенау – Кортевега – де Вриза и в уравнении Кортевега – де Вриза – Бюргерса пятого порядка.

Список литературы

1. V. V. Kozlov. The Euler–Jacobi–Lie integrability theorem. *Regul. Chaotic Dyn.*, 18(4):329–343, 2013.
2. V. V. Kozlov. Tensor invariants and integration of differential equations. *Russian Mathematical Surveys*, 74(1):111–140, 2019.
3. A. Goriely. *Integrability and Nonintegrability of Dynamical Systems.* World Scientific, 2001.
4. L. V. Ovsyannikov. *Group Analysis of Differential Equations.* Moscow: Nauka, 1978.
5. N. H. Ibragimov. *Groups of Transformations in Mathematical Physics.* Moscow: Nauka, 1983.
6. E. R. Kolchin. *Differential algebra and algebraic groups*, volume 54. Academic press, 1973.
7. A. G. Khovanskii. On solvability and unsolvability of equations in explicit form. *Russian Mathematical Surveys*, 59(4):661–736, 2004.
8. A. G. Khovanskii. *Topological Galois theory.* Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2015.
9. J. J. Morales-Ruiz. *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems.* Springer, 1999.

10. V. V. Kozlov. Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics. *Russian Math. Surveys*, 38(1):1–76, 1983.

11. A. V. Bolsinov and A. T. Fomenko. *Integrable Hamiltonian Systems. Geometry, Topology, Classification.* Chapman and Hall/CRC. A CRC Press Company Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. USA, 2004.

12. G. Darboux. De l'emploi des solutions particuliéres algébriques dans l'intégration des systèmes d'équations différentielles algébriques. *Acad. Sci. Paris C. R.*, 86:1012–1014, 1878.

13. P. Painlevé. Sur les intégrales algébriques des équations différentielles du premier ordre. *CR Acad. Sci. Paris*, 110:945–948, 1890.

14. H. Poincaré. Sur l'integration algébrique des équations differentielles du 1-er ordre. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 11:193–239, 1891.

15. H. Poincaré. Sur l'intégration algébrique des équations differentielles du premier ordre et du premier degré. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 5:161–191, 1891.

16. M. F. Singer. Liouvillian first integrals of differential systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 333:673–688, 1992.

17. C. J. Christopher. Invariant algebraic curves and conditions for a centre. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 124:1209–1229, 1994.

18. C. J. Christopher. Liouvillian first integrals of second order polynomial differential equations. *Electron. J. Differential Equations*, 49:1–7, 1999.

19. M. V. Dolov. On the number of algebraic invariant curves of polynomial vector fields. *Differ. Equ.*, 40(6):896–897, 2004.

20. M. V. Dolov and V. V. Kosarev. Darboux first integrals and analytical structure of solutions of differential equations. *Differ. Equ.*, 19(4):697–700, 1983.

21. M. V. Dolov. Algebraical limit cycles of polynomial vector fields on the plane. *Differ. Equ.*, 37(9):1211–1216, 2001.

22. S. Lie. Klassifikation und integration von gewönlichen differentialgleichungen zwischen x, y, die eine gruppe von transformationen gestatten. *Arch. für Math.*, 7:187–453, 1883.

23. N. H. Ibragimov. Group analysis of ordinary differential equations and the invariance principle in mathematical physics (for the 150th anniversary of Sophus Lie). *Russian Mathematical Surveys*, 47(4):89–156, 1992.

24. L. M. Berkovich. The method of an exact linearization of n–order ordinary differential equations. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 3(3–4):341–350, 1996.

25. W. Nakpim and S. V. Meleshko. Linearization of second-order ordinary differential equations by generalized Sundman transformations. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*, 6:1–11, 2010.

26. A. Ruiz and C. Muriel. On the integrability of Liénard I–type equations via λ symmetries and solvable structures. *Appl. Math. Comput.*, 339:888–898, 2018.

27. L. G. S. Duarte, L. A. C. P. da Mota, and E. Nunez. Finding first order differential invariants through the S-function. *Computer Physics Communications*, 207:542–544, 2016.

28. R. Conte and M. Musette. Solitary waves of nonlinear nonintegrable equations. *Lect. Notes Phys.*, 661:373–406, 2005.

29. A. Gasull and H. Giacomini. Explicit traveling waves and invariant algebraic curves. *Nonlinearity*, 28:1597–1606, 2015.

30. M. Musette and R. Conte. Analytic solitary waves of nonintegrable equations. *Physica D*, 181:70–79, 2003.

31. N. A. Kudryashov. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 24(5):1217–1231, 2005.

32. R. Conte and M. Musette. *The Painlevé Handbook*. Springer, Mathematical Physics Studies, 2020.

33. M.H. Poincaré. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, 5(1):161–191, 1891.

34. M.H. Poincaré. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, 11(1):193–239, 1897.

35. Yu. Ilyashenko and S. Yakovenko. *Lectures on Analytic Differential Equations*, volume 86. Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2008.

36. X. Zhang. *Integrability of Dynamical Systems: Algebra and Analysis*. Springer Singapore, 2017.

37. D. Cerveau and A. Lins Neto. Holomorphic foliations in CP(2) having an invariant algebraic curve. *Ann. Inst. Fourier*, 41:883–903, 1991.

38. M. M. Carnicer. The Poincaré problem in the nondicritical case. *Ann. Math.*, 140:289–294, 1994.

39. S. Walcher. On the Poincaré problem. *J. Diff. Eqns.*, 166:51–78, 2000.

40. C. Briot and J.-C. Bouquet. *Théorie des fonctions elliptiques.* 2ième édition, Gauthier–Villars, Paris, 1875.

41. A. E. Eremenko. Meromorphic solutions of algebraic differential equations. *Russian Math. Surveys*, 37(4):61–95, 1982.

42. A. Eremenko. Meromorphic traveling wave solutions of the Kuramoto–Sivashinsky equation. *J. Math. Phys., Anal., Geom.*, 2(3):278–286, 2011.

43. V. N. Gorbuzov. Construction of the first integrals and the last multipliers of polynomial autonomous multidimensional differential systems. *Differential Equations*, 34(4):564–566, 1998.

44. J. Llibre and Ch. Pantazi. Darboux theory of integrability for a class of nonautonomous vector fields. *J. Math. Phys.*, 50:102705, 2009.

45. D. Blázquez-Sanz and Ch. Pantazi. A note on the Darboux theory of integrability of non–autonomous polynomial differential systems. *Nonlinearity*, 25:2615–2624, 2012.

46. V. N. Gorbuzov. Partial integrals of ordinary differential equations. *arXiv:1809.07105*, pages 1–171, 2018.

47. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A.G. Maier. *Qualitative Theory of Second–Order Dynamic Systems.* Wiley, New York, 1973.

48. X. Zhang. The 16th Hilbert problem on algebraic limit cycles. *Journal of Differential Equations*, 251(7):1778–1789, 2011.

49. A. A. Shcherbakov. Dynamics of local groups of conformal mappings and generic properties of differential equations on $\mathbb{C}^2$. In *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, volume 254, pages 103–120, 2006.

50. N. Goncharuk and Yu. Kudryashov. Genera of non-algebraic leaves of polynomial foliations of $\mathbb{C}^2$. *Moscow Mathematical Journal*, 18(1):63–83, 2018.

51. A. Lins Neto. *Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimention two*, volume 1345. In: Holomorphic dynamics. Lectures Notes in Mathematics, 2006.

52. J. P. Jouanolou. *Equations de Pfaff algébriques*, volume 708. Lectures Notes in Mathematics, Springer, New York, 1979.

53. J. Llibre and X. Zhang. On the darboux integrability of polynomial differential systems. *Qualitative theory of dynamical systems*, 11:129–144, 2012.

54. А. Д. Полянин and А. И. Зайцев, В. Ф. и Журов. *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики.* Физматлит, 2009.

55. I. T. Habibullin and A. R. Khakimova. Invariant manifolds and Lax pairs for integrable nonlinear chains. *Theoretical and Mathematical Physics*, 191(3):369–388, 2017.

56. C. Valls. Complete characterization of algebraic traveling wave solutions for the Boussinesq, Klein–Gordon and Benjamin–Bona–Mahony equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 95:148–151, 2017.

57. C. Valls. Algebraic traveling waves for some family of reaction–diffusion

equations including the Nagumo equations. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 24:25:1–13, 2017.

58. C. Valls. Algebraic traveling wave solutions, Darboux polynomials and polynomial solutions. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 17:429–439, 2018.
59. C. Valls. Algebraic traveling waves for the generalized viscous Burgers equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 467(1):768–783, 2018.
60. E.J. Parkes, B.R. Duffy, and P.C. Abbott. The Jacobi elliptic–function method for finding periodic–wave solutions to nonlinear evolution equations. *Phys. Lett. A.*, 295:280–286, 2002.
61. A. M. Wazwaz. The tanh–coth method for solitons and kink solutions for nonlinear parabolic equations. *Appl. Math. Comput.*, 188:1467–1475, 2007.
62. J. H. He and H. X. Wu. Exp–function method for nonlinear wave equations. *Chaos Solitons Fractals*, 30:700–708, 2006.
63. R.J. Walker. *Algebraic Curves.* Springer–Verlag, New York, 1978.
64. R. R. Gontsov and I. V. Goryuchkina. On the convergence of generalized power series satisfying an algebraic ODE. *Asymptotic Analysis*, 93(4):311–325, 2015.
65. V. Dragović, R. R. Gontsov, and I. V. Goryuchkina. From formal to actual Puiseux series solutions of algebraic differential equations of first order. *arXiv*, 2008.02982:1–17, 2020.
66. V. V. Golubev. *Lectures on Analytical Theory of Differential Equations (in Russian).* Moscow: Gostekhizdat, 1950.

67. A. D. Bruno. Asymptotic behaviour and expansions of solutions of an ordinary differential equation. *Russ. Math. Surv.*, 59(3):429–481, 2004.

68. A. D. Bruno. *Power Geometry in Algebraic and Differential Equations.* Elsevier Science (North–Holland), 2000.

69. R. Conte. The Painlevé approach to nonlinear ordinary differential equations. In R. Conte, editor, *The Painlevé Property One Century Later*, pages 77–180. CRM Series in Mathematical Physics, Springer–Verlag, New York, 1999.

70. J. Chavarriga, H. Giacomini, and M. Grau. Necessary conditions for the existence of invariant algebraic curves for planar polynomial systems. *Bull. Sci. Math.*, 129:99–126, 2005.

71. I. A. García, H. Giacomini, and J. Giné. Generalized nonlinear superposition principles for polynomial planar vector fields. *J. Lie Theory*, 15(1):89–104, 2005.

72. H. Giacomini, J. Giné, and M. Grau. The role of algebraic solutions in planar polynomial differential systems. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 143(2):487–508, 2007.

73. A. Ferragut and H. Giacomini. A new algorithm for finding rational first integrals of polynomial vector fields. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 9:89–99, 2010.

74. M. N. Lagutinski. On some polynoms and their aplication for algebraic integrationof ordinary differential algebraic equations. *Communications of the Kharkov Mathematical Society. The second series (in Russian)*, 13:200–224, 1912.

75. C. Christopher, J. Llibre, and J. V. Pereira. Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields. *Pacific J. of Math.*, 229:63–117, 2007.

76. On the computation of the rational integrals of systems of ordinary differential equations by Lagutinski's method. *Bulletin of NRNU MEPhI (in Russian)*, 5(24).

77. On algebraic integrals of a differential equation. *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, 27(2).

78. M. V. Demina. Classifying algebraic invariants and algebraically invariant solutions. *Chaos, Solitons and Fractals*, 140:110219, 2020.

79. M. V. Demina. The method of Puiseux series and invariant algebraic curves. *Communications in Contemporary Mathematics*, 24(03):2150007, 2022.

80. M. V. Demina and C. Valls. Classification of invariant algebraic curves and nonexistence of algebraic limit cycles in quadratic systems from family (I) of the Chinese classification. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 30(4):2050056, 2020.

81. M. V. Demina. Liouvillian integrability of the generalized Duffing oscillators. *Analysis and Mathematical Physics*, 11(1):1–25, 2021.

82. M. V. Demina. Necessary and sufficient conditions for the existence of invariant algebraic curves. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2021(48):1–22, 2021.

83. Y. Kuramoto and T. Tsuzuki. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium. *Progr. Theoret. Phys.*, 55(2):356–369, 1976.

84. G. I. Sivashinsky. Instabilities, pattern—formation, and turbulence in flames. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 15:179–199, 1983.

85. A. J. Bernoff and A. L. Bertozzi. Singularities in a modified Kuramoto–Sivashinsky equation describing interface motion for phase transition. *Physica D*, 85(3):375–404, 1995.

86. D. Tseluiko, S. Saprykin, C. Duprat, F. Giorgiutti-Dauphine, and S. Kalliadasis. Pulse dynamics in low–Reynolds–number interfacial hydrodynamics: Experiments and theory. *Physica D*, 239:2000–2010, 2010.

87. R. Conte and T.-W. Ng. Meromorphic solutions of a third order nonlinear differential equation. *Journal of Mathematical Physics*, 51:033518, 2010.

88. R. Conte and M. Musette. Elliptic general analytic solutions. *Studies in Applied Mathematics*, 123:63–81, 2009.

89. R. Conte and T.-W. Ng. Meromorphic traveling wave solutions of the complex cubic–quintic Ginzburg–Landau equation. *Acta. Appl. Math.*, 122:153–166, 2012.

90. M. V. Demina and N. A. Kudryashov. Explicit expressions for meromorphic solutions of autonomous nonlinear ordinary differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 16:1127–1134, 2011.

91. M. V. Demina and N. A. Kudryashov. From Laurent series to exact meromorphic solutions: The Kawahara equation. *Phys. Lett. A.*, 374:4023–4029, 2010.

92. M. V. Demina and N. A. Kudryashov. On elliptic solutions of nonlinear ordinary differential equations. *Appl. Math. and Comp.*, 217(23):9849–9853, 2011.

93. M. V. Demina and N. A. Kudryashov. Multi-particle dynamical systems and polynomials. *Regular and Chaotic Dynamics*, 21(3):351–366, 2016.

94. N. A. Kudryashov. Exact solutions of the generalized Kuramoto–Sivashinsky equation. *Phys. Lett. A.*, 147:287–291, 1990.

95. A. N. W. Hone. Non–existence of elliptic travelling wave solutions of the complex Ginzburg–Landau equation. *Physica D*, 205:292–306, 2005.

96. N. A. Kudryashov and M. V. Demina. Traveling wave solutions of the generalized nonlinear evolution equations. *Appl. Math. and Comp.*, 210:551–557, 2009.

97. M. V. Demina and N. A. Kudryashov. Power and non–power expansions of the solutions for the fourth–order analogue to the second Painlevé equation. *Chaos, Solitons and Fractals*, 32(1):124–144, 2007.

98. M. V. Demina and N. A. Kudryashov. The Yablonskii–Vorob'ev polynomials for the second Painlevé hierarchy. *Chaos, Solitons and Fractals*, 32(2):526–537, 2007.

99. V. I. Arnold and Yu. S. Ilyashenko. *Ordinary differential equations*, volume 1. Results of science and technology. Series Modern problems of Mathematics. Fundamental directions, 1985.

100. V. I. Arnold. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Second edition.* SpringerVerlag, New York, 1988.

101. H. Dulac. Points singuliers des équations differéntielles. *Mem. Sci. Math.*, 61, 1934.

102. A. D. Bruno. *Local methods in nonlinear differential equations. Part I. The local method of nonlinear analysis of differential equations. Part II. The sets of analyticity of a normalizing transformation*, volume 86. Springer Series in Soviet Mathematics, 1989.

103. M. J. Prelle and M.F. Singer. Elementary first integrals of differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 279(1):215–229, 1983.

104. C. Christopher, J. Llibre, C. Pantazi, and S. Walcher. On planar polynomial vector fields with elementary first integrals. *Journal of Differential Equations*, 267(8):4572–4588, 2019.

105. J. Chavarriga, J. Giacomini, J. Giné, and J. Llibre. Darboux integrability and the inverse integrating factor. *J. Differential Eqs.*, 194:116–139, 2003.

106. C. Christopher and J. Llibre. Integrability via invariant algebraic curves for planar polynomial differential systems. *Annals of Differential Equations*, 16:5–19, 2000.

107. A. Goriely. Integrability, partial integrability, and nonintegrability for systems of ordinary differential equations. *Journal of Mathematical Physics*, 37:1871, 1996.

108. M. C. Nucci. Jacobi last multiplier and Lie symmetries: A novel application of an old relationship. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 12(2):284–304, 2005.

109. M. C. Nucci and P. G. L. Leach. An old method of Jacobi to find Lagrangians. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 16(4):431–441, 2009.

110. D. D'Ambrosi and M. C. Nucci. Lagrangians for equations of Painlevé type my means of the Jacobi last multiplier. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 16(1):61–71, 2009.

111. I. A. García and M. Grau. A survey on the inverse integrating factor. *Qual. Theor. Dyn. Syst.*, 9:115–166, 2010.

112. M. V. Demina, J. Giné, and C. Valls. Puiseux integrability of differential equations. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 21(2):35, 2022.

113. J. Giné and M. Grau. Weierstrass integrability of differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 23:523–526, 2010.

114. J. Giné and J. Llibre. Formal Weierstrass non–integrability criterion for some classes of polynomial differential systems in $\mathbb{C}^2$. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 30(4):2050064, 2020.

115. J. Giné and J. Llibre. Strongly formal Weierstrass non–integrability for polynomial differential systems in $\mathbb{C}^2$. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 1:1–16, 2020.

116. A. A. Andronov, A. A. Vitt, and S. E. Khaikin. *Theory of oscillators.* Adiwes International Series in Physics, 1966.

117. B. H. Gilding and R. Kersner. *Travelling Waves in Nonlinear Diffusion-Convection Reaction.* Birkauser Basel, 2004.

118. P. Holmes and D. Rand. Phase portraits and bifurcations of the non-linear oscillator: $\ddot{x}+(\alpha+\gamma x^2)\dot{x}+\beta x+\delta x^3 = 0$. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 15(6):449–458, 1980.

119. G. Villari. On the qualitative behaviour of solutions of Liénard equation. *J. Differential Equations*, 67(2):269–277, 1987.

120. S. Lynch. Small–amplitude limit cycles of Liénard systems. *Calcolo*, 27:1–32, 1990.

121. E. Dumortier and L. Chengzhi. Quadratic Liénard equations with quadratic damping. *J. Differential Equations*, 139:41–59, 1997.

122. C. J. Christopher and S. Lynch. Small–amplitude limit cycle bifurcations for Liénard systems with quadratic or cubic damping or restoring forces. *Nonlinearity*, 12:1099–1112, 1999.

123. A. O. Ignatyev. The domain of existence of a limit cycle of Liénard system. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 38(2):271–279, 2017.

124. V. V. Amel'kin. On one conjecture in the theory of isochronous Liénard systems. *Differential Equations*, 53(10):1247–1253, 2017.

125. L. A. Cherkas and I. N. Sidorenko. Limit cycles of a Liénard cubic system with quadratic friction function. *Differential Equations*, 44(2):217–221, 2008.

126. K. Odani. The limit cycle of the van der Pol equation is not algebraic. *Journal of Differential Equations*, 115(1):146–152, 1995.

127. H. Żołądek. Algebraic invariant curves for the Liénard equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350:1681–1701, 1998.

128. J. Llibre and X. Zhang. On the algebraic limit cycles of Liénard systems. *Nonlinearity*, 21:2011–2022, 2008.

129. X. Yu and X. Zhang. The hyperelliptic limit cycles of the Liénard systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 376:535–539, 2011.

130. C. Liu, G. Chen, and J. Yang. On the hyperelliptic limit cycles of Liénard systems. *Nonlinearity*, 25(6):1601–1611, 2012.

131. J. Chavarriga, I.A. García, J. Llibre, and H. Żołądek. Invariant algebraic curves for the cubic Liénard system with linear damping. *Bull. Sci. Math.*, 130:428–441, 2006.

132. X. Qian and J. Yang. On the number of hyperelliptic limit cycles of Liénard systems. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 19:43, 2020.

133. L. A. Cherkas. Conditions for a Liénard equation to have a centre. *Differ. Equ.*, 12:201–206, 1976.

134. C. Christopher. An algebraic approach to the classification of centers in polynomial Liénard systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 229(1):319–329, 1999.

135. J. Llibre and C. Valls. On the analytic integrability of the Liénard analytic differential systems. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 21(2):557–573, 2016.

136. A. Gasull and J. Giné. Integrability of Liénard systems with a weak saddle. *Z. Angew. Math. Phys.*, 68(13):1–13, 2017.

137. J. Giné and J. Llibre. On the integrability of Liénard systems with a strong saddle. *Applied Mathematics Letters*, 70:39–45, 2017.

138. J. Giné and J. Llibre. Weierstrass integrability in Liénard differential systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 377:362–369, 2011.

139. S.N. Pandey, P.S. Bindu, M. Senthilvelan, and M. Lakshmanan. A group theoretical identification of integrable cases of the Liénard–type equation $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$. I: Equations having nonmaximal number of Lie point symmetries. *J. Math. Phys.*, 50(8):082702, 2009.

140. S.N. Pandey, P.S. Bindu, M. Senthilvelan, and M. Lakshmanan. A group theoretical identification of integrable equations in the Liénard–type equation $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$. II: Equations having maximal Lie point symmetries. *J. Math. Phys.*, 50(10):102701, 2009.

141. A. Chiellini. Sullíntegrazione della equazione differenziale $y' + Py^2 + Qy^3 = 0$. *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, 10:301–307, 1931.

142. E.S. Cheb-Terrab. An Abel ordinary differential equation class generalizing known integrable classes. *European J. Appl. Math.*, 17:217–229, 2003.

143. E.S. Cheb-Terrab. Solutions for the general, confluent and biconfluent Heun equations and their connection with Abel equations. *J. Phys. A*, 37:9923–9949, 2004.

144. I. A. García, J. Giné, and J. Llibre. Liénard and Riccati differential equations related via Lie algebras. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 10:485–494, 2008.

145. A. Ghose Choudhury and P. Guha. Chiellini integrability condition, planar isochronous systems and Hamiltonian structures of Liénard equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 22:2465–2478, 2017.

146. M. V. Demina and D. I. Sinelshchikov. Integrability properties of cubic Liénard oscillators with linear damping. *Symmetry*, 11:1378, 2019.

147. P. Guha and A. Ghose Choudhury. Nonlocal transformations of the generalized Liénard type equations and dissipative Ermakov–Milne–Pinney systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 16(7):1950107, 2019.

148. D. I. Sinelshchikov. On linearizability via nonlocal transformations and first integrals for second-order ordinary differential equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 141:110318, 2020.

149. M. V. Demina and D. I. Sinelshchikov. Darboux first integrals and linearizability of quadratic–quintic Duffing–van der Pol oscillators. *Journal of Geometry and Physics*, 165:104215, 2021.

150. D. I. Sinelshchikov. Nonlocal deformations of autonomous invariant curves for Liénard equations with quadratic damping. *Chaos, Solitons and Fractals*, 152:111412, 2021.

151. P. B. Acosta-Humánez, J. T. Lázaro, J. J. Morales-Ruiz, and Ch. Pantazi. On the integrability of polynomial vector fields in the plane by means of Picard–Vessiot theory. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A*, 35:1767–1800, 2015.

152. V.K. Chandrasekar, S.N. Pandey, M. Senthilvelan, and M. Lakshmanan. A simple and unified approach to identify integrable nonlinear oscillators and systems. *J. Math. Phys.*, 47:023508, 2006.

153. J. Llibre and C. Valls. Liouvillian first integrals for generalized Liénard polynomial differential systems. *Adv. Nonlinear Stud.*, 13:819–829, 2013.

154. G. Chèze and T. Cluzeau. On the nonexistence of Liouvillian first integrals for generalized Liénard polynomial differential systems. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 20(4):475–479, 2013.

155. T. Stachowiak. Hypergeometric first integrals of the Duffing and van der Pol oscillators. *Journal of Differential Equations*, 266:5895–5911, 2019.

156. M. V. Demina. Invariant algebraic curves for Liénard dynamical systems revisited. *Applied Mathematics Letters*, 84:42–48, 2018.

157. M. V. Demina. Novel algebraic aspects of Liouvillian integrability for two–dimensional polynomial dynamical systems. *Physics Letters A*, 382(20):1353–1360, 2018.

158. M. V. Demina and C. Valls. On the Poincaré problem and Liouvillian integrability of quadratic Liénard differential equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sec. A: Mathematics*, 150(6):3231–3251, 2020.

159. M. V. Demina. Integrability and Jacobi last multipliers of cubic Liénard differential equations with quadratic damping. *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, 9(4):499–507, 2020.

160. M. V. Demina. Integrability and solvability of polynomial Liénard differential systems. *Studies in Applied Mathematics*, 150(3):755–817, 2023.

161. E. Kamke. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen.* Chelsea, New York, 1959.

162. A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev. *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations, Secod Edition.* Chapman and Hall, Boca Raton, 2003.

163. E. S. Cheb-Terrab and A. D. Roche. Abel ODEs: Equivalence and integrable classes. *Computer Physics Communications*, 130:204–231, 2000.

164. B. I. Suleimanov and A. M. Shavlukov. Integrable Abel equation and asymptotics of symmetry solutions of Korteweg–de Vries equation. *Ufa Mathematical Journal*, 13(2):99–106, 2021.

165. S. Opanasenko and E. V. Ferapontov. Linearizable Abel equations and the Gurevich–Pitaevskii problem. *Studies in Applied Mathematics*, pages 1–22, 2022.

166. C. Muriel and J. L. Romero. Second-order ordinary differential equations and first integrals of the form $a(t,x)\dot{x}+b(t,x)$. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 16:209–222, 2009.

167. C. Muriel and J. L. Romero. Nonlocal transformations and linearization of second-order ordinary differential equations. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(43):434025, 2010.

168. Yu. Yu. Bagderina. Invariants of a family of scalar second-order ordinary differential equations for Lie symmetries and first integrals. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 49(15):155202, 2016.

169. M. Gouveia, J. Llibre, and L. Roberto. Phase portraits of the quadratic polynomial Liénard differential systems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 151(1):202–216, 2021.

170. A. A. Andronov, A. A. Vitt, and S. E. Khaikin. *Theory of Oscillators.* Oxford, New York: Pergamon Press, 1996.

171. R. FitzHugh. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys. J.*, 1:445–466, 1961.

172. J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizava. An active impulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*, 50:445–466, 1962.

173. V. K. Chandrasekar, M. Senthilvelan, and M. Lakshmanan. New aspects of integrability of force–free Duffing–van der Pol oscillator and related nonlinear systems. *Jounral of Physics A*, 37:4527–4534, 2004.

174. G. Gao and Z. Feng. First integrals for the Duffing–van der Pol type oscillator. *Electronic Journal of Differential Equations*, 19:123–133, 2010.

175. I. Kovacic and M. J. Brennan. *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour*. Wiley, 2011.

176. I. Kovacic. *Nonlinear oscillations*. Springer International Publishing, 2020.

177. V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, and D. V. Leykin. Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications. *Reviews in Mathematics and Math. Physics (I.M. Krichever and S.P. Novikov, eds.)*, 10:1–125, 1997.

178. V. Z. Enolskii, E. Hackmann, V. Kagramanova, J. Kunz, and C. Lämmerzahl. Inversion of hyperelliptic integrals of arbitrary genus with application to particle motion in general relativity. *Journal of Geometry and Physics*, 61:899–921, 2011.

179. M. J. Ablowitz and A. Zeppetella. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed. *Bulletin of Mathematical Biology*, 41(6):835–840, 1979.

180. J. A. Almendral and M. A. F. Sanjuán. Integrability and symmetries for the Helmholtz oscillator with friction. *Journal of Physics. A: Mathematical and General*, 36:695–710, 2003.

181. J. Qi, Q. Chen, and et. al. A note about the general meromorphic solutions of the Fisher equation. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014:1–4, 2014.

182. S. Parthasarathy and M. Lakshmanan. On the exact solutions of the Duffing oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, 137:523–526, 1990.

183. E. L. Ince. *Ordinary differential equations.* Dover Publications, 2015.

184. X. Zhang. The 16th Hilbert problem on algebraic limit cycles. *J. Differential Equations*, 251(7):1778–1789, 2011.

185. J. Llibre and X. Zhang. A survey on algebraic and explicit non-algebraic limit cycles in planar differential systems. *J. Differential Equations*, 39(1):48–61, 2021.

186. Y.-Q. Ye et. al. *Theory of Limit Cycles*, volume 66. Translations of Math. Monographs (AMS, Providence, RI), 1986.

187. J. Giné, M. Grau, and J. Llibre. On the extensions of the Darboux theory of integrability. *Nonlinearity*, 26:2221–2229, 2013.

188. John Weiss, Michael Tabor, and George Carnevale. The Painlevé property for partial differential equations. *Journal of Mathematical Physics*, 24(3):522–526, 1983.

189. Z. Rakaric and I. Kovacic. Mechanical manifestations of bursting oscillations in slowly rotating systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 81:35–42, 2016.

190. M. V. Demina. Invariant surfaces and Darboux integrability for non–autonomous dynamical systems in the plane. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 51:505202, 2018.

191. S. Rajasekar. Controlling of chaos by weak periodic perturbations in Duffing–van der Pol oscillator. *S. Pramana - J. Phys.*, 41:295, 1993.

192. F. M. Moukam Kakmeni, S. Bowong, and et. al. Strange attractors and chaos control in a Duffing–Van der Pol oscillator with two external periodic forces. *Journal of Sound and Vibration*, 277:783–799, 2004.

193. A. D. Morozov and O. S. Kostromina. On periodic perturbations of asymmetric Duffing–Van–der–Pol equation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(5):1450061, 2014.

194. M. V. Demina and D. I. Sinelshchikov. On the integrability of some forced nonlinear oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 121:103439, 2020.

195. Y. M. Chiang and R. Halburd. On the meromorphic solutions of an equation of Hayman. *J. Math. Anal. Appl.*, 281:663–677, 2003.

196. A. E. Eremenko, L. Liao, and T. W. Ng. Meromorphic solutions of higher order Briot–Bouquet differential equations. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 146(1):197–206, 2009.

197. C. F. Wu. Exact meromorphic stationary solutions of the cubic–quintic Swift–Hohenberg equation. *Anal. Theory Appl.*, 30:108–119, 2014.

198. R. Halburd and J. Wang. All admissible meromorphic solutions of Hayman's equation. *International Mathematics Research Notices*, 2015(18):8890–8902, 2015.

199. M. V. Demina. Classification of meromorphic integrals for autonomous nonlinear ordinary differential equations with two dominant monomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 479:1851–1862, 2019.

200. M. V. Demina. Meromorphic solutions of autonomous ordinary differential equations without the finiteness property. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 516(2):126516, 2022.

201. W.K. Hayman. *Nevanlinna theory and complex differential equations.* Clarendon Press, Oxford, 1964.

202. I. Laine. *Meromorphic functions.* de Gruyter, Berlin and New York, 1993.

203. J. Clunie. On integral and meromorphic functions. *J. London Math. Soc.*, 37:178–27, 1962.

204. A. E. Eremenko. Meromorphic solutions of equations of Briot–Bouquet type. *Theory of functions, functional analysis and their applications (in Russian)*, 38:48–56, 1982. English translation: Amer. Math. Soc. Transl. 133 (1986), 15–23.

205. M. V. Demina and N. A. Kudryashov. Meromorphic solutions in the Fitzhugh–Nagumo model. *Applied Mathematics Letters*, 82:18–23, 2018.

206. M. V. Demina and N. A. Kudryashov. Elliptic solutions in the Hénon–Heiles model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(3):471–482, 2014.

207. E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141, 1963.

208. C. Sparrow. *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*, volume 41 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer–Verlag New York, 1982.

209. M. Tabor and J. Weiss. Analytic structure of the Lorenz system. *Phys. Rev. A.*, 24(4):2157–2167, 1981.

210. M. Kus. Integrals of motion for the Lorenz system. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 16(18):L689, 1983.

211. N. Gupta. Integrals of motion for the Lorenz system. *Journal of Mathematical Physics*, 34:801–804, 1993.

212. J. Llibre and X. Zhang. Invariant algebraic surfaces of the Lorenz system. *Journal of Mathematical Physics*, 43(3):1622, 2002.

213. X. Zhang. Exponential factors and Darbouxian first integrals of the Lorenz system. *Journal of Mathematical Physics*, 43(10):4987, 2002.

214. N. A. Kudryashov. Analytical solutions of the Lorenz system. *Regular and Chaotic Dynamics*, 20:123–133, 2015.

215. P. Rosenau. Dynamics of dense discrete systems: High order effects. *Prog. Theor. Phys.*, 79:1028–1042, 1988.

216. T. Kawahara. Oscillatory solitary waves in dispersive media. *J. Phys. Soc. Japan.*, 33:260–264, 1972.

217. P. J. Olver. *Hamiltonian and non-Hamiltonian models for water waves.* Lecture Notes in Physics, 195, Springer–Verlag, New York, 1984.

218. S. Chen, Z. Du, J. Liu, and K. Wang. The dynamic properties of a generalized Kawahara equation with Kuramoto–Sivashinsky perturbation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems – B*, 27(3):1471–1496, 2022.