На правах рукописи

Парастаев Григорий Сергеевич

Гипотеза Рамсея как принцип отбора по Фишеру и ее обобщения

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2026

Место выполнения работы

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», факультет вычислительной математики и кибернетики, кафедра системного анализа

Научный руководитель: **Шананин Александр Алексеевич**
академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор. Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», кафедра анализа систем и решений, заведующий кафедрой.

Официальные оппоненты: **Кабанихин Сергей Игоревич**
член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор. Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук», лаборатория прикладных обратных задач, главный научный сотрудник;

Братусь Александр Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор. Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет транспорта», кафедра «Прикладная математика» Института управления и цифровых технологий, профессор.

Ведущая организация: Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования «Европейский университет в Санкт-Петербурге»

Защита состоится 10 сентября 2026 г. в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета 24.1.224.02 при Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН) по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИЦ ИУ РАН по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 42, а также на сайте
https://www.frccsc.ru/diss-council/00207303/diss/list/parastaev_gs.

Автореферат разослан «_____» _______________ 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.224.02,
кандидат физико-математических наук, доцент В. И. Никонов

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена исследованию асимптотики решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциального уравнения, описывающих динамику социальной стратификации.

Актуальность темы и степень ее разработанности

В течение последних 30-35 лет наблюдается рост неравенства в распределении доходов, который сопровождается замедлением темпов роста мировой экономики. Данный факт вызвал обеспокоенность и породил дискуссии в экономическом сообществе. Так, вопрос о том, как взаимосвязаны между собой неравенство и экономический рост и как институциональные ограничения влияют на неравенство, обсуждается в монографии[1] Филиппа Агийона и Джеффри Уильямсона. В свою очередь, французский экономист Тома Пикетти[2] предполагает, что в XXI веке рост неравенства будет сопряжен с низкими темпами роста мировой экономики, причем неравенство будет развиваться подобно тому, как росло неравенство в распределении богатства в XVIII и XIX веках, когда социальное положение человека определялось не его способностями и уровнем доходов, а его наследством. На экономический рост и неравенство также способен оказывать влияние технологический прогресс, степень влияния которого на протяжении разных исторических периодов исследуется в книге[3] Дарона Асимоглу и Саймона Джонсона. Соображения о том, какие меры следует предпринимать для сокращения неравенства в распределении доходов, излагаются английским экономистом Энтони Б. Аткинсоном[4].

Попытки анализа причинно-следственных связей, влияющих на экономическое неравенство, предпринимаются и на языке математических моделей. Одной из первых работ, предложивших содержательное на эту тему обсуждение, стала статья[5] английского математика и экономиста Фрэнка Пламптона Рамсея. В ней Рамсей выдвинул гипотезу о разделении общества с разной степенью терпеливости в расходовании своих сбережений на два класса – наиболее терпеливых, кто завладевает всем капиталом, и всех остальных, кто оказывается на уровне прожиточного минимума. На математическом языке гипотеза Рамсея означает установление в пределе на бесконечном временном горизонте положения равновесия, соответствующего распределению доходов с сильной степенью неравенства.

Первое формальное доказательство гипотезы Рамсея было предложено в работе[6], где была рассмотрена модель рационального репрезентативного потребителя рамсеевского типа

---

[1] Aghion P., Williamson J. G. Growth, Inequality and Globalization: Theory, History and Policy. – Cambridge University Press. – 1999.

[2] Piketty T., Goldhammer A. Capital in the Twenty-First Century. – Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press. – 2014.

[3] Acemoglu D., Johnson S. Power and Progress: Our Thousand-Year Struggle Over Technology and Prosperity. – New York: Public Affairs. – 2023. – 560 p.

[4] Atkinson A. B. Inequality: What Can Be Done? – Harvard University Press. – 2015.

[5] Ramsey F. P. A Mathematical Theory of Saving // The Economic Journal. – 1928. – Vol. 38, no. 152. – P. 543–559.

[6] Becker R. A. On the Long-run Steady State in a Simple Dynamic Model of Equilibrium with Heterogeneous Households // Quarterly Journal of Economics. – 1980. – Vol. 95, no. 2. – P. 375–382.

в дискретном времени. Спустя пару лет Труманом Бьюли[7] была доказана гипотеза Рамсея в форме теоремы о магистрали для модели общего равновесия в дискретном времени. Отличие этих моделей заключается в различных институциональных ограничениях – так, в случае Беккера был наложен запрет на заимствование капитала, в то время как в случае Бьюли этот запрет отсутствует.

В совместной работе[8] Г. Зоргера и Т. Митры была рассмотрена модель Рамсея–Беккера в непрерывном времени, являющаяся системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Переход от дискретного времени к непрерывному позволил авторам использовать более широкий математический аппарат для исследования модели. Так, помимо справедливости гипотезы Рамсея, авторам удалось установить единственность стационарного равновесного состояния, его глобальную асимптотическую устойчивость, а также следующее свойство: самое терпеливое домашнее хозяйство, то есть то хозяйство, которое обладает наименьшим значением коэффициента дисконтирования, за конечное время завладевает всем богатством, располагаемым в экономике.

Недостатком вышеуказанных моделей является предположение о постоянстве коэффициентов дисконтирования – величин, задающих степень терпеливости агента. В статье[9] К. Ю. Борисова и М. А. Пахнина было предложено устранить этот недостаток за счет эндогенного формирования межвременных предпочтений, когда значение коэффициента дисконтирования определяется исключительно собственными характеристиками агента. Такой способ формирования межвременных предпочтений был впервые рассмотрен Т. Купмансом и Х. Удзавой. Проблему описания взаимодействия социальных слоев при эндогенном формировании межвременных предпочтений можно решать по-разному. Популярным способом является использование концепции игр среднего поля, предложенной Жан-Мишелем Ласри и Пьер-Луи Лионсом. Самым же простым способом является сведение независимых уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой все уравнения связаны. В диссертационной работе это предлагается сделать в предположении гипотезы относительного дохода американского экономиста Джеймса Дьюзенберри[10], которая связывает коэффициент дисконтирования с величиной доли доходов по сравнению с остальными. В избираемом подходе дополнительную сложность дает изменение коэффициентов дисконтирования со временем – на задачу о поведении рационального репрезентативного потребителя рамсеевского типа, представленную в диссертационной работе задачей оптимального управления на бесконечном неотрицательном полуинтервале времени, накладывается требование о получении решения в форме синтеза, т.е. функции от фазовой переменной и параметров.

Гипотеза Рамсея является утверждением, которое имеет место, когда рыночные меха-

---

[7] Bewley T. F. An integration of equilibrium theory and turnpike theory // Journal of Mathematical Economics. – 1982. – Vol. 10. – P. 233–267.

[8] Mitra T., Sorger G. On Ramsey's conjecture // Journal of Economic Theory. – 2013. – Vol. 148, no. 5. – P. 1953–1976.

[9] Борисов К. Ю., Пахнин М. А. Модели экономического роста с неоднородным дисконтированием // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2023. – Т. 63, №3. – С. 355–379.

[10] Duesenberry J. S. Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior. – Cambridge, MA: Harvard University Press. – 1949.

низмы не стеснены какими-либо ограничениями. Пикетти отмечает, что во второй половине XX века наблюдалось сильное вмешательство государства в экономику. Обычно такое вмешательство проявляется в виде взимания налогов с богатых слоев и выделения субсидий для бедных слоев, и оно позволяет сокращать неравенство в распределении доходов.

В связи с этим представляет интерес изучение дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, моделирующих перераспределение доходов государством. Из подобных работ автором были обнаружены лишь статья[11], в которой изучается модель распределения богатства и доходов в непрерывном времени с использованием концепции игр среднего поля, а также работа[12], в которой рассматривается система дифференциальных уравнений с целью проанализировать, как перераспределение доходов влияет на динамику доходов конечного числа групп населения.

Таким образом, представляется актуальным создание математического аппарата, способного выявлять причинно-следственные связи в формировании и взаимодействии социальных слоев.

Цели и задачи диссертационной работы

Целью работы является решение задач оптимального управления и исследование дифференциальных уравнений с целью изучения причинно-следственных связей, влияющих на социальную стратификацию.

Для достижения поставленной цели потребовалось решить следующие **задачи**:

1. Построить решения задач оптимального управления в форме синтеза, описывающих поведение социальных слоев при различных институциональных ограничениях, для последующего использования в моделях социальной динамики;

2. Исследовать асимптотику решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в моделях социальной динамики, в рамках гипотезы относительного дохода Дьюзенберри с различными институциональными ограничениями;

3. Исследовать интегро-дифференциальное уравнение, которое описывает влияние государственной политики налогообложения и субсидирования на неравенство в распределении доходов.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертационная работа носит теоретический характер. Разработан математический аппарат, основанный на исследовании задач оптимального управления и теории дифференциальных уравнений, который востребован для анализа причинно-следственных связей, определяющих социальную динамику. Данный аппарат также может быть востребован для моделирования коэффициентов дисконтирования денежных потоков экономических агентов.

---

[11] Achdou Y., Han J., Lasry J.-M., Lions P.-L., Moll B. Income and Wealth Distribution in Macroeconomics: A Continuous-Time Approach // Review of Economic Studies. – 2022. – Vol. 89, no. 1. – P. 45–86.

[12] Bertotti M. L. A Mathematical Model for the Dynamics of Income Distribution in the Presence of Production // Complexity. – 2024. – Vol. 2024, no. 3190620. – P. 1–10.

Методология и методы исследования

В работе использованы методы оптимального управления, а также принцип максимума Понтрягина для задач оптимального управления с конечным и бесконечным горизонтами времени, методы функционального анализа, методы математического анализа, качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории устойчивости.

Положения, выносимые на защиту

1. Построены решения задач оптимального управления в форме синтеза, описывающие поведение социальных слоев при различных типах институциональных ограничений;

2. Исследована асимптотика решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в моделях социальной динамики. Установлено выполнение гипотезы Рамсея при отсутствии ограничений на рыночные механизмы и влияние институциональных ограничений на характер расслоения;

3. В моделях социальной динамики Рамсея-Бьюли, Рамсея-Беккера и с неликвидным капиталом получена глобальная асимптотическая устойчивость стационарного положения равновесия. Доказано, что решение уравнения в континуальном аналоге модели Рамсея-Бьюли удовлетворяет свойству межвременной мажоризации по Лоренцу. Установлена связь между индексом неравенства Джини и функцией Ляпунова;

4. Для смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения, моделирующей перераспределение доходов государством всеобщего благосостояния, доказаны существование и единственность решения, глобальное сохранение решением свойств кривой Лоренца, задаваемой начальным условием, а также единственность и локальная асимптотическая устойчивость стационарного решения основного уравнения задачи.

Научная новизна

- Полное описание решений поставленных в работе задач оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени получено впервые. Решения удалось получить в форме синтеза, т.е. функций от фазовой переменной и параметров. Для указанных задач оптимального управления решена проблема, связанная с учетом условий трансверсальности на бесконечности. Также было показано, что в одной из задач оптимального управления с бесконечным полуинтервалом времени и фазовым ограничением происходит захват фазовой границей траектории;

- Асимптотика решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений получена в предположении гипотезы относительного дохода Дьюзенберри;

- Впервые установлена связь между индексом Джини и функцией Ляпунова для моделей социальной динамики Рамсея-Бьюли, Рамсея-Беккера и с неликвидным капиталом. Также впервые доказано свойство межвременной мажоризации по Лоренцу в континуальном аналоге модели Рамсея-Бьюли;

- Исследовано новое нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, моделирующее перераспределение доходов государством. Для связанной с уравнением смешанной задачи впервые доказаны существование и единственность решения, глобальное сохранение решением свойств кривой Лоренца, единственность и локальная асимптотическая устойчивость стационарного решения основного уравнения.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации были представлены на следующих научных мероприятиях:

- Конференция «Вычислительная математика и приложения», пгт Сириус, Россия, 5-9 августа 2024 года;
- Международная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024), посвященная 100-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского, г. Екатеринбург, Россия, 9-13 сентября 2024 года;
- 15-ая международная конференция "Optimization and Applications" (OPTIMA-2024), г. Петровац, Черногория, 16-20 сентября 2024 года;
- Научный семинар ЦЭМИ РАН «Математическая экономика» (рук. В. М. Полтерович, В. И. Данилов), г. Москва, Россия. Даты выступлений: 8 октября 2024 года, 25 ноября 2025 года;
- 10-ая международная конференция "Quasilinear Equations, Inverse Problems and their Applications" (QIPA 2024), пгт Сириус, Россия, 17-21 октября 2024 года;
- Научная конференция «Тихоновские чтения», г. Москва, Россия, 28 октября - 2 ноября 2024 года;
- Научный семинар мехмата МГУ «Математические методы экономики и естественных наук» (рук. А. С. Шамаев, О. С. Розанова), г. Москва, Россия. Даты выступлений: 15 ноября 2024 года, 13 марта 2026 года;
- Научный семинар ФИЦ ИУ РАН «Методы решения задач математической физики» (рук. Ю. Г. Евтушенко, С. И. Безродных, В. И. Власов, С. Я. Степанов), г. Москва, Россия, 6 февраля 2025 года;
- Научная конференция «Ломоносовские чтения», г. Москва, Россия, 24 марта - 4 апреля 2025 года;
- 11-ая международная конференция "Quasilinear Equations, Inverse Problems and their Applications" (QIPA 2025), пгт Сириус, Россия, 6-10 октября 2025 года;
- Научная конференция «Тихоновские чтения», г. Москва, Россия, 27-31 октября 2025 года;

- Научная конференция МФТИ «Численное моделирование в механике сплошных сред», посвященная 100-летию со дня рождения академика О. М. Белоцерковского, г. Долгопрудный, Россия, 27-29 ноября 2025 года;

- Научный семинар математического института имени С. М. Никольского РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (рук. А. Л. Скубачевский), г. Москва, Россия, 24 марта 2026 года;

- Научный семинар «Оптимальное управление и динамические системы» Математического института им. В. А. Стеклова РАН (рук. С. М. Асеев, Ю. С. Ильяшенко, Л. В. Локуциевский, М. С. Никольский), г. Москва, Россия, 9 апреля 2026 года.

Полученные результаты также использовались в исследованиях, проводимых в рамках проекта РНФ (грант 24-11-00329).

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в 9 печатных работах, из них 5 статей, индексированных в международных базах цитирования Web of Science/Scopus [1–5], 1 статья в сборниках трудов конференций [6] и 3 тезиса докладов [7—9].

Личный вклад автора

Все результаты в диссертации были получены лично автором под руководством научного руководителя, академика РАН, д. ф.-м. н., профессора А. А. Шананина. Работы [4; 5] подготовлены автором самостоятельно. В написанных в соавторстве работах [1–3] автору принадлежат следующие результаты:

- в работе [1] – Теорема 3.1, Теорема 3.2, Лемма 3.2, Лемма 3.3, Лемма 3.4, Лемма 3.5, Лемма 3.6, Теорема 4.1, Теорема 4.2, Лемма 5.1, Лемма 5.2, Лемма 5.3, Лемма 5.4, Теорема 6.1;

- в работе [3] – Theorems 1, 2, 3, Lemmas 1, 2, 4, 5;

- в работе [2] – Предложение 3.1, Теорема 3.1, Лемма 4.1, Теорема 4.1.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Общий объем диссертации составляет 158 страниц, включая 6 рисунков и 3 таблицы. Библиографический список состоит из 71 наименования на 6 страницах.

Содержание работы

Во **введении** обоснованы актуальность и степень разработанности темы диссертационной работы, сформулированы цель и задачи исследования, представлены положения, выносимые на защиту, указаны теоретическая и практическая значимости полученных в работе результатов, аргументирована их научная новизна. Также представлен список основных научных мероприятий, на которых были апробированы результаты диссертации.

В **главе 1** исследуются четыре постановки задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени, описывающие поведение рационального репрезентативного потребителя рамсеевского типа. Для соответствующей каждому варианту задачи оптимального управления на бесконечном горизонте времени выводится решение в форме синтеза, которое используется для моделирования динамики популяции домашних хозяйств в следующей главе.

В **параграфе 1.1** описываются общие принципы модели репрезентативного экономического агента на бесконечном горизонте и обозначаются различия четырех вариантов. В основу модели экономического поведения, описываемой задачами оптимального управления, закладывается концепция Ф. Рамсея. Денежный рынок является совершенным, т.е. процентные ставки по кредитам и депозитам совпадают. Также считается, что экономические решения, принимаемые типичным агентом, являются ограниченно рациональными, т.е. агент определяет потребительские расходы, сбережения и заимствования по потребительскому кредиту так, чтобы максимизировать дисконтированное потребление с учетом бюджетных ограничений. При этом предполагается, что он не может спрогнозировать изменения экономической конъюнктуры и принимает решения, считая, что его заработная плата w и процентная ставка на денежном рынке r будут оставаться на неизменном уровне. Текущее финансовое состояние агента в момент времени t описывается его капиталом $k\left(t\right)$, который может изменяться в результате поступления заработной платы w, доходов $rk\left(t\right)$ и потребительских расходов $c\left(t\right)\geq 0$. Ожидаемая агентом динамика капитала описывается уравнением

$$\frac{dk}{dt}\left(t\right)=rk(t)+w-c\left(t\right)$$

с начальным условием

$$k\left(0\right)=k_0\geq 0.$$

Тогда задание программы потребительских расходов $c\left(t\right)$ определяет предполагаемую динамику капитала. Предполагается, что агент стремится максимизировать функционал полезности с постоянным отвращением к риску $1-\beta\in\left(0,1\right)$ и коэффициентом дисконтирования $\rho>0$ вида

$$J\left(c\left(\cdot\right)\right)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\rho t}\left(c\left(t\right)\right)^{\beta}\,dt.$$

Каждый вариант постановки задачи содержит различное институциональное ограничение. Выделим теперь отличия каждого варианта.

В первой постановке допускается потребительский кредит, т.е. величина капитала может принимать отрицательные значения, и в этом случае агент, обслуживая кредит, выплачивает процентные платежи. Величина задолженности по потребительскому кредиту должна быть обеспечена будущими поступлениями заработной платы, т.е. $rk\left(t\right)+w\geq 0$, или

$$k\left(t\right)\geq -\frac{w}{r},\ t\in\left[0,+\infty\right).$$

Первая постановка приводит к задаче оптимального управления

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\rho t}\left(c\left(t\right)\right)^{\beta}\, dt \to \max_{c(\cdot)}, \tag{1.1}$$

$$\frac{dk}{dt}\left(t\right) = rk\left(t\right) + w - c\left(t\right), \; k\left(0\right) = k_0, \tag{1.2}$$

$$c\left(t\right) \geq 0, \tag{1.3}$$

$$k\left(t\right) \geq -\frac{w}{r}, \; t \in [0, +\infty). \tag{1.4а}$$

Результат сформулирован в следующей Теореме.

Теорема 1.1. Пусть $\rho > \beta r$. Тогда синтез в задаче оптимального управления (1.1)-(1.3) с ограничением (1.4а) имеет вид

$$c_1\left(k, \rho\right) = \frac{\rho - \beta r}{1 - \beta}\left[k + \frac{w}{r}\right]. \tag{1}$$

Во второй постановке потребительский кредит не допускается, и капитал агента должен быть неотрицательным, т.е.

$$k\left(t\right) \geq 0, \; t \in [0, +\infty).$$

Следовательно, вторая постановка приводит к задаче оптимального управления

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\rho t}\left(c\left(t\right)\right)^{\beta}\, dt \to \max_{c(\cdot)}, \tag{1.1}$$

$$\frac{dk}{dt}\left(t\right) = rk\left(t\right) + w - c\left(t\right), \; k\left(0\right) = k_0, \tag{1.2}$$

$$c\left(t\right) \geq 0, \tag{1.3}$$

$$k\left(t\right) \geq 0, \; t \in [0, +\infty). \tag{1.4б}$$

Результат для данного варианта приведен в Теореме 1.2.

Теорема 1.2. Пусть $\rho > \beta r$. Тогда синтез в задаче оптимального управления (1.1)-(1.3) с ограничением (1.4б) имеет вид

$$c_2\left(k, \rho\right) = \begin{cases} c_1\left(k, \rho\right), & \rho \leq r, \\ \hat{c}\left(k, \rho\right), & \rho > r, \end{cases} \tag{2}$$

где функция $\hat{c} = \hat{c}\left(k, \rho\right) \geq w$ является решением уравнения

$$\frac{\rho - \beta r}{1 - \beta}\left(k + \frac{w}{r}\right) = \hat{c} + \frac{\rho - r}{\left(1 - \beta\right) r} w \left(\frac{w}{\hat{c}}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho - r}}. \tag{3}$$

Отметим, что уравнение (3) при $k = 0$ имеет единственный корень $c = w$, а при $k > 0$ имеет два корня, первый из которых больше w, а второй меньше w. В диссертации показано, что при $k > 0$ нужно брать решение, которое превосходит w.

В третьей постановке предполагается, что капитал агента является неликвидным, т.е. его производная по времени неотрицательна:

$$\frac{dk}{dt}(t) \geq 0,\ t \in [0, +\infty). \tag{1.4в}$$

Тогда третья постановка, которая обозначается как *случай с неликвидным капиталом*, приводит к задаче оптимального управления (1.1)-(1.3) с ограничением (1.4в). В работе показано, что постановка данной задачи может быть переписана как

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t} (u(t))^\beta (rk(t) + w)^\beta \, dt \to \max_{c(\cdot)}, \tag{1.1$'$}$$

$$\frac{dk}{dt}(t) = (1 - u(t))(rk(t) + w),\ k(0) = k_0, \tag{1.2$'$}$$

$$0 \leq u(t) \leq 1. \tag{1.3$'$}$$

Для этой задачи результат формулируется в Теореме 1.3.

Теорема 1.3. Пусть $\rho > \beta r$. Тогда задача оптимального управления (1.1$'$), (1.2$'$), (1.3$'$) имеет решение в форме синтеза вида

$$u(\rho) = \min\left\{\frac{\rho - \beta r}{(1-\beta) r}, 1\right\}. \tag{4}$$

Тогда соответствующая программа потребительских расходов имеет вид

$$c_3(k, \rho) = u(\rho)(rk + w).$$

Наконец, последняя постановка такова, что мы допускаем ограниченную ликвидность капитала:

$$\frac{dk}{dt}(t) \geq -\left(\frac{1}{\theta} - r\right) k(t),\ t \in [0, +\infty), \tag{1.4г}$$

где параметр $\theta \in \left(0, \frac{1}{r}\right)$ характеризует ликвидность капитала в том смысле, что слагаемое $\frac{k(t)}{\theta}$ состоит из ликвидной части активов, равной $\left(\frac{1}{\theta} - r\right) k(t)$, и неликвидной части, определяемой как $rk(t)$. Чем выше значение параметра θ, тем менее ликвидным является капитал.

Четвертая постановка, называемая *случаем с ограниченной ликвидностью капитала*, приводит к задаче оптимального управления (1.1)-(1.3), (1.4г). Здесь также удается переписать постановку задачи в следующем виде:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(u\left(t\right)\right)^{\beta} \left(\frac{k\left(t\right)}{\theta} + w\right)^{\beta} dt \to \max_{c(\cdot)}, \tag{1.1$''$}$$

$$\frac{dk}{dt}\left(t\right) = rk\left(t\right) + w - u\left(t\right)\left(\frac{k\left(t\right)}{\theta} + w\right),\ k\left(0\right) = k_0, \tag{1.2$''$}$$

$$0 \le u\left(t\right) \le 1. \tag{1.3$'$}$$

Результат для этой задачи формулируется в виде Теоремы 1.4.

Теорема 1.4. Пусть $\rho > \beta r$. Тогда решение задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале (1.1$''$), (1.2$''$), (1.3$'$) дается следующим позиционным управлением:

$$u\left(k,\rho\right) = \min\left\{s\left(\rho,\tau\right)\frac{k + w\eta\left(\tau\right)}{\frac{k}{\theta} + w}, 1\right\}, \tag{5}$$

где функции $s\left(\cdot,\cdot\right)$ и $\eta\left(\cdot\right)$ определены как

$$s\left(\rho,\tau\right) \equiv s\left[\rho,\tau\left|\beta,\theta,r\right.\right] = \frac{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}}{1 - \left(1 - \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\theta\right)e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau}}, \tag{6}$$

$$\eta\left(\tau\right) \equiv \eta\left[\tau\left|\theta,r\right.\right] = \frac{1 - e^{-r\tau}}{r} + \theta e^{-r\tau}, \tag{7}$$

соответственно, а функция $\tau \equiv \tau\left(k,r,w,\rho,\beta,\theta\right)$ равна $+\infty$, если $\rho \le r$, нулю, если $\rho \ge \beta r + \frac{1-\beta}{\theta} > r$, и функции $\tau^*\left(k,r,w,\rho,\beta,\theta\right)$, выражаемой в терминах решений уравнений

$$s\left(\rho,\tau^*\right)\left(k_0 + w\eta\left(\tau^*\right)\right)e^{-\frac{\rho-r}{1-\beta}\tau^*} = \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\frac{\left(k_0 + \frac{w}{r}\right)e^{r\tau^*} + w\theta - \frac{w}{r}}{e^{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau^*} - 1 + \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\theta} = \frac{w}{1-q^*}, \tag{8}$$

$$I_\infty\left(q^*\right) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\left(\rho-r+\frac{1}{\theta}\right)u}}{\left(1 - q^*\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\theta}-r\right)u}\right)\right)^{1-\beta}} du = \theta, \tag{9}$$

если $r < \rho < \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}$.

В этом случае программа потребительских расходов принимает вид

$$c_4\left(k,\rho\right) = u\left(k,\rho\right)\left(rk + w\right).$$

Параграф 1.2 посвящен построению синтеза оптимального управления в соответствующих экстремальных задачах. Для решения всех четырех задач используется подход, который был использован в работах[13,14] для доказательства утверждений, связанных с принци-

[13] Асеев С. М., Кряжимский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИАН. – 2007. – Т. 257. – С. 3–271.

[14] Асеев С. М., Бесов К. О., Кряжимский А. В. Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // УМН. – 2012. – Т. 67, №2. – С. 3–64.

пом максимума Понтрягина на бесконечном полуинтервале. Он заключается в рассмотрении вспомогательной задачи оптимального управления с функционалом полезности вида

$$\int\limits_0^T e^{-\rho t} \left(c\left(t\right)\right)^{\beta}\, dt \to \max_{c(\cdot)}$$

и соответствующих ограничениях.

Для разрешения ситуации, когда функционал (1.1) может оказаться расходящимся несобственным интегралом, вводится понятие обобщенного решения задачи, которое понимается как поточечный предел решения задачи оптимального управления на конечном горизонте при устремлении горизонта к бесконечности. Если значение функционала (1.1) конечно, то обобщенное решение задачи на бесконечном полуинтервале времени совпадает с классическим решением. С другими понятиями оптимальности при расходящемся интеграле в задаче оптимального управления на бесконечном полуинтервале можно ознакомиться, к примеру, в монографиях[15,16].

Для случаев Бьюли и Беккера полученная экстремаль Понтрягина проверяется на оптимальность посредством применения достаточного условия, а именно теоремы верификации. Для случаев с неликвидным капиталом и с ограниченной неликвидностью капитала используется теорема существования решения задачи оптимального управления на бесконечном горизонте. Сама же оптимальная пара выводится следующим образом: сначала выводится единственная экстремаль Понтрягина на конечном отрезке $[0,T]$, которая в силу теоремы о существовании решения задачи оптимального управления является решением. Затем в пределе при $T \to +\infty$ получаем допустимую пару $(k(\cdot), u(\cdot))$ на $[0,+\infty)$, которая доставляет оптимальное значение функционала и оказывается оптимальной.

Результаты первой главы опубликованы в работах [1; 3; 4].

В **главе 2** описываются модели социальной динамики популяции из H домашних хозяйств с последующим доказательством гипотезы Рамсея о социальной стратификации для каждой модели. В **параграфе 2.1** даются определения моделей социальной динамики и формулируется основная теорема. Для начала стоит пояснить, как именно строятся модели.

В стартовый момент времени $t_0 = 0$ у каждого домашнего хозяйства с индексом $h \in \{1,\ldots,H\}$ имеется в распоряжении сбережений в размере $k_0^h \geq 0$, причем суммарные сбережения всех домашних хозяйств положительны: $K_0 = \sum\limits_{h=1}^{H} k_0^h > 0$.

Положим $K = \sum\limits_{h=1}^{H} k^h, W = \sum\limits_{h=1}^{H} w^h$. Используя синтез оптимального управления, построенный в Теоремах 1.1-1.4, будем описывать динамику капитала с помощью задачи Коши

$$\frac{dk^h}{dt} = rk^h + w^h - c\left(k^h, \rho^h\left(k^h, K\right)\right),\ k^h\left(0\right) = k_0^h,$$

[15] Carlson D. A., Haurie A. B., Leizarowitz A. Infinite Horizon Optimal Control: Theory and Applications. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. – 1991.

[16] Seierstad A., Sydsæter K. Optimal control theory with economic applications. – Amsterdam: North-Holland. – 1987.

где функция $\rho^h\left(k^h, K\right)$ определяется в соответствии с гипотезой относительного дохода Дж. Дьюзенберри следующим образом:

$$\rho^h\left(k^h, K\right) = r\varphi\left(\frac{rk^h + w^h}{rK + W}\right), \tag{10}$$

где функция $\varphi(\cdot)$ удовлетворяет следующему предположению.

Предположение 1. Функция $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ непрерывна по Липшицу и строго убывает на отрезке $[0,1]$, а ее значения удовлетворяют следующей цепочке неравенств: $\beta < \varphi(1) < \varphi\left(\frac{1}{H}\right) \leq 1 < \varphi(0)$.

Определение 1. Моделью социальной динамики называется задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dk^h}{dt} = rk^h + w^h - c_i\left(k^h, r\varphi\left(\frac{rk^h + w^h}{rK + W}\right)\right),\ k^h(0) = k_0^h,\ h = 1, \dots, H, \tag{11}$$

где $c_i(k, \rho), i = 1, \dots, 4$ – решения задач оптимального управления в форме синтеза, соответствующих разным типам институциональных ограничений.

Основной результат формулируется в виде следующей Теоремы.

Теорема 2.1. Пусть для функции $\varphi(\cdot)$ в модели социальной динамики (11) выполнено Предположение 1. Тогда для любого вектора начальных значений $\mathbf{k_0}$ капиталов домашних хозяйств, принадлежащего множеству

$$\mathcal{K}_{0,d}^l = \left\{\mathbf{k} \in \mathbb{R}_+^H : rk^1 + w^1 = \ldots = rk^l + w^l > rk^{l+1} + w^{l+1} \geq \ \ldots \geq rk^H + w^H\right\}, \\ 1 \leq l \leq H - 1,$$

в случае, если $i = 1, 3$, или множеству

$$\mathcal{K}_{0,c}^l = \left\{\mathbf{k} \in \mathbb{R}_+^H : k^1 = \ldots = k^l > k^{l+1} \geq \ \ldots \geq k^H\right\}, 1 \leq l \leq H - 1,$$

в случае, если $i = 2, 4$, выполняются следующие соотношения:

1. При любом $i = 1, \dots, 4$:
$$k^h(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty, \quad h = 1, \dots, l;$$

2. При $i = 1, 3$:
$$\frac{rk^h(t) + w^h}{rK(t) + W} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & h = 1, \dots, l, \\ 0, & h = l + 1, \dots, H; \end{cases}$$

3. При $i = 2, 4$:
$$\frac{rk^h(t) + w}{rK(t) + wH} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & h = 1, \dots, l, \\ 0, & h = l + 1, \dots, H; \end{cases}$$

4. При $i=1$:
$$k^h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\frac{w^h}{r}, \quad h=l+1,\ldots,H;$$

5. При $i=3$ существует константа $C>0$ такая, что
$$k^h(t) \le C,\ t\in[0,+\infty),\ h=l+1,\ldots,H;$$

6. При $i=2,4$:
$$k^h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, \quad h=l+1,\ldots,H.$$

В **параграфе 2.2** приводятся доказательства вспомогательных результатов. Доказательство же основной теоремы вынесено в **параграф 2.3**.

Вторая глава использует идеи и результаты, опубликованные в работах [1; 3; 4].

Главу 3 можно логически разделить на две части. *Первая часть* состоит из двух параграфов. В **параграфе 3.1** приводятся начальные сведения, касающихся таких основных понятий, как кривая Лоренца, мажоризация по Лоренцу, передачи Пигу-Дальтона и индекс неравенства.

Определение 2. Будем говорить, что распределение доходов $y^1=(y_1^1,\ldots,y_H^1)\ge 0$ мажорирует по Лоренцу распределение доходов $y^2=(y_1^2,\ldots,y_H^2)\ge 0$, если выполняются следующие условия:

1. $\sum\limits_{j=1}^{H} y_j^1 = \sum\limits_{j=1}^{H} y_j^2,$
2. $y^1_{\sigma(1)} \le \ldots \le y^1_{\sigma(H)},$
   $y^2_{\pi(1)} \le \ldots \le y^2_{\pi(H)},$
3. $\sum\limits_{j=1}^{m} y^1_{\sigma(j)} \le \sum\limits_{j=1}^{m} y^2_{\pi(j)},\ m=1,\ldots,H.$

Распределение доходов y^1 мажорирует по Лоренцу распределение доходов y^2 ($y^1\succ y^2$), если кривая Лоренца, построенная по распределению доходов y^1, находится не выше кривой Лоренца, построенной по распределению доходов y^2.

В **параграфе 3.2** для ранее рассмотренных в прошлой главе трех моделей социальной динамики, а именно: модели Рамсея–Бьюли, модели Рамсея–Беккера и модели с неликвидным капиталом, устанавливается связь между индексом неравенства Джини и функцией Ляпунова. Положим
$$y_i=\frac{rk^{H+1-i}+w^{H+1-i}}{rK+W}\ge 0,\ i=1,\ldots,H.$$

При этом $\hat{y}=\sum\limits_{j=1}^{H} y_j = 1$. Область
$$\Gamma=\left\{\left(k^1,\ldots,k^H\right)\middle| rk^1+w^1=rk^2+w^2=\ldots=rk^l+w^l> \right.$$
$$\left. > rk^{l+1}+w^{l+1}\ge\ldots\ge rk^H+w^H\right\}$$

является «ловушкой» для задачи Коши (11) в случае при $i = 1, 3$, а также при $i = 2$ с $w^1 = \ldots = w^H = w$, т.е. если $\left(k_0^1, \ldots, k_0^H\right) \in \Gamma$, то $\left(k^1(t), \ldots, k^H(t)\right) \in \Gamma$ при $t \in [0, +\infty)$. Положим

$$\Lambda = \left\{ (y_1, \ldots, y_H) \middle| y_i = \frac{rk^{H+1-i} + w^{H+1-i}}{rK + W} \geq 0,\, i = 1, \ldots, H,\, \left(k^1, \ldots, k^H\right) \in \Gamma \right\}.$$

Динамической траектории $\left(k^1(t), \ldots, k^H(t)\right) \in \Gamma$ будем ставить в соответствие траекторию $(y_1(t), \ldots, y_H(t)) \in \Lambda$, по которой строится динамика кривых Лоренца. Всем трем системам при $i = 1, 2, 3$ соответствует единственная стационарная траектория $\hat{y}^* = (\hat{y}_1^*, \ldots, \hat{y}_H^*)$, где $\hat{y}_H^* = \ldots = \hat{y}_{H-l+1}^* = \frac{1}{l}$, $\hat{y}_i^* = 0$, $i = 1, \ldots, H - l$, в области Λ. Индекс Джини $G(y)$ принимает максимальное в области Λ значение на распределении $\hat{y}^*$, равное $\hat{G}^* = \frac{H-l}{H}$.

В области Λ рассматривается функция

$$V(y_1, \ldots, y_H) = \hat{G}^* - G(y_1, \ldots, y_H) = \hat{G}^* - \frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}(2i - H - 1)\, y_i.$$

Функция $V(y_1, \ldots, y_H) > 0$ при $(y_1, \ldots, y_H) \in \Lambda \setminus \{\hat{y}^*\}$, $V(\hat{y}^*) = 0$, и непрерывно дифференцируема в области Λ.

Предположение 2. Функция $\varphi(x)$ вогнута на отрезке $[0, 1]$.

Теорема 3.1. Пусть $\left(k^1(t), \ldots, k^H(t)\right) \in \Gamma$ является решением задачи Коши (11) при $i = 1$ (модель Рамсея–Бьюли), или при $i = 2$ (модель Рамсея–Беккера), или при $i = 3$ (модель с неликвидным капиталом). Пусть также для функции $\varphi(\cdot)$ выполнено Предположение 1, а в случае, когда $i = 2$, дополнительно выполнено Предположение 2. Тогда

$$\frac{d}{dt}V\left(\frac{rk^H(t) + w^H}{rK(t) + W}, \ldots, \frac{rk^{H+1-i}(t) + w^{H+1-i}}{rK(t) + W}, \ldots, \frac{rk^1(t) + w^1}{rK(t) + W}\right) < 0.$$

Замечание 1. Положение равновесия $\hat{y}^*$ является глобально асимптотически устойчивым по Ляпунову в области Λ, а построенная по индексу Джини функция

$$V(y_1, \ldots, y_H) = \hat{G}^* - G(y_1, \ldots, y_H)$$

является функцией Ляпунова в области Λ.

Во *второй части* главы исследуется смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения, моделирующая перераспределение доходов государством. В **параграфе 3.3** осуществляется переход к континуальному аналогу модели Рамсея-Бьюли, по которому составляется модель эволюции кривой Лоренца, описывающей распределение доходов между экономическими агентами. Уравнение динамики кривой Лоренца имеет вид

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{r}{1-\beta}\left[y_\varphi(x,t) - y(x,t)\, y_\varphi(1,t)\right], \tag{12}$$

где

$$y_\varphi(x,t) = \int\limits_0^x \left(1 - \varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right) \frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\, dw.$$

Здесь функция $\varphi(\cdot)$ отличается от той, что была рассмотрена ранее, и имеет вид $\varphi(x) = \varphi_{\text{old}}\left(\frac{x}{H}\right)$, где величина $x \in [0, H]$ является отношением дохода домохозяйства к среднему доходу, а величина $\frac{1}{H}$ – отношением среднего дохода к суммарному доходу домохозяйств. В континуальной модели аргументом функции $\varphi(\cdot)$ является величина, равная $\frac{\alpha(x,t)}{\int\limits_0^1 \alpha(s,t)\,ds}$ и принадлежащая отрезку $[0, H(t)]$, где $H(t) = \frac{A(t)}{\int\limits_0^1 \alpha(s,t)\,ds}$, а $A(t)$ – экзогенно заданный суммарный доход домохозяйств.

В работе показывается, что функция $H(t)$ может быть ограничена некоторой константой, например, числом $2H$, где H – прежнее число домохозяйств, которое фигурировало в моделях социальной динамики.

Доказывается следующая Теорема.

Теорема 3.2. Пусть для кривой Лоренца $y(x,t)$ справедливо уравнение динамики (12). Тогда для любых $t', t'' \in [0, +\infty)$, таких что $t' > t''$, кривая $y(x,t')$ мажорирует по Лоренцу кривую $y(x,t'')$.

Иными словами, решение уравнения модели удовлетворяет свойству межвременной мажоризации по Лоренцу.

В **параграфе 3.4** для уравнения динамики кривой Лоренца вводится функция перераспределения доходов

$$\psi(y) = \left.\frac{\frac{d\hat{y}(x)}{dx}}{1 - \varphi\left(\frac{d\hat{y}(x)}{dx}\right)}\right|_{x=\hat{y}^{-1}(y)} \left(\int\limits_0^1 \frac{\frac{d\hat{y}(s)}{ds}}{1 - \varphi\left(\frac{d\hat{y}(s)}{ds}\right)}\, ds\right)^{-1},$$

реализующая систему налогов и субсидий и порождающая выбранное социальным государством стационарное распределение доходов $\hat{y}(x)$. Модифицированное уравнение динамики в совокупности с начально-краевыми условиями образует смешанную задачу для интегро-дифференциального уравнения, имеющую вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{r}{1-\beta} \Bigg[&\int\limits_0^x \left(1 - \varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right) \psi(y(w,t))\, dw - \\ -y(x,t) &\int\limits_0^1 \left(1 - \varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right) \psi(y(w,t))\, dw \Bigg], \quad (x,t) \in M, \end{aligned} \tag{13a}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad x \in [0,1], \tag{13b}$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(1,t) = 1, \quad t \in [0, +\infty), \tag{13c}$$

где $M = [0,1] \times [0, +\infty)$.

Переход к задаче (13) оказывается неэквивалентным, так как решение $y(x,t)$ более не связано с функцией доходов из континуального аналога модели Рамсея-Бьюли.

В **параграфе 3.5** доказываются основные свойства смешанной задачи (13). Обозначим через $C^{p,q}(M)$ пространство непрерывных функций, у которых существуют и непрерывны частные производные по первому аргументу до p-го порядка и по второму аргументу до q-го порядка, т.е.

$$C^{p,q}(M) = \left\{ f : M \to \mathbb{R} \,\middle|\, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^p f}{\partial x^p}, \frac{\partial f}{\partial t}, \ldots \frac{\partial^q f}{\partial t^q} \in C(M) \right\}.$$

Основные свойства сформулированы в следующих четырех Теоремах.

Теорема 3.3. Пусть существует решение $y(x,t) \in C^{1,1}(M)$ задачи (13), при этом смешанные частные производные y_{xt} и y_{tx} определены и непрерывны на M. Пусть также $y_0(x)$ – кривая Лоренца и пусть $\varphi(0) < 1$.

Тогда $y(x,t)$ является кривой Лоренца.

Теорема 3.4. Существует и единственно решение $y(x,t) \in C^{1,1}(M)$ задачи (13).

Теорема 3.5. Функция $\hat{y}(x)$ является единственным стационарным гладким решением уравнения (13a).

Теорема 3.6. Пусть функции $\hat{y}(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемы на отрезках $[0,1]$ и $[0,2H]$ соответственно. Пусть также справедлива одна из следующих альтернатив:

1. либо $\hat{y}'(0) \geq \hat{y}'(1)\, e^{-\pi}$;
2. либо $0 < \hat{y}'(0) < \hat{y}'(1)\, e^{-\pi}$, при этом $\frac{\hat{y}'}{\hat{y}''} \in C^1[0,1]$, и производная функции $\frac{\hat{y}'(x)}{\hat{y}''(x)}$ неотрицательна всюду на отрезке $[0,1]$.

Тогда стационарное решение $\hat{y}(\cdot)$ уравнения (13a) является асимптотически устойчивым.

Стоит кратко прокомментировать идеи доказательства приведенных выше результатов.

В Теореме 3.3 непосредственно проверяется выполнение условий, при которых функция $y(x,t)$ оказывается кривой Лоренца, а именно: принадлежность классу $C^{2,1}(M)$, выпуклость по x и строгое возрастание по x на отрезке $[0,1]$ для каждого $t \in [0,+\infty)$, а также выполнение краевых условий $y(0,t) = y(1,t) = 1$ для любого $t \in [0,+\infty)$.

Идея доказательства Теоремы 3.4 заключается в том, что рассматривается эквивалентное уравнению (13) интегральное уравнение, правая часть которого определяется как интегро-дифференциальный оператор. Для данного оператора посредством введения специальной метрики и использования принципа сжимающих отображений доказывается существование и единственность неподвижной точки.

Теорема 3.5 доказывается от противного.

Чтобы доказать Теорему 3.6, производится несколько шагов. Основная идея заключается в линеаризации интегро-дифференциального оператора, определяемого как правая часть уравнения (13a), и доказательстве того, что спектр линеаризованного оператора не лежит в правой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}$. В этом случае можно использовать результат[17], полученный Ю. Л. Далецким и М. Г. Крейном, о том, что если спектр линеаризованного оператора лежит внутри левой полуплоскости, то стационарное решение исходного уравнения является асимптотически устойчивым. Для реализации идеи сначала ищется производная по Фреше интегро-дифференциального оператора, а затем осуществляется переход к краевой задаче на собственные значения для параметрической двумерной линейной неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой удается построить решение в явном виде. В конечном итоге проблема собственных значений сводится к поиску комплексных корней уравнения, левая часть которого определяется интегралом с комплексным параметром. Именно для этого уравнения используются приведенные в Теореме 3.6 достаточные условия отсутствия корней в правой полуплоскости.

В **параграфе 3.6** приводятся численные эксперименты, подкрепляющие полученный результат об асимптотической устойчивости.

Результаты **третьей главы** изложены в нескольких работах. Так, результаты **параграфа 3.2** содержатся в работах [1; 3]. Содержание **параграфов 3.3-3.6** изложено в работах [2; 5].

В **заключении** сформулированы следующие результаты диссертационной работы:

1. Исследованы задачи оптимального управления, возникающие в моделях рационального репрезентативного потребителя рамсеевского типа с допущением потребительского кредита (модель Рамсея-Бьюли), его запретом (модель Рамсея-Беккера), с неликвидным капиталом и с ограниченной ликвидностью капитала. Для данных задач удалось построить решения в форме синтеза;

2. Исследована асимптотика решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в моделях социальной динамики в случаях Бьюли, Беккера, неликвидного капитала и капитала с ограниченной ликвидностью. Предложены достаточные условия выполнения гипотезы Рамсея о социальной стратификации. Доказана соответствующая теорема, обосновывающая справедливость гипотезы и приводящая к выводу о том, что неограниченные рыночные механизмы приводят к двухклассовому обществу. Также доказана теорема о связи между индексом неравенства Джини и функцией Ляпунова для моделей социальной динамики в случаях Бьюли, Беккера и неликвидного капитала. В условиях доказанной теоремы установлено, что получаемое в пределе распределение капиталов домашних хозяйств является глобально асимптотически устойчивым по Ляпунову положением равновесия;

3. Исследовано интегро-дифференциальное уравнение динамики кривой Лоренца для континуального аналога модели Рамсея-Бьюли. Для решения уравнения доказано свойство межвременной мажоризации по Лоренцу. Также изучена смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения, моделирующая государственное влияние на соци-

[17] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

альную динамику. Доказаны существование и единственность решения задачи, глобальное сохранение решением свойств кривой Лоренца, а также единственность стационарного решения уравнения смешанной задачи. Кроме того, приведены достаточные условия того, какой кривой Лоренца должно быть стационарное решение уравнения (13a), чтобы оно было асимптотически устойчивым.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Парастаев Г. С.*, *Шананин А. А.* Гипотеза Рамсея о социальной стратификации как принцип отбора по Фишеру // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2024. — Т. 64, № 12. — С. 2420—2448.
2. *Парастаев Г. С.*, *Шананин А. А.* Мажоризация по Лоренцу и передачи Пигу-Дальтона в модели Рамсея-Бьюли // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2025. — Т. 65, № 10. — С. 1608—1624.
3. *Parastaev G. S.*, *Shananin A. A.* Ramsey's Conjecture for the Model with Non-liquid Capital // Lecture Notes in Computer Science. — 2025. — Vol. 15218. — P. 209–224.
4. *Parastaev G. S.* On Ramsey's Conjecture in Continuous-Time Economic Growth Model with Limited Capital Liquidity // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2025. — Vol. 46, no. 1. — P. 301–316.
5. *Parastaev G. S.* On Asymptotic Stability of Lorenz Curve in the Welfare State Model // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2025. — Vol. 46, no. 11. — P. 5972–5985.
6. *Parastaev G. S.*, *Shananin A. A.* The Gini Index and the Ramsey's Conjecture on Social Stratification // "Dynamic Systems: Stability, Control, Differential Games" (SCDG 2024): Proceedings of the International Conference devoted to the 100th anniversary of Academician N.N.Krasovskii, Yekaterinburg, Russia, 9–13 September 2024 / ed. by T. F. Filippova, V. I. Maksimov, A. M. Tarasyev. — Yekaterinburg : IMM UB RAS, 2024. — P. 487–490.
7. *Парастаев Г. С.* Гипотеза Рамсея в условиях ограниченной ликвидности капитала // Тихоновские чтения: тезисы докладов: научная конференция; 28 октября – 02 ноября 2024 г. — Москва : МАКС Пресс, 2024. — С. 77—77.
8. *Парастаев Г. С.*, *Шананин А. А.* Мажоризация по Лоренцу в модели Рамсея-Бьюли // Ломоносовские чтения. Научная конференция. 24 марта – 4 апреля 2025 г.: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2025. — С. 118—120.
9. *Парастаев Г. С.* Об асимптотической устойчивости кривых Лоренца в модели государства всеобщего благосостояния // Тихоновские чтения: тезисы докладов: научная конференция; 27–31 октября 2025 г. — Москва : МАКС Пресс, 2025. — С. 120—120.