Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Парастаев Григорий Сергеевич

Гипотеза Рамсея как принцип отбора по Фишеру и ее обобщения

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель
академик РАН, д. ф.-м. н., профессор
Шананин Александр Алексеевич

Москва – 2026

Оглавление

Введение

Диссертационная работа посвящена исследованию асимптотики решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциального уравнения, описывающих динамику социальной стратификации.

Актуальность темы и степень ее разработанности

В течение последних 30-35 лет наблюдается рост неравенства в распределении доходов (см. [38], а также Табл. Б.1), который сопровождается замедлением темпов роста мировой экономики. Данный факт вызвал обеспокоенность и породил дискуссии в экономическом сообществе. Так, вопрос о том, как взаимосвязаны между собой неравенство и экономический рост, обсуждается в монографии Филиппа Агийона и Джеффри Уильямсона [20]. В свою очередь, французский экономист Тома Пикетти в своей монографии [64] предполагает, что в XXI веке рост неравенства будет сопряжен с низкими темпами роста мировой экономики, причем неравенство будет развиваться подобно тому, как росло неравенство в распределении богатства в XVIII и XIX веках, когда социальное положение человека определялось не его способностями и уровнем доходов, а его наследством. На экономический рост и неравенство также способен оказывать влияние технологический прогресс, степень влияния которого на протяжении разных исторических периодов исследуется в книге Дарона Асимоглу и Саймона Джонсона [19]. Соображения о том, какие меры следует предпринимать для сокращения неравенства в распределении доходов, излагаются английским экономистом Энтони Б. Аткинсоном [22].

Попытки анализа причинно-следственных связей, влияющих на экономическое неравенство, предпринимаются и на языке математических моделей [4; 18; 21; 23; 25–28; 34; 36; 39; 43; 48–50; 53; 54; 56; 58; 59; 69]. Одной из первых работ, предложивших содержательное на эту тему обсуждение, стала статья английского математика и экономиста Фрэнка Пламптона Рамсея [65]. В ней Рамсей выдвинул гипотезу о разделении общества с разной степенью терпеливости в расходовании своих сбережений на два класса – наиболее терпеливых, кто завладевает всем капиталом, и всех остальных, кто оказывается на уровне прожиточного минимума. На математическом языке гипотеза Рамсея означает установление в пределе на бесконечном временном горизонте положения равновесия, соответствующего распределению доходов с сильной степенью неравенства.

Первое формальное доказательство гипотезы Рамсея было предложено в работе Роберта Беккера [24], где была рассмотрена модель рационального репрезентативного потребителя рамсеевского типа в дискретном времени. Спустя пару лет Труманом Бьюли была доказана гипотеза Рамсея в форме теоремы о магистрали для модели общего равновесия в дискретном времени [30]. Отличие этих моделей заключается в различных институциональных ограничениях – так, в случае Беккера был наложен запрет на заимствование капитала, в то время как в случае Бьюли этот запрет отсутствует. Институциональные ограничения играют важную роль в формировании социальных слоев, их влияние на неравенство также обсуждалось в монографии [20].

В совместной работе Г. Зоргера и Т. Митры [57] была рассмотрена модель Рамсея–Беккера в непрерывном времени, являющаяся системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Переход от дискретного времени к непрерывному позволил авторам использовать более широкий математический аппарат для исследования модели. Так, помимо справедливости гипотезы Рамсея, авторам удалось установить единственность стационарного равновесного состояния, его глобальную асимптотическую устойчивость, а также следующее свойство: самое терпеливое домашнее хозяйство, то есть то хозяйство, которое обладает наименьшим значением коэффициента дисконтирования, за конечное время завладевает всем богатством, располагаемым в экономике.

Недостатком вышеуказанных моделей является предположение о постоянстве коэффициентов дисконтирования – величин, задающих степень терпеливости агента. В статье К. Ю. Борисова и М. А. Пахнина [4] было предложено устранить этот недостаток за счет эндогенного формирования межвременных предпочтений, когда значение коэффициента дисконтирования определяется исключительно собственными характеристиками агента. Такой способ формирования межвременных предпочтений был впервые рассмотрен Т. Купмансом [51] и Х. Удзавой [70].

Проблему описания взаимодействия социальных слоев при эндогенном формировании межвременных предпочтений можно решать по-разному. Популярным способом является использование концепции игр среднего поля, предложенной Жан-Мишелем Ласри и Пьер-Луи Лионсом [52]. Самым же простым способом является сведение независимых уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой все уравнения связаны. В диссертационной работе это предлагается сделать в предположении гипотезы относительного дохода американского экономиста Джеймса Дьюзенберри [42], которая связывает коэффициент дисконтирования с величиной доли доходов одного индивида по сравнению с остальными индивидами. Модели, формализующие данную гипотезу, были построены в работах [31–33; 35; 37; 66]. В избираемом подходе дополнительную сложность дает изменение коэффициентов дисконтирования со временем – на задачу о поведении рационального репрезентативного потребителя рамсеевского типа, представленную в диссертационной работе задачей оптимального управления на бесконечном неотрицательном полуинтервале времени, накладывается требование о получении решения в форме синтеза, т.е. функции от фазовой переменной и параметров.

Гипотеза Рамсея является утверждением, которое имеет место, когда рыночные механизмы не стеснены какими-либо ограничениями. Пикетти же в своей монографии [64] отмечает, что во второй половине XX века наблюдалось сильное вмешательство государства в экономику. Кроме того, приведенные в Табл. Б.2 данные говорят о том, что взимание государством налогов с богатых слоев и выделение субсидий для бедных слоев позволяет сокращать неравенство в распределении доходов.

В связи с этим представляет интерес изучение дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, моделирующих перераспределение доходов государством. Из подобных работ автором были обнаружены лишь статья [47], в которой изучается модель распределения богатства и доходов в непрерывном времени с использованием концепции игр среднего поля, а также работа [29], в которой рассматривается система дифференциальных уравнений с целью проанализировать, как перераспределение доходов влияет на динамику доходов конечного числа групп населения.

Таким образом, представляется актуальным создание математического аппарата, способного выявлять причинно-следственные связи в формировании и взаимодействии социальных слоев.

Цели и задачи диссертационной работы

Целью работы является решение задач оптимального управления и исследование дифференциальных уравнений с целью изучения причинно-следственных связей, влияющих на социальную стратификацию.

Для достижения поставленной цели потребовалось решить следующие **задачи**:

1. Построить решения задач оптимального управления в форме синтеза, описывающих поведение социальных слоев при различных институциональных ограничениях, для последующего использования в моделях социальной динамики;

2. Исследовать асимптотику решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в моделях социальной динамики, в рамках гипотезы относительного дохода Дьюзенберри с различными институциональными ограничениями;

3. Исследовать интегро-дифференциальное уравнение, которое описывает влияние государственной политики налогообложения и субсидирования на неравенство в распределении доходов.

Теоретическая и практическая значимость

Диссертационная работа носит теоретический характер. Разработан математический аппарат, основанный на исследовании задач оптимального управления и теории дифференциальных уравнений, который востребован для анализа причинно-следственных связей, определяющих социальную динамику. Данный аппарат также может быть востребован для моделирования коэффициентов дисконтирования денежных потоков экономических агентов.

Положения, выносимые на защиту

1. Построены решения задач оптимального управления в форме синтеза, описывающие поведение социальных слоев при различных типах институциональных ограничений;

2. Исследована асимптотика решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в моделях социальной динамики. Установлено выполнение гипотезы Рамсея при отсутствии ограничений на рыночные механизмы и влияние институциональных ограничений на характер расслоения;

3. В моделях социальной динамики Рамсея-Бьюли, Рамсея-Беккера и с неликвидным капиталом получена глобальная асимптотическая устойчивость стационарного положения равновесия. Доказано, что решение уравнения в континуальном аналоге модели Рамсея-Бьюли удовлетворяет свойству межвременной мажоризации по Лоренцу. Установлена связь между индексом неравенства Джини и функцией Ляпунова;

4. Для смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения, моделирующей перераспределение доходов государством всеобщего благосостояния, доказаны существование и единственность решения, глобальное сохранение решением свойств кривой Лоренца, задаваемой начальным условием, а также единственность и локальная асимптотическая устойчивость стационарного решения основного уравнения задачи.

Научная новизна

- Полное описание решений поставленных в работе задач оптимального управления на бесконечном полуинтервале времени получено впервые. Решения удалось получить в форме синтеза, т.е. функций от фазовой переменной и параметров. Для указанных задач оптимального управления решена проблема, связанная с учетом условий трансверсальности на бесконечности. Также было показано, что в одной из задач оптимального управления с бесконечным полуинтервалом времени и фазовым ограничением происходит захват фазовой границей траектории;

- Асимптотика решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений получена в предположении гипотезы относительного дохода Дьюзенберри;

- Впервые установлена связь между индексом Джини и функцией Ляпунова для моделей социальной динамики Рамсея-Бьюли, Рамсея-Беккера и с неликвидным капиталом. Также впервые доказано свойство межвременной мажоризации по Лоренцу в континуальном аналоге модели Рамсея-Бьюли;

- Исследовано новое нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, моделирующее перераспределение доходов государством. Для связанной с уравнением смешанной задачи впервые доказаны существование и единственность решения, глобальное сохранение решением свойств кривой Лоренца, единственность и локальная асимптотическая устойчивость стационарного решения основного уравнения.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации были представлены на следующих научных мероприятиях:

- Конференция «Вычислительная математика и приложения», пгт Сириус, Россия, 5-9 августа 2024 года;

- Международная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024), посвященная 100-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского, г. Екатеринбург, Россия, 9-13 сентября 2024 года;

- 15-ая международная конференция “Optimization and Applications” (OPTIMA-2024), г. Петровац, Черногория, 16-20 сентября 2024 года;

- Научный семинар ЦЭМИ РАН «Математическая экономика» (рук. В. М. Полтерович, В. И. Данилов), г. Москва, Россия. Даты выступлений: 8 октября 2024 года, 25 ноября 2025 года;

- 10-ая международная конференция “Quasilinear Equations, Inverse Problems and their Applications” (QIPA 2024), пгт Сириус, Россия, 17-21 октября 2024 года;

- Научная конференция «Тихоновские чтения», г. Москва, Россия, 28 октября - 2 ноября 2024 года;

- Научный семинар мехмата МГУ «Математические методы экономики и естественных наук» (рук. А. С. Шамаев, О. С. Розанова), г. Москва, Россия. Даты выступлений: 15 ноября 2024 года, 13 марта 2026 года;

- Научный семинар ФИЦ ИУ РАН «Методы решения задач математической физики» (рук. Ю. Г. Евтушенко, С. И. Безродных, В. И. Власов, С. Я. Степанов), г. Москва, Россия, 6 февраля 2025 года;

- Научная конференция «Ломоносовские чтения», г. Москва, Россия, 24 марта - 4 апреля 2025 года;

- 11-ая международная конференция “Quasilinear Equations, Inverse Problems and their Applications” (QIPA 2025), пгт Сириус, Россия, 6-10 октября 2025 года;

- Научная конференция «Тихоновские чтения», г. Москва, Россия, 27-31 октября 2025 года;

- Научная конференция МФТИ «Численное моделирование в механике сплошных сред», посвященная 100-летию со дня рождения академика О. М. Белоцерковского, г. Долгопрудный, Россия, 27-29 ноября 2025 года;

- Научный семинар математического института имени С. М. Никольского РУДН по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (рук. А. Л. Скубачевский), г. Москва, Россия, 24 марта 2026 года;

- Научный семинар «Оптимальное управление и динамические системы» Математического института им. В. А. Стеклова РАН (рук. С. М. Асеев, Ю. С. Ильяшенко, Л. В. Локуциевский, М. С. Никольский), г. Москва, Россия, 9 апреля 2026 года.

Полученные результаты также использовались в исследованиях, проводимых в рамках проекта РНФ (грант 24-11-00329).

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в 9 печатных работах, из них 5 статей, индексированных в международных базах цитирования Web of Science/Scopus [11; 13; 60–62], 1 статья в сборниках трудов конференций [63] и 3 тезиса докладов [9; 10; 12].

Личный вклад автора

Все результаты в диссертации были получены лично автором под руководством научного руководителя, академика РАН, д. ф.-м. н., профессора А. А. Шананина. Работы [60;

61] подготовлены автором самостоятельно. В написанных в соавторстве работах [11; 13; 62] автору принадлежат следующие результаты:

- в работе [11] – Теорема 3.1, Теорема 3.2, Лемма 3.2, Лемма 3.3, Лемма 3.4, Лемма 3.5, Лемма 3.6, Теорема 4.1, Теорема 4.2, Лемма 5.1, Лемма 5.2, Лемма 5.3, Лемма 5.4, Теорема 6.1;
- в работе [62] – Theorems 1, 2, 3, Lemmas 1, 2, 4, 5;
- в работе [13] – Предложение 3.1, Теорема 3.1, Лемма 4.1, Теорема 4.1.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Общий объем диссертации составляет 158 страниц, включая 6 рисунков и 3 таблицы. Библиографический список состоит из 71 наименования на 6 страницах.

Глава 1 работы посвящена рассмотрению четырех вариантов задачи о поведении рационального репрезентативного потребителя рамсеевского типа. Каждый вариант задачи соответствует различному институциональному ограничению. В **параграфе 1.1** дается описание общих принципов данной модели, а также приводятся особенности каждого варианта задачи. Первый вариант предусматривает возможность для потребителя брать кредит, который обеспечивается будущими поступлениями заработной платы. Во втором варианте накладывается запрет на заимствование, что делает капитал экономического агента неотрицательной величиной. Для третьего варианта введено ограничение на неотрицательность производной капитала, что делает невозможным для агента избавиться от накоплений. Поэтому данный вариант носит название случая с неликвидным капиталом. Наконец, в четвертом варианте агенту позволяется иметь часть активов, являющихся ликвидными, вследствие чего данный вариант обозначен как случай с ограниченной ликвидностью капитала. Каждому из четырех вышеперечисленных вариантов соответствует задача оптимального управления на бесконечном горизонте времени. **Параграф 1.2** посвящен решению этих задач. Чтобы найти решение для каждого случая, используется необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина с конечным временным горизонтом. Первые две задачи содержат фазовые ограничения. В этих задачах удается получить решение, применив к экстремалям Понтрягина достаточное условие оптимальности в форме теоремы верификации. В одной из задач показано, как траектория должна взаимодействовать с фазовой границей. Последующие две задачи являются задачами со смешанными ограничениями. Их удается переформулировать так, что становится возможным использовать теорему о существовании решения задачи оптимального управления на бесконечном горизонте. В во всех четырех задачах осуществляется переход к пределу с устремлением временного горизонта к бесконечности. В силу возможной расходимости функционала для уточнения понятия оптимальности вводится определение обобщенного решения, которое получается переходом к поточечному пределу при устремлении временного горизонта в бесконечность. Полученные в работе решения имеют форму синтеза.

В **главе** 2 доказывается гипотеза Рамсея для четырех моделей социальной динамики популяции из конечного числа домашних хозяйств в условиях, когда процентная ставка на денежном рынке и уровень заработных плат являются постоянными величинами. В **параграфе** 2.1 рассказывается о построении упомянутых моделей. В их основу заложены полученные в предыдущей главе синтезы оптимального управления, представляющие собой программы потребительских расходов домохозяйств. Они мгновенно корректируются по меняющимся значениям их капиталов и коэффициентов дисконтирования, задаваемых эндогенным образом как произведения процентной ставки на функцию, зависящую от величины относительного дохода домохозяйства. В работе рассматриваются две модели с различающимися уровнями заработных плат среди домохозяйств и две модели с только одним уровнем заработных плат, одинаковым для всех домашних хозяйств. Полученные модели оказываются задачами Коши для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для построенных моделей формулируется теорема, которая устанавливает справедливость гипотезы Рамсея, причем формирование классов наблюдается как по абсолютным величинам доходов агентов, так и по их относительным величинам. В **параграфе** 2.2 доказываются некоторые вспомогательные результаты. В частности, устанавливаются нижние оценки на разность значений функции, задающей коэффициент дисконтирования каждого агента, а затем применяется теорема Чаплыгина о дифференциальных неравенствах для получения верхней оценки на сумму долей доходов тех домохозяйств, чьи начальные доходы меньше самых богатых домохозяйств. Доказательство основной теоремы о справедливости гипотезы Рамсея проводится в **параграфе** 2.3.

В **главе** 3 исследуется влияние перераспределения доходов на социальную динамику. Сначала в **параграфе** 3.1 приводятся определения кривой Лоренца и индекса неравенства Джини, вводятся определения передачи Пигу-Дальтона и мажоризации по Лоренцу. Далее, в **параграфе** 3.2 для ранее рассмотренных трех моделей социальной динамики устанавливается связь между индексом неравенства Джини и функцией Ляпунова. В **параграфе** 3.3 вводится континуальный аналог модели Рамсея-Бьюли. Такой переход позволяет вывести уравнение динамики кривой Лоренца, решение которого, как показывается в том же **пара-**

графе 3.3, удовлетворяет свойству межвременной мажоризации по Лоренцу. В **параграфе 3.4** дается определение передачи Пигу-Дальтона в непрерывном случае, с помощью которого вводится функция перераспределения доходов, моделирующая механизм налогообложения и субсидирования. Она же используется для получения модифицированного уравнения динамики кривой Лоренца вкупе с начальными и краевыми условиями. Полученные уравнение и начально-краевые условия, образующие смешанную задачу для интегро-дифференциального уравнения, называются моделью государства всеобщего благосостояния, где роль последнего заложена в выборе стационарного распределения доходов. **Параграф 3.5** посвящен установлению четырех свойств модели: глобальному сохранению решением свойств кривой Лоренца, существованию и единственности решения задачи, единственности стационарного решения основного уравнения, а также его асимптотической устойчивости. В **параграфе 3.6** теоретические результаты подкрепляются численными экспериментами.

В **заключении** перечислены основные результаты диссертации.

Глава 1

Задачи оптимального управления, описывающие поведение социальных слоев

Данная глава посвящена исследованию четырех вариантов постановки задачи о поведении рационального репрезентативного потребителя рамсеевского типа. Для соответствующей каждому варианту задачи оптимального управления на бесконечном горизонте времени выводится решение в форме синтеза, которое используется при моделировании динамики популяции домашних хозяйств в следующей главе.

В параграфе 1.1 описываются общие принципы модели репрезентативного экономического агента на бесконечном горизонте и обозначаются различия четырех вариантов. Параграф 1.2 посвящен построению синтеза оптимального управления в соответствующих экстремальных задачах.

1.1. Постановки задач о поведении экономических агентов

В основу модели экономического поведения, описываемой задачами оптимального управления, положим концепцию Ф. Рамсея (см. [65]) и будем предполагать денежный рынок совершенным, т.е. равенство процентных ставок по кредитам и депозитам. Мы считаем, что экономические решения, принимаемые типичным агентом, являются ограниченно рациональными, т.е. агент определяет потребительские расходы, сбережения и заимствования по потребительскому кредиту так, чтобы максимизировать дисконтированное потребление с учетом бюджетных ограничений. Также предполагается, что он не способен спрогнозировать изменения экономической конъюнктуры и принимает решения, считая, что его заработная плата w и процентная ставка на денежном рынке r будут оставаться на неизменном уровне. Будем также считать, что текущее финансовое состояние агента в момент времени t описывается его капиталом $k(t)$. Капитал агента изменяется за счет поступлений заработной платы w и потребительских расходов $c(t) \geq 0$. Кроме того, агент либо получает доход с капитала $rk(t)$, если капитал $k(t)$ неотрицателен, либо в противном случае выплачивает процентные платежи в размере $rk(t)$. Таким образом, ожидаемая агентом динамика капитала описывается уравнением

$$\frac{dk}{dt}(t) = rk(t) + w - c(t)$$

с начальным условием

$$k(0) = k_0 \geq 0.$$

Тогда задание программы потребительских расходов $c(t)$ определяет предполагаемую динамику капитала. Предполагается, что агент стремится максимизировать следующий функционал полезности:

$$J(0, k_0; c(\cdot)) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho s} \frac{(c(s))^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \, ds,$$

Подынтегральное выражение в функционале представляет собой произведение дисконтирующего множителя $e^{-\rho t}$ с коэффициентом дисконтирования[1] $\rho > 0$ на мгновенную функцию полезности с постоянным отвращением к риску $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$. Предполагая умеренную степень неприятия риска, мы будем рассматривать случай, когда коэффициент отвращения к риску σ принимает значения из интервала $(0,1)$, поэтому без ограничения общности можно рассматривать функционал вида $(1-\sigma)(J(0,k_0;c(\cdot)) + A(\rho,\sigma))$, где $A(\rho,\sigma) = \frac{1}{1-\sigma} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t} \, dt = \frac{1}{\rho(1-\sigma)}$. Также для удобства мы произведем замену $\beta = 1 - \sigma$, тогда $\beta \in (0,1)$.

Будем рассматривать четыре постановки задачи. В первой постановке допускается потребительский кредит, т.е. величина капитала может принимать отрицательные значения, и в этом случае агент, обслуживая кредит, выплачивает процентные платежи. Величина задолженности по потребительскому кредиту должна быть обеспечена будущими поступлениями заработной платы, т.е.

$$rk(t) + w \geq 0 \Rightarrow k(t) \geq -\frac{w}{r}, \; t \in [0, +\infty).$$

Тогда первая постановка, названная в [4] *моделью Рамсея–Бьюли*, приводит к задаче оптимального управления вида

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t} (c(t))^{\beta} \; dt \to \max_{c(\cdot)}, \tag{1.1}$$

$$\frac{dk}{dt}(t) = rk(t) + w - c(t), \; k(0) = k_0 \geq 0, \tag{1.2}$$

$$c(t) \geq 0, \tag{1.3}$$

$$k(t) \geq -\frac{w}{r}. \tag{1.4a}$$

[1] Обычно при рассмотрении моделей экономического роста в непрерывном времени можно встретить разную терминологию относительно числа ρ в дисконтирующем множителе $e^{-\rho t}$. Так, в книге Д. Асемоглу [18] число ρ называется коэффициентом дисконтирования (discount rate), в то время как в статье Г. Зоргера и Т. Митры [57] число ρ носит название *коэффициента межвременных предпочтений* (time preference rate). Для удобства всюду далее в работе относительно числа ρ мы будем придерживаться терминологии, введенной в [18].

Во второй постановке потребительский кредит не допускается, и капитал агента должен быть неотрицательным, т.е.

$$k\left(t\right)\geq 0,\ t\in\left[0,+\infty\right).$$

Следовательно, вторая постановка, названная в [4] *моделью Рамсея–Беккера*, приводит к задаче оптимального управления

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\rho t}\left(c\left(t\right)\right)^{\beta}\,dt\to\max_{c(\cdot)}, \tag{1.1}$$

$$\frac{dk}{dt}\left(t\right)=rk\left(t\right)+w-c\left(t\right),\ k\left(0\right)=k_0\geq 0, \tag{1.2}$$

$$c\left(t\right)\geq 0, \tag{1.3}$$

$$k\left(t\right)\geq 0. \tag{1.4б}$$

В третьей постановке предполагается, что капитал агента является неликвидным, т.е. его производная по времени неотрицательна:

$$\frac{dk}{dt}\left(t\right)\geq 0,\ t\in\left[0,+\infty\right).$$

Тогда из задачи Коши (1.2) следует, что программа потребительских расходов удовлетворяет ограничению

$$c\left(t\right)\leq rk\left(t\right)+w,$$

и третья постановка, которую мы будем обозначать как *случай с неликвидным капиталом*, приводит к задаче оптимального управления

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\rho t}\left(c\left(t\right)\right)^{\beta}\,dt\to\max_{c(\cdot)}, \tag{1.1}$$

$$\frac{dk}{dt}\left(t\right)=rk\left(t\right)+w-c\left(t\right),\ k\left(0\right)=k_0\geq 0, \tag{1.2}$$

$$0\leq c\left(t\right)\leq rk\left(t\right)+w. \tag{1.3$'$}$$

Наконец, последняя постановка такова, что мы допускаем ограниченную ликвидность капитала:

$$\frac{dk}{dt}\left(t\right)\geq -\left(\frac{1}{\theta}-r\right)k\left(t\right),\ t\in\left[0,+\infty\right),$$

где параметр $\theta\in\left(0,\frac{1}{r}\right)$ характеризует ликвидность капитала в том смысле, что слагаемое $\frac{k(t)}{\theta}$ состоит из ликвидной части активов, равной $\left(\frac{1}{\theta}-r\right)k\left(t\right)$, и неликвидной части, определяемой как $rk\left(t\right)$. Чем выше значение параметра θ, тем менее ликвидным является капитал. При задаче Коши (1.2) потребительские расходы удовлетворяют неравенству

$$c\left(t\right)\leq\frac{k\left(t\right)}{\theta}+w.$$

Четвертая постановка, называемая *случаем с ограниченной ликвидностью капитала*, приводит к задаче оптимального управления

$$\int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \left(c\left(t\right)\right)^{\beta}\, dt \to \max_{c(\cdot)}, \tag{1.1}$$

$$\frac{dk}{dt}\left(t\right) = rk\left(t\right) + w - c\left(t\right),\; k\left(0\right) = k_0 \geq 0, \tag{1.2}$$

$$0 \leq c\left(t\right) \leq \frac{k\left(t\right)}{\theta} + w. \tag{1.3''}$$

Похожая задача изучалась в работе [15].

Поскольку далее описание поведения агента будет использоваться в модели «популяции» агентов, в которой коэффициенты дисконтирования формируются эндогенно в зависимости от распределения капитала между агентами, требуется получить из решения этих задач оптимального управления выбор размеров потребления агента в форме синтеза оптимального управления $c\left(k, \rho\right)$, т.е. как функцию текущего значения капитала (фазовой переменной задачи оптимального управления) и параметра ρ.

1.2. Синтез в задачах оптимального управления

Решать все четыре задачи мы будем, используя подход, который был использован в работах [1; 2] для доказательства утверждений, связанных с принципом максимума Понтрягина на бесконечном полуинтервале. Он заключается в рассмотрении последовательности вспомогательных задач оптимального управления на конечных отрезках $\left[0, T_n\right], n = 1, 2, \ldots$, где $\left\{T_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная возрастающая последовательность положительных чисел, такая что $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Поскольку для любого числа $T > 0$ всегда можно подобрать такое $n_1 \in \mathbb{N}$, что $T_{n_1} \geq T$, без ограничения общности будем рассматривать момент времени T. При $T \to +\infty$ мы можем получить решение на бесконечной положительной полупрямой $[0, +\infty)$.

Будем рассматривать вспомогательную задачу оптимального управления с фиксированным временным горизонтом T при функционале полезности вида

$$J_T\left(t, k; c\left(\cdot\right)\right) = \int_t^{T} e^{-\rho s} \left(c\left(s\right)\right)^{\beta}\, ds \to \max_{c(\cdot)}, \tag{1.1$_T$}$$

задаче Коши (1.2) с $k\left(t\right) = k$ и одном из типов ограничений на отрезке $\left[t, T\right]$:

- ограничениях (1.3), (1.4а);
- ограничениях (1.3), (1.4б);

- ограничении (1.3′);

- ограничении (1.3″).

Будем называть пару (c, k) *допустимой* для задачи оптимального управления, если управление $c\,(t)$ является кусочно-непрерывной функцией, удовлетворяющей ограничению (1.3), а соответствующая ему траектория $k\,(t)$ удовлетворяет задаче Коши (1.2) и одному из вышеуказанных типов ограничений.

Для вспомогательной задачи первого типа предлагается рассмотреть альтернативное ограничение. Оно заключается в том, что мы допускаем возможность домашнему хозяйству брать потребительский кредит, но обязываем его к конечному моменту времени погасить все накопленные долги. Иными словами, капитал домашнего хозяйства в конечный момент времени должен быть неотрицательным:

$$k\,(T) \geq 0. \tag{1.4а$_T$}$$

Мы далее покажем, что на решении задачи (1.1$_T$), (1.2), (1.3), (1.4а$_T$) условие (1.4а) выполняется, а в пределе при $T \to +\infty$ решение этой задачи даст оптимальное управление на бесконечном горизонте времени для задачи (1.1)-(1.3) с ограничением (1.4а).

Учитывая приведенное выше соображение, дадим следующее определение.

Определение 1. Пусть для любого $T > 0$ функциональная последовательность $c_{T_n}\,(t)$ сходится к функции $c_*\,(t)$ по норме в $L^1\,[0, T]$, а функциональная последовательность $k_{T_n}\,(t)$ равномерно сходится к функции $k_*\,(t)$ на отрезке $[0, T]$, где (c_{T_n}, k_{T_n}) – оптимальная допустимая пара для задачи оптимального управления (1.1$_T$) при $T = T_n$, (1.2), (1.3), (1.4а$_T$) ((1.3), (1.4б); (1.3′) или (1.3″) соответственно) на отрезке $[t, T_n]$, $0 \leq t < T_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть также пара (c_*, k_*) является допустимой для задачи (1.1), (1.2), (1.3), (1.4а) ((1.3), (1.4б); (1.3′) или (1.3″) соответственно). Тогда пара (c_*, k_*) называется *обобщенным* решением задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале (1.1), (1.2), (1.3), (1.4а) ((1.3), (1.4б); (1.3′) или (1.3″) соответственно).

Введенное выше понятие обобщенного решения позволяет разрешить вопрос с определением понятия оптимальности в случае, когда функционал (1.1) является расходящимся несобственным интегралом. При этом если значение функционала (1.1) конечно, то обобщенное решение задачи на бесконечном полуинтервале времени совпадает с классическим решением (см. [2]). С другими понятиями оптимальности при расходящемся интеграле в задаче оптимального управления на бесконечном полуинтервале можно ознакомиться, к примеру, в [40; 67].

Для случаев Бьюли и Беккера напомним одно важное утверждение, которое позволяет проверить экстремаль Понтрягина на оптимальность. Рассмотрим функцию цены

$$V_T(t,k)=\sup\left\{\int\limits_t^T e^{-\rho(s-t)}\left(c(s)\right)^\beta\,ds\right\},$$

соответствующую задаче Коши (1.2) с условием $k(t)=k$, ограничению (1.3) и ограничению (1.4а$_T$) (или (1.4б) соответственно). Задаче (1.1$_T$), (1.2), (1.3), (1.4а$_T$) ((1.4б)) соответствует уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial V_T}{\partial t}-\rho V_T+\sup\left\{\frac{\partial V_T}{\partial k}\left[rk+w-c\right]+c^\beta\,\middle|\,c\geq 0\right\}=0 \qquad (1.4)$$

с граничным условием $V_T(T,k[T])=0$.

Сформулируем и докажем вариант теоремы верификации (см. [45, p.16]).

Лемма 1.1. Пусть функция $\mathcal{V}_T(t,k)$ непрерывно дифференцируема по (t,k) в области $[0,T]\times(a+\mathbb{R}_+)\,,a\leq 0$, и удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана (1.4) с граничным условием $\mathcal{V}_T(T,k)=0$ при $k\geq a$ и условием $\mathcal{V}_T(t,a)\leq 0$ при $t\in[0,T)$. Тогда $\mathcal{V}_T(t,k)\geq V_T(t,k)$. Пусть также управление $c^0(s)$ и отвечающая ему траектория $k^0[s]=k^0(s,t,k)\,,s\geq t,k^0[t]=k$, такая что $k^0[s]\geq a$, удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{V}_T\left(s,k^0(s)\right)}{\partial k}\left[rk^0(s)+w-c^0(s)\right]+\left(c^0(s)\right)^\beta=\\=\sup_{c\geq 0}\left\{\frac{\partial\mathcal{V}_T\left(s,k^0(s)\right)}{\partial k}\left[rk^0(s)+w-c\right]+c^\beta\right\}.\end{aligned}$$

Тогда управление $c^0(\cdot)$ и соответствующая ему траектория $k^0[\cdot]$ оптимальны, и $\mathcal{V}_T(t,k)=V_T(t,k)$.

Доказательство. Возьмем произвольное управление $\tilde{c}(\cdot)\geq 0$ и отвечающую ему траекторию $\tilde{k}[s]=\tilde{k}(s,t,k)$ с начальным значением $\tilde{k}[t]=k$. Из уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана для функции $\mathcal{V}$ следует, что для управления $\tilde{c}(\cdot)$ выполняется неравенство

$$\frac{\partial\mathcal{V}_T\left(t,\tilde{k}[t]\right)}{\partial t}-\rho\mathcal{V}_T\left(t,\tilde{k}[t]\right)+\frac{\partial\mathcal{V}_T\left(t,\tilde{k}[t]\right)}{\partial k}\left[r\tilde{k}[t]+w-\tilde{c}(t)\right]+\left(\tilde{c}(t)\right)^\beta\leq 0.$$

Представив разность

$$e^{-\rho T}\mathcal{V}_T\left(T,\tilde{k}[T]\right)-e^{-\rho t}\mathcal{V}_T(t,k)=\int\limits_t^T\frac{d\left(e^{-\rho s}\mathcal{V}_T\left(s,\tilde{k}(s)\right)\right)}{ds}\,ds,$$

имеем

$$\begin{aligned}e^{-\rho T}\mathcal{V}_T\left(T,\tilde{k}[T]\right)-e^{-\rho t}\mathcal{V}_T(t,k)=\int\limits_t^T e^{-\rho s}\left(-\rho\mathcal{V}_T\left(s,\tilde{k}(s)\right)+\frac{\partial\mathcal{V}_T\left(s,\tilde{k}(s)\right)}{\partial s}+\right.\\\left.+\frac{\partial\mathcal{V}_T\left(s,\tilde{k}(s)\right)}{\partial k}\left[r\tilde{k}(s)+w-\tilde{c}(s)\right]\right)ds\leq-\int\limits_t^T e^{-\rho s}\left(\tilde{c}(s)\right)^\beta\,ds.\end{aligned}$$

Следовательно, так как $\mathcal{V}_T\left(T, \tilde{k}\left[T\right]\right) = 0$, имеем

$$\mathcal{V}_T\left(t,k\right) \geq e^{\rho t} \int\limits_t^T e^{-\rho s}\left(\tilde{c}\left(s\right)\right)^{\beta} ds,$$

откуда следует, что $\mathcal{V}_T\left(t,k\right) \geq V_T\left(t,k\right)$. С другой стороны, для управления $c^0\left(\cdot\right)$ и отвечающей ему траектории $k^0\left(\cdot\right)$ имеем

$$e^{-\rho T}\mathcal{V}_T\left(T,k^0\left[T\right]\right) - e^{-\rho t}\mathcal{V}_T\left(t,k\right) = \int\limits_t^T e^{-\rho s}\left(-\rho\mathcal{V}_T\left(s,k^0\left(s\right)\right) + \frac{\partial\mathcal{V}_T\left(s,k^0\left(s\right)\right)}{\partial s} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\mathcal{V}_T\left(s,k^0\left(s\right)\right)}{\partial k}\left[rk^0\left(s\right) + w - c^0\left(s\right)\right]\right) ds = -\int\limits_t^T e^{-\rho s}\left(c^0\left(s\right)\right)^{\beta} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}_T\left(t,k\right) = e^{\rho t}\int\limits_t^T e^{-\rho s}\left(c^0\left(s\right)\right)^{\beta} ds \leq V_T\left(t,k\right),$$

поэтому $\mathcal{V}_T\left(t,k\right) = V_T\left(t,k\right)$, и управление $c^0\left(\cdot\right)$ является оптимальным. Лемма доказана. □

Замечание 1. Покажем, что в случае, когда $T = +\infty$, выбранный нами вид функции цены не зависит от t. Заметим, что справедливо равенство

$$\int\limits_t^{+\infty} e^{-\rho(s-t)}\left(c\left(s\right)\right)^{\beta} ds = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho\tau}\left(\tilde{c}\left(\tau\right)\right)^{\beta} d\tau,$$

где $\tilde{c}\left(\tau\right) = c\left(t+\tau\right), \tau \geq 0$. Тогда, взяв в обеих частях равенства супремум по $c\left(\cdot\right) \in U$, получим, что

$$V\left(t,k\right) = V\left(0,k\right) \equiv V\left(k\right).$$

Предполагая, что существует предел $\lim\limits_{T\to+\infty} V_T\left(t,k\right)$, в результате перехода к пределу в уравнении Гамильтона-Якоби-Беллмана (1.4) при $T \to +\infty$ получаем, что

$$-\rho V\left(k\right) + \sup\left\{\frac{\partial V}{\partial k}\left(k\right)\left[rk + w - c\right] + c^{\beta}\,\middle|\, c \geq 0\right\} = 0.$$

Для функции $V\left(k\right)$ также справедлива теорема верификации (см. [45, p.27-28]), которая доказывается абсолютно аналогично Лемме 1.1, при дополнительном условии

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\rho t}V\left(k\left(t\right)\right) = 0.$$

1.2.1. Случай Бьюли

Теорема 1.1. Пусть $\rho > \beta r$. Тогда синтез в задаче оптимального управления (1.1)-(1.3) с ограничением (1.4a) имеет вид

$$c_1\left(k,\rho\right) = \frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\left[k + \frac{w}{r}\right]. \tag{1.5}$$

Лемма 1.2. Капитал $k(s)$ удовлетворяет ограничению (1.4a) тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\int_t^s c(\tau)\, e^{-r\tau} \leq \left(k + \frac{w}{r}\right) e^{-rt}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Решение задачи Коши (1.2) имеет вид

$$k(s) = ke^{r(s-t)} + \frac{w}{r}\left(e^{r(s-t)} - 1\right) - \int_t^s c(\tau)\, e^{r(s-\tau)}\, d\tau.$$

Тогда

$$k(s) \geq -\frac{w}{r} \Leftrightarrow ke^{r(s-t)} + \frac{w}{r}\left(e^{r(s-t)} - 1\right) - \int_t^s c(\tau)\, e^{r(s-\tau)}\, d\tau \geq -\frac{w}{r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_t^s c(\tau)\, e^{r(s-\tau)}\, d\tau \leq \left(k + \frac{w}{r}\right) e^{r(s-t)} \Leftrightarrow \int_t^s c(\tau)\, e^{-r\tau}\, d\tau \leq \left(k + \frac{w}{r}\right) e^{-rt}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.3. Задача оптимального управления (1.1_T), (1.2), (1.3) с ограничением ($1.4\mathrm{a}_T$) имеет решение вида

$$c_{T,1}(s, k(s)) = \frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\left(\frac{k(s) + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-s)}\right)}{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-s)}}\right), \tag{1.7}$$

причем доставляемая управлением траектория капитала удовлетворяет ограничению (1.4a).

Доказательство. Функция Гамильтона–Понтрягина задачи (1.1_T), (1.2), (1.3), ($1.4\mathrm{a}_T$) после перенормировки сопряженной переменной с $\psi = pe^{-\rho t}$ имеет вид

$$\mathcal{H}_1(k, p, c) = c^\beta + p(rk + w - c).$$

Первое условие – достижение максимума функции Гамильтона–Понтрягина по c. Поскольку функция $\mathcal{H}_1$ дифференцируема по c, для нее справедливо необходимое условие экстремума:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{H}_1(k, c, p)}{\partial c}\right|_{\substack{k=k_1(s),\, c=c_1(s),\\ p=p_1(s)}} = \beta\left(c_1(s)\right)^{\beta-1} - p_1(s) = 0 \Rightarrow c_1(s) = \left(\frac{\beta}{p_1(s)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}},$$

где $p_1(s)$ – абсолютно непрерывная функция на отрезке $[t, T]$.

Полученное выражение имеет смысл при $p_1(s) > 0$. При $p_1(s) \leq 0$ мы имеем $\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial c} > 0$, поэтому максимум функции Гамильтона–Понтрягина достигается при $c_1 = +\infty$. Поскольку управление должно быть конечным, условие $p_1(s) > 0$ является необходимым. Следовательно,

$$c_{T,1}[s] = \left(\frac{\beta}{p_1(s)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Сопряженное уравнение для функции $p_1(s)$ имеет вид

$$\frac{dp_1}{dt}(s) = \rho p_1(s) - \frac{\partial \mathcal{H}_1(k,p,c)}{\partial k}\Bigg|_{\substack{k=k_1(s),p=p_1(s),\\ c=c_1(s)}} = (\rho - r)\, p_1(s),$$

решением которого является функция $p_1(s) = p_1(t)\, e^{(\rho-r)(s-t)}$.

Также имеем условие трансверсальности в момент времени T:

$$p_1(T)\, k_1(T) = 0.$$

Так как сопряженная переменная p_1 положительна на отрезке $[t,T]$, из формулы для $p_1(s)$ очевидно, что $p_1(t) > 0$ и $p_1(T) > 0$. Следовательно, по условию трансверсальности должно выполняться равенство $k_1(T) = 0$, при этом мы имеем следующую систему ОДУ для пары (k_1, p_1):

$$\frac{dk_1}{dt}(s) = rk_1(s) + w - \left(\frac{\beta}{p_1(s)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}},\ k_1(t) = k,$$

$$\frac{dp_1}{dt}(s) = (\rho - r)\, p_1(s),\ p_1(t) = p_{1t}.$$

Подставляя найденное решение второго уравнения в первое, находим формулу для капитала:

$$k_1(s) = ke^{r(s-t)} + \frac{w}{r}\left(e^{r(s-t)} - 1\right) - \left(\frac{\beta}{p_{1t}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{1-\beta}{\rho-\beta r} e^{r(s-t)} \left(1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(s-t)}\right).$$

Тогда, используя условие трансверсальности $k_1(T) = 0$, мы можем выразить

$$\left(\frac{\beta}{p_{1t}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} = \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\left(\frac{k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)}{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}}\right).$$

Управление в программной форме для первой задачи имеет вид

$$c_{T,1}[s] = \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\left(\frac{k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)}{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}}\right) e^{\frac{r-\rho}{1-\beta}(s-t)},$$

а функционал принимает значение, равное

$$J_T(t,k;c_{T,1}[\cdot]) = \int\limits_t^T e^{-\rho s}\left(c_{T,1}[s]\right)^{\beta} ds = e^{-\rho t}\left(\frac{\beta r-\rho}{1-\beta}\frac{k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)}{e^{\frac{\beta r-\rho}{1-\beta}(T-t)} - 1}\right)^{\beta} \times$$

$$\times \int\limits_t^T e^{\frac{\beta r-\rho}{1-\beta}(s-t)} ds = e^{-\rho t}\left(k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)\right)^{\beta}\left(\frac{1-\beta}{\beta r-\rho}\left(e^{\frac{\beta r-\rho}{1-\beta}(T-t)} - 1\right)\right)^{1-\beta}.$$

Покажем, что при полученном управлении траектория капитала не нарушает ограничения (1.4a). Для этого воспользуемся Леммой 1.2 и удостоверимся в том, что для управления $c_{T,1}$ выполняется неравенство (1.6):

$$\int\limits_t^s c_{T,1}[\tau]\, e^{-r\tau} d\tau = \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\frac{k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)}{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}} e^{-rt} \int\limits_t^s e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(\tau-t)} d\tau =$$

$$= \left(k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)\right) e^{-rt} \frac{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(s-t)}}{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}} < \left(k + \frac{w}{r}\right) e^{-rt}.$$

Покажем теперь, что $c_{T,1}[s]$ можно выразить как функцию от времени s и капитала $k(s)$:

$$c_{T,1}[s] = \frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\left(\frac{k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)}{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}}\right) e^{r(s-t)} e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(s-t)} =$$

$$= \frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\left(k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)\right) \frac{e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(s-t)} - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}}{\left(1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-s)}\right)\left(1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}\right)} e^{r(s-t)} =$$

$$= \frac{\rho - \beta r}{1-\beta} \frac{\left(k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)\right)\left(1 - \frac{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(s-t)}}{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}}\right)}{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-s)}} e^{r(s-t)} = \frac{\rho - \beta r}{1-\beta} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(k e^{r(s-t)} + \frac{w}{r}\left(e^{r(s-t)} - 1\right) - \frac{k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)}{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}} e^{r(s-t)}\left(1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(s-t)}\right)\right) + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-s)}\right)}{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-s)}} =$$

$$= \frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\left(\frac{k(s) + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-s)}\right)}{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-s)}}\right) = c_{T,1}(s, k(s)).$$

Воспользуемся теоремой верификации (Леммой 1.1). Значение функционала имеет вид

$$J_T(t, k; c_{T,1}[\cdot]) = e^{-\rho t}\left(k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)\right)^{\beta}\left[\frac{1-\beta}{\rho - \beta r}\left(1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}\right)\right]^{1-\beta}.$$

Тогда $\mathcal{V}_T(t,k) = e^{\rho t} J_T(t, k; c_{T,1}[\cdot])$. Функция $\mathcal{V}_T(t,k)$ по построению является непрерывно дифференцируемой по (t,k). Найдем частные производные функции $\mathcal{V}_T$, обозначив $\mathcal{V}_1(t,k) = k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)$, $\mathcal{V}_2(t) = \frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\left(1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}\right)$:

$$\mathcal{V}_T(t,k) = \mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\,\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{V}_T}{\partial t}(t,k) = -w e^{-r(T-t)} \beta \mathcal{V}_1(t,k)^{\beta-1}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta} - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}(1-\beta)\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\mathcal{V}_2(t)^{-\beta},$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}_T}{\partial k}(t,k) = \beta \mathcal{V}_1(t,k)^{\beta-1}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}.$$

Найдем максимизатор:

$$c = \left(\frac{\beta}{\frac{\partial \mathcal{V}_T}{\partial k}(t,k)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} = \frac{\mathcal{V}_1(t,k)}{\mathcal{V}_2(t)}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \mathcal{V}_T}{\partial t}(t,k) - \rho \mathcal{V}_T(t,k) + \sup_{c \geq 0}\left\{\frac{\partial \mathcal{V}_T}{\partial k}(t,k)[rk + w - c] + c^{\beta}\right\} =$$

$$= -w e^{-r(T-t)} \beta \mathcal{V}_1(t,k)^{\beta-1}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta} - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}(1-\beta)\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\mathcal{V}_2(t)^{-\beta} -$$

$$-\rho \mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta} + \beta \mathcal{V}_1(t,k)^{\beta-1}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}[rk + w] -$$

$$-\beta \mathcal{V}_1(t,k)^{\beta-1}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}\frac{\mathcal{V}_1(t,k)}{\mathcal{V}_2(t)} + \left(\frac{\mathcal{V}_1(t,k)}{\mathcal{V}_2(t)}\right)^{\beta} =$$

$$= \underbrace{(1-\beta)\left(1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}\right)}_{(\rho-\beta r)\mathcal{V}_2(t)}\left(\frac{\mathcal{V}_1(t,k)}{\mathcal{V}_2(t)}\right)^{\beta}+$$

$$+\beta r\underbrace{\left(k+\frac{w}{r}\left(1-e^{-r(T-t)}\right)\right)}_{\mathcal{V}_1(t,k)}\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta-1}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}-\rho\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}=$$

$$=(\rho-\beta r)\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}+\beta r\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}-\rho\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}=0.$$

Таким образом, по теореме верификации (см. Лемму 1.1) построенные с помощью принципа максимума Понтрягина траектория и управление (1.7) являются решением задачи (1.1_T), (1.2), (1.3), ($1.4\mathrm{a}_T$). Лемма доказана. □

Доказательство Теоремы 1.1. Искомое управление находится в результате перехода к пределу в управлении, полученном в Лемме 1.3, при $T\to+\infty$:

$$c_1(k(s),\rho)=\lim_{T\to+\infty}c_{T,1}(s,k(s))=\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\left(k(s)+\frac{w}{r}\right),$$

$$\lim_{T\to+\infty}J_T(t,k;c_{T,1}[\cdot])=\left(k+\frac{w}{r}\right)^{\beta}\left(\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\right)^{1-\beta},$$

причем нам удается получить управление c_1 в форме синтеза $c_1(k,\rho)$ по формуле (1.5). Заметим, что оно является допустимым, так как при $T\to+\infty$ выражение капитала для первой задачи сходится к функции

$$k_1(s)=\left(k+\frac{w}{r}\right)e^{\min\left\{\frac{r-\rho}{1-\beta},r\right\}(s-t)}-\frac{w}{r}, \tag{1.8}$$

которая удовлетворяет ограничению (1.4a) при $k\geq-\frac{w}{r}$.

Теорема доказана. □

Замечание 2. В силу Замечания 1 имеем

$$V(k)=\left(k+\frac{w}{r}\right)^{\beta}\left(\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\right)^{1-\beta}.$$

Подставим траекторию капитала $k_1(s)$, полученную ранее формулой (1.8). Тогда

$$e^{-\rho s}V(k_1(s))=e^{-\rho t}\left(k+\frac{w}{r}\right)^{\beta}\left(\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\right)^{1-\beta}e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(s-t)}\xrightarrow[s\to+\infty]{}0,$$

и полученное управление c_1 является решением в классическом смысле при $\rho>\beta r$.

При $\rho\leq\beta r$ можно показать, что значение интегрального функционала полезности расходится при $T\to+\infty$, а предельное управление равно нулю. В силу расходимости несобственного интеграла пользоваться Леммой 1.1 в качестве достаточного условия оптимальности при $T=+\infty$, вообще говоря, неверно, хотя на любом конечном отрезке $[t,T]$ нами получена оптимальная допустимая пара. Поэтому решение понимается в обобщенном смысле. Экономическая интерпретация данного результата такова, что при увеличении горизонта времени экономический агент откладывает потребление своего капитала на конец временного промежутка.

1.2.2. Случай Беккера

Теорема 1.2. Пусть $\rho > \beta r$. Тогда синтез в задаче оптимального управления (1.1)-(1.3) с ограничением (1.4б) имеет вид

$$c_2(k,\rho) = \begin{cases} c_1(k,\rho), & \rho \le r, \\ \hat{c}(k,\rho), & \rho > r, \end{cases} \tag{1.9}$$

где функция $\hat{c} = \hat{c}(k,\rho) \ge w$ является решением уравнения

$$\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\left(k + \frac{w}{r}\right) = \hat{c} + \frac{\rho - r}{(1-\beta) r} w \left(\frac{w}{\hat{c}}\right)^{\frac{(1-\beta) r}{\rho - r}}. \tag{1.10}$$

Для доказательства Теоремы 1.2 докажем пять вспомогательных лемм.

Лемма 1.4. Функция

$$F(x) = \frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\left(\frac{k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-rx}\right)}{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}x}}\right) \tag{1.11}$$

обладает следующими свойствами:

1. При $\rho \le r$ производная функции $F(x)$ отрицательна всюду на открытом луче $(0, +\infty)$;

2. При $\rho > r$ производная функции $F(x)$ положительна всюду на замкнутом луче $[x^*, +\infty)$, где

$$x^* = \frac{1-\beta}{\rho - r}\ln\left\{\frac{1}{w}\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\left(k + \frac{w}{r}\right)\right\}.$$

Доказательство. Вычислим производную функции $F(x)$:

$$F'(x) = \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\left(\frac{w e^{-rx}\left(1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}x}\right) - \frac{\rho-\beta r}{1-\beta} e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}x}\left(k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-rx}\right)\right)}{\left(1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}x}\right)^2}\right) =$$

$$= e^{-\frac{\rho + (1-2\beta) r}{1-\beta}x}\left(\frac{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}}{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}x}}\right)^2\left(w\left[\frac{e^{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}x} - 1}{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}} - \frac{e^{rx} - 1}{r}\right] - k e^{rx}\right).$$

Теперь рассмотрим соответствующие два случая.

1. Пусть $\rho \le r$. Тогда исследуем поведение функции $f(a,x) = \frac{e^{ax}-1}{a}$ с параметром $x > 0$:
$$\frac{\partial f(a,x)}{\partial a} = \frac{(ax-1)e^{ax}+1}{a^2} = \frac{e}{a^2}\left((ax-1)e^{ax-1} + \frac{1}{e}\right).$$
Так как функция $w(s) = se^s$ достигает минимума в точке $s_0 = -1$ со значением, равным $-\frac{1}{e}$, то числитель дроби $\frac{(ax-1)e^{ax}+1}{a^2}$ положителен при $a \ne 0$. Разложим экспоненту e^{ax} в ряд Тейлора с точностью до второго порядка малости по a:
$$\frac{\partial f(a,x)}{\partial a} = \frac{(ax-1)\left(1+ax+\frac{a^2x^2}{2}+o\left(a^2\right)\right)+1}{a^2} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{ax^3}{2} + o(1)\right) \xrightarrow[a\to 0]{} \frac{x^2}{2}.$$
Следовательно, для любых $x > 0, a \in \mathbb{R}$ $\frac{\partial f(a,x)}{\partial a} > 0$. Но тогда $f\left(\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}, x\right) \le f(r,x)$, и поэтому $F'(x) < 0$, $\forall\, x > 0$.

2. Пусть теперь $\rho > r$. Заметим, что последнее полученное выражение для производной функции $F(x)$ можно переписать следующим образом:
$$F'(x) = e^{-\frac{\rho+(1-2\beta)r}{1-\beta}x}\left(\frac{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}}{1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}x}}\right)^2\left(\frac{w}{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}}e^{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}x} + \frac{w}{r}\frac{\rho-r}{\rho-\beta r} - \left(k+\frac{w}{r}\right)e^{rx}\right).$$
Рассмотрим теперь выражение в круглых скобках и определим, при каких x оно принимает положительные значения. Так как число $\frac{w}{r}\frac{\rho-r}{\rho-\beta r}$ положительно, нам достаточно определить, когда выполняется неравенство
$$\frac{w}{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}}e^{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}x} - \left(k+\frac{w}{r}\right)e^{rx} \ge 0.$$
Посредством арифметических преобразований можно установить, что это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $x \ge x^*$. Тогда получаем, что $F'(x) > 0, \forall x \ge x^*$, что и требовалось. Лемма доказана.

$\square$

Лемма 1.5. Пусть выполняется неравенство $\rho \le r$. Тогда решения задач (1.1_T), (1.2), (1.3), ($1.4а_T$) и (1.1_T), (1.2), (1.3), (1.4б) совпадают.

Доказательство. Так как фазовое ограничение (1.4б) включает в себя ограничение ($1.4а_T$), то если управление $c_{T,1}[s]$ является допустимым и для задачи с ограничением (1.4б), то доставляемое им значение функционала оказывается оптимальным. Возьмем оптимальное управление $c_{T,2}[s] = c_{T,1}(s,t,k)$ и убедимся, что доставляемая этим управлением траектория $k_2(s)$ не нарушает фазовых ограничений. Так как $k_2(t) = k, k_2(T) = 0$, то рассмотрим $s \in$

(t, T). Используя формулу (1.11) из Леммы 1.4, можно записать выражение для траектории капитала $k_2(s)$ в следующем виде:

$$k_2(s) = ke^{r(s-t)} + \frac{w}{r}\left(e^{r(s-t)} - 1\right) - F(T-t)\, e^{r(s-t)} \frac{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(s-t)}}{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}} =$$
$$= e^{r(s-t)} \frac{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(s-t)}}{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}} \left(F(s-t) - F(T-t)\right). \tag{1.12}$$

В силу Леммы 1.4 при $\rho \leq r$ для любого $x > 0$ справедливо неравенство $F'(x) < 0$. Тогда функция F строго убывает на $(0, +\infty)$, откуда следует, что $F(s-t) - F(T-t) > 0, \forall s \in (t, T)$. Следовательно, $k_2(s) > 0$. При $k = 0$ и $\rho = r$ имеет место равенство $F(x) = w\ \forall x \geq 0$, поэтому $k_2(s) = 0$. Лемма доказана. □

Лемма 1.6. Пусть $\rho > r$. Тогда уравнение (1.10) при каждом фиксированном значении $k > 0$ имеет два корня $c_1 \in (0, w)$, $c_2 > w$, а при $k = 0$ обладает единственным корнем $c = w$.

Доказательство. Исследуем правую часть уравнения (1.10) как функцию от c:

$$f(c) = c + \frac{\rho - r}{(1-\beta)\, r} w \left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho - r}}. \tag{1.13}$$

Найдем ее производную:

$$f'(c) = 1 - \left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho - r}}. \tag{1.14}$$

Нетрудно заметить, что $f'(w) = 0$, причем $f'(c) < 0$, $0 < c < w$ и $f'(c) > 0$, $c > w$. Следовательно, в точке $c = w$ функция достигает минимального значения, равного $f_{\min} = \frac{\rho-\beta r}{(1-\beta)r} w$. Левая часть уравнения (1.10), которую мы обозначим через $h(k)$, достигает значения $f_{\min}$ тогда и только тогда, когда $k = 0$. Так как $f(c)$ и $h(k)$ являются непрерывными функциями своих аргументов, причем $\lim\limits_{c\to 0+} f(c) = \lim\limits_{c\to+\infty} f(c) = +\infty = \lim\limits_{k\to+\infty} h(k)$, то в силу теоремы о прохождении непрерывной функции через промежуточное значение для любого $f \in (f_{\min}, +\infty)$ найдутся $c_1 \in (0, w)$ и $c_2 \in (w, +\infty)$ такие, что $f(c_1) = f(c_2) = f$. В свою очередь, для функции h найдется такое $\tilde{k}$, что $h\left(\tilde{k}\right) = f$. Таким образом, имеем для каждого $k \in (0, +\infty)$ два корня: $c_1 \in (0, w)$ и $c_2 > w$. Лемма доказана. □

Лемма 1.7. Пусть $\rho > r$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq T$. Тогда задача оптимального управления с функционалом

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\rho s} \left(c(s)\right)^{\beta} ds \to \max_{c(\cdot)},$$

задачей Коши (1.2) с начальным условием $k(\tau_1) = 0$, ограничениями (1.3) и (1.4б) имеет решение $c(s) = w$.

Доказательство. Так как x^β – вогнутая функция, в силу неравенства Иенсена имеем

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\rho e^{-\rho s}}{e^{-\rho\tau_1} - e^{-\rho\tau_2}} \left(c\left(s\right)\right)^\beta \, ds \le \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\rho e^{-\rho s}}{e^{-\rho\tau_1} - e^{-\rho\tau_2}} c\left(s\right) ds \right)^\beta =$$

$$= \left(\frac{\rho}{e^{-\rho\tau_1} - e^{-\rho\tau_2}} \right)^\beta \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\rho s} c\left(s\right) ds \right)^\beta .$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\rho s} \left(c\left(s\right)\right)^\beta \, ds \le \left(\frac{e^{-\rho\tau_1} - e^{-\rho\tau_2}}{\rho} \right)^{1-\beta} \left(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\rho s} c\left(s\right) ds \right)^\beta ,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $c\left(s\right) \equiv \mathrm{const}, s \in [\tau_1, \tau_2]$.

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу оптимального управления с функционалом

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\rho s} c\left(s\right) ds \to \max_{c(\cdot)},$$

задачей Коши (1.2) с начальным условием $k\left(\tau_1\right) = 0$ и ограничениями (1.3), (1.4б). Тогда траектория капитала имеет вид

$$k\left(s\right) = \frac{w}{r} \left(e^{r(s-\tau_1)} - 1\right) - \int\limits_{\tau_1}^{s} c\left(\tau\right) e^{r(s-\tau)} \, d\tau \ge 0. \tag{1.15}$$

Из формулы для траектории капитала и ограничения (1.4б) следует, что для любого $s \in [\tau_1, \tau_2]$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\tau_1}^{s} e^{-r\tau} c\left(\tau\right) \, d\tau \le \frac{w}{r} \left(e^{-r\tau_1} - e^{-rs}\right).$$

Тогда

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\rho s} c\left(s\right) ds = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-(\rho-r)s} d \left(\int\limits_{\tau_1}^{s} e^{-r\tau} c\left(\tau\right) d\tau \right) = e^{-(\rho-r)s} \int\limits_{\tau_1}^{s} e^{-r\tau} c\left(\tau\right) d\tau \Bigg|_{\tau_1}^{\tau_2} +$$

$$+ \left(\rho - r\right) \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-(\rho-r)s} \left(\int\limits_{\tau_1}^{s} e^{-r\tau} c\left(\tau\right) d\tau \right) ds = e^{-(\rho-r)\tau_2} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-r\tau} c\left(\tau\right) \, d\tau +$$

$$+ \left(\rho - r\right) \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-(\rho-r)s} \left(\int\limits_{\tau_1}^{s} e^{-r\tau} c\left(\tau\right) \, d\tau \right) ds.$$

Положив $x\left(s\right) = \int\limits_{\tau_1}^{s} e^{-r\tau} c\left(\tau\right) d\tau$, получаем задачу оптимизации

$$\left(\rho - r\right) \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-(\rho-r)s} x\left(s\right) \, ds + e^{-(\rho-r)\tau_2} x\left(\tau_2\right) \to \max_{x(\cdot)},$$

$$0 \le x\left(s\right) \le \frac{w}{r} \left(e^{-r\tau_1} - e^{-rs}\right),$$

решение которой достигается равенством $x(s) = \frac{w}{r}\left(e^{-r\tau_1} - e^{-rs}\right), s \in [\tau_1, \tau_2]$. Тогда, взяв производную по времени функции $x(s)$, получаем, что для любого $s \in [\tau_1, \tau_2]$

$$\frac{dx}{ds}(s) = we^{-rs} = e^{-rs}c(s).$$

Тогда $c(s) = w, s \in [\tau_1, \tau_2]$. Но на функции, равной константе, неравенство Иенсена обращается в равенство, поэтому оптимальное значение функционала $\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\rho s}(c(s))^{\beta}\, ds$ достигается на функции $c(s) = w$, причем траектория капитала по формуле (1.15) оказывается равной нулю всюду на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$, тем самым удовлетворяя фазовому ограничению (1.4б). Следовательно, управление $c(s) = w$ оптимально. Лемма доказана. □

Замечание 3. Одним из важных вопросов, возникающих при решении задач оптимального управления с ограничением на фазовые координаты, является вопрос взаимодействия траектории с фазовым ограничением, который в общем случае не решен и каждый раз решается в индивидуальном порядке. Лемма 1.7 позволяет разрешить этот вопрос и установить, что происходит «захват» фазовым ограничением траектории: траектория, попадая на фазовую границу $k = 0$, дальше идет по ней.

Лемма 1.8. Задача оптимального управления (1.1_T), (1.2), (1.3) с ограничением (1.4б) имеет решение в форме синтеза вида

$$c_{T,2}(t,k) = \begin{cases} c_{T,1}(t,k), & \rho \le r, \\ \hat{c}(k,\rho), & \rho > r, \end{cases} \tag{1.16}$$

где функция $\hat{c} = \hat{c}(k,\rho) \ge w$ является решением уравнения (1.10).

Доказательство. Воспользуемся принципом максимума Понтрягина для задачи с фазовыми ограничениями [8]. Функция Гамильтона–Понтрягина после перенормировки сопряженных переменных с $\psi(t) = p(t)e^{-\rho t}$ имеет вид

$$\mathcal{H}_2(k,c,p,\mu) = c^{\beta} + p[rk + w - c] + \mu k,\ \mu \ge 0,\ \mu k = 0.$$

Первое условие – достижение максимума функции Гамильтона–Понтрягина по c. Поскольку функция $\mathcal{H}_2$ дифференцируема по c, для нее справедливо необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial \mathcal{H}_2(k,c,p,\mu)}{\partial c}\Bigg|_{\substack{k=k_2(s),\, c=c_2(s),\\ p=p_2(s),\, \mu=\mu(s)}} = \beta(c_2(s))^{\beta-1} - p_2(s) = 0 \Rightarrow c_2(s) = \left(\frac{\beta}{p_2(s)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Здесь $p_2(\cdot)$ – абсолютно непрерывная функция на отрезке $[t,T]$, а $\mu(\cdot)$ – неотрицательная мера, такая что $\operatorname{supp}\mu \subseteq \{s \mid k(s) = 0\}$.

Полученное выше выражение имеет смысл при $p_2(s) > 0$. При $p_2(s) \le 0$ мы имеем $\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial c} > 0$, поэтому максимум функции Гамильтона–Понтрягина достигается при $c_2 = +\infty$. Поскольку управление должно быть конечным, условие $p_2(s) > 0$ является необходимым. Следовательно,

$$c_{T,2}[s] = \left(\frac{\beta}{p_2(s)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Сопряженное уравнение для функции $p_2(s)$ в интегральной форме имеет вид

$$p_2(s) = p_2(t)\, e^{(\rho-r)(s-t)} - e^{(\rho-r)(s-t)} \int\limits_t^s \mu(\tau)\, e^{-(\rho-r)(\tau-t)}\, d\tau.$$

Условие трансверсальности в момент времени T имеет вид

$$p_2(T)\, k_2(T) = 0.$$

Теперь разберем решение второй задачи. Так как по Лемме 1.5 решения задач совпадают при $\rho \le r$, нам осталось разобрать случай, когда $\rho > r$.

Для начала покажем, что ранее рассмотренная траектория капитала становится недопустимой. Для этого используем ранее полученную запись (1.12) траектории капитала k_2 и рассмотрим ее в момент времени $s = T - \Delta t$:

$$e^{-r(T-t-\Delta t)} k_2(T-\Delta t) = \frac{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t-\Delta t)}}{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}} \left(F(T-t-\Delta t) - F(T-t)\right).$$

По Лемме 1.4 при $\rho > r$ в силу положительности производной функция F строго возрастает на замкнутом луче $[x^*, +\infty)$. Положив $T - t - \varepsilon \ge x^*$, получаем, что для любых $\varepsilon \in \left(0, \frac{T-t}{2}\right)$, $\Delta t \in (0, \varepsilon)$ выполняется неравенство $F(T-t-\Delta t) < F(T-t)$. Следовательно, $k_2(t) < 0, t \in (T-\Delta t, T)$. Это свидетельствует о нарушении фазового ограничения задачи и недопустимости траектории $k_2(s)$. Следовательно, существует момент времени $T_1 \in [t, T)$ такой, что $k_2(T_1) = 0$. В силу Леммы 1.7 выполняется равенство $c_2(s) = w, s \in [T_1, T]$, откуда следует, что $k_2(s) = 0\ \forall s \in [T_1, T]$. Следовательно, в силу условия дополняющей нежесткости $p_2(s) = \beta w^{\beta-1}$, и $\mu(s) = (\rho - r)\, \beta w^{\beta-1} > 0$. Тогда из соотношений $k_2(T_1) = 0, c_2(T_1) = w$ можно вывести систему из двух уравнений с неизвестными моментом времени T_1 и значением сопряженной переменной $p(t) = p_{2t}$:

$$\left(\frac{\beta}{p_{2t}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} e^{-\frac{\rho-r}{1-\beta}(T_1-t)} = w,$$

$$k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T_1-t)}\right) - \left(\frac{\beta}{p_{2t}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\left(1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T_1-t)}\right) = 0.$$

Так как $c_2(t) = \left(\frac{\beta}{p_{2t}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$, нам удобнее выразить момент времени T_1 из первого уравнения как $T_1 = t + \frac{1-\beta}{\rho-r}\ln\frac{c_2(t)}{w}$. Подставив T_1 во второе уравнение, получаем следующее уравнение относительно $c_2(t)$:

$$k + \frac{w}{r}\left(1 - \left(\frac{w}{c_2(t)}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho-r}}\right) - c_2(t)\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\left(1 - \left(\frac{w}{c_2(t)}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right) = 0,$$

которое посредством арифметических преобразований приводится к уравнению (1.10) относительно $\hat{c} = c_2(t)$. По Лемме 1.6 уравнение (1.10) при положительном значении k имеет два корня: $c^1 \in (0, w)$ и $c^2 > w$, а при $k = 0$ обладает единственным корнем $c = w$.

Рассмотрим теперь управление

$$c_{T,2}[s] = \begin{cases} \left(\dfrac{\beta}{p_{2t}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} e^{-\frac{\rho-r}{1-\beta}(s-t)},\ s \in [t, T_1], \\ w,\ s \in (T_1, T], \end{cases}$$

со значением $\hat{c}(k,\rho) = \left(\frac{\beta}{p_{2t}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \geq w$, являющимся корнем уравнения (1.10). Покажем, что управление $c_{T,2}[s]$ может быть выражено в форме синтеза. Так как $F(T-t) = \left(\frac{\beta}{p_{2t}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$, воспользуемся уравнением (1.10):

$$\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}F(T-t) = \frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\hat{c}(k,\rho) = k + \frac{w}{r} - \frac{\rho-r}{r(\rho-\beta r)}w\left(\frac{w}{\hat{c}(k,\rho)}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho-r}}.$$

Теперь воспользуемся формулой (1.12) для капитала $k_2(s)$:

$$k_2(s) = ke^{r(s-t)} + \frac{w}{r}\left(e^{r(s-t)} - 1\right) -$$

$$-\left(k + \frac{w}{r} - \frac{\rho-r}{r(\rho-\beta r)}w\left(\frac{w}{\hat{c}(k,\rho)}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho-r}}\right)e^{r(s-t)}\left(1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(s-t)}\right) = \left(k + \frac{w}{r}\right)e^{-\frac{\rho-r}{1-\beta}(s-t)} -$$

$$-\frac{w}{r} + \frac{\rho-r}{\rho-\beta r}\frac{w}{r}\left(\frac{w}{\hat{c}(k,\rho)}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho-r}}\left(e^{r(s-t)} - e^{-\frac{\rho-r}{1-\beta}(s-t)}\right) =$$

$$= \left(k + \frac{w}{r} - \frac{\rho-r}{\rho-\beta r}\frac{w}{r}\left(\frac{w}{\hat{c}(k,\rho)}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho-r}}\right)e^{-\frac{\rho-r}{1-\beta}(s-t)} - \frac{w}{r} + \frac{\rho-r}{\rho-\beta r}\frac{w}{r}\left(\frac{w}{\hat{c}(k,\rho)}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho-r}}e^{r(s-t)} =$$

$$= \frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\hat{c}(k,\rho)\,e^{-\frac{\rho-r}{1-\beta}(s-t)} - \frac{w}{r} + \frac{\rho-r}{\rho-\beta r}\frac{w}{r}\left(\frac{w}{\hat{c}(k,\rho)}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho-r}}e^{r(s-t)}.$$

Тогда, поместив экспоненту $e^{r(s-t)}$ в последнем слагаемом внутрь скобки, имеем

$$\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\left(k_2(s) + \frac{w}{r}\right) = \hat{c}(k,\rho)\,e^{-\frac{\rho-r}{1-\beta}(s-t)} + \frac{\rho-r}{(1-\beta)r}w\left(\frac{w}{\hat{c}(k,\rho)\,e^{-\frac{\rho-r}{1-\beta}(s-t)}}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho-r}}.$$

Видим, что на отрезке $[s, T_1]$ управление $c_{T,2}[s]$ удовлетворяет уравнению (1.10) с $k = k_2(s)$. Уравнение (1.10) также остается справедливым в случае, когда $c_{T,2}[s] = w, k_2(s) = 0, s \in [T_1, T]$, в силу Леммы 1.6. Таким образом, мы показали, что $c_{T,2}[s] \equiv \hat{c}(k_2(s), \rho)$.

Теперь мы покажем, что управление $c_{T,2}[s]$ является оптимальным. Для этого нам следует проверить выполнение условий Леммы 1.1. Вычислим функционал, учитывая, что $k(t)=k$:

$$J_T(t,k(t);c_{T,2}[\cdot]) = e^{-\rho t}\left((\hat{c}(k(t),\rho))^\beta \int\limits_t^{T_1} e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(s-t)}\,ds + \int\limits_{T_1}^{T} e^{\rho(t-s)} w^\beta\,ds \right) =$$
$$= e^{-\rho t}\left(\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\left(1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T_1-t)}\right)(\hat{c}(k(t),\rho))^\beta + \frac{w^\beta}{\rho}\left(e^{-\rho(T_1-t)} - e^{-\rho(T-t)}\right)\right).$$

Здесь T_1 – такой момент времени, что $k_2(T_1)=0$, $c_2(T_1)=w$. Следовательно,

$$\hat{c}(k(t),\rho)\,e^{-\frac{r-\rho}{1-\beta}(T_1-t)} = w,$$

откуда следует, что $T_1 - t = \frac{1-\beta}{\rho-r}\ln\frac{\hat{c}(k(t),\rho)}{w}$. Тогда

$$J_T(t,k(t);c_{T,2}[\cdot]) = e^{-\rho t}\left(\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\left(1-\left(\frac{w}{\hat{c}(k(t),\rho)}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right)(\hat{c}(k(t),\rho))^\beta + \right.$$
$$\left. + \frac{w^\beta}{\rho}\left(\left(\frac{w}{\hat{c}(k(t),\rho)}\right)^{\frac{(1-\beta)\rho}{\rho-r}} - e^{-\rho(T-t)}\right)\right) =$$
$$= e^{-\rho t}\left(\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\left(1-\left(\frac{w}{\hat{c}(k(t),\rho)}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right)(\hat{c}(k(t),\rho))^\beta + \frac{(\hat{c}(k(t),\rho))^\beta}{\rho}\left(\frac{w}{\hat{c}(k(t),\rho)}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}} - \right.$$
$$\left. - \frac{w^\beta}{\rho}e^{-\rho(T-t)}\right) =$$
$$= e^{-\rho t}\left((\hat{c}(k(t),\rho))^\beta\left[\frac{1-\beta}{\rho-\beta r} + \frac{\beta}{\rho}\frac{\rho-r}{\rho-\beta r}\left(\frac{w}{\hat{c}(k(t),\rho)}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right] - \frac{w^\beta}{\rho}e^{-\rho(T-t)}\right).$$

С другой стороны, используя уравнение (1.10), удобно получить эквивалентное представление:

$$J_T(t,k(t);c_{T,2}[\cdot]) =$$
$$= e^{-\rho t}\left((\hat{c}(k(t),\rho))^{\beta-1}\left[\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\hat{c}(k(t),\rho) + \frac{\beta}{\rho}\frac{\rho-r}{\rho-\beta r}\hat{c}(k(t),\rho)\left(\frac{w}{\hat{c}(k(t),\rho)}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{w^\beta}{\rho}e^{-\rho(T-t)}\right) =$$
$$= e^{-\rho t}\left((\hat{c}(k(t),\rho))^{\beta-1}\left[\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\hat{c}(k(t),\rho) + \frac{\beta}{\rho}\frac{\rho-r}{\rho-\beta r}w\left(\frac{w}{\hat{c}(k(t),\rho)}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho-r}}\right] - \frac{w^\beta}{\rho}e^{-\rho(T-t)}\right) =$$
$$= e^{-\rho t}\left((\hat{c}(k(t),\rho))^{\beta-1}\left[\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\hat{c}(k(t),\rho) + \frac{\beta}{\rho}\left(rk(t) + w - \frac{(1-\beta)r}{\rho-\beta r}\hat{c}(k(t),\rho)\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{w^\beta}{\rho}e^{-\rho(T-t)}\right) =$$

$$= e^{-\rho t}\left(\left(\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)\right)^{\beta-1}\left[\frac{1-\beta}{\rho}\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)+\frac{\beta}{\rho}\left(rk\left(t\right)+w\right)\right]-\frac{w^{\beta}}{\rho}e^{-\rho(T-t)}\right).$$

Положим $\mathcal{V}_T\left(t,k\right) = e^{\rho t}J_T\left(t,k;c_{T,2}\left[\cdot\right]\right)$. Так как по построению функция $\mathcal{V}_T\left(t,k\right)$ является непрерывно дифференцируемой, мы можем найти ее частные производные. Для начала продифференцируем уравнение (1.10) по k:

$$\frac{\rho-\beta r}{1-\beta} = \frac{\partial\hat{c}}{\partial k}\left(k,\rho\right)\left[1-\left(\frac{w}{\hat{c}\left(k,\rho\right)}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right].$$

Тогда получим

$$\frac{\partial\mathcal{V}_T}{\partial k}\left(t,k\left(t\right)\right) = \beta\left(\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)\right)^{\beta-1}\frac{\partial\hat{c}}{\partial k}\left(k\left(t\right),\rho\right)\left[\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}+\frac{\beta}{\rho}\frac{\rho-r}{\rho-\beta r}\left(\frac{w}{\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right]-$$
$$-\left(\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)\right)^{\beta-1}\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{w}{\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\frac{\partial\hat{c}}{\partial k}\left(k\left(t\right),\rho\right)=$$
$$=\beta\left(\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)\right)^{\beta-1}\frac{\partial\hat{c}}{\partial k}\left(k\left(t\right),\rho\right)\left[\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{w}{\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\left(\beta\frac{\rho-r}{\rho-\beta r}-1\right)\right]=$$
$$=\beta\left(\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)\right)^{\beta-1}\frac{\partial\hat{c}}{\partial k}\left(k\left(t\right),\rho\right)\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\left[1-\left(\frac{w}{\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right]=\beta\left(\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)\right)^{\beta-1}.$$

Отметим, что

$$\frac{\partial\mathcal{V}_T}{\partial t}\left(t,k\left(t\right)\right) = -w^{\beta}e^{-\rho(T-t)}.$$

Найдем теперь $\sup\limits_{\tilde{c}\geq 0}\left\{\frac{\partial\mathcal{V}_T}{\partial k}\left(t,k\left(t\right)\right)\left[rk\left(t\right)+w-\tilde{c}\right]+\tilde{c}^{\beta}\right\}$. Используя необходимое условие экстремума, имеем, что $\tilde{c}=\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial\mathcal{V}_T}{\partial k}\left(t,k\left(t\right)\right)\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$. Тогда

$$\frac{\partial\mathcal{V}_T}{\partial t}\left(t,k\left(t\right)\right)-\rho\mathcal{V}_T\left(t,k\left(t\right)\right)=$$
$$=-w^{\beta}e^{-\rho(T-t)}-\rho\left(\left(\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)\right)^{\beta-1}\left[\frac{1-\beta}{\rho}\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)+\frac{\beta}{\rho}\left(rk\left(t\right)+w\right)\right]-\frac{w^{\beta}}{\rho}e^{-\rho(T-t)}\right)=$$
$$=-\left(\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)\right)^{\beta-1}\left[\left(1-\beta\right)\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)+\beta\left(rk\left(t\right)+w\right)\right],$$

$$\sup_{\tilde{c}\geq 0}\left\{\frac{\partial\mathcal{V}_T}{\partial k}\left(t,k\left(t\right)\right)\left[rk\left(t\right)+w-\tilde{c}\right]+\tilde{c}^{\beta}\right\}=$$
$$=\frac{\partial\mathcal{V}_T}{\partial k}\left(t,k\left(t\right)\right)\left[rk\left(t\right)+w-\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial\mathcal{V}_T}{\partial k}\left(t,k\left(t\right)\right)\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\right]+\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial\mathcal{V}_T}{\partial k}\left(t,k\left(t\right)\right)\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}=$$
$$=\frac{\partial\mathcal{V}_T}{\partial k}\left(t,k\left(t\right)\right)\left(rk\left(t\right)+w\right)+\left(1-\beta\right)\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial\mathcal{V}_T}{\partial k}\left(t,k\left(t\right)\right)\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}=$$
$$=\left(\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)\right)^{\beta-1}\left[\beta\left(rk\left(t\right)+w\right)+\left(1-\beta\right)\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)\right].$$

Складывая полученные выражения, получаем, что

$$\frac{\partial \mathcal{V}_T}{\partial t}(t,k(t)) - \rho\mathcal{V}_T(t,k(t)) + \sup_{\tilde{c}\geq 0}\left\{\frac{\partial \mathcal{V}_T}{\partial k}(t,k(t))\left[rk(t)+w-\tilde{c}\right]+\tilde{c}^{\beta}\right\} =$$

$$= -\left(\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)\right)^{\beta-1}\left[\left(1-\beta\right)\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)+\beta\left(rk\left(t\right)+w\right)\right]+$$

$$+\left(\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)\right)^{\beta-1}\left[\beta\left(rk\left(t\right)+w\right)+\left(1-\beta\right)\hat{c}\left(k\left(t\right),\rho\right)\right]=0,$$

то есть функция $\mathcal{V}_T(t,k)$ является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, а значит, в силу Леммы 1.1 функция $\mathcal{V}_T(t,k)$ при $\rho > r$ является искомой функцией цены, а соответствующее ей управление $\hat{c}(k,\rho)$ является оптимальным. Лемма доказана. □

Доказательство Теоремы 1.2. Искомое обобщенное решение получается в результате перехода к пределу для управления, полученного в Лемме 1.8, при $T \to +\infty$. □

Замечание 4. В силу Замечания 1 при $\rho > r$ имеем

$$V\left(k\left(s\right)\right)=\left(\hat{c}\left(k\left(s\right),\rho\right)\right)^{\beta-1}\left[\frac{1-\beta}{\rho}\hat{c}\left(k\left(s\right),\rho\right)+\frac{\beta}{\rho}\left(rk\left(s\right)+w\right)\right].$$

Из уравнения (1.10) можно предъявить более точную нижнюю оценку для функции $\hat{c}(k(s),\rho)$. Так как $\hat{c}(k(s),\rho) \geq w$, то

$$\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\left(k\left(s\right)+\frac{w}{r}\right)=\hat{c}\left(k\left(s\right),\rho\right)+\frac{\rho-r}{\left(1-\beta\right)r}w\left(\frac{w}{\hat{c}\left(k\left(s\right),\rho\right)}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho-r}}\leq\hat{c}\left(k\left(s\right),\rho\right)+\frac{\rho-r}{\left(1-\beta\right)}\frac{w}{r},$$

откуда следует, что

$$\hat{c}\left(k\left(s\right),\rho\right)\geq\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}k\left(s\right)+w.$$

Следовательно,

$$\frac{dk}{ds}\left(s\right)=rk\left(s\right)+w-\hat{c}\left(k\left(s\right),\rho\right)\leq-\frac{\rho-r}{1-\beta}k\left(s\right),$$

и по лемме Гронуолла-Беллмана получаем, что

$$k\left(s\right)\leq ke^{-\frac{\rho-r}{1-\beta}(s-t)}\xrightarrow[s\to+\infty]{}0.$$

Следовательно, $\hat{c}(k(s),\rho) \xrightarrow[s\to+\infty]{} \hat{c}(0,\rho)=w$. Тогда

$$e^{-\rho s}V\left(k\left(s\right)\right)=e^{-\rho s}\left(\left(\hat{c}\left(k\left(s\right),\rho\right)\right)^{\beta-1}\left[\frac{1-\beta}{\rho}\hat{c}\left(k\left(s\right),\rho\right)+\frac{\beta}{\rho}\left(rk\left(s\right)+w\right)\right]\right)\xrightarrow[s\to+\infty]{}0,$$

поэтому полученное управление оказывается решением в классическом смысле при $\rho > r$. При $\rho \leq r$ из Леммы 1.5 следует совпадение решений, поэтому при $T \to +\infty$ мы наблюдаем аналогичную картину: в случае, когда выполняется неравенство $\beta r < \rho \leq r$, получаемое в пределе при $T \to +\infty$ управление также оказывается решением в классическом смысле, а при $\rho \leq \beta r$ в силу расходимости функционала решение следует понимать в смысле Определения 1.

1.2.3. Случай с неликвидным капиталом

Всюду далее мы считаем, что начальный момент времени равен нулю, а переменную s, которая ранее использовалась, мы переобозначим через переменную t.

Перед формулировкой основной теоремы мы перепишем постановку задачи следующим образом. Так как в силу ограничения (1.3′) производная капитала неотрицательна, то из неравенства $rk_0 + w > 0$ следует неравенство $rk(t) + w > 0$. Тогда нам будет удобно представить потребительские расходы в виде

$$c(t) = u(t)(rk(t) + w),$$

где $u(t)$ – доля потребительских расходов, удовлетворяющая следующему ограничению:

$$0 \le u(t) \le 1.$$

Следовательно, задачу оптимального управления (1.1), (1.2), (1.3′) можно переформулировать так:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t} (u(t))^\beta (rk(t) + w)^\beta \, dt \to \max_{u(\cdot)}, \tag{1.1′}$$

$$\frac{dk}{dt}(t) = (1 - u(t))(rk(t) + w), \; k(0) = k_0, \tag{1.2′}$$

$$0 \le u(t) \le 1. \tag{1.3$_u$}$$

Теорема 1.3. Пусть $\rho > \beta r$. Тогда задача оптимального управления (1.1′), (1.2′), (1.3$_u$) имеет решение в форме синтеза вида

$$u(\rho) = \min\left\{\frac{\rho - \beta r}{(1-\beta) r}, 1\right\}. \tag{1.17}$$

Замечание 5. В терминах задачи оптимального управления (1.1), (1.2), (1.3′) программа потребительских расходов имеет вид

$$c_3(k, \rho) = u(\rho)(rk + w).$$

Мы приведем здесь теорему существования решения для задачи оптимального управления на бесконечном горизонте (см. [2]).

Теорема 1.4. Пусть U – непустой компакт в $\mathbb{R}^m$, G – заданное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $k_0 \in G$. Кроме того, векторная функция $f : G \times U \to \mathbb{R}^n$, скалярная функция $g : G \times U \to \mathbb{R}$, матричная функция $\frac{\partial f}{\partial k} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial k_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ и градиент $\frac{\partial g}{\partial k} = \left(\frac{\partial g}{\partial k_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial k_n}\right)$ непрерывны на декартовом произведении $G \times U$. Пусть также выполняются следующие условия:

1. Существует такая константа $C_0 \geq 0$, что для любых $k \in G, u \in U$ выполняется следующее неравенство:
$$\langle k, f(k,u)\rangle \leq C_0\left(1+\|k\|^2\right);$$

2. Для любых $k \in G$ множество $Q(k) = \{(z^0, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z^0 \leq g(k,u), \; z = f(k,u), \; u \in U\}$ выпукло;

3. Существуют такие положительные функции μ и ω на $[0, +\infty)$, что $\mu(t) \to +0$, $\omega(t) \to +0$ при $t \to \infty$, и для любой допустимой пары $(k(\cdot), u(\cdot))$ справедливы следующие неравенства:
$$e^{-\rho t} \max_{u \in U} |g(k(t), u)| \leq \mu(t), \quad \forall t \geq 0,$$
$$\int\limits_T^\infty e^{-\rho t} |g(k(t), u(t))| \, dt \leq \omega(T), \quad \forall T \geq 0.$$

Тогда существует оптимальное управление для задачи
$$\frac{dk}{dt}(t) = f(k(t), u(t)), \quad u(t) \in U,$$
$$x(0) = x_0,$$
$$J(0, x_0; k(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t} g(k(t), u(t)) \, dt.$$

Для нашей задачи
$$g(k,u) = u^\beta (rk+w)^\beta, \quad f(k,u) = (1-u)(rk+w), \quad G = \left(-\frac{w}{r}, +\infty\right), \quad U = [0,1].$$

Положив $C_0 = r + \frac{w}{2}$, можно проверить, что выполняются условия 1, 2 данной теоремы. Условие 3 выполняется при $\rho > \beta r$ и функциях
$$\mu(t) = (rk_0 + w)^\beta e^{-(\rho - \beta r)t}, \quad \omega(T) = \frac{e^{-(\rho-\beta r)T}}{\rho - \beta r}(rk_0+w)^\beta.$$

Отсюда следует существование оптимального управления задачи (1.1′), (1.2′), (1.3_u) в случае, когда $\rho > \beta r$. Чтобы разрешить вопрос возможной расходимости функционала (1.1′) в случае $\rho \leq \beta r$ и уточнить понятие оптимальности, можно использовать Определение 1 обобщенного решения с $c_{T_n}(t) = u_{T_n}(t)(rk_{T_n}(t) + w)$.

Лемма 1.9. Пусть выполнены условия Теоремы 1.4, при этом $J_T(0, k_0; k_T(\cdot), u_T(\cdot))$ – оптимальное значение функционала в задаче оптимального управления с конечным временным горизонтом T, а $J(0, k_0; k_*(\cdot), u_*(\cdot))$ – оптимальное значение функционала в задаче оптимального управления с бесконечным временным горизонтом. Тогда
$$\lim_{T \to +\infty} J_T(0, k_0; k_T(\cdot), u_T(\cdot)) = J(0, k_0; k_*(\cdot), u_*(\cdot)). \tag{1.18}$$

Доказательство. Доказательство следует тому, что было изложено в работе [1, с. 14-15].

В первую очередь, заметим, что в силу условий 1, 2 Теоремы 1.4 и теоремы Филиппова (см. [41, p. 314, Theorem 9.3.i]) существует оптимальная допустимая пара $(k_T(\cdot), u_T(\cdot))$ для задачи оптимального управления на отрезке $[0, T]$.

С одной стороны, сужение оптимальной пары (k_*, u_*) на отрезок $[0, T]$ является допустимой парой для задачи на отрезке $[0, T]$, которая доставляет не большее значение функционала, чем пара (k_T, u_T), поэтому справедливо неравенство

$$\varliminf_{T\to+\infty} J_T(0, k_0; k_T(\cdot), u_T(\cdot)) \geq \varliminf_{T\to+\infty} J_T(0, k_0; k_*(\cdot), u_*(\cdot)) = J(0, k_0; k_*(\cdot), u_*(\cdot)).$$

С другой стороны, пользуясь условием 3 Теоремы 1.4, имеем

$$\int\limits_0^T e^{-\rho t} g(k_T(t), u_T(t))\, dt \leq \int\limits_0^{T'} e^{-\rho t} g(k_T(t), u_T(t))\, dt + \int\limits_{T'}^T e^{-\rho t} g(k_T(t), u_T(t))\, dt \leq$$
$$\leq J_{T'}(0, k_0; k_T(\cdot), u_T(\cdot)) + \omega(T').$$

Следуя схеме доказательства теоремы о существовании оптимального управления, изложенной в [1, с. 10-11]), можно утверждать, что найдется допустимая пара $\left(\tilde{k}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)\right)$ на $[0, +\infty)$, такая что выполняется неравенство

$$\varliminf_{k\to\infty} \int\limits_0^T e^{-\rho t} g(k_{T_k}(t), u_{T_k}(t))\, dt \leq \int\limits_0^T e^{-\rho t} g\left(\tilde{k}(t), \tilde{u}(t)\right) dt.$$

Тогда

$$\varlimsup_{T\to+\infty} \int\limits_0^T e^{-\rho t} g(k_T(t), u_T(t))\, dt \leq J_{T'}\left(0, k_0; \tilde{k}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)\right) + \omega(T').$$

Переходя к пределу при $T' \to +\infty$, получаем, что

$$J(0, k_0; k_*(\cdot), u_*(\cdot)) \leq \varliminf_{T\to+\infty} J_T(0, k_0; k_T(\cdot), u_T(\cdot)) \leq \varlimsup_{T\to+\infty} J_T(0, k_0; k_T(\cdot), u_T(\cdot)) \leq$$
$$\leq J\left(0, k_0; \tilde{k}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)\right) \leq J(0, k_0; k_*(\cdot), u_*(\cdot)),$$

откуда следует равенство (1.18).

Лемма доказана.

□

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу оптимального управления при фиксированном конечном горизонте T с функционалом

$$J_T(0, k_0; u(\cdot), k(\cdot)) = \int\limits_0^T e^{-\rho t} (u(t))^\beta (rk(t) + w)^\beta\, dt \to \max_{u(\cdot)}, \qquad (1.1'_T)$$

задачей Коши (1.2′) и ограничением (1.3_u).

Лемма 1.10. Пусть пара $(k(t), u(t))$ является решением задачи оптимального управления ($1.1'_T$), ($1.2'$), (1.3_u). Тогда существует такая абсолютно непрерывная функция $p(t)$ на отрезке $[0, T]$, что

1. оптимальное управление $u(t)$ имеет следующее представление:
$$u(t) = \begin{cases} \min\left\{\left(\dfrac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \dfrac{1}{rk(t)+w}, 1\right\}, & p(t) > 0, \\ 1, & p(t) \le 0; \end{cases} \tag{1.19}$$
2. выполняется условие трансверсальности
$$p(T) = 0;$$
3. для любых таких $t \in [0, T)$, что
$$(k(t), p(t)) \in D_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(k, p) : p(rk+w)^{1-\beta} > \beta\right\},$$
справедлива следующая система ОДУ:
$$\begin{cases} \dfrac{dk}{dt}(t) = rk(t) + w - \left(\dfrac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \\ \dfrac{dp}{dt}(t) = (\rho - r)\, p(t); \end{cases} \tag{1.20}$$
4. для любых таких $t \in [0, T]$, что
$$(k(t), p(t)) \in D_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(k, p) : p(rk+w)^{1-\beta} \le \beta\right\},$$
справедлива следующая система ОДУ:
$$\begin{cases} \dfrac{dk}{dt}(t) = 0, \\ \dfrac{dp}{dt}(t) = \rho p(t) - \dfrac{\beta r}{(rk(t)+w)^{1-\beta}}, \end{cases} \tag{1.21}$$
причем $p(t) \ge 0$, а равенство $p(t) = 0$ достигается только при $t = T$.

Доказательство. Так как начальное значение капитала неотрицательно и справедливо двойное неравенство $0 \le u \le 1$, то производная капитала неотрицательна в любой момент времени. Следовательно, капитал не убывает на всем бесконечном временном промежутке.

Для оптимальной пары $(k(\cdot), u(\cdot))$ мы используем принцип максимума Понтрягина с фиксированным конечным горизонтом T и свободным правым концом $k(T)$ для вывода решения (см. [7, с.79-80]). Функция Гамильтона-Понтрягина имеет вид
$$H(t, k, \psi, u) = e^{-\rho t}(rk+w)^{\beta} u^{\beta} + \psi(1-u)(rk+w).$$

Функция H определена корректно, поскольку $rk + w \geq 0$. Для удобства можно переопределить функцию Гамильтона-Понтрягина следующим образом: $H(t, k, \psi, u) = e^{-\rho t}\mathcal{H}(k, p, u)$. Тогда можно рассматривать текущее значение гамильтониана $\mathcal{H}(k(t), p(t), u(t))$ с сопряженной переменной $p(t) = \psi(t) e^{\rho t}$.

В силу дифференцируемости функции $\mathcal{H}$ по u можно выписать необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(k(t), p(t), u(t)) = \beta (rk(t) + w)^{\beta} (u(t))^{\beta-1} - p(t)(rk(t) + w) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u(t) = \left(\frac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{1}{rk(t) + w}.$$

Кроме того, поскольку

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}(k, p, u)}{\partial u^2} = -\beta(1-\beta)(rk + w)^{\beta} \frac{1}{u^{2-\beta}} < 0,$$

то условие экстремума также оказывается и достаточным.

Полученное из необходимого условия экстремума выражение имеет смысл при $p(t) > 0$, тогда $u(t) > 0$. В случае, если значение $u(t)$ оказывается за пределами отрезка $[0, 1]$, в качестве максимизатора нужно брать единицу. При $p(t) \leq 0$ имеем $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} > 0$, поэтому в этом случае максимум функции Гамильтона-Понтрягина достигается в точке $u = 1$. Объединяя два случая, получаем, что оптимальное управление $u(t)$ имеет представление, выражемое формулой (1.19).

Уравнение для сопряженной переменной p имеет вид

$$\frac{dp}{dt}(t) = \rho p(t) - \frac{\partial \mathcal{H}(k(t), p(t), u(t))}{\partial k} = (\rho - r) p(t) -$$
$$-\beta r (rk(t) + w)^{\beta-1} (u(t))^{\beta} + ru(t) p(t).$$

Обозначим

$$T_1 = \{t \in [0, T) : (k(t), p(t)) \in D_1\},$$
$$T_2 = \{t \in [0, T] : (k(t), p(t)) \in D_2\}.$$

Пусть $t \in T_1$. Заметим, что $T \notin T_1$, поскольку в противном случае мы получаем противоречие с неравенством $0 > \beta$. Тогда $u(t) = \left(\frac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{1}{rk(t)+w}$. Подставляя $u(t)$ в ОДУ для капитала $k(t)$ и в сопряженное уравнение, получаем систему (1.20).

Пусть теперь $t \in T_2$. Тогда $u(t) = 1$, и подстановкой полученного значения $u(t)$ в уравнения для капитала $k(t)$ и сопряженной переменной $p(t)$ можно вывести систему (1.21).

Наконец, покажем, что функция $p(t)$ неотрицательна на множестве T_2 и обращается в нуль только в момент времени $t = T$. Предположим, что это не так. Тогда в силу непрерывности функции $p(t)$ найдутся такие момент времени $\tau' \in T_2$ и число $\delta > 0$, $0 \leq \tau' < \tau' + \delta \leq T$, что для любого $t \in [\tau', \tau' + \delta]$ выполняется неравенство $p(t) \leq 0$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $p(t) < 0$, а $p(\tau' + \delta) = 0$, поскольку либо $\tau' + \delta = T$, либо же при $\tau' + \delta < T$ возможны два случая: либо траектория $(k(t), p(t))$ лежит в области D_2 вплоть до момента времени T, что сводится к предыдущему случаю, либо же траектория может перейти в область D_1, вследствие чего сопряженная переменная перед переходом в область D_1 по теореме о промежуточном значении обратится в нуль. Тогда рассмотрим в области D_2 производную функции $p(t)(rk(t) + w)^{1-\beta}$:

$$\frac{d}{dt}\Big\{p(t)(rk(t) + w)^{1-\beta}\Big\} = \frac{dp}{dt}(t)(rk(t) + w)^{1-\beta} = \left(\rho p(t) - \frac{\beta r}{(rk(t) + w)^{1-\beta}}\right)(rk(t) + w)^{1-\beta} =$$

$$= \rho p(t)(rk(t) + w)^{1-\beta} - \beta r \leq -\beta r.$$

Тогда для любого $t \in [\tau', \tau' + \delta]$ справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}\Big\{p(t)(rk(t) + w)^{1-\beta}\Big\} \leq -\beta r.$$

Проинтегрировав неравенство от τ' до $t \in [\tau', \tau' + \delta]$, получаем неравенство

$$p(t)(rk(t) + w)^{1-\beta} \leq p(\tau')(rk(\tau') + w)^{1-\beta} - \beta r(t - \tau').$$

Положив $t = \tau' + \delta$, получаем противоречие с тем, что $0 \leq p(\tau')(rk(\tau') + w)^{1-\beta} - \beta r\delta < 0$. Таким образом, мы показали, что сопряженная переменная неотрицательна на T_2 и обращается в нуль только в момент времени $t = T$.

Лемма доказана. $\square$

Определение 2. Будем говорить, что при фиксированном $i \in \{1, 2\}$ область D_i является *ловушкой* для пары $(k(\cdot), p(\cdot))$, если из существования такого момента времени t, что $(k(t), p(t)) \in D_i$, следует, что $(k(s), p(s)) \in D_i$ для любого $s > t$.

Лемма 1.11. Пусть $\rho \geq r$. Тогда экстремаль Понтрягина $(k(\cdot), p(\cdot), u(\cdot))$ устроена так, что для любого $t \in [0, T]$ $(k(t), p(t)) \in D_2$ и $u(t) = 1$.

Доказательство. Покажем, что пара $(k(t), p(t))$ лежит в области D_2 на всем отрезке $[0, T]$. Пусть это не так, и $t \in [0, T)$ – такой момент времени, что $(k(t), p(t)) \in D_1$. Изучим в области D_1 поведение функции $p(t)(rk(t) + w)^{1-\beta}$, взяв ее производную по времени:

$$\frac{d}{dt}\Big\{p(t)(rk(t) + w)^{1-\beta}\Big\} = \frac{dp}{dt}(t)(rk(t) + w)^{1-\beta} + (1 - \beta) rp(t)(rk(t) + w)^{-\beta}\frac{dk}{dt}(t) =$$

$$= (\rho - r) p(t)(rk(t) + w)^{1-\beta} + (1 - \beta) rp(t)(rk(t) + w)^{-\beta}\left(rk(t) + w - \left(\frac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right).$$

В силу неравенства $\left(\frac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} < rk\left(t\right) + w$ полученное выражение оказывается положительным, вследствие чего область D_1 оказывается ловушкой. При этом из Леммы 1.10 следует, что условие трансверсальности выполняется в области D_2, то есть, траектория $\left(k\left(t\right), p\left(t\right)\right)$ должна заканчиваться в области D_2. Возникает противоречие с тем, что траектория $\left(k\left(t\right), p\left(t\right)\right)$ заканчивается в области D_1. Таким образом, мы доказали, что траектория $\left(k\left(t\right), p\left(t\right)\right)$ лежит в области D_2 на всем отрезке $[0, T]$, откуда следует, что $u\left(t\right) = 1$ для любого $t \in [0, T]$. Лемма доказана. □

Лемма 1.12. Пусть $\rho < r$, и справедливо неравенство $T > T^* = \frac{1}{\rho}\ln\frac{r}{r-\rho}$. Тогда существует единственная экстремаль Понтрягина $\left(k\left(\cdot\right), p\left(\cdot\right), u\left(\cdot\right)\right)$, такая что $\left(k\left(t\right), p\left(t\right)\right) \in D_1$, $t \in [0, \tau]$, $\left(k\left(t\right), p\left(t\right)\right) \in D_2$, $t \in [\tau, T]$, где $\tau = T - T^*$ – такой момент времени, что $p\left(\tau\right)\left(rk\left(\tau\right) + w\right)^{1-\beta} = \beta$. При этом управление имеет вид

$$u_T\left(t\right) = \\ = \begin{cases} \dfrac{\rho - \beta r}{\left(1-\beta\right) r} \dfrac{1}{1 - \frac{r-\rho}{(1-\beta)r} e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(\tau - t)}}, & 0 \le t \le \tau, \\ 1, & \tau < t \le T. \end{cases} \tag{1.22}$$

Доказательство. Покажем, что область D_2 является ловушкой. Пусть это не так, тогда существуют такие момент времени τ_1 и число $\delta > 0$, $0 \le \tau_1 < \tau_1 + \delta < T$, что для любого $t \in [\tau_1, \tau_1 + \delta]$ $\left(k\left(t\right), p\left(t\right)\right) \in D_2$, а при $t > \tau_1 + \delta$ $\left(k\left(t\right), p\left(t\right)\right) \in D_1$.

Изучим поведение функции $p\left(t\right)\left(rk\left(t\right) + w\right)^{1-\beta}$ на отрезке $[\tau_1, \tau_1 + \delta]$, найдя ее производную:

$$\frac{d}{dt}\left\{p\left(t\right)\left(rk\left(t\right) + w\right)^{1-\beta}\right\} = \\ = \left(\rho p\left(t\right) - \frac{\beta r}{\left(rk\left(t\right) + w\right)^{1-\beta}}\right)\left(rk\left(t\right) + w\right)^{1-\beta} = \rho p\left(t\right)\left(rk\left(t\right) + w\right)^{1-\beta} - \beta r \le \beta\left(\rho - r\right) < 0.$$

Положим $t = \tau' + \delta$. Тогда найдется число $\delta_1 > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$p\left(\tau' + \delta + \delta_1\right)\left(rk\left(\tau' + \delta + \delta_1\right) + w\right)^{1-\beta} - p\left(\tau' + \delta\right)\left(rk\left(\tau' + \delta\right) + w\right)^{1-\beta} < \\ < \frac{\delta_1}{2}\frac{d}{dt}\left\{p\left(t\right)\left(rk\left(t\right) + w\right)^{1-\beta}\right\}\Big|_{t=\tau'+\delta} < 0.$$

Но тогда

$$p\left(\tau' + \delta + \delta_1\right)\left(rk\left(\tau' + \delta + \delta_1\right) + w\right)^{1-\beta} < p\left(\tau' + \delta\right)\left(rk\left(\tau' + \delta\right) + w\right)^{1-\beta} \le \beta,$$

откуда следует, что $\left(k\left(\tau' + \delta + \delta_1\right), p\left(\tau' + \delta + \delta_1\right)\right) \in D_2$. Полученное противоречие с тем, что при $t > \tau' + \delta$ $\left(k\left(t\right), p\left(t\right)\right) \in D_1$, доказывает, что область D_2 является ловушкой.

Таким образом, либо пара $(k(t), p(t))$ лежит в области D_2 на всем отрезке $[0,T]$, либо существует такой момент времени $\tau \in (0,T)$, что для любого $t \in [0,\tau)$ $(k(t), p(t)) \in D_1$, а для любого $t \in [\tau, T]$ $(k(t), p(t)) \in D_2$, причем

$$p(\tau)(rk(\tau)+w)^{1-\beta} = \beta.$$

Покажем, что при $T > T^*$ экстремаль Понтрягина, в которой пара $(k(t), p(t))$ принадлежит области D_2 на всем отрезке $[0,T]$, является недопустимой. Из системы ОДУ (1.21) следует, что

$$k(t) = k_0,$$
$$p(t) = \frac{\beta r}{\rho(rk_0+w)^{1-\beta}} + \left(p(0) - \frac{\beta r}{\rho(rk_0+w)^{1-\beta}}\right)e^{\rho t}.$$

Используя условие трансверсальности, выразим $p(0)$:

$$p(0) = \frac{\beta r}{\rho(rk_0+w)^{1-\beta}}\left(1-e^{-\rho T}\right).$$

С другой стороны, $p(0) \leq \frac{\beta}{(rk_0+w)^{1-\beta}}$, поэтому $\frac{r}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right) \leq 1$, или

$$e^{-\rho T} \geq \frac{r-\rho}{r},$$

откуда следует, что

$$T \leq \frac{1}{\rho}\ln\left\{\frac{r}{r-\rho}\right\} = T^*,$$

что противоречит неравенству $T > T^*$. Следовательно, рассмотренная экстремаль Понтрягина является недопустимой.

Таким образом, единственно допустимой экстремалью Понтрягина оказывается тройка $(k(\cdot), p(\cdot), u(\cdot))$, в которой пара $(k(\cdot), p(\cdot))$ в некоторый момент времени $\tau > 0$ осуществляет переход из области D_1 в область D_2. Покажем, что разность $T-\tau$ является ограниченной. Пусть $(k(t), p(t)) \in D_2$. Из системы ОДУ (1.21) следует, что

$$k(t) = k(\tau),$$
$$p(t) = \frac{\beta r}{\rho(rk(\tau)+w)^{1-\beta}} + \left(p(\tau) - \frac{\beta r}{\rho(rk(\tau)+w)^{1-\beta}}\right)e^{\rho(t-\tau)}.$$

Из условия трансверсальности следует, что $p(\tau) = \frac{\beta r}{\rho(rk(\tau)+w)^{1-\beta}}\left(1-e^{-\rho(T-\tau)}\right)$. Поскольку $p(\tau) = \frac{\beta}{(rk(\tau)+w)^{1-\beta}}$, имеем

$$\frac{r}{\rho}\left(1-e^{-\rho(T-\tau)}\right) = 1,$$

откуда следует, что

$$T-\tau = \frac{1}{\rho}\ln\left\{\frac{r}{r-\rho}\right\} = T^*.$$

Выведем теперь управление, разрешив краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dk}{dt}(t) = rk + w - \left(\dfrac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \\ k(0) = k_0, \\ \dfrac{dp}{dt}(t) = (\rho - r)\, p(t), \\ p(\tau)\,(rk(\tau) + w)^{1-\beta} = \beta. \end{cases}$$

Из уравнения на сопряженную переменную следует, что $p(t) = p(0)\, e^{(\rho-r)t}$. Подставляя функцию $p(t)$ в правую часть ОДУ для капитала, находим, в свою очередь, его решение:

$$k(t) = k_0 e^{rt} + \frac{w}{r}\left(e^{rt} - 1\right) - \left(\frac{\beta}{p(0)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{1-\beta}{\beta r - \rho} e^{rt}\left(e^{\frac{\beta r - \rho}{1-\beta}t} - 1\right). \tag{1.23}$$

Тогда из условия $p(\tau)\,(rk(\tau) + w)^{1-\beta} = \beta$ можно вывести уравнение относительно значения $p(0)$:

$$p(0)\, e^{(\rho-r)\tau}\cdot$$

$$\cdot\left[(rk_0 + w)\, e^{r\tau} - \left(\frac{\beta}{p(0)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{(1-\beta)\, r}{\beta r - \rho}\left(e^{\frac{r-\rho}{1-\beta}\tau} - e^{r\tau}\right)\right]^{1-\beta} = \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\beta}{p(0)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} = \frac{\rho - \beta r}{(1-\beta)\, r}(rk_0 + w)\cdot \frac{1}{1 - \dfrac{r-\rho}{(1-\beta)\, r} e^{\frac{\beta r - \rho}{1-\beta}\tau}}.$$

Следовательно,

$$u_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{rk(t) + w}\dfrac{\rho - \beta r}{1-\beta}\left(k_0 + \dfrac{w}{r}\right)\dfrac{e^{\frac{r-\rho}{1-\beta}t}}{1 - \frac{r-\rho}{(1-\beta)r} e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau}}, & 0 \le t \le \tau, \\ 1, & \tau < t \le T, \end{cases}$$

или, подставляя формулу (1.23) для динамики капитала, имеем

$$u_T(t) = \begin{cases} \dfrac{\rho - \beta r}{(1-\beta)\, r}\dfrac{1}{1 - \frac{r-\rho}{(1-\beta)r} e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(\tau - t)}}, & 0 \le t \le \tau, \\ 1, & \tau < t \le T. \end{cases}$$

Лемма доказана.

$\square$

Доказательство Теоремы 1.3. Мы получили в двух случаях по соотношению параметров ρ и r единственную экстремаль Понтрягина, являющуюся решением задачи оптимального управления с конечным горизонтом T в силу условий 1, 2 Теоремы 1.4 и теоремы Филиппова [41, p.314, Theorem 9.3.i]. Переходя к пределу при $T \to +\infty$, мы получаем экстремаль

Понтрягина на бесконечном горизонте времени, которая оказывается искомым обобщенным решением, причем в силу Леммы 1.9 и Теоремы 1.4 данная экстремаль оказывается решением при $\rho > \beta r$ в классическом смысле.

1. $\rho \leq r$. При данном соотношении параметров мы получили по Лемме 1.12, что $T - \tau \leq T^*$. Следовательно, $\tau^* \xrightarrow[T \to +\infty]{} +\infty$. Переходя к пределу при $T \to +\infty$, имеем

$$u(k_0) = \frac{\rho - \beta r}{(1-\beta) r}.$$

2. $\rho \geq r$. По Лемме 1.11 управление равно единице на всем отрезке $[0, T]$, поэтому в пределе при $T \to +\infty$ мы имеем $u(k_0) = 1$.

Таким образом, для управления получаем формулу (1.17).

Теорема доказана.

□

1.2.4. Случай с ограниченной ликвидностью капитала

В этом разделе мы также полагаем начальный момент времени равным нулю, а вместо переменной s используется переменная t.

Так же, как и в предыдущем пункте, нам будет удобно переформулировать постановку задачи. Для начала докажем следующую лемму.

Лемма 1.13. Пусть $k_0 \geq 0$. Тогда для любого момента времени $t \in [0, +\infty)$ в модели с ограниченной ликвидностью капитала (1.1), (1.2), (1.3″) справедливо неравенство

$$k(t) \geq 0.$$

Доказательство. В силу правой части неравенства (1.3″) имеем

$$\frac{dk}{dt}(t) = rk(t) + w - c(t) \geq -\left(\frac{1}{\theta} - r\right) k(t).$$

Тогда в силу леммы Гроноулла-Беллмана справедлива оценка

$$k(t) \geq k_0 e^{-\left(\frac{1}{\theta} - r\right)t} \geq 0,$$

что и требовалось доказать. □

Используя результат Леммы 1.13 и неравенство (1.3″), мы можем представить потребительские расходы в виде

$$c(t) = u(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right),$$

где $u(t)$ – доля потребительских расходов, удовлетворяющая ограничению (1.3_u).

Тогда задачу оптимального управления (1.1), (1.2), (1.3″) переформулируем следующим образом:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\rho t} (u(t))^\beta \left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^\beta dt \to \max_{u(\cdot)}, \tag{1.1″}$$

$$\frac{dk}{dt}(t) = rk(t) + w - u(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right),\ k(0) = k_0, \tag{1.2″}$$

$$0 \le u(t) \le 1. \tag{1.3_u}$$

Теорема 1.5. Пусть $\rho > \beta r$. Тогда решение задачи оптимального управления на бесконечном горизонте (1.1″), (1.2″), (1.3_u) дается следующим позиционным управлением:

$$u(k,\rho) = \min\left\{ s(\rho,\tau)\frac{k + w\eta(\tau)}{\frac{k}{\theta} + w}, 1\right\}, \tag{1.24}$$

где функции $s(\cdot,\cdot)$ и $\eta(\cdot)$ определены как

$$s(\rho,\tau) \equiv s[\rho,\tau\,|\beta,\theta,r] = \frac{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}}{1 - \left(1 - \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\theta\right) e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau}}, \tag{1.25}$$

$$\eta(\tau) \equiv \eta[\tau\,|\theta,r] = \frac{1-e^{-r\tau}}{r} + \theta e^{-r\tau} \tag{1.26}$$

соответственно, а функция $\tau \equiv \tau(k,r,w,\rho,\beta,\theta)$ равна $+\infty$, если $\rho \le r$, нулю, если $\rho \ge \beta r + \frac{1-\beta}{\theta} > r$, и функции $\tau^*(k,r,w,\rho,\beta,\theta)$, выражаемой в терминах решений уравнений

$$s(\rho,\tau^*)(k_0 + w\eta(\tau^*))e^{-\frac{\rho-r}{1-\beta}\tau^*} = \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\frac{\left(k_0 + \frac{w}{r}\right)e^{r\tau^*} + w\theta - \frac{w}{r}}{e^{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau^*} - 1 + \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\theta} = \frac{w}{1-q^*}, \tag{1.27}$$

$$I_\infty(q^*) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)u}}{\left(1 - q^*\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\theta} - r\right)u}\right)\right)^{1-\beta}} du = \theta, \tag{1.28}$$

если $r < \rho < \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}$.

Замечание 6. В терминах задачи оптимального управления (1.1), (1.2), (1.3″) программа потребительских расходов имеет вид

$$c_4(k,\rho) = u(k,\rho)\left(\frac{k}{\theta} + w\right).$$

Замечание 7. Для нашей задачи (1.1″), (1.2″), (1.3_u) можно показать, что выполнены условия теоремы 1.4. Положив $p \in (0, w\theta)$, а также

$$g(k,u) = u^\beta\left(\frac{k}{\theta} + w\right)^\beta, \quad f(k,u) = rk + w - u\left(\frac{k}{\theta} + w\right), \quad G = (-p, +\infty), \quad U = [0,1],$$

а также $C_0 = r + \frac{w}{2}$, можно проверить, что выполнены условия 1 и 2. Условие 3 Теоремы 1.4 выполняется при $\rho > \beta r$ и функциях

$$\mu(t) = e^{-(\rho-\beta r)t}\left(\frac{k_0}{\theta} + \frac{w}{\theta r}\left(1 - e^{-rt}\right) + we^{-rt}\right)^{\beta}, \quad \omega(T) = \frac{e^{-(\rho-\beta r)T}}{\rho - \beta r}\left(\frac{k_0}{\theta} + \frac{w}{\theta r}\right)^{\beta}.$$

откуда следует существование оптимального управления задачи (1.1″), (1.2″), (1.3_u) в случае, когда $\rho > \beta r$. Чтобы разрешить вопрос возможной расходимости функционала (1.1″) в случае $\rho \le \beta r$ и уточнить понятие оптимальности, можно использовать Определение 1 обобщенного решения с $c_{T_n}(t) = u_{T_n}(t)\left(\frac{k_{T_n}(t)}{\theta} + w\right)$.

Здесь рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления при фиксированном конечном горизонте T с функционалом

$$J(0, k_0; k(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T e^{-\rho t}(u(t))^{\beta}\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{\beta} dt \to \max_{u(\cdot)}, \tag{$1.1''_T$}$$

задачей Коши (1.2″) и ограничением (1.3_u).

Лемма 1.14. Пусть пара $(k(t), u(t))$ является решением задачи оптимального управления ($1.1''_T$), (1.2″), (1.3_u). Тогда существует такая абсолютно непрерывная функция $p(t)$ на отрезке $[0, T]$, что

1. оптимальное управление $u(t)$ имеет следующее представление:

$$u(t) = \begin{cases} \min\left\{\left(\dfrac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \dfrac{1}{\frac{k(t)}{\theta} + w}, 1\right\}, p(t) > 0, \\ 1, p(t) \le 0; \end{cases} \tag{1.29}$$

2. выполняется условие трансверсальности

$$p(T) = 0;$$

3. для любых таких $t \in [0, T)$, что

$$(k(t), p(t)) \in D_1 \overset{\text{def}}{=} \left\{(k, p) : p\left(\frac{k}{\theta} + w\right)^{1-\beta} > \beta\right\},$$

справедлива следующая система ОДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{dk}{dt}(t) = rk(t) + w - \left(\dfrac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \\ \dfrac{dp}{dt}(t) = (\rho - r)p(t); \end{cases} \tag{1.30}$$

4. для любых таких $t \in [0, T]$, что
$$(k(t), p(t)) \in D_2 \overset{\text{def}}{=} \left\{ (k,p) : p\left(\frac{k}{\theta} + w\right)^{1-\beta} \leq \beta \right\},$$
справедлива следующая система ОДУ:
$$\begin{cases} \dfrac{dk}{dt}(t) = -\left(\dfrac{1}{\theta} - r\right) k(t), \\ \dfrac{dp}{dt}(t) = \left(\rho - r + \dfrac{1}{\theta}\right) p(t) - \dfrac{\beta}{\theta} \dfrac{1}{\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta}}, \end{cases} \tag{1.31}$$
причем $p(t) \geq 0$, а равенство $p(t) = 0$ достигается только при $t = T$.

Доказательство. Пара (k, u) удовлетворяет необходимому условию оптимальности, а именно принципу максимума Понтрягина с фиксированным моментом времени T и свободным правым концом $k(T)$ [7, с.79-80]. Функция Гамильтона-Понтрягина имеет вид
$$H(t,k,\psi,u) = e^{-\rho t}\left[\frac{k}{\theta} + w\right]^{\beta} u^{\beta} + \psi\left[\left(r - \frac{u}{\theta}\right)k + (1-u)w\right].$$
В силу Леммы 1.13 $\frac{k}{\theta} + w \geq w > 0$, поэтому функция H определена корректно. Кроме того, мы переопределяем функцию Гамильтона-Понтрягина как $H(t,k,\psi,u) = e^{-\rho t}\mathcal{H}(k,p,u)$, что позволяет рассматривать текущее значение гамильтониана $\mathcal{H}(k(t), p(t), u(t))$ с сопряженной переменной $p(t) = \psi(t)e^{\rho t}$.

Так как функция $\mathcal{H}$ дифференцируема по u, мы можем применить необходимое условие экстремума:
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(k(t), p(t), u(t)) = \beta\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{\beta}(u(t))^{\beta-1} - p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u(t) = \left(\frac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{1}{\frac{k(t)}{\theta} + w}.$$
Полученное выражение имеет смысл при $p(t) > 0$, поэтому $u(t) > 0$. В случае, если значение $u(t)$ оказывается вне отрезка $[0,1]$, в качестве максимизатора нужно брать единицу. Заметим также, что необходимое условие экстремума оказывается достаточным, поскольку
$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2}(k,p,u) = -\beta(1-\beta)\left[\frac{k}{\theta} + w\right]^{\beta} \frac{1}{u^{2-\beta}} < 0.$$

При $p(t) \leq 0$ мы имеем $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} > 0$, поэтому максимум функции Гамильтона-Понтрягина по u достигается в точке $u = 1$. Таким образом, оптимальное управление $u(t)$ имеет представление, определяемое формулой (1.29).

В силу перехода к текущему значению гамильтониана сопряженное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{dp}{dt}(t) = \rho p(t) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k}(k(t), p(t), u(t)) = (\rho - r) p(t) - \frac{\beta}{\theta} \frac{(u(t))^{\beta}}{\left[\frac{k(t)}{\theta} + w\right]^{1-\beta}} + \frac{u(t)}{\theta} p(t).$$

Обозначим

$$T_1 = \{t \in [0, T) : (k(t), p(t)) \in D_1\},$$

$$T_2 = \{t \in [0, T] : (k(t), p(t)) \in D_2\}.$$

Пусть $t \in T_1$. Заметим, что $T \notin T_1$, поскольку в противном случае мы получаем противоречие с неравенством $0 > \beta$. Тогда $u(t) = \left(\frac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{1}{\frac{k(t)}{\theta}+w}$. Подставляя $u(t)$ в ОДУ для капитала $k(t)$ и в сопряженное уравнение, получаем систему (1.30).

Пусть теперь $t \in T_2$. Тогда $u(t) = 1$, и подстановкой полученного значения $u(t)$ в уравнения для капитала $k(t)$ и сопряженной переменной $p(t)$ можно вывести систему (1.31).

Наконец, покажем, что функция $p(t)$ неотрицательна на множестве T_2 и обращается в нуль только в момент времени $t = T$. Предположим, что это не так. Тогда в силу непрерывности функции $p(t)$ найдутся такие момент времени $\tau' \in T_2$ и число $\delta > 0$, $0 \leq \tau' < \tau' + \delta \leq T$, что для любого $t \in [\tau', \tau' + \delta]$ выполняется неравенство $p(t) \leq 0$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $p(t) < 0$, а $p(\tau' + \delta) = 0$, поскольку либо $\tau' + \delta = T$, либо же при $\tau' + \delta < T$ возможны два случая: либо траектория $(k(t), p(t))$ лежит в области D_2 вплоть до момента времени T, что сводится к предыдущему случаю, либо же траектория может перейти в область D_1, вследствие чего сопряженная переменная перед переходом в обалсть D_1 по теореме о промежуточном значении обратится в нуль. Тогда рассмотрим производную функции $p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta}$:

$$\frac{d}{dt}\left\{p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta}\right\} = \frac{dp}{dt}(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta} + \frac{1-\beta}{\theta} p(t) \left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{-\beta} \frac{dk}{dt}(t) =$$
$$= \left(\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right) p(t) - \frac{\beta}{\theta} \frac{1}{\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta}}\right) \left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta} -$$
$$- \frac{1-\beta}{\theta} p(t) \left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{-\beta} \left(\frac{1}{\theta} - r\right) k(t) =$$
$$= p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta}\left(\rho - r + \frac{1}{\theta} - (1-\beta)\left(\frac{1}{\theta} - r\right)\frac{k(t)}{k(t) + w\theta}\right) - \frac{\beta}{\theta}. \tag{1.32}$$

В силу Леммы 1.13 справедливо двойное неравенство $0 \leq \frac{k(t)}{k(t)+w\theta} < 1$. Пользуясь правой частью этого неравенства, получаем, что

$$\rho - r + \frac{1}{\theta} - (1-\beta)\left(\frac{1}{\theta} - r\right)\frac{k(t)}{k(t) + w\theta} > \rho - r + \frac{1}{\theta} - (1-\beta)\left(\frac{1}{\theta} - r\right) = \rho + \beta\left(\frac{1}{\theta} - r\right) > 0.$$

Тогда, пользуясь выведенной формулой (1.32), можем вывести для любого $t \in [\tau', \tau' + \delta]$ неравенство

$$\frac{d}{dt}\left\{p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta}\right\} \leq -\frac{\beta}{\theta}.$$

Проинтегрировав неравенство от τ' до $t \in [\tau', \tau' + \delta]$, получаем неравенство

$$p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta} \leq p(\tau')\left(\frac{k(\tau')}{\theta} + w\right)^{1-\beta} - \frac{\beta}{\theta}(t - \tau').$$

Положив $t = \tau' + \delta$, получаем противоречие с тем, что $0 \leq p(\tau')\left(\frac{k(\tau')}{\theta} + w\right)^{1-\beta} - \frac{\beta}{\theta}\delta < 0$. Таким образом, мы показали, что сопряженная переменная неотрицательна на T_2 и обращается в нуль только в момент времени $t = T$.

Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.15. Справедливы следующие утверждения:

- Интеграл

$$I_T(q) = \int\limits_0^T \frac{e^{-\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)u}}{\left(1 - q\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\theta} - r\right)u}\right)\right)^{1-\beta}}\, du, (T, q) \in [0, +\infty) \times [0, 1], \qquad (1.33)$$

строго возрастает по T на $[0, +\infty)$ при каждом фиксированном $q \in [0, 1]$, строго возрастает по q на отрезке $[0, 1]$ при каждом фиксированном $T \in (0, +\infty)$. Кроме того, существует предел

$$\lim_{T \to +\infty} I_T(q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)u}}{\left(1 - q\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\theta} - r\right)u}\right)\right)^{1-\beta}}\, du \equiv I_\infty(q),$$

а функция $I_\infty(q)$ строго возрастает по q на отрезке $[0, 1]$;

- Уравнение

$$I_T(q) = \theta$$

имеет единственное решение тогда и только тогда, когда справедливо двойное неравенство

$$T^{**} = \frac{1}{\rho + \beta\left(\frac{1}{\theta} - r\right)} \ln\left(\frac{1}{\theta\left(\frac{1-\beta}{\theta} + \beta r - \rho\right)}\right) < T < T^*,$$

где
$$T^* = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho - r + \frac{1}{\theta}} \ln\left(\dfrac{1}{\theta\,(r-\rho)}\right), & \rho < r, \\ +\infty, & \rho \geq r, \end{cases}$$

а функция $q\,(T, \theta \mid \beta, r, \rho)$, определяемая как решение уравнения, убывает по T.

Доказательство. Найдем при любых $q \in [0,1]\,, u \in [0, +\infty)$ для функции

$$i\,(u,q) = \frac{e^{-\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)u}}{\left(1 - q\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\theta} - r\right)u}\right)\right)^{1-\beta}}$$

частную производную по q:

$$\frac{\partial i}{\partial q}\,(u,q) = (1-\beta)\,\frac{e^{-\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)u}\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\theta} - r\right)u}\right)}{\left(1 - q\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\theta} - r\right)u}\right)\right)^{2-\beta}}.$$

Так как $\frac{\partial i}{\partial q}\,(u,q)$ положительна для любых $(u,q) \in [0,+\infty) \times [0,1]$, то функция $i\,(u,q)$ строго возрастает по q при фиксированном $u \geq 0$. Следовательно, $I_T\,(q)$ строго возрастает по q, а для функции $i\,(u,q)$ справедливо двойное неравенство

$$0 < i\,(u,0) = e^{-\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)u} \leq i\,(u,q) \leq i\,(u,1) = e^{-\left(\rho + \beta\left(\frac{1}{\theta} - r\right)\right)u}. \tag{1.34}$$

Из левой части двойного неравенства (1.34) следует, что в силу положительности подынтегральной функции для любых T', T'' таких, что $T' > T''$, справедливо неравенство $I_{T'}\,(q) > I_{T''}\,(q)$, то есть, интеграл $I_T\,(q)$ строго возрастает по T при каждом фиксированном $q \in [0,1]$. Проинтегрировав двойное неравенство (1.34) от 0 до T, получим двойное неравенство

$$\frac{1 - e^{-\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)T}}{\rho - r + \frac{1}{\theta}} \leq I_T\,(q) \leq \frac{1 - e^{-\left(\rho + \beta\left(\frac{1}{\theta} - r\right)\right)T}}{\rho + \beta\left(\frac{1}{\theta} - r\right)} < \frac{1}{\rho + \beta\left(\frac{1}{\theta} - r\right)}, \tag{1.35}$$

из правой части которого следует, что функция $I_T\,(q)$ ограничена сверху, поэтому по теореме о монотонной сходимости существует предел $I_\infty\,(q) = \lim\limits_{T \to +\infty} I_T\,(q)$.

Рассмотрим теперь уравнение $I_T\,(q) = \theta$. В силу строгого возрастания функции $I_T\,(q)$ по q и теоремы о прохождении непрерывной функции через промежуточное значение можно заключить, что для каждого T существует единственное $q \in [0,1]$, такое что выполняется равенство $I_T\,(q) = \theta$, в том и только в том случае, когда справедливо двойное неравенство вида

$$\frac{1 - e^{-\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)T}}{\rho - r + \frac{1}{\theta}} \leq \theta \leq \frac{1 - e^{-\left(\rho + \beta\left(\frac{1}{\theta} - r\right)\right)T}}{\rho + \beta\left(\frac{1}{\theta} - r\right)} < \frac{1}{\rho + \beta\left(\frac{1}{\theta} - r\right)}.$$

Легко проверить, что левая и правая части этого двойного неравенства выполняются для любых T, таких что $T^{**} < T < T^*$.

Покажем теперь, что функция $q(T,\theta \mid \beta,r,\rho)$ убывает по T. Для этого достаточно взять любые такие T', T'', что $T' > T''$, и рассмотреть уравнение $I_T(q) = \theta$ при $T = T'$ и $T = T''$:

$$I_{T''}(q_{T''}) = \theta = I_{T'}(q_{T'}) = I_{T''}(q_{T'}) + \int\limits_{T''}^{T'} i(u, q_{T'})\,du > I_{T''}(q_{T'}).$$

В силу строгого возрастания I_T по q получаем, что $q(T',\theta \mid \beta,r,\rho) < q(T'',\theta \mid \beta,r,\rho)$.

Лемма доказана. □

Как и в предыдущем разделе, мы здесь используем Определение 2 ловушки для области $D_i, i \in \{1,2\}$.

Лемма 1.16. Пусть $\rho \geq \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}$. Тогда экстремаль Понтрягина $(k(\cdot), p(\cdot), u(\cdot))$ устроена так, что для любого $t \in [0,T]$ $(k(t), p(t)) \in D_2$ и $u(t) = 1$.

Доказательство. Покажем, что пара $(k(t), p(t))$ лежит в области D_2 на всем отрезке $[0,T]$. Пусть это не так, и $t \in [0,T)$ – такой момент времени, что $(k(t), p(t)) \in D_1$. Изучим в области D_1 поведение функции $p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta}$, взяв ее производную по времени:

$$\frac{d}{dt}\left\{p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta}\right\} = \frac{dp}{dt}(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta} + \frac{1-\beta}{\theta}p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{-\beta}\frac{dk}{dt}(t) =$$

$$= (\rho - r)\,p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta} + \frac{1-\beta}{\theta}p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{-\beta}\left(rk(t) + w - \left(\frac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right) =$$

$$= p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{-\beta}\left((\rho - r)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right) + \frac{1-\beta}{\theta}\left(rk(t) + w - \left(\frac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right)\right) =$$

$$= p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{-\beta}\cdot\left(\frac{\rho - \beta r}{\theta}k(t) + \left(\rho - r + \frac{1-\beta}{\theta}\right)w - \frac{1-\beta}{\theta}\left(\frac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right).$$

Обозначим

$$g(t) = \frac{\rho - \beta r}{\theta}k(t) + \left(\rho - r + \frac{1-\beta}{\theta}\right)w - \frac{1-\beta}{\theta}\left(\frac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Так как выполняется неравенство $\left(\frac{\beta}{p(t)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} < \frac{k(t)}{\theta} + w$, для функции $g(t)$ справедливо неравенство

$$g(t) > \frac{\rho - \beta r}{\theta}k(t) + \left(\rho - r + \frac{1-\beta}{\theta}\right)w - \frac{1-\beta}{\theta}\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right) =$$
$$= \left(\rho - \beta r - \frac{1-\beta}{\theta}\right)\frac{k(t)}{\theta} + (\rho - r)\,w.$$

Функция $g_-(t) = \left(\rho - \beta r - \frac{1-\beta}{\theta}\right)\dfrac{k(t)}{\theta} + (\rho - r)\,w$ положительна, так как в силу неравенства $\frac{1}{\theta} > r$ из неравенства $\rho \geq \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}$ следует неравенство $\rho > r$. Но тогда

$$\frac{d}{dt}\left\{p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta}\right\} > p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{-\beta}g_-(t) > 0,$$

откуда следует, что область D_1 является ловушкой. В то же время из Леммы 1.14 следует, что условие трансверсальности выполняется в области D_2, то есть, траектория $(k(t), p(t))$ должна заканчиваться в области D_2. Получаем противоречие с тем, что траектория $(k(t), p(t))$ заканчивается в области D_1. Следовательно, траектория $(k(t), p(t))$ лежит в области D_2 на всем отрезке $[0, T]$, откуда следует, что $u(t) = 1$ для любого $t \in [0, T]$. Лемма доказана. □

Лемма 1.17. Пусть $\rho < r$, и справедливо неравенство $T > T^* = \frac{1}{\rho - r + \frac{1}{\theta}} \ln \frac{1}{\theta(r-\rho)}$. Тогда существует единственная экстремаль Понтрягина $(k(\cdot), p(\cdot), u(\cdot))$, такая что $(k(t), p(t)) \in D_1$, $t \in [0, \tau]$, $(k(t), p(t)) \in D_2$, $t \in [\tau, T]$, где τ – такой момент времени, что $T - \tau < T^*$.

Доказательство. Для начала покажем, что область D_2 является ловушкой. Пусть это не так, тогда существуют такие момент времени τ_1 и число $\delta > 0$, $0 \le \tau_1 < \tau_1 + \delta < T$, что для любого $t \in [\tau_1, \tau_1 + \delta]$ $(k(t), p(t)) \in D_2$, а при $t > \tau_1 + \delta$ $(k(t), p(t)) \in D_1$.

Изучим поведение функции $p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta}$ на отрезке $[\tau_1, \tau_1 + \delta]$, воспользовавшись формулой (1.32) для производной:

$$\frac{d}{dt}\left\{p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta}\right\} =$$

$$= p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta}\left(\rho - r + \frac{1}{\theta} - (1-\beta)\left(\frac{1}{\theta} - r\right)\frac{k(t)}{k(t) + w\theta}\right) - \frac{\beta}{\theta} =$$

$$= \underbrace{p(t)}_{\substack{>0 \\ (\text{Л. } 1.14)}} \underbrace{\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta}}_{\substack{\ge w \\ (\text{Л. } 1.13)}} \left(\underbrace{\rho - r}_{<0} - \underbrace{(1-\beta)\left(\frac{1}{\theta} - r\right)\frac{k(t)}{k(t) + w\theta}}_{\substack{\ge 0 \\ (\text{Л. } 1.13)}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\theta}\underbrace{\left(p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta} - \beta\right)}_{\le 0} < 0.$$

Положим $t = \tau' + \delta$. Тогда найдется число $\delta_1 > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$p(\tau' + \delta + \delta_1)\left(\frac{k(\tau' + \delta + \delta_1)}{\theta} + w\right)^{1-\beta} - p(\tau' + \delta)\left(\frac{k(\tau' + \delta)}{\theta} + w\right)^{1-\beta} <$$

$$< \frac{\delta_1}{2}\frac{d}{dt}\left\{p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta} + w\right)^{1-\beta}\right\}\Bigg|_{t = \tau' + \delta} < 0.$$

Но тогда

$$p(\tau' + \delta + \delta_1)\left(\frac{k(\tau' + \delta + \delta_1)}{\theta} + w\right)^{1-\beta} < p(\tau' + \delta)\left(\frac{k(\tau' + \delta)}{\theta} + w\right)^{1-\beta} \le \beta,$$

откуда следует, что $(k(\tau' + \delta + \delta_1), p(\tau' + \delta + \delta_1)) \in D_2$. Полученное противоречие с тем, что при $t > \tau' + \delta$ $(k(t), p(t)) \in D_1$, доказывает, что область D_2 является ловушкой.

Таким образом, либо пара $(k(t), p(t))$ лежит в области D_2 на всем отрезке $[0,T]$, либо существует такой момент времени $\tau \in (0,T)$, что для любого $t \in [0,\tau)$ $(k(t), p(t)) \in D_1$, а для любого $t \in [\tau, T]$ $(k(t), p(t)) \in D_2$, причем

$$p(\tau)\left(\frac{k(\tau)}{\theta} + w\right)^{1-\beta} = \beta.$$

Покажем, что при $T > T^*$ экстремаль Понтрягина, в которой пара $(k(t), p(t))$ принадлежит области D_2 на всем отрезке $[0,T]$, является недопустимой. Из системы ОДУ (1.31) следует, что

$$k(t) = k_0 e^{-\left(\frac{1}{\theta}-r\right)t},$$
$$p(t) = \left(p(0) - \frac{\beta}{\theta} I(t,0)\right) e^{\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)t},$$

где

$$I(t,\tau) = \int\limits_0^{t-\tau} \frac{e^{-\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)u}}{\left[w + \frac{k(\tau)}{\theta} e^{-\left(\frac{1}{\theta}-r\right)u}\right]^{1-\beta}}\, du.$$

Из условия трансверсальности следует, что $p(0) = \frac{\beta}{\theta} I(T,0)$. С другой стороны, $p(0) \leq \frac{\beta}{\left(\frac{k_0}{\theta}+w\right)^{1-\beta}}$, поэтому $\left(\frac{k_0}{\theta} + w\right)^{1-\beta} I(T,0) \leq \theta$, или

$$I_T\left(\frac{k_0}{k_0 + w\theta}\right) = \int\limits_0^{T} \frac{e^{-\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)u}}{\left(1 - \frac{k_0}{k_0 + w\theta}\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\theta}-r\right)u}\right)\right)^{1-\beta}}\, du \leq \theta.$$

Заметим, что $I_T(0) = \int\limits_0^T e^{-\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)u}\, du = \frac{1 - e^{-\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)T}}{\rho - r + \frac{1}{\theta}}$. Так как по Лемме 1.15 $I_{T'}(q) > I_{T''}(q)$ для любых T', T'' таких, что $T' > T'' > 0$, $q \in [0,1]$, то $I_T(0) > I_{T^*}(0)$. Но тогда

$$I_{T^*}(0) = \frac{1 - e^{-\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)T^*}}{\rho - r + \frac{1}{\theta}} = \frac{1 - \theta(r - \rho)}{\rho - r + \frac{1}{\theta}} = \theta.$$

Поскольку при каждом $T > 0$ функция $I_T(q)$ строго возрастает по q, имеем, что

$$\theta \geq I_T\left(\frac{k_0}{k_0 + w\theta}\right) \geq I_T(0) > I_{T^*}(0) = \theta.$$

Получаем противоречие. Следовательно, рассмотренная экстремаль Понтрягина является недопустимой.

Таким образом, мы показали, что единственной экстремалью Понтрягина является тройка $(k(\cdot), p(\cdot), u(\cdot))$, в которой пара $(k(\cdot), p(\cdot))$ в некоторый момент времени τ осуществляет переход из области D_1 в область D_2. Нам достаточно показать, что разность $T - \tau$ является ограниченной. Пусть $(k(t), p(t)) \in D_2$. Из системы ОДУ (1.31) следует, что

$$k(t) = k_0 e^{-\left(\frac{1}{\theta}-r\right)(t-\tau)},$$
$$p(t) = \left(p(\tau) - \frac{\beta}{\theta} I(t,\tau)\right) e^{\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)(t-\tau)},$$

где

$$I(t,\tau)=\int\limits_0^{t-\tau}\frac{e^{-\left(\rho-r+\frac{1}{\theta}\right)u}}{\left(w+\frac{k(\tau)}{\theta}e^{-\left(\frac{1}{\theta}-r\right)u}\right)^{1-\beta}}\,du.$$

Из условия трансверсальности следует, что $p(\tau)=\frac{\beta}{\theta}I(T,\tau)$. С другой стороны, $p(\tau)=\frac{\beta}{\left(\frac{k(\tau)}{\theta}+w\right)^{1-\beta}}$, тогда имеем

$$\frac{\beta}{\left(\frac{k(\tau)}{\theta}+w\right)^{1-\beta}}=p(\tau)=\frac{\beta}{\theta}I(T,\tau)=\frac{\beta}{\theta}\int\limits_0^{T-\tau}\frac{e^{-\left(\rho-r+\frac{1}{\theta}\right)u}}{\left(w+\frac{k(\tau)}{\theta}e^{-\left(\frac{1}{\theta}-r\right)u}\right)^{1-\beta}}\,du\geq$$
$$\geq\frac{\beta}{\theta}\int\limits_0^{T-\tau}\frac{e^{-\left(\rho-r+\frac{1}{\theta}\right)u}}{\left(w+\frac{k(\tau)}{\theta}\right)^{1-\beta}}\,du=\frac{\beta}{\theta\left(\frac{k(\tau)}{\theta}+w\right)^{1-\beta}}\int\limits_0^{T-\tau}e^{-\left(\rho-r+\frac{1}{\theta}\right)u}\,du=$$
$$=\frac{\beta}{\theta\left(\frac{k(\tau)}{\theta}+w\right)^{1-\beta}}\frac{1-e^{-\left(\rho-r+\frac{1}{\theta}\right)(T-\tau)}}{\rho-r+\frac{1}{\theta}}.$$

Следовательно, получаем неравенство

$$\frac{1-e^{-\left(\rho-r+\frac{1}{\theta}\right)(T-\tau)}}{\rho-r+\frac{1}{\theta}}\leq\theta,$$

из которого следует, что

$$T-\tau\leq\frac{1}{\rho-r+\frac{1}{\theta}}\ln\left\{\frac{1}{\theta(r-\rho)}\right\}=T^{*}.$$

Лемма доказана.

□

Лемма 1.18. Пусть экстремаль Понтрягина устроена так, что пара $(k(\cdot),p(\cdot))$ осуществляет в момент времени $\tau\in(0,T)$ единственный переход из области D_1 в область D_2. Тогда

$$\left(\frac{\beta}{p(0)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}=\frac{\frac{1}{\theta}\left(k_0+\frac{w}{r}\right)+w\left(1-\frac{1}{\theta r}\right)e^{-r\tau}}{\frac{1}{\theta}\frac{1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau}}{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}}+e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau}},\tag{1.36}$$

а значение капитала в момент перехода равно

$$k(\tau)=\theta\left(\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\frac{\left(k_0+\frac{w}{r}\right)e^{r\tau}+w\theta-\frac{w}{r}}{e^{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau}-1+\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\theta}-w\right)\equiv\kappa(\tau).\tag{1.37}$$

Если при этом либо $\rho=r$ и $k_0>0$, либо $r<\rho<\beta r+\frac{1-\beta}{\theta}$, то функция $\kappa(\tau)$ строго убывает по τ.

Доказательство. Пусть $(k(t), p(t)) \in D_1$. Из системы ОДУ (1.30) можно найти следующие формулы для сопряженной переменной и капитала:

$$p(t) = p(0)\, e^{(\rho - r)t},$$

$$k(t) = k_0 e^{rt} + \frac{w}{r}\left(e^{rt} - 1\right) - \left(\frac{\beta}{p(0)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \frac{1-\beta}{\beta r - \rho} e^{rt}\left(e^{\frac{\beta r - \rho}{1-\beta}t} - 1\right).$$

Подставив эти формулы в соотношение $p(\tau)\left(\frac{k(\tau)}{\theta} + w\right)^{1-\beta} = \beta$, находим связь между моментом времени τ и значением сопряженной переменной $p(0)$:

$$p(0)\, e^{(\rho - r)\tau} \cdot \left(\frac{k_0 e^{r\tau} + \frac{w}{r}\left(e^{r\tau} - 1\right) - \left(\frac{\beta}{p(0)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} e^{r\tau} \frac{1 - e^{-\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\tau}}{\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}}}{\theta} + w\right)^{1-\beta} = \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\beta}{p(0)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} = \frac{\frac{1}{\theta}\left(k_0 + \frac{w}{r}\right) + w\left(1 - \frac{1}{\theta r}\right)e^{-r\tau}}{\frac{1}{\theta}\frac{1 - e^{-\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\tau}}{\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}} + e^{-\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\tau}}.$$

Тогда значение капитала $k(\tau)$, зависящее от момента времени перехода τ с подставленным значением $\left(\frac{\beta}{p(0)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$, имеет следующий вид:

$$k(\tau) = k_0 e^{r\tau} + \frac{w}{r}\left(e^{r\tau} - 1\right) - \frac{\frac{1}{\theta}\left(k_0 + \frac{w}{r}\right) + w\left(1 - \frac{1}{\theta r}\right)e^{-r\tau}}{\frac{1}{\theta}\frac{1 - e^{-\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\tau}}{\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}} + e^{-\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\tau}} e^{r\tau} \frac{1 - e^{-\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\tau}}{\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}} =$$

$$= k_0 e^{r\tau} + \frac{w}{r}\left(e^{r\tau} - 1\right) - \left(k_0 e^{r\tau} + \frac{w}{r}e^{r\tau} + w\theta - \frac{w}{r}\right) + \frac{k_0 e^{r\tau} + \frac{w}{r}e^{r\tau} + w\theta - \frac{w}{r}}{\frac{1 - e^{-\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\tau}}{\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}} + \theta e^{-\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\tau}} \theta e^{-\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\tau} =$$

$$= \theta\left(\frac{\rho - \beta r}{1-\beta} \frac{\left(k_0 + \frac{w}{r}\right)e^{r\tau} + w\theta - \frac{w}{r}}{e^{\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\tau} - 1 + \frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\theta} - w\right),$$

и тем самым мы вывели формулу (1.37).

Изучим теперь поведение функции $\kappa(\tau)$, найдя ее производную по τ:

$$\frac{d\kappa}{d\tau}(\tau) = \frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\theta \cdot \frac{(rk_0 + w)\, e^{r\tau}\left(e^{\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\tau} - 1 + \frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\theta\right) - \frac{\rho - \beta r}{1-\beta} e^{\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\tau}\left(\left(k_0 + \frac{w}{r}\right)e^{r\tau} + w\theta - \frac{w}{r}\right)}{\left(e^{\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\tau} - 1 + \frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\theta\right)^2} =$$

$$= e^{r\tau} \frac{\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\theta}{\left(e^{\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\tau} - 1 + \frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\theta\right)^2} l(\tau),$$

где

$$l(\tau) = (rk_0 + w)\, e^{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau} - \frac{\theta}{1-\beta}\left(\frac{1-\beta}{\theta} + \beta r - \rho\right)(rk_0 + w) - \frac{\rho - \beta r}{(1-\beta)\, r}(rk_0 + w)\, e^{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau} -$$
$$- \frac{\rho - \beta r}{1-\beta} e^{\frac{\rho-r}{1-\beta}\tau}\left(w\theta - \frac{w}{r}\right) =$$
$$= \frac{e^{\frac{\rho-r}{1-\beta}\tau}}{1-\beta}\left((\rho-\beta r)\frac{w}{r} - (\rho-\beta r)\, w\theta - (\rho - r)\left(k_0 + \frac{w}{r}\right)e^{r\tau} \pm (\rho - r)\frac{w}{r}\right) -$$
$$- \frac{\theta}{1-\beta}\left(\frac{1-\beta}{\theta} + \beta r - \rho\right)(rk_0 + w) =$$
$$= \frac{e^{\frac{\rho-r}{1-\beta}\tau}}{1-\beta}\left(w\theta\left(\frac{1-\beta}{\theta} + \beta r - \rho\right) - (\rho - r)\left(k_0 e^{r\tau} + w\frac{e^{r\tau}-1}{r}\right)\right) -$$
$$- \frac{\theta}{1-\beta}\left(\frac{1-\beta}{\theta} + \beta r - \rho\right)(rk_0 + w).$$

Покажем, что функция $l(\tau)$ отрицательна для всех $\tau > 0$. Для начала заметим, что

$$l(0) = \frac{1}{1-\beta}\left(w\theta\left(\frac{1-\beta}{\theta} + \beta r - \rho\right) - (\rho - r)\, k_0\right) - \frac{\theta}{1-\beta}\left(\frac{1-\beta}{\theta} + \beta r - \rho\right)(rk_0 + w) =$$
$$= -\frac{1}{1-\beta}\left(\rho - r + \theta r\left(\frac{1-\beta}{\theta} + \beta r - \rho\right)\right)k_0 = -\frac{\rho - \beta r}{1-\beta}(1 - \theta r)\, k_0 \le 0.$$

Теперь посчитаем производную функции $l(\tau)$:

$$\frac{dl}{d\tau}(\tau) = \frac{\rho - r}{1-\beta} e^{\frac{\rho-r}{1-\beta}\tau}\left(\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\frac{w}{r} - \frac{\rho-\beta r}{1-\beta} w\theta - \frac{\rho - r}{1-\beta}\left(k_0 + \frac{w}{r}\right)e^{r\tau} - r\left(k_0 + \frac{w}{r}\right)e^{r\tau}\right) =$$
$$= \frac{(\rho - r)(\rho - \beta r)}{(1-\beta)^2} e^{\frac{\rho-r}{1-\beta}\tau}\left(\frac{w}{r} - w\theta - \left(k_0 + \frac{w}{r}\right)e^{r\tau}\right) =$$
$$= -\frac{(\rho - r)(\rho - \beta r)}{(1-\beta)^2} e^{\frac{\rho-r}{1-\beta}\tau}\left(w\frac{e^{r\tau}-1}{r} + k_0 e^{r\tau} + w\theta\right) < 0.$$

Таким образом, мы показали, что при $r < \rho < \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}$ справедливы неравенства $l(0) \le 0$ и $\frac{dl}{d\tau}(\tau) < 0$, из которых следует, что функция $l(\tau)$ отрицательна при $\tau > 0$. В случае, когда $\rho = r$, а $k_0 > 0$, мы имеем $l(\tau) = -r(1 - \theta r)\, k_0 < 0$. Следовательно, производная $\frac{d\kappa}{d\tau}(\tau)$ отрицательна, откуда следует, что $\kappa(\tau)$ строго убывает по τ.

□

Лемма 1.19. Пусть $r \le \rho < \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}$. Тогда существует единственная экстремаль Понтрягина $(k(\cdot), p(\cdot), u(\cdot))$, устроенная следующим образом:

1. Если $\rho = r$, то для любого $k_0 > 0$ существует константа $C = C(k_0, \rho, w, \theta)$ такая, что $T - \tau \le C$, а при $k_0 = 0$ $u(t) = 1$ на всем отрезке $[0, T]$;

2. Если $r < \rho < \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}$ и $\frac{k_0}{k_0 + w\theta} \le q(T - \tau, \theta|\, \beta, r, \rho)$, то управление $u(t) = 1$ на всем отрезке $[0, T]$;

3. Если $r < \rho < \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}$ и $\frac{k_0}{k_0+w\theta} > q\left(T-\tau,\theta\,|\,\beta,r,\rho\right)$, то пара $\left(k\left(t\right),p\left(t\right)\right) \in D_1, t \in [0,\tau)$, а $\left(k\left(t\right),p\left(t\right)\right) \in D_2, t \in [\tau,T]$, а τ – момент времени, являющийся решением уравнения
$$\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\frac{\left(k_0+\frac{w}{r}\right)e^{r\tau}+w\theta-\frac{w}{r}}{e^{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau}-1+\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\theta} = \frac{w}{1-q\left(T-\tau,\theta\,|\,\beta,r,\rho\right)} \tag{1.38}$$
и ограниченный константой, не зависящей от T.

Доказательство. Покажем сначала, что пара $\left(k\left(t\right),p\left(t\right)\right)$ может совершать переход между областями не более одного раза. Предположим противное. Так как траектория должна заканчиваться в области D_2, то существуют такие моменты времени τ^*, τ^{**} и число $\delta > 0$, что $0 < \tau^* - \delta < \tau^* < \tau^{**} < T$ и $z\left(\tau^*\right) = z\left(\tau^{**}\right) = \beta$, при этом $z\left(t\right) \le \beta,\ t \in [\tau^*-\delta,\tau^*] \cup [\tau^{**},T]$, а $z\left(t\right) > \beta,\ t \in (\tau^*,\tau^{**})$. Из равенства $z\left(\tau^*\right) = z\left(\tau^{**}\right)$ получаем, что
$$p\left(\tau^*\right)\left(\frac{k\left(\tau^*\right)}{\theta}+w\right)^{1-\beta} = p\left(\tau^{**}\right)\left(\frac{k\left(\tau^{**}\right)}{\theta}+w\right)^{1-\beta}.$$
Так как $\left(k\left(t\right),p\left(t\right)\right) \in D_1, t \in (\tau^*,\tau^{**})$, то тогда $p\left(\tau^{**}\right) = p\left(\tau^*\right)e^{(\rho-r)(\tau^{**}-\tau^*)}$. Отсюда получаем, что
$$\frac{k\left(\tau^*\right)}{\theta}+w = \left(\frac{k\left(\tau^{**}\right)}{\theta}+w\right)e^{\frac{\rho-r}{1-\beta}(\tau^{**}-\tau^*)} \ge \frac{k\left(\tau^{**}\right)}{\theta}+w,$$
откуда следует, что $k\left(\tau^*\right) \ge k\left(\tau^{**}\right)$. Найдем теперь значение производной по времени функции $z\left(t\right)$ при условии, что $z\left(t\right) = \beta$. Для этого воспользуемся формулой (1.32):
$$\left.\frac{dz}{dt}\left(t\right)\right|_{z(t)=\beta} = \beta\left(\rho-r+\frac{1}{\theta}-(1-\beta)\left(\frac{1}{\theta}-r\right)\frac{k\left(t\right)}{k\left(t\right)+w\theta}\right)-\frac{\beta}{\theta} =$$
$$= \beta\left(\rho-r-(1-\beta)\left(\frac{1}{\theta}-r\right)\frac{k\left(t\right)}{k\left(t\right)+w\theta}\right).$$

Так как переход из области D_2 в область D_1 возникает в момент времени τ^*, а переход из области D_1 в область D_2 – в момент времени τ^{**}, производные функции $z\left(t\right)$ в эти моменты времени имеют разные знаки, причем $\frac{dz}{dt}\left(\tau^*\right) > 0$, а $\frac{dz}{dt}\left(\tau^{**}\right) < 0$. Но тогда
$$\frac{dz}{dt}\left(\tau^*\right) = \beta\left(\rho-r-(1-\beta)\left(\frac{1}{\theta}-r\right)\frac{k\left(\tau^*\right)}{k\left(\tau^*\right)+w\theta}\right) > 0 >$$
$$> \beta\left(\rho-r-(1-\beta)\left(\frac{1}{\theta}-r\right)\frac{k\left(\tau^{**}\right)}{k\left(\tau^{**}\right)+w\theta}\right) = \frac{dz}{dt}\left(\tau^{**}\right).$$
Но тогда отсюда следует, что $\frac{k(\tau^{**})}{k(\tau^{**})+w\theta} > \frac{k(\tau^*)}{k(\tau^*)+w\theta}$. Так как
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+w\theta}\right) = \frac{w\theta}{\left(x+w\theta\right)^2} > 0, x \ge 0,$$
то функция $\frac{x}{x+w\theta}$ является строго возрастающей на $[0,+\infty)$, и тогда $k\left(\tau^{**}\right) > k\left(\tau^*\right)$, что противоречит ранее полученному неравенству $k\left(\tau^{**}\right) \le k\left(\tau^*\right)$.

Таким образом, полученное противоречие доказывает, что пара (k,p) либо целиком лежит в области D_2 на всем отрезке $[0,T]$, либо осуществляет переход из области D_1 в область D_2.

Пусть $\rho = r$, $k_0 > 0$ и предположим, что пара $(k(\cdot), p(\cdot))$ лежит в области D_2 на всем отрезке $[0,T]$. Тогда в начальный момент времени выполняется условие $p(0)\left(\frac{k_0}{\theta}+w\right)^{1-\beta} \le \beta$. С другой стороны, в силу условия трансверсальности мы имеем равенство $p(0) = \frac{\beta}{\theta} I(T,0)$. Посредством арифметических преобразований можно получить неравенство

$$I_T\left(\frac{k_0}{k_0+w\theta}\right) \le \theta.$$

В силу Леммы 1.15 интеграл I_T возрастает по T. Кроме того,

$$I_\infty(0) = \theta < I_\infty\left(\frac{k_0}{k_0+w\theta}\right).$$

Так как $I_0\left(\frac{k_0}{k_0+w\theta}\right) = 0, I_\infty\left(\frac{k_0}{k_0+w\theta}\right) > \theta$, то существует такое $C_1 = C_1(\rho, k_0, w, \theta) > 0$, что $I_{C_1}\left(\frac{k_0}{k_0+w\theta}\right) = \theta$. Положив $T > C_1$, получаем противоречие с тем, что $I_T(q)$ строго возрастает по T при любом фиксированном $q \in [0,1]$. Тогда существует момент времени $\tau \in (0,T)$ такой, что $p(\tau)\left(\frac{k(\tau)}{\theta}+w\right)^{1-\beta} = \beta$.

Следовательно, справедливо уравнение

$$I_{T-\tau}\left(\frac{k(\tau)}{k(\tau)+w\theta}\right) = \theta,$$

откуда следует, что

$$k(\tau) = w\theta \frac{q(T-\tau,\theta|\,\beta,r,\rho)}{1-q(T-\tau,\theta|\,\beta,r,\rho)}.$$

В силу Леммы 1.18 справедливо неравенство

$$w\theta \frac{q(T-\tau,\theta|\,\beta,r,\rho)}{1-q(T-\tau,\theta|\,\beta,r,\rho)} \ge \lim_{\tau\to+\infty} k(\tau) = \theta\rho k_0,$$

откуда следует, что

$$q(T-\tau,\theta|\,\beta,r,\rho) \ge \frac{\rho k_0}{\rho k_0 + w},$$

и тем самым $I_{T-\tau}\left(\frac{\rho k_0}{\rho k_0+w}\right) \le \theta$. Поскольку $I_\infty(0) = \theta < I_\infty\left(\frac{\rho k_0}{\rho k_0+w}\right)$, то существует такое $C_2 = C_2(\rho, k_0, w, \theta) > 0$, что справедливо равенство $I_{C_2}\left(\frac{\rho k_0}{\rho k_0+w}\right) = \theta$. Следовательно, справедливо неравенство $T - \tau \le C_2$.

Пусть теперь $k_0 = 0$ и предположим, что пара $k(\cdot), p(\cdot)$ осуществляет переход из области D_1 в область D_2. Тогда производная функции $p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta}+w\right)^{1-\beta}$ равна

$$\frac{d}{dt}\left\{p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta}+w\right)^{1-\beta}\right\} = p(t)\left(\frac{k(t)}{\theta}+w\right)^{-\beta}\cdot\left(\frac{\rho-\beta r}{\theta}k(t) + \left(\rho - r + \frac{1-\beta}{\theta}\right)w - \right.$$

$$\frac{1-\beta}{\theta}\left(\frac{\beta}{p\left(t\right)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right)\geq 0,$$

откуда следует, что область D_1 оказывается ловушкой. Получаем противоречие с тем, что траектория заканчивается в области D_2. Следовательно, при $k_0 = 0$ траектория принадлежит области D_2 на всем отрезке $[0, T]$, и $u\left(t\right) = 1$.

Пусть теперь выполняются неравенства $r < \rho < \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}$ и $\frac{k_0}{k_0+w\theta} \leq q\left(T, \theta|\, \beta, r, \rho\right)$. Покажем от противного, что вся траектория лежит в области D_2 на всем отрезке $[0, T]$. Пусть это не так, тогда

$$I_{T-\tau}\left(\frac{k\left(\tau\right)}{k\left(\tau\right)+w\theta}\right)=\theta.$$

Заметим, что по Лемме 1.15 I_T возрастает по T, а по Лемме 1.18 $k\left(\tau\right) < k_0$. Но тогда

$$\theta\geq I_T\left(\frac{k_0}{k_0+w\theta}\right)>I_{T-\tau}\left(\frac{k_0}{k_0+w\theta}\right)>I_{T-\tau}\left(\frac{k\left(\tau\right)}{k\left(\tau\right)+w\theta}\right)=\theta.$$

Получаем противоречие с тем, что $\theta > \theta$. Следовательно, траектория лежит целиком в области D_2 на всем отрезке $[0, T]$.

Пусть теперь выполняются неравенства $r < \rho < \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}$ и $\frac{k_0}{k_0+w\theta} > q\left(T, \theta|\, \beta, r, \rho\right)$. Тогда траектория совершает переход между областями D_1 и D_2, так как в противном случае

$$I_T\left(\frac{k_0}{k_0+w\theta}\right)>\theta,$$

$$p\left(0\right)\left(\frac{k_0}{\theta}+w\right)^{1-\beta}\leq\beta, p\left(0\right)=\frac{\beta}{\theta}I\left(T,0\right),$$

$$\theta<I_T\left(\frac{k_0}{k_0+w\theta}\right)<\theta,$$

и мы приходим к противоречию.

Поскольку $p\left(\tau\right)\left(\frac{k(\tau)}{\theta}+w\right)^{1-\beta} = \beta$, условие $p\left(\tau\right) = \frac{\beta}{\theta}I\left(T, \tau\right)$ сводится к уравнению $I_{T-\tau}\left(q\right) = \theta$, где $q\left(T-\tau, \theta\,|\, \beta, r, \rho\right) = \frac{k(\tau)}{k(\tau)+w\theta}$ является его решением. По Лемме 1.18 мы знаем значение капитала в момент времени τ. Тогда момент перехода из области D_1 в область D_2 может быть определен из решения уравнения

$$k\left(\tau^*\right)=\theta\left(\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\frac{\left(k_0+\frac{w}{r}\right)e^{r\tau^*}+w\theta-\frac{w}{r}}{e^{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau^*}-1+\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\theta}-w\right)=w\theta\frac{q\left(T-\tau^*,\theta|\,\beta,r,\rho\right)}{1-q\left(T-\tau^*,\theta|\,\beta,r,\rho\right)}.$$

Заметим, что $\lim\limits_{\tau\to\infty}\kappa\left(\tau\right) = -w\theta < 0$. Следовательно, по теореме о промежуточном значении существует такой момент времени τ_0, что $\kappa\left(\tau_0\right) = 0$. Обозначим

$$D\left(\tau\right)=\kappa\left(\tau\right)-w\theta\frac{q\left(T-\tau,\theta|\,\beta,r,\rho\right)}{1-q\left(T-\tau,\theta|\,\beta,r,\rho\right)}.$$

Обратим внимание, что функция D строго убывает по τ, поскольку функция $\kappa(\tau)$ по Лемме 1.18 строго убывает по τ, а функция $w\theta\frac{q(T-\tau,\theta|\beta,r,\rho)}{1-q(T-\tau,\theta|\beta,r,\rho)}$ строго возрастает по τ в силу Леммы 1.15. Положив $T>\tau_0$, видим, что

$$D(0)=k_0-w\theta\frac{q(T,\theta|\,\beta,r,\rho)}{1-q(T,\theta|\,\beta,r,\rho)}>0,$$

$$D(\tau_0)=\kappa(\tau_0)-w\theta\frac{q(T-\tau_0,\theta|\,\beta,r,\rho)}{1-q(T-\tau_0,\theta|\,\beta,r,\rho)}<0,$$

поэтому по теореме о нуле непрерывной функции существует единственное значение $\tau^*\in(0,\tau_0)$, такое что $D(\tau^*)=0$. Нам осталось показать, что τ_0 ограничена константой, не зависящей от T.

$$\kappa(\tau_0)=\theta\left(\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\frac{\left(k_0+\frac{w}{r}\right)e^{r\tau_0}+w\theta-\frac{w}{r}}{e^{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau_0}-1+\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\theta}-w\right)=0\Rightarrow$$

$$\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\left(k_0+\frac{w}{r}\right)e^{r\tau_0}=we^{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau_0}+\frac{\rho-r}{1-\beta}\frac{w}{r}\Rightarrow$$

$$\tau_0<\frac{1-\beta}{\rho-r}\ln\left(\frac{1}{w}\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\left(k_0+\frac{w}{r}\right)\right)\equiv\tau_0^+.$$

Заметим, что выполняется неравенство $k_0>w\theta\frac{q(T,\theta|\beta,r,\rho)}{1-q(T,\theta|\beta,r,\rho)}$. Функция $q(T,\theta|\,\beta,r,\rho)$ положительна и убывает по T, поэтому по теореме о монотонной сходимости существует предел $q(\beta,\theta,r,\rho)=\lim\limits_{T\to+\infty}q(T,\theta|\,\beta,r,\rho)$, являющийся единственным решением уравнения (1.28). Тогда $k_0>w\theta\frac{q(\beta,\theta,r,\rho)}{1-q(\beta,\theta,r,\rho)}$, то есть, нижняя оценка на k_0 не влияет на ограниченность τ_0. Таким образом, момент перехода τ^* ограничен константой τ_0^+, не зависящей от T.

Лемма доказана.

□

Доказательство Теоремы 1.5. В каждом случае по соотношению параметров мы получили единственную экстремаль Понтрягина, которая является решением задачи оптимального управления с конечным горизонтом T в силу условий 1, 2 Теоремы 1.4 и теоремы Филиппова [41, p.314, Theorem 9.3.i]. Переходя к пределу при $T\to+\infty$, мы получаем экстремаль Понтрягина на бесконечном горизонте времени. Она является искомым обобщенным решением, причем в силу Леммы 1.9 и Теоремы 1.4 данная экстремаль оказывается решением при $\rho>\beta r$ в классическом смысле. Нам осталось показать, каким получается управление.

1. $\rho\le r$. При данном соотношении параметров мы получили по Лемме 1.17 и по пункту 1 Леммы 1.19, что $T-\tau\le C$. Следовательно, $\tau^*\xrightarrow[T\to+\infty]{}+\infty$. Тогда из формулы (1.36) следует, что

$$\left(\frac{\beta}{p(0)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\xrightarrow[T\to+\infty]{}\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\left(k_0+\frac{w}{r}\right),$$

причем этот же результат остается верным и при $\rho = r, k_0 > 0$. Управление при этом принимает вид

$$u\left(k_0\right) = \frac{\rho - \beta r}{\left(1 - \beta\right) r} \frac{r k_0 + w}{\frac{k_0}{\theta} + w},$$

а при $\rho = r$

$$\lim_{k_0 \to 0} u\left(k_0\right) = 1,$$

что подтверждает непрерывность управления в точке $k = 0$.

2. $r < \rho < \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}$, $\frac{k_0}{k_0 + w\theta} > q\left(T, \theta \middle| \beta, r, \rho\right)$. В силу пункта 3 Леммы 1.19 момент времени τ^* ограничен константой, не зависящей от T, поэтому $T - \tau^* \xrightarrow[T \to +\infty]{} +\infty$. Следовательно, существует предел $\tau^* = f\left(T, w, r, \rho, \beta, \theta, k_0\right) \xrightarrow[T \to +\infty]{} f\left(+\infty, w, r, \rho, \beta, \theta, k_0\right) = \tau_\infty$, и тогда τ_∞ определяется решением уравнения (1.27), а $q\left(\theta, \beta, r, \rho\right)$ – решением уравнения (1.28).

3. $r < \rho < \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}$, $\frac{k_0}{k_0 + w\theta} \leq q\left(T, \theta \middle| \beta, r, \rho\right)$. В силу пункта 2 Леммы 1.19 управление равно единице на всем отрезке $[0, T]$, поэтому в пределе при $T \to +\infty$ мы имеем $u\left(k_0\right) = 1$.

4. $\rho \geq \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}$. По Лемме 1.16 управление равно единице на всем отрезке $[0, T]$, поэтому в пределе при $T \to +\infty$ мы имеем $u\left(k_0\right) = 1$.

В конечном итоге полученные для управления формулы можно объединить записью (1.24).

Теорема доказана.

$\square$

Глава 2

Принцип Фишера и социальная динамика в системах нелинейных ОДУ

В настоящей главе мы, используя полученные ранее решения задач оптимального управления в форме синтеза, опишем модели социальной динамики популяции из H домашних хозяйств и докажем для каждой из них справедливость гипотезы Рамсея о социальной стратификации. Используемый подход к построению моделей позволяет интерпретировать гипотезу Рамсея на языке популяционной динамики и выявить аналогию с принципом естественного отбора, изложенным в монографии Рональда Фишера (см. [44, Ch. 2]).

Всего мы рассматриваем четыре случая: случай Бьюли, случай Беккера, случай с неликвидным капиталом и случай ограниченной ликвидности капитала. В параграфе 2.1 мы даем в каждом случае определение модели социальной динамики и формулируем основную теорему. В параграфе 2.2 приводится доказательство вспомогательных результатов. Доказательство же основной теоремы вынесено в параграф 2.3.

2.1. Основные определения и формулировка теоремы об асимптотике решений

В стартовый момент времени $t_0 = 0$ у каждого домашнего хозяйства с индексом $h \in \{1, \ldots, H\}$ имеется в распоряжении сбережений в размере $k_0^h \geq 0$, причем суммарные сбережения всех домашних хозяйств положительны: $K_0 = \sum\limits_{h=1}^{H} k_0^h > 0$.

Положим $K = \sum\limits_{h=1}^{H} k^h, W = \sum\limits_{h=1}^{H} w^h$, где величина w^h является уровнем заработной платы домашнего хозяйства с индексом h. Используя синтез оптимального управления, построенный в Теоремах 1.1, 1.2, 1.3, 1.5, будем описывать динамику капитала с помощью задачи Коши

$$\frac{dk^h}{dt} = rk^h + w^h - c\left(k^h, \rho^h\left(k^h, K\right)\right), \;\; k^h\left(0\right) = k_0^h,$$

где функция $\rho^h\left(k^h, K\right)$ определяется в соответствии с гипотезой относительного дохода Дж. Дьюзенберри [42] следующим образом:

$$\rho^h\left(k^h, K\right) = r\varphi\left(\frac{rk^h + w^h}{rK + W}\right), \tag{2.1}$$

а функция $\varphi\left(\cdot\right)$ удовлетворяет следующему предположению.

Предположение 1. Функция $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ непрерывна по Липшицу и строго убывает на отрезке $[0,1]$, а ее значения удовлетворяют следующей цепочке неравенств: $\beta < \varphi(1) < \varphi\left(\frac{1}{H}\right) \leq 1 < \varphi(0)$.

Дадим четыре следующих определения.

Определение 3. Моделью Рамсея–Бьюли социальной динамики называется задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dk^h}{dt} = \frac{1 - \varphi\left(\frac{rk^h + w^h}{rK + W}\right)}{1 - \beta}\left[rk^h + w^h\right], \; k^h(0) = k_0^h, \; h = 1, \dots, H. \tag{2.2}$$

Определение 4. Моделью социальной динамики с неликвидным капиталом называется задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{dk^h}{dt} = \dfrac{\left(1 - \varphi\left(\frac{rk^h + w^h}{rK + W}\right)\right)_+}{1 - \beta}\left[rk^h + w^h\right] \\ k^h(0) = k_0^h \end{cases}, \quad h = 1, \dots, H. \tag{2.3}$$

Определение 5. Моделью Рамсея–Беккера социальной динамики называется задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dk^h}{dt} = \frac{1 - \varphi\left(\frac{rk^h + w}{rK + wH}\right)}{1 - \beta}\left[rk^h + w\right] + \frac{\left(\varphi\left(\frac{rk^h + w}{rK + wH}\right) - 1\right)_+}{1 - \beta} w\left(\frac{w}{c_2\left(k^h, r\varphi\left(\frac{rk^h + w}{rK + wH}\right)\right)}\right)^{\frac{1-\beta}{\varphi\left(\frac{rk^h + w}{rK + wH}\right) - 1}},$$
$$k^h(0) = k_0^h, \; h = 1, \dots, H, \tag{2.4}$$

где функция $c_2(k, \rho)$ является решением уравнения (1.10) при $k = k^h(t), \rho = r\varphi\left(\frac{rk^h(t) + w}{rK(t) + wH}\right)$.

Определение 6. Моделью социальной динамики с ограниченной ликвидностью капитала называется задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{dk^h}{dt} = \max\left\{\left(r - s\left(\rho^h, \tau^h\right)\right)k^h + w\left(1 - s\left(\rho^h, \tau^h\right)\eta\left(\tau^h\right)\right), \left(r - \dfrac{1}{\theta}\right)k^h\right\} \\ k^h(0) = k_0^h \end{cases}, \quad h = 1, \dots, H, \tag{2.5}$$

где

$$\rho^h = r\varphi\left(\frac{rk^h + w}{rK + wH}\right),$$

функции s, η определяются выражениями (1.25) и (1.26) соответственно, а функция τ^h имеет вид

$$\tau^h = \tau\left(k^h, r, w, \rho^h, \beta, \theta\right).$$

Сформулируем теперь основной результат для четырех моделей в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. Пусть для функции $\varphi(\cdot)$ в моделях социальной динамики (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) выполнено Предположение 1. Тогда для любого вектора начальных значений $\mathbf{k_0}$ капиталов домашних хозяйств, принадлежащего множеству

$$\mathcal{K}^l_{0,d} = \left\{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^H_+ : rk^1 + w^1 = \ldots = rk^l + w^l > rk^{l+1} + w^{l+1} \geq \ \ldots \geq rk^H + w^H\right\}, \, 1 \leq l \leq H-1,$$

в случае модели (2.2) или (2.3), или множеству

$$\mathcal{K}^l_{0,c} = \left\{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^H_+ : k^1 = \ldots = k^l > k^{l+1} \geq \ \ldots \geq k^H\right\}, \, 1 \leq l \leq H-1, \tag{2.6}$$

в случае модели (2.4) или (2.5), выполняются следующие соотношения:

1. Для всех четырех моделей (2.2), (2.3), (2.4), (2.5):

$$k^h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty, \quad h = 1, \ldots, l;$$

2. Для моделей (2.2), (2.3):

$$\frac{rk^h(t) + w^h}{rK(t) + W} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & h = 1, \ldots, l, \\ 0, & h = l+1, \ldots, H; \end{cases}$$

3. Для моделей (2.4), (2.5):

$$\frac{rk^h(t) + w}{rK(t) + wH} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & h = 1, \ldots, l, \\ 0, & h = l+1, \ldots, H; \end{cases}$$

4. Для модели (2.2):

$$k^h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\frac{w^h}{r}, \quad h = l+1, \ldots, H;$$

5. Для модели (2.3) существует константа $C > 0$ такая, что

$$k^h(t) \leq C, \ t \in [0, +\infty), \ h = l+1, \ldots, H;$$

6. Для моделей (2.4), (2.5):

$$k^h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, \quad h = l+1, \ldots, H.$$

Замечание 8. Решение задачи Коши (2.2) можно выразить в следующей форме:

$$rk^h(t) + w^h = \left[rk_0^h + w^h\right] \exp\left\{\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^t \left(1 - \varphi\left(\frac{rk^h(\tau) + w^h}{rK(\tau) + W}\right)\right) d\tau\right\}, h = 1, \ldots, H. \quad (2.7)$$

Из данного представления следует, что $k^h(t) > -\frac{w^h}{r}$, $t \in [0, +\infty)$, $h = \overline{1, H}$.

Замечание 9. Решение задачи Коши (2.3) может быть выражено в следующей форме:

$$rk^h(t) + w^h = \left[rk_0^h + w^h\right] \exp\left\{\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^t \left(1 - \varphi\left(\frac{rk^h(\tau) + w^h}{rK(\tau) + W}\right)\right)_+ d\tau\right\}, h = 1, \ldots, H, \quad (2.8)$$

откуда следует, что $k^h(t) \geq k_0^h \geq 0$, $t \in [0, +\infty)$, $h = \overline{1, H}$, и $K(t) \geq K_0 > 0, t \in [0, +\infty)$.

Лемма 2.1. В задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dy^h}{dt}(t) = f\left(y^h(t), Y(t)\right), \; y^h(0) = y_0^h, \quad h = 1, \ldots, H,$$

где $Y(t) = \sum\limits_{j=1}^{H} y^j(t)$, а функция $f(x, y)$ является липшицевой, для любых i, j, таких что $1 \leq i < j \leq H$, разность $y^i(t) - y^j(t)$ неотрицательна (неположительна) для любого $t \in (0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда неотрицательна (неположительна) разность $y_0^i - y_0^j$.

Доказательство. Выберем такие i, j, что $1 \leq i < j \leq H$, и распишем разность производных y^i и y^j, используя формулу конечных приращений:

$$\frac{dy^i}{dt} - \frac{dy^j}{dt} = \frac{d}{dt}\left(y^i - y^j\right) = f\left(y^i, Y\right) - f\left(y^j, Y\right) =$$
$$= \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}\left(y^j + \xi\left(y^i - y^j\right), Y\right) d\xi \cdot \left(y^i - y^j\right).$$

Тогда

$$y^i(t) - y^j(t) = \left(y_0^i - y_0^j\right) \exp\left\{\int\limits_0^t \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}\left(y^j(\tau) + \xi\left(y^i(\tau) - y^j(\tau)\right), Y(\tau)\right) d\xi \, d\tau\right\}. \quad (2.9)$$

Так как экспонента в правой части формулы (2.9) является положительной функцией, то отсюда следует, что знак разности $y^i(t) - y^j(t)$ для любого $t \in (0, +\infty)$ совпадает со знаком разности $y_0^i - y_0^j$. Наконец, из этой же формулы (2.9) также следует, что разность $y^i(t) - y^j(t)$ для любого $t \in (0, +\infty)$ равна нулю тогда и только тогда, когда разность $y_0^i - y_0^j$ равна нулю.

Лемма доказана.

□

Замечание 10. 1. При выполнении теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши из Леммы 2.1 следует, что для всех четырех моделей (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) все неравенства для величин доходов, задаваемых начальными значениями капиталов для домашних хозяйств, сохраняются, т.е. если $rk_0^i + w^i > rk_0^j + w^j$, то $rk^i(t) + w^i > rk^j(t) + w^j$, $t \in [0, +\infty)$, $1 \leq i < j \leq H$. Для этого достаточно положить $y^h = rk^h + w^h$, $h = 1, \ldots, H$ (в случае моделей (2.4) и (2.5) $w^h = w$) и убедиться в том, что производная i-ой компоненты вектор-функции $\mathbf{k}$ задается функцией $f(y^i, Y)$.

2. Из предыдущего пункта следует, что вне зависимости от рассматриваемой задачи Коши для любого $t \in [0, +\infty)$ выполняется неравенство $\frac{rk^1(t)+w^1}{rK(t)+W} > \frac{1}{H} \left(\frac{rk^1(t)+w}{rK(t)+wH} > \frac{1}{H} \right)$. Справедливость этого факта легко доказать от противного. Пусть $\frac{rk^1(t)+w^1}{rK(t)+W} \leq \frac{1}{H}$, тогда $\frac{rk^h(t)+w^h}{rK(t)+W} < \frac{1}{H}, h = l+1, \ldots, H$. Просуммировав все слагаемые $\frac{rk^h(t)+w^h}{rK(t)+W}$ по h от 1 до H, получаем, что $1 = \sum\limits_{h=1}^{H} \frac{rk^h(t)+w^h}{rK(t)+W} < \sum\limits_{h=1}^{H} \dfrac{1}{H} = 1$. Следовательно, $\varphi\left(\frac{rk^1(t)+w^1}{rK(t)+W}\right) < \varphi\left(\frac{1}{H}\right) \leq 1$.

3. В случае разных уровней заработных плат для моделей социальной динамики Рамсея-Беккера (2.4) и с ограниченной ликвидностью капитала (2.5) порядок, задаваемый начальными значениями капиталов домашних хозяйств, для величин доходов может нарушаться. Примеры с нарушением порядка в моделях (2.4) и (2.5) приведены в Приложении A.

Замечание 11. Покажем, что в случае задачи Коши (2.4) для любого $t \in [0, +\infty)$, $h \in \{1, \ldots, H\}$ выполняются неравенства $k^h(t) \geq 0$, $K(t) > 0$. Если для некоторого $h \in \{1, \ldots, H\}$ выполняется неравенство $\varphi\left(\frac{rk^h(t)+w}{rK(t)+wH}\right) \leq 1$, то в момент времени t ОДУ совпадает с уравнением из модели Рамсея-Бьюли (2.2), и в силу неотрицательности производной капитал $k^h(t)$ остается неотрицательным. В частности, при $h = 1, \ldots, l$ в силу замечания 10 неравенство $\varphi\left(\frac{rk^h(t)+w}{rK(t)+wH}\right) \leq 1$ выполняется для любого $t \in [0, +\infty)$, а значит, капитал $k^h(t)$ остается положительным на всем бесконечном положительном полуинтервале.

Выберем теперь $h \in \{l+1, \ldots, H\}$, и пусть при выбранном h выполняется неравенство $\varphi\left(\frac{rk^h(t)+w}{rK(t)+wH}\right) > 1$. Заметим, что уравнение (1.10) можно записать как

$$f(c) - f(w) = \frac{\rho - \beta r}{1 - \beta} k,$$

где функция f, записанная формулой (1.13), определяет правую часть уравнения (1.10). Вторая ее производная

$$f''(c) = \frac{\rho - \beta r}{\rho - r} \frac{1}{c} \left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{\rho - \beta r}{\rho - r}}$$

при каждом фиксированном $\rho > r$ положительна всюду на $(0, +\infty)$, откуда следует выпуклость функции f при каждом фиксированном $\rho > r$ на $(0, +\infty)$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}k = f(c) - f(w) \geq f'(w)(c-w) = 0.$$

Тогда при $\rho = r\varphi\left(\frac{rk^h(t)+w}{rK(t)+wH}\right) > r,\ k = k^h(t),\ c = c_2\left(k^h(t), r\varphi\left(\frac{rk^h(t)+w}{rK(t)+wH}\right)\right)$ верно неравенство

$$\frac{\varphi\left(\frac{rk^h(t)+w}{rK(t)+wH}\right)-\beta}{1-\beta} rk^h(t) \geq 0,$$

из которого следует неотрицательность капитала $k^h(t)$ при $h \in \{l+1, \ldots, H\}$.

Таким образом, мы показали, что для любого $t \in [0, +\infty),\ h \in \{1, \ldots, H\}$ выполняются неравенства $k^h(t) \geq 0$. Поскольку капиталы самых богатых в начальный момент времени домашних хозяйств остаются строго положительными, отсюда следует, что $K(t) > 0$. Отсюда также следует, что для любых $t \in [0, +\infty), h = \overline{1, H}$ выполняется двойное неравенство $0 < \frac{rk^h(t)+w}{rK(t)+wH} \leq 1$.

Замечание 12. В случае задачи Коши (2.5) в силу справедливости неравенства $\frac{dk^h}{dt} \geq -\left(\frac{1}{\theta} - r\right)k^h$ из леммы Гронуолла-Беллмана следует неравенство $k^h(t) \geq k_0^h e^{-\left(\frac{1}{\theta}-r\right)t} \geq 0$, $\forall t \in [0, +\infty),\ h = \overline{1, H}$. Следовательно, $K(t) \geq K_0 e^{-\left(\frac{1}{\theta}-r\right)t} > 0$, $\forall t \in [0, +\infty)$.

2.2. Вспомогательные результаты

Нам понадобится доказать несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 1. Пусть выполняются неравенства $r < \frac{1}{\theta}$ и $r < \rho < \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- При каждом фиксированном $\rho \in \left(r, \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}\right)$ функция $s(\rho, \tau)$ строго убывает по τ на $[0, +\infty)$;

- Для любых $\rho \in \left(r, \beta r + \frac{1-\beta}{\theta}\right)$, $\tau \geq 0$ справедливо неравенство $s(\rho, \tau)\,\eta(\tau) \geq 1$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения посчитаем частную производную функции $s(\rho, \tau)$ по τ:

$$\frac{\partial s}{\partial \tau}(\rho, \tau) = -\frac{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}}{\left(1 - \left(1 - \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\theta\right)e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau}\right)^2} \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\left(1 - \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\theta\right)e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau} =$$
$$= -\left[s(\rho, \tau)\right]^2 \left(1 - \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\theta\right)e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau}.$$

Полученное для частной производной $\frac{\partial s}{\partial \tau}$ выражение оказывается отрицательным для любого $\tau \geq 0$, откуда следует первое утверждение Предложения.

Для доказательства второго утверждения Предложения распишем следующее произведение:

$$s(\rho,\tau)\,\eta(\tau)=\frac{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}}{1-\left(1-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\theta\right)e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau}}\cdot\left(\frac{1-e^{-r\tau}}{r}+\theta e^{-r\tau}\right)=\frac{\frac{1-(1-\theta r)e^{-r\tau}}{r}}{\frac{1-\left(1-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\theta\right)e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\tau}}{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}}}.$$

Покажем, что полученное выражение не меньше единицы. Рассмотрим функцию $G(x)=\frac{1-(1-\theta x)e^{-x\tau}}{x}$ на отрезке $\left[r,\frac{1}{\theta}\right]$ и исследуем поведение ее производной:

$$\begin{aligned}G'(x)&=\frac{\left(\theta e^{-x\tau}+\tau(1-\theta x)e^{-x\tau}\right)x-\left(1-(1-\theta x)e^{-x\tau}\right)}{x^2}=\\&=\frac{\theta xe^{-x\tau}+\tau x(1-\theta x)e^{-x\tau}-1+(1-\theta x)e^{-x\tau}}{x^2}=\frac{\left(1+\tau x(1-\theta x)\right)e^{-x\tau}-1}{x^2}=\\&=-\frac{e^{-x\tau}}{x^2}\left(e^{x\tau}-1-x\tau+\tau x^2\theta\right)\le 0,\quad x\in\left[r,\frac{1}{\theta}\right],\tau\ge 0.\end{aligned}$$

Следовательно, при фиксированном $\tau>0$ функция $G(x)$ строго возрастает на отрезке $\left[r,\frac{1}{\theta}\right]$, а при $\tau=0$ функция $G(x)$ на отрезке $\left[r,\frac{1}{\theta}\right]$ равна константе.

Так как справедливо неравенство $\rho>r$, то поскольку $\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}>r$, отсюда следует, что $G\left(\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\right)\le G(r)$ при $\tau\ge 0$, причем равенство достигается в том и только в том случае, когда $\tau=0$. Следовательно, $s(\rho,\tau)\,\eta(\tau)=\frac{G(r)}{G\left(\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\right)}\ge 1$. Как нетрудно заметить, $s(\rho,0)\,\eta(0)=\frac{1}{\theta}\cdot\theta=1$, а $\lim\limits_{\tau\to+\infty}s(\rho,\tau)\,\eta(\tau)=\frac{\rho-\beta r}{(1-\beta)r}>1$. Предложение доказано. □

Лемма 2.2. Пусть вектор-функция $\mathbf{k}(t)$ является решением задачи Коши (2.5). Пусть также для любого $t\in[\tau',\tau'']$, $0\le\tau'\le\tau''\le+\infty$, и для некоторого $j\in\{l+1,\dots,H\}$ выполняются неравенства $1<\varphi\left(\frac{rk^j(t)+w}{rK(t)+wH}\right)<\beta+\frac{1-\beta}{\theta r}$, $\frac{k^j(t)}{k^j(t)+w\theta}>q^*\left(\beta,r,\theta,r\varphi\left(\frac{rk^j(t)+w}{rK(t)+wH}\right)\right)$. Тогда для производной по времени j-ой компоненты вектор-функции $\mathbf{k}$ справедлива следующая оценка:

$$\frac{dk^j}{dt}(t)<-r\frac{\varphi\left(\frac{rk^j(t)+w}{rK(t)+wH}\right)-1}{1-\beta}k^j(t),\ t\in[\tau',\tau'']. \tag{2.10}$$

Доказательство. Производная j-ой компоненты вектор-функции $\mathbf{k}(t)$ имеет вид

$$\frac{dk^j}{dt}(t)=\max\left\{\left(r-s\left(\rho^j(t),\tau^j(t)\right)\right)k^j(t)+w\left(1-s\left(\rho^j(t),\tau^j(t)\right)\eta\left(\tau^j(t)\right)\right),\left(r-\frac{1}{\theta}\right)k^j(t)\right\}.$$

Оценим $\frac{dk^j}{dt}$ на отрезке $[\tau',\tau'']$, используя результат Предложения 1. Так как функция $s(\rho,\tau)$ строго убывает по τ, мы можем оценить ее значение снизу пределом $\lim\limits_{\tau\to+\infty}s(\rho,\tau)=s(\rho,+\infty)=\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}$. Кроме того, мы знаем по Предложению 1, что справедливо неравенство

$1 - s\left(\rho^j, \tau^j\right) \eta\left(\tau^j\right) \le 0$. Тогда

$$\frac{dk^j}{dt} < \max\left\{\left(r - \frac{\rho^j - \beta r}{1-\beta}\right)k^j, \left(r - \frac{1}{\theta}\right)k^j\right\} = \max\left\{r\frac{1-\varphi\left(\frac{rk^j+w}{rK+wH}\right)}{1-\beta}k^j, \left(r-\frac{1}{\theta}\right)k^j\right\} =$$

$$= -r\frac{\varphi\left(\frac{rk^j+w}{rK+wH}\right)-1}{1-\beta}k^j.$$

Последнее равенство справедливо, так как из неравенства $\varphi\left(\frac{rk^j+w}{rK+wH}\right) < \beta + \frac{1-\beta}{\theta r}$ следует неравенство $r\frac{\varphi\left(\frac{rk^j+w}{rK+wH}\right)-1}{1-\beta} < \frac{1}{\theta} - r$, и мы тем самым вывели оценку (2.10). Лемма доказана. □

Лемма 2.3. Пусть $\mathbf{k}(t)$ – решение задачи Коши (2.2), (2.3), (2.4) или (2.5). Тогда для каждого $j = \overline{l+1, H}$ существует константа $M_j > 0$ такая, что для любого $t \in [0, +\infty)$ выполняется неравенство

$$\varphi\left(\frac{rk^j(t) + w^j}{rK(t) + W}\right) - \varphi\left(\frac{rk^1(t) + w^1}{rK(t) + W}\right) > M_j$$

в случае задач Коши (2.2), (2.3), и неравенство

$$\varphi\left(\frac{rk^j(t) + w}{rK(t) + wH}\right) - \varphi\left(\frac{rk^1(t) + w}{rK(t) + wH}\right) > M_j$$

в случае задач Коши (2.4), (2.5).

Доказательство. Пусть $1 \le i \le l < j \le H$. Докажем сначала, что для любых i, j выполняется неравенство

$$\frac{rk^j(t) + w^j}{rk^i(t) + w^i} \le \frac{rk_0^j + w^j}{rk_0^i + w^i}$$

в случае задачи Коши (2.2) или (2.3) (для задач Коши (2.4) или (2.5) неравенство такое же при $w^1 = \ldots = w^H = w$). В самом деле, пусть $\mathbf{k}(t)$ – решение задачи Коши (2.2). Тогда возьмем величины дохода $rk^h(t) + w^h$ при $h = i, j$ и распишем их отношение, применяя формулу (2.7) из Замечания 8:

$$\frac{rk^j(t) + w^j}{rk^i(t) + w^i} = \frac{rk_0^j + w^j}{rk_0^i + w^i}\exp\left\{-\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^t \left(\varphi\left(\frac{rk^j(\tau) + w^j}{rK(\tau) + W}\right) - \varphi\left(\frac{rk^i(\tau) + w^i}{rK(\tau) + W}\right)\right)d\tau\right\}.$$

В силу Замечания 10 подынтегральное выражение неотрицательно, поэтому имеет место неравенство

$$\frac{rk^j(t) + w^j}{rk^i(t) + w^i} \le \frac{rk_0^j + w^j}{rk_0^i + w^i}.$$

Пусть теперь $\mathbf{k}(t)$ – решение задачи Коши (2.3). Поступим аналогичным образом для величин доходов $rk^h(t)+w^h$ при $h=i,j$, применив формулу (2.8) из Замечания 9:

$$\frac{rk^j(t)+w^j}{rk^i(t)+w^i}=\frac{rk_0^j+w^j}{rk_0^i+w^i}\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{r}{1-\beta}\int_0^t\min\left\{\varphi\left(\frac{rk^j(\tau)+w^j}{rK(\tau)+W}\right)-\varphi\left(\frac{rk^i(\tau)+w^i}{rK(\tau)+W}\right),1-\varphi\left(\frac{rk^i(\tau)+w^i}{rK(\tau)+W}\right)\right\}d\tau\right\}.$$

В силу Замечания 10 подынтегральное выражение также неотрицательно, поэтому $\frac{rk^j(t)+w^j}{rk^i(t)+w^i}\le\frac{rk_0^j+w^j}{rk_0^i+w^i}$.

Рассмотрим теперь задачу Коши (2.4). При $1\le i\le l<j\le H$ в силу Замечания 10 имеем $\frac{rk^i(t)+w}{rK(t)+wH}>\frac{1}{H}$, поэтому $\varphi\left(\frac{rk^i+w}{rK+wH}\right)<1$, и для $k^i(t)$ справедлива формула (2.7) из Замечания 8. Рассмотрим теперь уравнение при $h=j$. Так как $c_2\left(k^h,r\varphi\left(\frac{rk^h+w}{rK+wH}\right)\right)$ устроено как решение уравнения (1.10), причем $c_2\left(k^h,r\varphi\left(\frac{rk^h+w}{rK+wH}\right)\right)\ge w$, то имеем следующую оценку:

$$\frac{dk^j}{dt}(t)\le\frac{1-\varphi\left(\frac{rk^j(t)+w}{rK(t)+wH}\right)}{1-\beta}rk^j(t)+\frac{\left(1-\varphi\left(\frac{rk^j(t)+w}{rK(t)+wH}\right)\right)_+}{1-\beta}w\le$$
$$\le\frac{\left(1-\varphi\left(\frac{rk^j(t)+w}{rK(t)+wH}\right)\right)_+}{1-\beta}\left[rk^j(t)+w\right].$$

Следовательно, по лемме Гронуолла–Беллмана справедливо неравенство

$$rk^j(t)+w\le\left[rk_0^j+w\right]\exp\left\{\frac{r}{1-\beta}\int_0^t\left(1-\varphi\left(\frac{rk^j(\tau)+w}{rK(\tau)+wH}\right)\right)_+d\tau\right\},$$

откуда, используя формулу (2.7) при $h=i$, получаем неравенство

$$\frac{rk^j(t)+w}{rk^i(t)+w}\le\frac{rk_0^j+w}{rk_0^i+w}\cdot e^{-\frac{r}{1-\beta}\int_0^t\min\left\{\varphi\left(\frac{rk^j(\tau)+w}{rK(\tau)+wH}\right)-\varphi\left(\frac{rk^i(\tau)+w}{rK(\tau)+wH}\right),1-\varphi\left(\frac{rk^i(\tau)+w}{rK(\tau)+wH}\right)\right\}d\tau}.$$

В силу Замечания 10 подынтегральное выражение неотрицательно, вследствие чего справедливо неравенство $\frac{rk^j(t)+w}{rk^i(t)+w}\le\frac{rk_0^j+w}{rk_0^i+w}$.

Рассмотрим теперь задачу Коши (2.5). В силу Замечания 10 мы имеем справедливость неравенства $\rho^i(t)<r, i=1,\ldots,l$, откуда следует, что $\tau^i=+\infty$, $s(\rho^i,+\infty)=\frac{\rho^i-\beta r}{1-\beta},\eta(+\infty)=\frac{1}{r}$. Следовательно, $\frac{dk^i}{dt}=\frac{1-\varphi\left(\frac{rk^i+w}{rK+wH}\right)}{1-\beta}(rk^i+w)>0$, $i=1,\ldots,l$. Тогда

$$rk^i(t)+w=\left(rk_0^i+w\right)e^{\frac{r}{1-\beta}\int_0^t\left(1-\varphi\left(\frac{rk^i(\tau)+w}{rK(\tau)+wH}\right)\right)d\tau},\ i=1,\ldots,l.$$

Рассмотрим теперь $\frac{dk^j}{dt},j=\overline{l+1,H}$. В случае, если выполняется неравенство $\rho^j(t)\le r$, то есть, $\varphi\left(\frac{rk^j(t)+w}{rK(t)+wH}\right)\le 1$, то тогда выполняется равенство

$$\frac{dk^j}{dt}=\frac{1-\varphi\left(\frac{rk^j+w}{rK+wH}\right)}{1-\beta}\left(rk^j+w\right).$$

Если же выполняется неравенство $\rho^j(t) > r$, то есть, $\varphi\left(\frac{rk^j(t)+w}{rK(t)+wH}\right) > 1$, то можно рассмотреть три случая:

- $1 < \varphi\left(\frac{rk^j(t)+w}{rK(t)+wH}\right) < \beta + \frac{1-\beta}{\theta r}$, $\frac{k^j(t)}{k^j(t)+w\theta} > q^*\left(\beta, \theta, r, r\varphi\left(\frac{rk^j+w}{rK+wH}\right)\right)$. В этом случае, согласно Лемме 2.2, справедлива оценка (2.10), причем из нее следует, что $\frac{dk^j}{dt}(t) < 0$.
- $1 < \varphi\left(\frac{rk^j(t)+w}{rK(t)+wH}\right) < \beta + \frac{1-\beta}{\theta r}$, $\frac{k^j(t)}{k^j(t)+w\theta} \le q^*\left(\beta, \theta, r, r\varphi\left(\frac{rk^j+w}{rK+wH}\right)\right)$. В этом случае справедливо равенство
$$\dot{k^j}(t) = -\left(\frac{1}{\theta} - r\right) k^j(t) < 0.$$
- $\varphi\left(\frac{rk^j(t)+w}{rK(t)+wH}\right) \ge \beta + \frac{1-\beta}{\theta r}$. Этот случай может быть, если выполняется неравенство $\varphi(0) \ge \beta + \frac{1-\beta}{\theta r}$. Тогда справедливо равенство
$$\dot{k^j}(t) = -\left(\frac{1}{\theta} - r\right) k^j(t) < 0.$$

Как можем заметить, во всех трех случаях производная $\frac{dk^j}{dt}$ отрицательна, и ее можно ограничить сверху нулем. С другой стороны, нулю равно выражение $\frac{\left(1-\varphi\left(\frac{rk^j+w}{rK+wH}\right)\right)_+}{1-\beta}\left(rk^j(t)+w\right)$. Тогда в конечном итоге можно вывести следующую оценку:

$$\frac{dk^j}{dt} \le \frac{\left(1-\varphi\left(\frac{rk^j+w}{rK+wH}\right)\right)_+}{1-\beta}\left(rk^j+w\right). \tag{2.11}$$

Применяя лемму Гронуолла-Беллмана, получаем неравенство

$$rk^j(t) + w \le \left(rk_0^j + w\right) e^{\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^t \left(1-\varphi\left(\frac{rk^j(\tau)+w}{rK(\tau)+wH}\right)\right)_+ d\tau}.$$

Разделив обе части полученного неравенства на $rk^i(t) + w, i = 1, \dots, l$, имеем

$$\frac{rk^j(t)+w}{rk^i(t)+w} \le \frac{rk_0^j+w}{rk_0^i+w} \cdot e^{-\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^t \min\left\{\varphi\left(\frac{rk^j(\tau)+w}{rK(\tau)+wH}\right)-\varphi\left(\frac{rk^i(\tau)+w}{rK(\tau)+wH}\right), 1-\varphi\left(\frac{rk^i(\tau)+w}{rK(\tau)+wH}\right)\right\} d\tau}.$$

В силу неотрицательности подынтегрального выражения по Замечанию 10 вновь получаем оценку $\frac{rk^j(t)+w}{rk^i(t)+w} \le \frac{rk_0^j+w}{rk_0^i+w}$, $1 \le i \le l < j \le H$.

Далее, не акцентируя внимание на то, решением какой задачи Коши – (2.2) или (2.3) – является функция $\mathbf{k}(t)$, преобразуем неравенство, полученное при разных уровнях заработных плат. Домножив обе части неравенства на множитель $\frac{rk^i(t)+w^i}{rK(t)+W}$, получаем неравенство

$$\frac{rk^j(t)+w^j}{rK(t)+W} \le \frac{k_0^j + \frac{w^j}{r}}{k_0^i + \frac{w^i}{r}} \frac{rk^i(t)+w^i}{rK(t)+W}.$$

В свою очередь, домножив обе части полученного неравенства на -1 и прибавив слагаемое $\frac{rk^i(t)+w^i}{rK(t)+W}$, получаем неравенство

$$\frac{rk^i(t)+w^i}{rK(t)+W}-\frac{rk^j(t)+w^j}{rK(t)+W}\geq\frac{k_0^i-k_0^j+\frac{w^i-w^j}{r}}{k_0^i+\frac{w^i}{r}}\frac{rk^i(t)+w^i}{rK(t)+W}.$$

Наконец, положив $i=1$ и пользуясь тем, что по Замечанию 10 имеем $\frac{rk^1(t)+w^1}{rK(t)+W}>\frac{1}{H}$, выводим оценку

$$\frac{rk^1(t)+w^1}{rK(t)+W}-\frac{rk^j(t)+w^j}{rK(t)+W}>\frac{k_0^1-k_0^j+\frac{w^1-w^j}{r}}{k_0^1+\frac{w^1}{r}}\frac{1}{H}>0, j=\overline{l+1,H}. \tag{2.12}$$

Тогда для каждого $j=\overline{l+1,H}$ имеем

$$\varphi\left(\frac{rk^j(t)+w^j}{rK(t)+W}\right)-\varphi\left(\frac{rk^1(t)+w^1}{rK(t)+W}\right)>$$
$$>\varphi\left(\frac{rk^1(t)+w^1}{rK(t)+W}-\frac{k_0^1-k_0^j+\frac{w^1-w^j}{r}}{k_0^1+\frac{w^1}{r}}\frac{1}{H}\right)-\varphi\left(\frac{rk^1(t)+w^1}{rK(t)+W}\right)\geq$$
$$\geq\min_{x\in\left[\frac{1}{H},1\right]}\left[\varphi\left(x-\frac{k_0^1-k_0^j+\frac{w^1-w^j}{r}}{k_0^1+\frac{w^1}{r}}\frac{1}{H}\right)-\varphi(x)\right]=M_j>0.$$

Полученная константа M_j является положительной, так как в противном случае найдется точка $\tilde{x}\in\left[\frac{1}{H},1\right]$, такая что $M_j=\varphi\left(\tilde{x}-\frac{k_0^1-k_0^j+\frac{w^1-w^j}{r}}{k_0^1+\frac{w^1}{r}}\frac{1}{H}\right)-\varphi(\tilde{x})\leq 0$, откуда в силу строгого убывания функции $\varphi(\cdot)$ следует неравенство $rk_0^1+w^1\leq rk_0^j+w^j$, что противоречит условию $rk_0^1+w^1>rk_0^j+w^j$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Случай для задач Коши (2.4) и (2.5) с одинаковой заработной платой повторяет предыдущие рассуждения с точностью до замены величин $w^h, h=1,\ldots,H$, на w. □

Введем обозначение $K_{-l}(t)=\sum\limits_{h=l+1}^{H}k^h(t), W_{-l}=\sum\limits_{h=l+1}^{H}w^h$. Заметим, что в случае задач Коши (2.4) и (2.5) величина W_{-l} равна $w(H-l)$.

Напомним формулировку теоремы о дифференциальных неравенствах.

Теорема (Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, см. [16; 17])**.** Если при $t\in[t_0,t_1]$ существует решение задачи Коши $\frac{dx}{dt}=f(t,x), x(t_0)=x_0$, являющееся однозначной функцией t, и если функция $x_l(t)\in C^1[t_0,t_1]$ такова, что $\frac{dx_l}{dt}<f(t,x_l), x_l(t_0)\leq x_0$, то имеет место неравенство $x(t)>x_l(t)\ \forall t\in(t_0,t_1]$.

Замечание 13. В формулировке теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах допускается случай $t_1=+\infty$, если обе функции x_l, x существуют на $[t_0,+\infty)$ (см. [68, §5-6, Ch. 2]).

Лемма 2.4. Для любого $t\in(0,+\infty)$ справедлива оценка

$$\frac{rK_{-l}(t)+W_{-l}}{rK(t)+W}<R\left(t,\frac{M_{l+1}r}{1-\beta}\right) \tag{2.13}$$

в случае, если $\mathbf{k}(t)$ – решение задачи Коши (2.2), и оценка

$$\frac{rK_{-l}(t)+W_{-l}}{rK(t)+W} < R\left(t, \frac{\tilde{M}_{l+1}r}{1-\beta}\right) \tag{2.14}$$

в случае, если $\mathbf{k}(t)$ – решение задачи Коши (2.3), (2.4) или (2.5). Здесь

$$R(t,a) = \frac{1}{1+\left(\frac{rK_0+W}{rK_{-l,0}+W_{-l}}-1\right)e^{at}}, \tag{2.15}$$

$$K_{-l,0} = \sum_{h=l+1}^{H} k_0^h, \quad K_0 = lk_0^1 + K_{-l,0}, \quad \tilde{M}_{l+1} = \min\left\{M_{l+1}, 1-\varphi\left(\frac{1}{H}+\gamma\right)\right\},$$

и $\gamma = 0$, если $\varphi\left(\frac{1}{H}\right) < 1$, и $\exists \gamma \in \left(0, \frac{1-\frac{1}{H}}{2}\right)$, если $\varphi\left(\frac{1}{H}\right) = 1$.

Доказательство. Заметим, что так как по Лемме 2.3 для каждого $h = \overline{l+1,H}$ существует константа $M_h > 0$ такая, что $\varphi\left(\frac{rk^h+w^h}{rK+W}\right) - \varphi\left(\frac{rk^1+w^1}{rK+W}\right) > M_h$, а также по Замечанию 10 $\frac{rk^{l+1}+w^{l+1}}{rK+W} \geq \frac{rk^h+w^h}{rK+W}$, то для любого $h = \overline{l+1,H}$ справедливо также и неравенство $\varphi\left(\frac{rk^h+w^h}{rK+W}\right) - \varphi\left(\frac{rk^1+w^1}{rK+W}\right) > M_{l+1}$.

Вычислим производную

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{rK_{-l}+W_{-l}}{rK+W}\right) = \frac{l}{(rK+W)^2}\sum_{h=l+1}^{H}\left(\frac{d\left(rk^h+w^h\right)}{dt}\left(rk^1+w^1\right) - \left(rk^h+w^h\right)\frac{d\left(rk^1+w^1\right)}{dt}\right).$$

В случае задачи Коши (2.2) имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{d\left(rk^h+w^h\right)}{dt}\left(rk^1+w^1\right) - \left(rk^h+w^h\right)\frac{d\left(rk^1+w^1\right)}{dt} = \\
&= r\frac{1-\varphi\left(\frac{rk^h+w^h}{rK+W}\right)}{1-\beta}\left(rk^h+w^h\right)\left(rk^1+w^1\right) - r\frac{1-\varphi\left(\frac{rk^1+w^1}{rK+W}\right)}{1-\beta}\left(rk^1+w^1\right)\left(rk^h+w^h\right) = \\
&= -\frac{r}{1-\beta}\left(\varphi\left(\frac{rk^h+w^h}{rK+W}\right) - \varphi\left(\frac{rk^1+w^1}{rK+W}\right)\right)\left(rk^1+w^1\right)\left(rk^h+w^h\right) < \\
&< -\frac{M_{l+1}r}{1-\beta}\left(rk^h+w^h\right)\left(rk^1+w^1\right),
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{rK_{-l}+W_{-l}}{rK+W}\right) &< \frac{l}{K^2}\sum_{h=l+1}^{H}\left[-\frac{M_{l+1}r}{1-\beta}\left(rk^h+w^h\right)\left(rk^1+w^1\right)\right] = \\
&= -\frac{M_{l+1}r}{1-\beta}\cdot\frac{rK_{-l}+W_{-l}}{rK+W}\left(1-\frac{rK_{-l}+W_{-l}}{rK+W}\right).
\end{aligned}$$

В случае задачи Коши (2.3) имеем

$$\frac{d\left(rk^h+w^h\right)}{dt}\left(rk^1+w^1\right)-\left(rk^h+w^h\right)\frac{d\left(rk^1+w^1\right)}{dt}=$$

$$=r\frac{\left(1-\varphi\left(\frac{rk^h+w^h}{rK+W}\right)\right)_+}{1-\beta}\left(rk^h+w^h\right)\left(rk^1+w^1\right)-r\frac{1-\varphi\left(\frac{rk^1+w^1}{rK+W}\right)}{1-\beta}\left(rk^1+w^1\right)\left(rk^h+w^h\right)=$$

$$=-\frac{r}{1-\beta}\min\left\{\varphi\left(\frac{rk^h+w^h}{rK+W}\right)-\varphi\left(\frac{rk^1+w^1}{rK+W}\right),1-\varphi\left(\frac{rk^1+w^1}{rK+W}\right)\right\}\left(rk^1+w^1\right)\left(rk^h+w^h\right)<$$

$$<-\frac{\tilde{M}_{l+1}r}{1-\beta}\left(rk^h+w^h\right)\left(rk^1+w^1\right),$$

откуда следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{rK_{-l}+W_{-l}}{rK+W}\right)<\frac{l}{K^2}\sum_{h=l+1}^{H}\left[-\frac{\tilde{M}_{l+1}r}{1-\beta}\left(rk^h+w^h\right)\left(rk^1+w^1\right)\right]=$$

$$=-\frac{\tilde{M}_{l+1}r}{1-\beta}\cdot\frac{rK_{-l}+W_{-l}}{rK+W}\left(1-\frac{rK_{-l}+W_{-l}}{rK+W}\right).$$

В случае задачи Коши (2.4) имеем

$$\frac{d\left(rk^h+w\right)}{dt}\left(rk^1+w\right)-\left(rk^h+w\right)\frac{d\left(rk^1+w\right)}{dt}=r\frac{1-\varphi\left(\frac{rk^h+w}{rK+wH}\right)}{1-\beta}\left(rk^h+w\right)\left(rk^1+w\right)+$$

$$+r\frac{\left(\varphi\left(\frac{rk^h+w}{rK+wH}\right)-1\right)_+}{1-\beta}w\left(\frac{w}{c^h}\right)^{\frac{1-\beta}{\varphi\left(\frac{rk^h+w}{rK+wH}\right)-1}}\left(rk^1+w\right)-r\frac{1-\varphi\left(\frac{rk^1+w}{rK+wH}\right)}{1-\beta}\left(rk^1+w\right)\left(rk^h+w\right)\leq$$

$$\leq r\frac{1-\varphi\left(\frac{rk^h+w}{rK+wH}\right)}{1-\beta}\left(rk^h+w\right)\left(rk^1+w\right)+r\frac{\left(\varphi\left(\frac{rk^h+w}{rK+wH}\right)-1\right)_+}{1-\beta}w\left(rk^1+w\right)-$$

$$-r\frac{1-\varphi\left(\frac{rk^1+w}{rK+wH}\right)}{1-\beta}\left(rk^1+w\right)\left(rk^h+w\right)=-r\frac{\varphi\left(\frac{rk^h+w}{rK+wH}\right)-\varphi\left(\frac{rk^1+w}{rK+wH}\right)}{1-\beta}\left(rk^1+w\right)\left(rk^h+w\right)+$$

$$+r\frac{\left(\varphi\left(\frac{rk^h+w}{rK+wH}\right)-1\right)_+}{1-\beta}w\left(rk^1+w\right)<$$

$$<-r\frac{\min\left\{\varphi\left(\frac{rk^h+w}{rK+wH}\right)-\varphi\left(\frac{rk^1+w}{rK+wH}\right),1-\varphi\left(\frac{rk^1+w}{rK+wH}\right)\right\}}{1-\beta}\left(rk^h+w\right)\left(rk^1+w\right)<$$

$$<-\frac{r\tilde{M}_{l+1}}{1-\beta}\left(rk^h+w\right)\left(rk^1+w\right),$$

откуда получаем, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{rK_{-l}+w\left(H-l\right)}{rK+wH}\right)<\frac{l}{\left(rK+wH\right)^2}\sum_{h=l+1}^{H}\left[-\frac{r\tilde{M}_{l+1}}{1-\beta}\left(rk^h+w\right)\left(rk^1+w\right)\right]=$$

$$=-\frac{r\tilde{M}_{l+1}}{1-\beta}\cdot\frac{rK_{-l}+w\left(H-l\right)}{rK+wH}\left(1-\frac{rK_{-l}+w\left(H-l\right)}{rK+wH}\right).$$

Рассмотрим наконец случай задачи Коши (2.5). Здесь мы используем верхнюю оценку

(2.11) для $\frac{dk^h}{dt}$, полученную ранее в ходе доказательства Леммы 2.3:

$$\frac{d\left(rk^h+w\right)}{dt}\left(rk^1+w\right)-\left(rk^h+w\right)\frac{d\left(rk^1+w\right)}{dt}\leq$$

$$\leq r\frac{\left(1-\varphi\left(\frac{rk^h+w}{rK+wH}\right)\right)_+}{1-\beta}\left(rk^h+w\right)\left(rk^1+w\right)-r\frac{1-\varphi\left(\frac{rk^1+w}{rK+wH}\right)}{1-\beta}\left(rk^1+w\right)\left(rk^h+w\right)=$$

$$=-r\frac{\min\left\{\varphi\left(\frac{rk^h+w}{rK+wH}\right)-\varphi\left(\frac{rk^1+w}{rK+wH}\right),1-\varphi\left(\frac{rk^1+w}{rK+wH}\right)\right\}}{1-\beta}\left(rk^1+w\right)\left(rk^h+w\right)<$$

$$<-\frac{\tilde{M}_{l+1}r}{1-\beta}\left(rk^1+w\right)\left(rk^h+w\right).$$

Вводя для удобства обозначение $x\left(t\right)=\frac{rK_{-l}(t)+W_{-l}}{rK(t)+W}$,во всех четырех случаях мы получаем дифференциальное неравенство вида

$$\frac{dx}{dt}\left(t\right)\leq -ax\left(t\right)\left(1-x\left(t\right)\right).$$

По теореме Чаплыгина решением этого неравенства является функция, которая удовлетворяет логистическому уравнению $\frac{dy}{dt}=-ay\left(1-y\right)$ с начальным условием $y\left(0\right)=\frac{rK_{-l,0}+W_{-l}}{rK_0+W}$. Его можно решить, перейдя посредством замены $z\left(t\right)=\frac{1}{y(t)}$ к линейному дифференциальному уравнению $\frac{dz}{dt}=az-a$, решение которого, в свою очередь, определяется функцией $z\left(t\right)=\left(z_0-1\right)e^{at}+1$. Так как при $t=0$ значение константы z_0 определяется выражением $z_0=\frac{1}{y(0)}=\frac{rK_0+W}{rK_{-l,0}+W_{-l}}$, получаем, что

$$y\left(t\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{rK_0+W}{rK_{-l,0}+W_{-l}}-1\right)e^{at}}\equiv R\left(t,a\right).$$

Следовательно, по теореме Чаплыгина при $a=\frac{M_{l+1}r}{1-\beta}$ для задачи Коши (2.2) справедлива оценка (2.13), а при $a=\frac{\tilde{M}_{l+1}r}{1-\beta}$ для задач Коши (2.3), (2.4) и (2.5) – оценка (2.14), что и требовалось доказать. □

Лемма 2.5. Для решений всех четырех задач Коши справедливы соотношения

$$k^h\left(t\right)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty,\ h=\overline{1,l},\ K\left(t\right)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty.$$

Кроме того, для любого $a>0$

$$R\left(t,a\right)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

Доказательство. Разберем сначала случай задач Коши (2.2) и (2.3) с разными заработными платами. В силу Замечаний 8, 9, 10 можно вывести неравенство

$$\frac{d}{dt}\left(rk^1+w^1\right)\geq r\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{H}\right)}{1-\beta}\left(rk^1+w^1\right)>0,$$

откуда по лемме Гронуолла–Беллмана следует, что при $\varphi\left(\frac{1}{H}\right) < 1$ получим

$$rk^1(t) + w^1 \geq \left(rk^1_0 + w^1\right) \exp\left\{r\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{H}\right)}{1-\beta}t\right\} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty.$$

Следовательно, $rk^1(t) + w^1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. а поскольку в случае задачи Коши (2.2) справедливо неравенство $K(t) \geq lk^1(t) - \frac{W_{-l}}{r}$, а в случае задачи Коши (2.3) справедливо неравенство $K(t) \geq lk^1(t)$, то и $K(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. Случай $\varphi\left(\frac{1}{H}\right) = 1$ повторяет предыдущие рассуждения с точностью до замены значения $\varphi\left(\frac{1}{H}\right)$ на $\varphi\left(\frac{1}{H} + \gamma\right)$, где $\gamma \in \left(0, \frac{1-\frac{1}{H}}{2}\right)$ – такая константа, что $\frac{rk^1+w^1}{rK+W} \geq \frac{1}{H} + \gamma, t \in [0, +\infty)$. Константа γ положительна, так как в противном случае вариант $\frac{rk^1+w^1}{rK+W} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{H}$ возможен тогда и только тогда, когда $\frac{rk^j+w^j}{rK+W} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{H}, j = \overline{2, H}$, т.е. $\frac{rk^1+w^1}{rK+W} - \frac{rk^j+w^j}{rK+W} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, что неверно в силу доказанной в Лемме 2.3 оценки (2.12).

Случай задач Коши (2.4) и (2.5) с одинаковым уровнем заработных плат доказывается абсолютно аналогично с той лишь разницей, что всюду выше $w^1 = \ldots = w^H = w$, и что для задач Коши (2.4), (2.5) для суммарного капитала справедливо неравенство $K(t) > lk^1(t)$.

Наконец, так как $\frac{rK_0+W}{rK_{-l,0}+W_{-l}} > 1$, то поскольку $e^{at} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ при любом $a > 0$, имеем

$$R(t, a) = \frac{1}{1 + \left(\frac{rK_0+W}{rK_{-l,0}+W_{-l}} - 1\right)e^{at}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

□

Теперь мы готовы доказать основную теорему.

2.3. Доказательство теоремы об асимптотике решений

1. Соотношение $k^h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, $h = \overline{1, l}$, следует из Леммы 2.5.

2. Покажем сходимость для величин $\frac{rk^h+w^h}{rK+W}, h = 1, \ldots, H$ в случае задач Коши (2.2) и (2.3). В силу Леммы 2.4 и Замечания 8 в случае задачи Коши (2.2) справедливо двойное неравенство

$$0 \leq \frac{rK_{-l}(t) + W_{-l}}{rK(t) + W} \leq R\left(t, \frac{M_{l+1}r}{1-\beta}\right),$$

а в случае задачи Коши (2.3) – двойное неравенство

$$0 \leq \frac{rK_{-l}(t) + W_{-l}}{rK(t) + W} \leq R\left(t, \frac{\tilde{M}_{l+1}r}{1-\beta}\right).$$

Правая часть этих неравенств по Лемме 2.5 сходится к нулю, откуда следует, что $\frac{rK_{-l}(t)+W_{-l}}{rK(t)+W} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Так как $rk^h(t) + w^h > 0, h = 1, \ldots, H$, и $rK(t) + W \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, то тогда и $\frac{rk^h(t)+w^h}{rK(t)+W} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, h = \overline{l+1,H}$. Следовательно, поскольку $\sum\limits_{h=1}^{H} \frac{rk^h(t)+w^h}{rK(t)+W} = 1$, имеем $\frac{rk^h(t)+w^h}{rK(t)+W} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{l}$, $h = \overline{1,l}$.

3. Случай задач Коши (2.4), (2.5) повторяет рассуждения предыдущего пункта с той лишь разницей, что $w^1 = \ldots = w^H = w$ и для рассматриваемых задач Коши выполняется двойное неравенство

$$0 \leq \frac{rK_{-l}(t) + w(H-l)}{rK(t) + wH} \leq R\left(t, \frac{\tilde{M}_{l+1}r}{1-\beta}\right).$$

4. Нам осталось показать в случае каждой из задач Коши выполнение соответствующих соотношений для функций $k^h(t)$, $h = l+1, \ldots, H$.

   Рассмотрим задачу Коши (2.2), тогда так как $\frac{rk^h(t)+w^h}{rK(t)+W} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, $h = \overline{l+1,H}$, то в силу непрерывности функции $\varphi(\cdot)$ имеем $\varphi\left(\frac{rk^h(t)+w^h}{rK(t)+W}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \varphi(0) > 1$. Следовательно, найдется момент времени $\tau^{**} \in [0,+\infty)$ такой, что при $t > \tau^{**}$ выполняется неравенство $1 - \varphi\left(\frac{rk^h(t)+w^h}{rK(t)+W}\right) < -\frac{\varphi(0)-1}{2}$.

   Тогда, пользуясь представлением (2.7), имеем

$$0 < rk^h(t) + w^h \leq \left[rk_0^h + w^h\right] \exp\left\{\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^{\tau^{**}}\left(1 - \varphi\left(\frac{rk^h(\tau)+w^h}{rK(\tau)+W}\right)\right)d\tau\right\}\times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{r}{1-\beta}\frac{\varphi(0)-1}{2}(t-\tau^{**})\right\} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

   откуда следует, что $k^h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\frac{w^h}{r}$, $h = l+1, \ldots, H$.

5. Рассмотрим теперь задачу Коши (2.3). Так как $\frac{rk^h(t)+w^h}{rK(t)+W} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, $h = \overline{l+1,H}$, то найдется такой момент времени $\tau^{**} \in [0,+\infty)$, что для любых $t > \tau^{**}$ выполняется следующее неравенство: $\varphi\left(\frac{rk^h(t)+w^h}{rK(t)+W}\right) > 1$, $h = \overline{l+1,H}$. Но тогда $\frac{dk^h}{dt}(t) = 0$ $\forall t > \tau^{**}$, откуда следует, что $k^h(t) \equiv k^h(\tau^{**})$, $t \geq \tau^{**}$, $h = \overline{l+1,H}$. Следовательно, положив $C = k^{l+1}(\tau^{**}) + \frac{w^{l+1} - \min\limits_{h=\overline{l+1,H}} w^h}{r}$, в силу Замечания 8 получаем, что $k^h(t) \leq C$ $\forall t \in [0,+\infty)$, $h = \overline{l+1,H}$.

6. Нам осталось рассмотреть задачи Коши (2.4) и (2.5).

   Так как для обеих задач Коши $\frac{rk^h(t)+w}{rK(t)+wH} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, $h = \overline{l+1,H}$, то по непрерывности функции $\varphi(\cdot)$ имеем $\varphi\left(\frac{rk^h(t)+w}{rK(t)+wH}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \varphi(0) > 1$. Следовательно, для каждой задачи Коши найдется момент времени $\tau^{**} \in [0,+\infty)$ такой, что при $t > \tau^{**}$ выполняется неравенство $1 - \varphi\left(\frac{rk^h(t)+w}{rK(t)+wH}\right) < -\frac{\varphi(0)-1}{2}$.

Но тогда для задачи Коши (2.4) при $t > \tau^{**}$ справедливо дифференциальное неравенство

$$\frac{dk^h}{dt} < -\frac{\varphi(0)-1}{2}\frac{r}{1-\beta}k^h,$$

из которого по лемме Гронуолла–Беллмана следует, что

$$0 \le k^h(t) \le k^h(\tau^{**})\exp\left\{-\frac{r}{1-\beta}\frac{\varphi(0)-1}{2}(t-\tau^{**})\right\} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

откуда получаем, что в случае задачи Коши (2.4) $k^h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

В случае задачи Коши (2.5) для каждого $h = l+1,\dots,H$ в момент времени $t \in [\tau^{**}, +\infty)$ либо выполняется оценка (2.10) из Леммы 2.2, причем

$$\frac{dk^h}{dt}(t) < -\frac{\varphi\left(\frac{rk^h(t)+w}{rK(t)+wH}\right)-1}{1-\beta}rk^h(t) < -r\frac{\varphi(0)-1}{2(1-\beta)}k^h(t),$$

либо выполняется равенство

$$\frac{dk^h}{dt}(t) = -\left(\frac{1}{\theta}-r\right)k^h(t).$$

Тогда для каждого $h = l+1,\dots,H$ достаточно ограничиться оценкой производной $\frac{dk^h}{dt}$ на промежутке $[\tau^{**}, +\infty)$ вида

$$\frac{dk^h}{dt}(t) \le \max\left\{-\frac{\varphi(0)-1}{2(1-\beta)}rk^h(t), -\left(\frac{1}{\theta}-r\right)k^h(t)\right\} = -\min\left\{\frac{\varphi(0)-1}{2(1-\beta)}r, \frac{1}{\theta}-r\right\}k^h(t).$$

Следовательно, применяя лемму Гронуолла-Беллмана, получаем, что

$$0 \le k^h(t) < k^h(\tau^{**})e^{-\min\left\{\frac{\varphi(0)-1}{2(1-\beta)}r, \frac{1}{\theta}-r\right\}(t-\tau^{**})} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, h = l+1,\dots,H,$$

откуда следует, что $k^h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, h = l+1,\dots,H$.

Теорема доказана.

Замечание 14. Результат, полученный для модели с ограниченной ликвидностью капитала, совпадает с тем, что был выведен для модели Рамсея-Беккера, и может быть проинтерпретирован следующим образом: домашние хозяйства делятся на два класса – класс собственников и класс работников. Данное разделение качественно отличается от того, что получается в модели Рамсея-Бьюли, где вторая группа домохозяйств представляет собой группу должников, а также от результата для модели с неликвидным капиталом при $\theta = \frac{1}{r}$, где все домохозяйства оказываются собственниками, однако первая группа неограниченно накапливает капитал, в то время как второй группе удается накопить лишь ограниченное количество капитала.

Глава 3

Смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения, моделирующего перераспределение доходов государством

Данную главу можно логически разделить на две части. В первой части, а именно в параграфе 3.1, мы приводим начальные сведения, касающиеся таких основных понятий, как кривая Лоренца, мажоризация по Лоренцу, передачи Пигу-Дальтона и индекс неравенства. Кроме того, мы устанавливаем в параграфе 3.2, что для ранее рассмотренных в прошлой главе трех моделей социальной динамики, а именно: модели Рамсея-Бьюли, модели Рамсея-Беккера и модели с неликвидным капиталом, существует связь между индексом неравенства Джини и функцией Ляпунова.

Во второй части главы мы поговорим о том, как исследовать влияние государственной политики налогообложения и субсидирования на социальную динамику. Идея заключается в переходе к континуальному аналогу модели Рамсея-Бьюли, по которому мы составляем модель эволюции кривой Лоренца, описывающей распределение доходов между экономическими агентами. О переходе к континуальной модели Рамсея-Бьюли рассказывается в параграфе 3.3. Там же доказывается, что решение уравнения модели удовлетворяет свойству межвременной мажоризации по Лоренцу, т.е. если взять кривую Лоренца в два разных момента времени, то более поздняя кривая Лоренца мажорирует по Лоренцу более раннюю кривую.

Для уравнения динамики кривой Лоренца мы вводим в параграфе 3.4 функцию перераспределения доходов, реализующую систему налогов и субсидий и порождающую выбранное социальным государством стационарное распределение доходов. Модифицированное уравнение динамики в совокупности с начально-краевыми условиями образует смешанную задачу для интегро-дифференциального уравнения. В параграфе 3.5 исследуем такие вопросы, как существование и единственность решения задачи, глобальное сохранение решением свойств кривой Лоренца, а также единственность стационарного решения основного уравнения и его асимптотическую устойчивость.

В параграфе 3.6 приводятся численные эксперименты.

3.1. Индекс неравенства Джини и кривая Лоренца

Проблемы расслоения населения по доходам обсуждаются в экономической литературе с начала XX века. В 1905 г. американский статистик М. Лоренц разработал подход к измерению неравенства в распределении доходов между домашними хозяйствами, который позволял анализировать изменение неравенства в динамике и сравнивать уровень неравенства в разных экономических сообществах. Для этого измерение неравенства не должно зависеть от абсолютных величин доходов, поскольку в разных экономических сообществах доходы могут измеряться в различных денежных единицах и в разные моменты времени покупательная способность денег также различна. Кроме того, неравенство должно определяться распределением доходов между домашними хозяйствами и не изменяться при перестановке доходов между ними. Следуя М. Лоренцу, рассмотрим сообщество из H домашних хозяйств. Обозначим через y_i доход i-го домашнего хозяйства. Вектор $y = (y_1, \ldots, y_H)$ задает распределение совокупного дохода $\sum\limits_{i=1}^{H} y_i$ между домашними хозяйствами. Поскольку измерение неравенства не зависит от перестановки доходов, т.е. компонент вектора y, построим перестановку σ, такую, что $y_{\sigma(1)} \leq \ldots \leq y_{\sigma(H)}$. Рассмотрим на плоскости точки с координатами $\left(\frac{m}{H}, u_m\right)$, $m = 0, \ldots, H$, где $u_0 = 0$, $u_m = \sum\limits_{i=1}^{m} y_{\sigma(i)} \Big/ \sum\limits_{j=1}^{H} y_j$, $m = 1, \ldots, H$. Все эти точки лежат внутри единичного квадрата $\{(x_1, x_2)\, | x_1 \in [0,1]\,,\ x_2 \in [0,1]\,\}$. Соединяя соседние построенные точки отрезками, получим кривую Лоренца.

На множестве распределений доходов вводится следующее отношение частичного порядка.

Определение 7. Будем говорить, что распределение доходов $y^1 = (y_1^1, \ldots, y_H^1) \geq 0$ мажорирует по Лоренцу распределение доходов $y^2 = (y_1^2, \ldots, y_H^2) \geq 0$, если выполняются следующие условия:

1. $\sum\limits_{j=1}^{H} y_j^1 = \sum\limits_{j=1}^{H} y_j^2$,
2. $y_{\sigma(1)}^1 \leq \ldots \leq y_{\sigma(H)}^1$,
   $y_{\pi(1)}^2 \leq \ldots \leq y_{\pi(H)}^2$,
3. $\sum\limits_{j=1}^{m} y_{\sigma(j)}^1 \leq \sum\limits_{j=1}^{m} y_{\pi(j)}^2$, $m = 1, \ldots, H$.

Мажоризация по Лоренцу также допускает возможность геометрической интерпретации: так, распределение доходов y^1 мажорирует по Лоренцу распределение доходов y^2 ($y^1 \succ y^2$), если кривая Лоренца, построенная по распределению доходов y^1, находится не выше кривой Лоренца, построенной по распределению доходов y^2 ($L\,(y^1) \leq L\,(y^2)$).

Равномерное распределение доходов, при котором

$$y_i = \frac{1}{H}\sum_{j=1}^{H} y_j,\ i = 1,\dots,H,$$

мажорируется любым другим распределением доходов. Ему соответствует кривая Лоренца, совпадающая с диагональю квадрата, соединяющей вершины $(0,0)$, $(1,1)$. Распределение

$$y_{\sigma(1)} = \ldots = y_{\sigma(H-1)} = 0,\ y_{\sigma(H)} = \sum_{j=1}^{H} y_j > 0,$$

при котором весь совокупный доход принадлежит самому богатому домашнему хозяйству, мажорирует любое другое распределение доходов.

Кривые Лоренца используются для измерения неравенства в распределении доходов статистическими службами многих стран. В первой трети XX века была разработана математическая теория, связавшая мажоризацию по Лоренцу с перераспределением доходов, стохастическим доминированием и «отвращением к риску» (см. подробнее [55]). Так, с точки зрения вопроса перераспределения доходов проблема неравенства изучалась в кембриджской экономической школе. Представитель этой школы А. Пигу высказал идею, которая была впоследствии развита британским экономистом Х. Дальтоном и заключается в том, что при наличии двух получателей дохода передача дохода от более богатого к более бедному может сокращать неравенство. Эта идея была формализована в виде передачи Пигу-Дальтона.

Определение 8. Будем говорить, что вектор $y' = (y'_1,\dots,y'_H) \geq 0$ получен из вектора $y = (y_1,\dots,y_H) \geq 0$ с помощью передачи Пигу-Дальтона, если $\exists\, 1 \leq k,l \leq H$: $y_k = \rho+\tau$, $y_l = \rho-\tau$, $y'_k = \rho+\sigma$, $y'_l = \rho-\sigma$, где $0 \leq \sigma < \tau \leq \rho$, и $y'_j = y_j$ при $j \neq k,l$.

Сформулируем теорему мажоризации.

Теорема (см. [55])**.** Пусть $y = (y_1,\dots,y_H) \geq 0, y' = (y'_1,\dots,y'_H) \geq 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. y мажорирует по Лоренцу y';

2. $\forall\, a_1 > 0,\dots,a_H > 0$ справедливо неравенство

   $$F_y(a_1,\dots,a_H) \geq F_{y'}(a_1,\dots,a_H),$$

   где $F_y(a_1,\dots,a_H) = \frac{1}{H!}\sum_{\pi} a_1^{y_{\pi(1)}} a_2^{y_{\pi(2)}} \ldots a_H^{y_{\pi(H)}}$;

3. y' может быть получен из y с помощью конечного числа передач Пигу-Дальтона и перестановки компонент;

4. y стохастически доминирует y', т.е. существует такая неотрицательная матрица $P \in \mathbb{R}_{+}^{H\times H}$, удовлетворяющая соотношениям $P^{T}e = e$, $Pe = e$, где $e = (1,\ldots,1)^{T} \in \mathbb{R}^{H}$, что выполняется равенство $y' = Py$;

5. для любой выпуклой непрерывной функции $\varphi(x)$ справедливо неравенство
$$\sum_{i=1}^{H} \varphi(y'_i) \leq \sum_{i=1}^{H} \varphi(y_i).$$

Утверждение 2 в теореме мажоризации предлагает альтернативный способ сравнения распределений доходов с помощью функций $F_y(a_1,\ldots,a_H)$, которые согласованы с мажоризацией по Лоренцу, так что у мажорирующего распределения доходов значение функции должно быть не меньшим. Такие функции используются для численного измерения неравенства и называются *индексами неравенства.* Одним из наиболее распространенных индексов неравенства является индекс Джини, который равняется удвоенной площади между кривой Лоренца и диагональю единичного квадрата, соединяющей его вершины $(0,0)$ и $(1,1)$. Для распределения доходов $y = (y_1,\ldots,y_H)$ индекс Джини равен
$$G(y_1,\ldots,y_H) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{H}\sum\limits_{j=1}^{H}|y_i - y_j|}{2H^2\overline{y}}, \quad \overline{y} = \frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H} y_i.$$
Если перестановка σ такая, что $y_{\sigma(1)} \leq y_{\sigma(2)} \leq \ldots y_{\sigma(H)}$, то выражение для индекса имеет вид
$$G(y_1,\ldots,y_H) = \frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}(2i - H - 1)\frac{y_{\sigma(i)}}{\hat{y}}, \quad \hat{y} = \sum_{j=1}^{H} y_j.$$
Индекс Джини равномерного распределения доходов равен нулю. Для распределения доходов $y^* = (y_1^*,\ldots,y_H^*)$, при котором весь доход достается самому богатому домашнему хозяйству, индекс Джини принимает максимальное значение $G^* = G(y_1^*,\ldots,y_H^*) = \frac{H-1}{H}$.

3.2. Связь индекса неравенства Джини и функции Ляпунова

Положим
$$y_i = \frac{rk^{H+1-i} + w^{H+1-i}}{rK + W} \geq 0,\ i = 1,\ldots,H.$$
Заметим, что $\hat{y} = \sum\limits_{j=1}^{H} y_j = 1$. Согласно Замечанию 10 область
$$\Gamma = \left\{\left(k^1,\ldots,k^H\right)\middle|rk^1 + w^1 = rk^2 + w^2 = \ldots = rk^l + w^l > rk^{l+1} + w^{l+1} \geq \ldots \geq rk^H + w^H\right\}$$

является «ловушкой» для задач Коши (2.2), (2.3) и задачи Коши (2.4) при $w^1 = \ldots = w^H = w$, т.е. если $\left(k_0^1, \ldots, k_0^H\right) \in \Gamma$, то $\left(k^1(t), \ldots, k^H(t)\right) \in \Gamma$ при $t \in [0, +\infty)$. Положим

$$\Lambda = \left\{ (y_1, \ldots, y_H) \left| y_i = \frac{rk^{H+1-i} + w^{H+1-i}}{rK + W} \geq 0,\ i = 1, \ldots, H,\ \left(k^1, \ldots, k^H\right) \in \Gamma \right. \right\}.$$

Динамической траектории $\left(k^1(t), \ldots, k^H(t)\right) \in \Gamma$ будем ставить в соответствие траекторию $(y_1(t), \ldots, y_H(t)) \in \Lambda$, по которой строится динамика кривых Лоренца. Всем трем системам (2.2), (2.3) и (2.4) соответствует единственная стационарная траектория $\hat{y}^* = (\hat{y}_1^*, \ldots, \hat{y}_H^*)$, где $\hat{y}_H^* = \ldots = \hat{y}_{H-l+1}^* = \frac{1}{l}$, $\hat{y}_i^* = 0$, $i = 1, \ldots, H - l$, в области Λ. Индекс Джини принимает максимальное в области Λ значение на распределении $\hat{y}^*$, равное $\hat{G}^* = \frac{H-l}{H}$.

Рассмотрим в области Λ функцию

$$V(y_1, \ldots, y_H) = \hat{G}^* - G(y_1, \ldots, y_H) = \hat{G}^* - \frac{1}{H} \sum_{i=1}^{H} (2i - H - 1)\, y_i.$$

Функция $V(y_1, \ldots, y_H) > 0$ при $(y_1, \ldots, y_H) \in \Lambda \setminus \{\hat{y}^*\}$, $V(\hat{y}^*) = 0$, и непрерывно дифференцируема в области Λ.

Сформулируем следующее предположение.

Предположение 2. Функция $\varphi(x)$ вогнута на отрезке $[0, 1]$.

Теорема 3.1. Пусть $\left(k^1(t), \ldots, k^H(t)\right) \in \Gamma$ является решением либо задачи Коши (2.2) (модель Рамсея–Бьюли), либо задачи Коши (2.3) (модель с неликвидным капиталом), либо задачи Коши (2.4) (модель Рамсея–Беккера). Пусть также для функции $\varphi(\cdot)$ выполнено Предположение 1, а в случае модели Рамсея–Беккера дополнительно выполнено Предположение 2. Тогда

$$\frac{d}{dt} V\left(\frac{rk^H(t) + w^H}{rK(t) + W}, \ldots, \frac{rk^{H+1-i}(t) + w^{H+1-i}}{rK(t) + W}, \ldots, \frac{rk^1(t) + w^1}{rK(t) + W}\right) < 0.$$

Замечание 15. Положение равновесия $\hat{y}^*$ является глобально асимптотически устойчивым по Ляпунову в области Λ, а построенная по индексу Джини функция

$$V(y_1, \ldots, y_H) = \hat{G}^* - G(y_1, \ldots, y_H)$$

является функцией Ляпунова в области Λ.

Доказательство Теоремы 3.1. Пусть

$$\left(\frac{rk_0^H + w^H}{rK_0 + W}, \ldots, \frac{rk_0^{H+1-i} + w^{H+1-i}}{rK_0 + W}, \ldots, \frac{rk_0^1 + w^1}{rK_0 + W}\right) \in \Gamma.$$

Тогда имеем

$$\left(\frac{rk^H(t) + w^H}{rK(t) + W}, \ldots, \frac{rk^{H+1-i}(t) + w^{H+1-i}}{rK(t) + W}, \ldots, \frac{rk^1(t) + w^1}{rK(t) + W}\right) \in \Gamma.$$

Вычислим производную

$$\frac{d}{dt}V\left(\frac{rk^H(t)+w^H}{rK(t)+W},\ldots,\frac{rk^{H+1-i}(t)+w^{H+1-i}}{rK(t)+W},\ldots,\frac{rk^1(t)+w^1}{rK(t)+W}\right)=$$

$$=-\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}(H+1-2i)\frac{1}{(rK(t)+W)^2}\times$$

$$\times\left(\frac{d\left(rk^i(t)+w^i\right)}{dt}(rK(t)+W)-\frac{d\left(rK(t)+W\right)}{dt}\left(rk^i(t)+w^i\right)\right).$$

В случае модели Рамсея–Бьюли, т.е. задачи Коши (2.2) имеем, что

$$\frac{d}{dt}V\left(\frac{rk^H+w^H}{rK+W},\ldots,\frac{rk^{H+1-i}+w^{H+1-i}}{rK+W},\ldots,\frac{rk^1+w^1}{rK+W}\right)=$$

$$=-\frac{r}{H(1-\beta)}\sum_{i=1}^{H}(H+1-2i)\frac{rk^i+w^i}{rK+W}\times$$

$$\times\left(\left(1-\varphi\left(\frac{rk^i+w^i}{rK+W}\right)\right)-\sum_{j=1}^{H}\left(1-\varphi\left(\frac{rk^j+w^j}{rK+W}\right)\right)\frac{rk^j+w^j}{rK+W}\right).$$

В случае модели с неликвидным капиталом, т.е. задачи Коши (2.3), имеем, что

$$\frac{d}{dt}V\left(\frac{rk^H+w^H}{rK+W},\ldots,\frac{rk^{H+1-i}+w^{H+1-i}}{rK+W},\ldots,\frac{rk^1+w^1}{rK+W}\right)=$$

$$=-\frac{r}{H(1-\beta)}\sum_{i=1}^{H}(H+1-2i)\frac{rk^i+w^i}{rK+W}\times$$

$$\times\left(\left(1-\varphi\left(\frac{rk^i+w^i}{rK+W}\right)\right)_+-\sum_{j=1}^{H}\left(1-\varphi\left(\frac{rk^j+w^j}{rK+W}\right)\right)_+\frac{rk^j+w^j}{rK+W}\right).$$

В случае модели Рамсея–Беккера, т.е. задачи Коши (2.4), имеем, что

$$\frac{d}{dt}V\left(\frac{rk^H+w}{rK+Hw},\ldots,\frac{rk^{H+1-i}+w}{rK+Hw},\ldots,\frac{rk^1+w}{rK+Hw}\right)=$$

$$=-\frac{r}{H(1-\beta)}\sum_{i=1}^{H}(H+1-2i)\frac{rk^i+w}{rK+Hw}\times\left\{1-\varphi\left(\frac{rk^i+w}{rK+wH}\right)+\right.$$

$$+\left(\varphi\left(\frac{rk^i+w}{rK+wH}\right)-1\right)_+\frac{w}{rk^i+w}\left(\frac{w}{c_2\left(k^i,r\varphi\left(\frac{rk^i+w}{rK+wH}\right)\right)}\right)^{\frac{1-\beta}{\varphi\left(\frac{rk^i+w}{rK+wH}\right)-1}}-$$

$$-\sum_{j=1}^{H}\frac{rk^j+w}{rK+wH}\left(1-\varphi\left(\frac{rk^j+w}{rK+wH}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\varphi\left(\frac{rk^j+w}{rK+wH}\right)-1\right)_+\frac{w}{rk^j+w}\left(\frac{w}{c_2\left(k^j,r\varphi\left(\frac{rk^j+w}{rK+wH}\right)\right)}\right)^{\frac{1-\beta}{\varphi\left(\frac{rk^j+w}{rK+wH}\right)-1}}\right)\right\}.$$

Пусть $\alpha_i(t)=\frac{rk^i(t)+w^i}{rK(t)+W}$, $i=1,\ldots,H$. Поскольку

$$\left(\frac{rk^H(t)+w^H}{rK(t)+W},\ldots,\frac{rk^{H+1-i}(t)+w^{H+1-i}}{rK(t)+W},\ldots,\frac{rk^1(t)+w^1}{rK(t)+W}\right)\in\Gamma,$$

имеем $\alpha_1(t)=\alpha_2(t)=\ldots=\alpha_l(t)>\alpha_{l+1}(t)\geq\ldots\geq\alpha_H(t)\geq 0$, кроме того, $\sum\limits_{i=1}^{H}\alpha_i(t)=1$.

Положим в случае модели Рамсея–Бьюли

$$f_i(t)=1-\varphi\left(\frac{rk^j(t)+w^j}{rK(t)+W}\right),\ j=1,\ldots,H,$$

в случае неликвидного капитала

$$f_i(t)=\left(1-\varphi\left(\frac{rk^j(t)+w^j}{rK(t)+W}\right)\right)_+,\ j=1,\ldots,H,$$

а в случае модели Рамсея–Беккера имеем

$$f_i(t)=1-\varphi\left(\frac{rk^i(t)+w}{rK(t)+wH}\right)+\left(\varphi\left(\frac{rk^i(t)+w}{rK(t)+wH}\right)-1\right)_+\times$$
$$\times\frac{w}{rk^i(t)+w}\left(\frac{w}{c_2\left(k^i(t),r\varphi\left(\frac{rk^i(t)+w}{rK(t)+wH}\right)\right)}\right)^{\frac{1-\beta}{\varphi\left(\frac{rk^i(t)+w}{rK(t)+wH}\right)-1}},\ i=1,\ldots,H.$$

Тогда во всех трех случаях справедливо следующее равенство:

$$\frac{d}{dt}V\left(\frac{rk^H(t)+w^H}{rK(t)+W},\ldots,\frac{rk^{H+1-i}(t)+w^{H+1-i}}{rK(t)+W},\ldots,\frac{rk^1(t)+w^1}{rK(t)+W}\right)=$$
$$=-\frac{r}{H(1-\beta)}\sum_{i=1}^{H}(H+1-2i)\alpha_i(t)\left(f_i(t)-\sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)f_j(t)\right).$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{H}\alpha_i(t)\left(f_i(t)-\sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)f_j(t)\right)=0.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}V\left(\frac{rk^H(t)+w^H}{rK(t)+W},\ldots,\frac{rk^{H+1-i}(t)+w^{H+1-i}}{rK(t)+W},\ldots,\frac{rk^1(t)+w^1}{rK(t)+W}\right)=$$
$$=\frac{2r}{H(1-\beta)}\sum_{i=1}^{H}i\alpha_i(t)\left(f_i(t)-\sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)f_j(t)\right).$$

В силу Предположения 1 для моделей Рамсея–Бьюли и с неликвидным капиталом имеем, что

$$f_1(t)=f_2(t)=\ldots=f_l(t)>f_{l+1}(t)\geq\ldots\geq f_H(t),$$

$$f_1(t)>\sum_{i=1}^{H}\alpha_i(t)f_i(t)>f_H(t),$$

откуда получаем, что $f_1(t)-\sum\limits_{j=1}^{H}\alpha_j(t)f_j(t)>0,\ f_H(t)-\sum\limits_{j=1}^{H}\alpha_j(t)f_j(t)<0$. Кроме того,

$$f_1(t)-\sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)f_j(t)=f_2(t)-\sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)f_j(t)=\ldots=f_l(t)-\sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)f_j(t)>$$
$$>f_{l+1}(t)-\sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)f_j(t)\geq\ldots\geq f_H(t)-\sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)f_j(t).$$

Таким образом, для каждой из двух моделей существует такое $j^* = j^*(t)$, что

$$f_i(t) - \sum_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t) \geq 0,\ i \leq j^*; \quad f_i(t) - \sum_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t) < 0,\ i > j^*.$$

Для модели Рамсея–Беккера распишем сумму $\sum\limits_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t)$:

$$\sum_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t) = \sum_{j=1}^{H} \left(\overbrace{\left(1 - \varphi\left(\frac{rk^j(t) + w}{rK(t) + wH}\right)\right) \frac{rk^j(t) + w}{rK(t) + wH}}^{f_j^1(t)} + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\left(\varphi\left(\frac{rk^j(t) + w}{rK(t) + wH}\right) - 1\right)_+ w \left(\frac{w}{c_2\left(k^j(t), r\varphi\left(\frac{rk^j(t)+w}{rK(t)+wH}\right)\right)}\right)^{\frac{1-\beta}{\varphi\left(\frac{rk^j(t)+w}{rK(t)+wH}\right)-1}} \frac{1}{rK(t) + wH}}_{f_j^2(t)} \right).$$

Докажем, что она неотрицательна. Ясно, что слагаемое $f_j^2(t)$ внутри суммы неотрицательно, поэтому рассмотрим сумму из слагаемых $f_j^1(t)$. Так как функция $1 - \varphi(x)$ выпукла в силу Предположения 2, то применяя сначала неравенство Иенсена, а затем неравенство Коши-Буняковского, получаем следующую цепочку неравенств:

$$\sum_{j=1}^{H} f_j^1(t) = \sum_{j=1}^{H} \left(1 - \varphi\left(\frac{rk^j(t) + w}{rK(t) + wH}\right)\right) \frac{rk^j(t) + w}{rK(t) + wH} \geq 1 - \varphi\left(\sum_{j=1}^{H} \left(\frac{rk^j(t) + w}{rK(t) + wH}\right)^2\right) \geq$$

$$\geq \left\{ \sum_{j=1}^{H} \left(\frac{rk^j(t) + w}{rK(t) + wH}\right)^2 \geq \frac{1}{H} \left(\sum_{j=1}^{H} \frac{rk^j(t) + w}{rK(t) + wH}\right)^2 = \frac{1}{H} \right\} \geq 1 - \varphi\left(\frac{1}{H}\right).$$

Так как в силу Предположения 1 справедливо неравенство $\varphi\left(\frac{1}{H}\right) \leq 1$, получаем, что сумма $\sum\limits_{j=1}^{H} f_j^1(t)$ неотрицательна. Следовательно, для модели Рамсея–Беккера сумма $\sum\limits_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t)$ неотрицательна.

Далее, если выбрано такое $i \in \{l+1, \ldots, H\}$, что $\varphi\left(\frac{rk^i(t)+w}{rK(t)+wH}\right) > 1$, то справедливо неравенство

$$f_i(t) = \frac{1}{rk^i(t) + w} \left(\left(1 - \varphi\left(\frac{rk^i(t) + w}{rK(t) + wH}\right)\right) \left(rk^i(t) + w\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\varphi\left(\frac{rk^i(t) + w}{rK(t) + wH}\right) - 1\right)_+ w \left(\frac{w}{c_2\left(k^i(t), r\varphi\left(\frac{rk^i(t)+w}{rK(t)+wH}\right)\right)}\right)^{\frac{1-\beta}{\varphi\left(\frac{rk^i(t)+w}{rK(t)+wH}\right)-1}} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{rk^i(t) + w} \left(1 - \varphi\left(\frac{rk^i(t) + w}{rK(t) + wH}\right)\right) rk^i(t) < 0.$$

Следовательно, если $\varphi\left(\frac{rk^i(t)+w}{rK(t)+wH}\right) > 1$, то $f_i(t) - \sum\limits_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t) < 0$. С другой стороны, из Предположения 1 следует, что если $\varphi\left(\frac{rk^i(t)+w}{rK(t)+wH}\right) \le 1$, $k^s(t) \ge k^i(t)$, то $f_s(t) - \sum\limits_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t) \ge f_i(t) - \sum\limits_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t)$. Кроме того, поскольку $\frac{rk^1(t)+w}{rK(t)+wH} > \frac{1}{H}$, имеем, что $\varphi\left(\frac{rk^1(t)+w}{rK(t)+wH}\right) < \varphi\left(\frac{1}{H}\right) \le 1$, $f_1(t) - \sum\limits_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t) > 0$. Таким образом, в случае модели Рамсея–Беккера также существует такое j^*, что

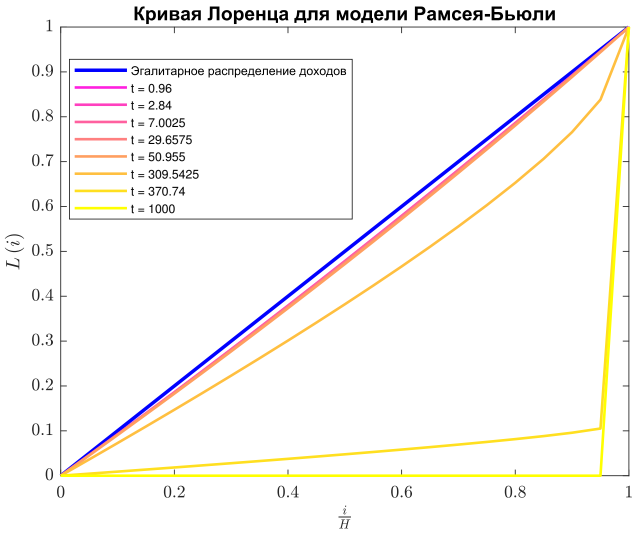
$$f_i(t) - \sum_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t) \ge 0,\ i \le j^*; \quad f_i(t) - \sum_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t) < 0,\ i > j^*.$$

Тогда, объединяя все три случая (в случае модели Рамсея-Беккера $w^1 = \ldots = w^H = w$), получаем следующую оценку:

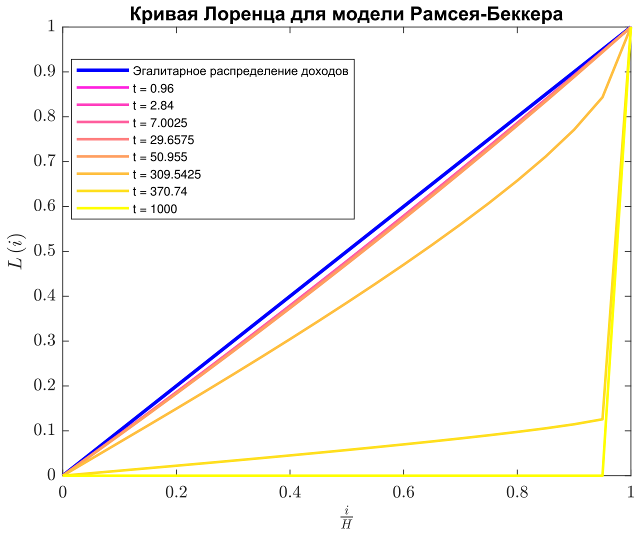
$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} V\left(\frac{rk^H(t)+w^H}{rK(t)+W}, \ldots, \frac{rk^{H+1-i}(t)+w^{H+1-i}}{rK(t)+W}, \ldots, \frac{rk^1(t)+w^1}{rK(t)+W}\right) = \\
&= \frac{2r}{H(1-\beta)} \sum_{i=1}^{H} i\alpha_i(t) \left(f_i(t) - \sum_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t)\right) = \\
&= \frac{2r}{H(1-\beta)} \left\{\sum_{i=1}^{j^*} i\alpha_i(t) \left(f_i(t) - \sum_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t)\right) + \right. \\
&\left. + \sum_{i=j^*+1}^{H} i\alpha_i(t) \left(f_i(t) - \sum_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t)\right)\right\} \le \\
&\le \frac{2r}{H(1-\beta)} \left\{j^* \sum_{i=1}^{j^*} \alpha_i(t) \left(f_i(t) - \sum_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t)\right) + \right. \\
&\left. + (j^*+1) \sum_{i=j^*+1}^{H} \alpha_i(t) \left(f_i(t) - \sum_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t)\right)\right\} = \\
&= \frac{2r}{H(1-\beta)} \sum_{i=j^*+1}^{H} \alpha_i(t) \left(f_i(t) - \sum_{j=1}^{H} \alpha_j(t) f_j(t)\right) < 0.
\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

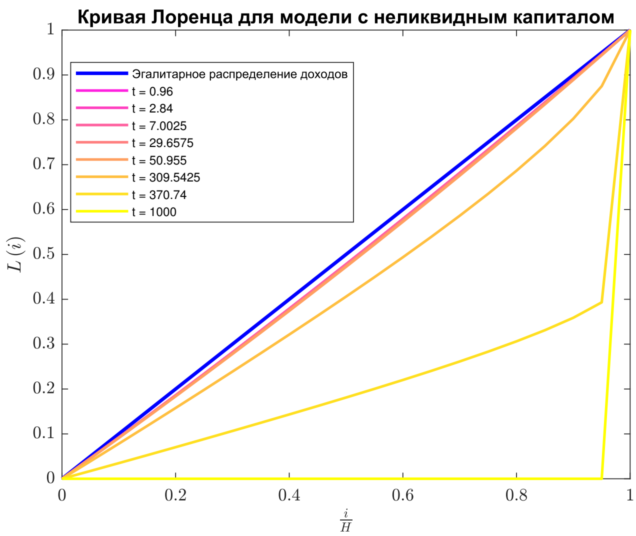
В завершение параграфа мы приводим численные расчеты того, как эволюционируют кривая Лоренца и индекс неравенства Джини, построенные для моделей Рамсея-Бьюли, Рамсея-Беккера и с неликвидным капиталом. На рис. 3.1 приведена эволюция с течением времени кривой Лоренца для всех трех моделей. На рис. 3.2 показана динамика индекса неравенства Джини. Отметим, что сходимость распределения доходов к двухклассовому сообществу в модели Рамсея–Бьюли происходит быстрее, чем в двух других моделях.



(a) Модель Рамсея–Бьюли



($б$) Модель Рамсея–Беккера



($в$) Модель с неликвидным капиталом

Рис. 3.1. Кривая Лоренца для популяции из $H = 20$ домашних хозяйств. Подсчитана при следующих функциях и значениях параметров: $T = 1000$, $\beta = 0.1$, $\varphi(x) = \varphi_{\max} - (\varphi_{\max} - \varphi_{\min})\, x^2$, $\varphi_{\max} = 1.001$, $\varphi_{\min} = \beta$, $r = 0.1$, $w = 5 \cdot 10^3$, $K_0 = 10^5$.

3.3. Континуальный аналог задачи Коши в случае Бьюли

При статистическом анализе распределений доходов домашних хозяйств оказывается так, что число домохозяйств достаточно велико. В связи с данным обстоятельством нам будет удобнее перейти от дискретной динамике к непрерывной, рассмотрев континуальный аналог модели Рамсея-Бьюли. Стоит при этом отметить, что кривую Лоренца, которая в дискретном случае является ломаной, мы аппроксимируем гладкой кривой, обладающей теми же свойствами, что и ломаная. Введем обозначение $M = [0,1] \times [0, +\infty)$. Также обозначим через запись $C^{p,q}(M)$ пространство непрерывных функций, у которых существуют и непре-

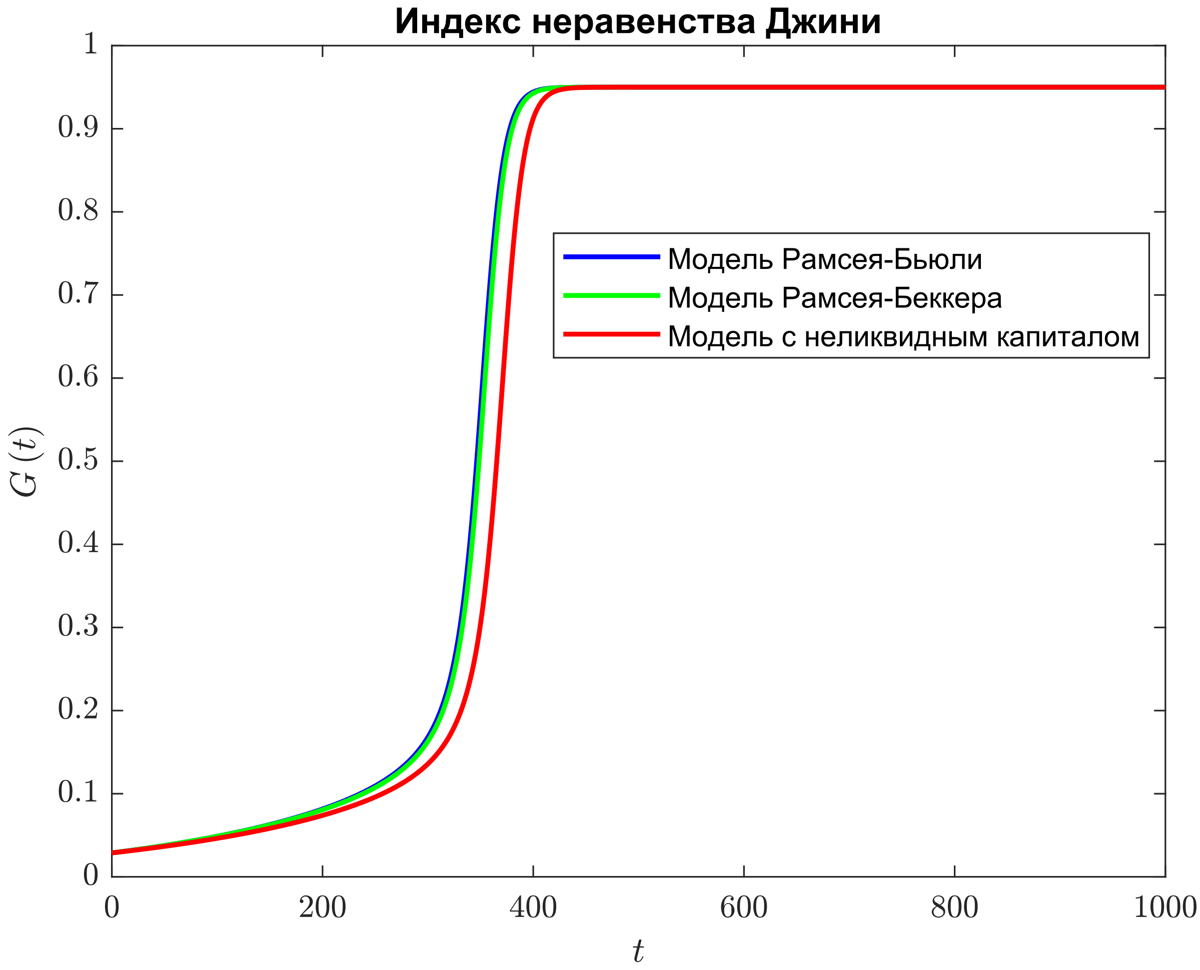


Рис. 3.2. Индекс неравенства Джини в зависимости от времени t для популяции из $H = 20$ домашних хозяйств в моделях Рамсея–Бьюли, Рамсея–Беккера и с неликвидным капиталом. Подсчитан при следующих функциях и значениях параметров: $T = 1000$, $\beta = 0.1$, $\varphi(x) = \varphi_{\max} - (\varphi_{\max} - \varphi_{\min}) x^2$, $\varphi_{\max} = 1.001$, $\varphi_{\min} = \beta$, $r = 0.1$, $w = 5 \cdot 10^3$, $K_0 = 10^5$.

рывны частные производные по первому аргументу до p-го порядка и по второму аргументу до q-го порядка, т.е.

$$C^{p,q}(M) = \left\{ f : M \to \mathbb{R} \,\middle|\, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^p f}{\partial x^p}, \frac{\partial f}{\partial t}, \ldots \frac{\partial^q f}{\partial t^q} \in C(M) \right\}.$$

Дадим следующее определение.

Определение 9. Будем называть *кривой Лоренца* функцию $y : M \to [0, 1]$, обладающую следующими свойствами:

1. $y(x, t) \in C^{2,1}(M)$;
2. функция $y(x, t)$ выпукла по x на отрезке $[0, 1]$ для любого $t \in [0, +\infty)$;
3. функция $y(x, t)$ строго возрастает по x на отрезке $[0, 1]$ для любого $t \in [0, +\infty)$;
4. для каждого $t \in [0, +\infty)$ выполняются краевые условия вида $y(0, t) = 0$, $y(1, t) = 1$.

Рассмотрим модель Рамсея-Бьюли в континуальной форме:

$$\frac{\partial\alpha\left(x,t\right)}{\partial t}=\frac{1-\varphi\left(\frac{\alpha(x,t)}{\int\limits_0^1\alpha(s,t)\,ds}\right)}{1-\beta}r\alpha\left(x,t\right),\ \alpha\left(x,0\right)=\alpha_0\left(x\right)\geq 0,$$

где $\alpha\left(x,t\right)=rk\left(x,t\right)+w\left(x\right)$.

В представленной модели функция $\varphi\left(\cdot\right)$ отличается от той, что была рассмотрена ранее, и имеет вид $\varphi\left(x\right)=\varphi_{\text{old}}\left(\frac{x}{H}\right)$, где величина $x\in\left[0,H\right]$ является отношением дохода домохозяйства к среднему доходу, а величина $\frac{1}{H}$ – отношением среднего дохода к суммарному доходу домохозяйств. В континуальной модели аргументом функции $\varphi\left(\cdot\right)$ является величина, равная $\frac{\alpha(x,t)}{\int\limits_0^1\alpha(s,t)\,ds}$ и принадлежащая отрезку $\left[0,H\left(t\right)\right]$, где $H\left(t\right)=\frac{A(t)}{\int\limits_0^1\alpha(s,t)\,ds}$, а $A\left(t\right)$ – экзогенно заданный суммарный доход домохозяйств.

Определим функцию распределения доходов домашних хозяйств из дискретной модели Рамсея-Бьюли:

$$A\left(\alpha,t\right)=\begin{cases}0, & 0\leq\alpha\leq rk^{H}\left(t\right)+w^{H},\\ \dfrac{i}{H}, & rk^{H+1-i}\left(t\right)+w^{H+1-i}<\alpha\leq rk^{H-i}\left(t\right)+w^{H-i},\ i=\overline{1,H-1},\\ 1, & \alpha>rk^{1}\left(t\right)+w^{1}.\end{cases}$$

Тогда обратная к ней функция $\tilde{\alpha}\left(x,t\right)=\inf\left\{\alpha\geq 0:A\left(\alpha,t\right)=\frac{\lfloor Hx\rfloor}{H}\right\}$ представляет собой кусочно-постоянную по x функцию на отрезке $\left[0,1\right]$, каждая «ступенька» которой соответствует значению дохода каждого домохозяйства.

Докажем следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть существует такое $\varepsilon\in\left(0,1\right)$, что для любого $t\in\left[0,+\infty\right)$ справедливо неравенство $\max\limits_{x\in[0,1]}\left|\frac{\alpha(x,t)}{\tilde{\alpha}(x,t)}-1\right|\leq\varepsilon$. Тогда для любого $t\in\left[0,+\infty\right)$ справедлива оценка

$$\max_{x\in[0,1]}\frac{\alpha\left(x,t\right)}{\int\limits_0^1\alpha\left(s,t\right)\,ds}\leq U\left(H,\varepsilon\right),\tag{3.1}$$

где $U\left(H,\varepsilon\right)=\left(1+\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)H$.

Доказательство. Так как для любого $x\in\left[0,1\right]$ и $t\in\left[0,+\infty\right)$ выполнено двойное неравенство $\left(1-\varepsilon\right)\tilde{\alpha}\left(x,t\right)\leq\alpha\left(x,t\right)\leq\left(1+\varepsilon\right)\tilde{\alpha}\left(x,t\right)$, то интегрированием по частям этого неравенства по

x от 0 до 1 можно вывести неравенство вида $\left|\frac{\int_0^1 \alpha(s,t)\,ds}{\int_0^1 \tilde{\alpha}(s,t)\,ds} - 1\right| \le \varepsilon$. Тогда

$$\frac{\frac{\alpha(x,t)}{\int_0^1 \alpha(s,t)\,ds}}{\frac{\tilde{\alpha}(x,t)}{\int_0^1 \tilde{\alpha}(s,t)\,ds}} = \frac{\alpha(x,t)}{\tilde{\alpha}(x,t)} \frac{\int\limits_0^1 \tilde{\alpha}(s,t)\;ds}{\int\limits_0^1 \alpha(s,t)\;ds} \le \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1 + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Так как $\frac{\tilde{\alpha}(x,t)}{\int_0^1 \tilde{\alpha}(s,t)\,ds} \le H$, мы получаем оценку (3.1). □

Далее будем считать, что $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Тогда $U\left(H, \frac{1}{3}\right) = 2H$, и тем самым можно получить оценку сверху для функции $H(t) \le 2H$. Следовательно, будем считать, что функция $\varphi(\cdot)$ определена на отрезке $[0, 2H]$.

Сделаем дополнительное предположение.

Предположение 3. Функция $\varphi(\gamma)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 2H]$.

В силу теоремы о гладкой зависимости по параметру (см. [46]) справедливо следующее утверждение.

Предложение 3. Пусть выполнено Предположение 3, и $\alpha_0(x)$ является неотрицательной строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией на отрезке $[0, 1]$. Тогда функция $\alpha(x,t)$ является непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных (x,t).

Нетрудно тогда проверить, что функция $y(x,t)$, введенная соотношением $y(x,t) = \frac{\int_0^x \alpha(s,t)\,ds}{\int_0^1 \alpha(s,t)\,ds}$, удовлетворяет Определению 9 и является кривой Лоренца.

Продифференцируем функцию $y(x,t)$ по t:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{\int\limits_0^x \frac{\partial \alpha(w,t)}{\partial t}\,dw \cdot \int\limits_0^1 \alpha(w,t)\;dw - \int\limits_0^x \alpha(w,t)\;dw \cdot \int\limits_0^1 \frac{\partial \alpha(w,t)}{\partial t}\,dw}{\left(\int\limits_0^1 \alpha(w,t)\;dw\right)^2} =$$

$$= \frac{r}{1-\beta}\left(\int\limits_0^x \left(1 - \varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right) \frac{\alpha(w,t)}{\int\limits_0^1 \alpha(w,t)\;dw}\,dw - \right.$$

$$\left. - \frac{\int\limits_0^x \alpha(w,t)\;dw}{\int\limits_0^1 \alpha(w,t)\;dw} \cdot \int\limits_0^1 \left(1 - \varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right) \frac{\alpha(w,t)}{\int\limits_0^1 \alpha(w,t)\;dw}\,dw\right).$$

Замечая, что $\frac{\alpha(x,t)}{\int\limits_0^1 \alpha(s,t)\,ds} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$, и вводя обозначение

$$y_\varphi(x,t) = \int\limits_0^x \left(1 - \varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right) \frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\,dw,$$

выводим для кривой Лоренца следующее уравнение динамики:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{r}{1-\beta}\left[y_\varphi(x,t) - y(x,t)\,y_\varphi(1,t)\right]. \tag{3.2}$$

Теорема 3.2. Пусть для кривой Лоренца $y(x,t)$ справедливо уравнение динамики (3.2). Тогда для любых $t', t'' \in [0,+\infty)$, таких что $t' > t''$, кривая $y(x,t')$ мажорирует по Лоренцу кривую $y(x,t'')$.

Доказательство. Для справедливости утверждения нам достаточно доказать, что $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} < 0\;\forall x \in (0,1)$. Для этого рассмотрим на интервале $(0,1)$ функцию

$$G(x,t) = \frac{1-\beta}{r}\frac{\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}}{y(x,t)} = \frac{y_\varphi(x,t)}{y(x,t)} - y_\varphi(1,t).$$

Заметим, что функцию $G(x,t)$ можно доопределить в нуле. Для этого рассмотрим предел функции $\frac{y_\varphi(x,t)}{y(x,t)}$ в нуле справа:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{y_\varphi(x,t)}{y(x,t)} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\int\limits_0^x\left(1-\varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right)\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\,dw}{y(x,t)} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\left(1-\varphi\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)\right)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}}{\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}} =$$
$$= 1 - \varphi\left(\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}\right).$$

Следовательно, $G(0,t) = 1 - \varphi\left(\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}\right) - y_\varphi(1,t)$. Исследуем теперь поведение данной функции, взяв ее частную производную по x:

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y_\varphi(x,t)}{\partial x}y(x,t) - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}y_\varphi(x,t)}{(y(x,t))^2} =$$
$$= \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\left(1-\varphi\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)\right)y(x,t) - \int\limits_0^x\left(1-\varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right)\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\,dw}{(y(x,t))^2} =$$
$$= -\frac{\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}}{(y(x,t))^2}\left(\varphi\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)y(x,t) - \int\limits_0^x \varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\,dw\right).$$

Величина $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$ положительна для любого $x \in (0,1]$, поэтому знак определяется выражением, стоящим в скобках. Кроме того, так как функция $\varphi(\cdot)$ убывает, а функция $\frac{\partial y(\cdot,t)}{\partial x}$ возрастает по x при любом $t \in [0, +\infty)$, справедливы следующие неравенства:

$$\int\limits_0^1 \varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\,dw < \varphi\left(\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}\right)\cdot\int\limits_0^1 \frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\,dw = \varphi\left(\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}\right),$$

$$\int\limits_0^x \varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\,dw > \varphi\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)\cdot\int\limits_0^x \frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\,dw = \varphi\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)y(x,t),$$

из которых можно заключить, что $G(0,t) < 0$ и $\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} > 0\ \forall x \in (0,1)$. Интегрируя последнее неравенство относительно $\frac{\partial G}{\partial x}$ в пределах от x до 1, получаем, что

$$\int\limits_x^1 \frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\,dx = G(1,t) - G(x,t) > 0,$$

откуда следует, что $\frac{1-\beta}{r}\frac{\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}}{y(x,t)} = G(x,t) < G(1,t) = 0\ \forall x \in (0,1)$.

Таким образом, мы показали, что $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} < 0, x \in (0,1)$. Проинтегрировав данное неравенство в пределах от t'' до $t' > t''$ для любого $x \in (0,1)$, выводим неравенство

$$y(x,t') - y(x,t'') = \int\limits_{t''}^{t'} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\,dt < 0,$$

то есть $y(x,t') < y(x,t'')$ для любого $x \in (0,1)$, что и требовалось. □

3.4. Передачи Пигу-Дальтона и государство всеобщего благосостояния

Как уже ранее было отмечено, в модели социальной динамики Рамсея-Бьюли в пределе на бесконечном полуинтервале времени устанавливается распределение доходов, соответствующее двухклассовой структуре общества. Нам представляется интересным вопрос о том, как следует перестроить динамику кривой Лоренца таким образом, чтобы вывести распределение доходов, отличающееся от того, что соответствует двухклассовому обществу. В текущем параграфе предлагается решение данного вопроса, достигаемое за счет перераспределения доходов, например, за счет введения налогов для более богатых слоев населения и выделения субсидий для поддержки более бедных слоев.

Дадим следующее определение.

Определение 10. Пусть функция $y(x,t)$ – кривая Лоренца в смысле Определения 9. Будем говорить, что функция $\psi_0(\gamma) \in C^1[0,2H]$ задает для функции $y(x,t)$ передачу Пигу-Дальтона, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $\psi_0'(\gamma) > 0, \forall \gamma \geq 0$;

2. справедливо равенство

$$\int\limits_0^1 \psi_0\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right) dw = \int\limits_0^1 \frac{\partial y(w,t)}{\partial w} dw = 1 \; \forall t \in [0, +\infty). \tag{3.3}$$

Введем $z(x,t) = \psi_0\left(\frac{\alpha(x,t)}{\int\limits_0^1 \alpha(s,t)\,ds}\right) \int\limits_0^1 \alpha(s,t)\,ds$ – величину дохода, полученную агентом x в момент времени t после перераспределения. Тогда модифицируем модель Рамсея-Бьюли, заменив в правой части доход $\alpha(x,t)$ на перераспределенный доход $z(x,t)$:

$$\frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial t} = r\frac{1-\varphi\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)}{1-\beta} z(x,t). \tag{3.4}$$

Как и в предыдущем параграфе, в качестве кривой Лоренца положим функцию

$$y(x,t) = \frac{\int\limits_0^x \alpha(s,t)\; ds}{\int\limits_0^1 \alpha(s,t)\; ds},$$

где доход $\alpha(x,t)$ удовлетворяет уравнению (3.4).

Продифференцируем $y(x,t)$ по t:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{\int\limits_0^x \frac{\partial \alpha(w,t)}{\partial t} dw \cdot \int\limits_0^1 \alpha(w,t)\; dw - \int\limits_0^x \alpha(w,t)\; dw \cdot \int\limits_0^1 \frac{\partial \alpha(w,t)}{\partial t} dw}{\left(\int\limits_0^1 \alpha(w,t)\; dw\right)^2} =$$

$$= \frac{r}{1-\beta}\left(\int\limits_0^x \left(1-\varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right)\frac{z(w,t)}{\int\limits_0^1 \alpha(w,t)\; dw} dw - \right.$$

$$\left. -\frac{\int\limits_0^x \alpha(w,t)\; dw}{\int\limits_0^1 \alpha(w,t)\; dw} \cdot \int\limits_0^1 \left(1-\varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right)\frac{z(w,t)}{\int\limits_0^1 \alpha(w,t)\; dw} dw\right).$$

Поскольку $\frac{z(x,t)}{\int\limits_0^1 \alpha(s,t)\,ds} = \psi_0\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)$, то в силу уравнения (3.4) мы получаем следующее уравнение динамики кривой Лоренца:

$$\begin{gathered}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{r}{1-\beta}\left[\int\limits_0^x \left(1-\varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right)\psi_0\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right) dw - \right. \\ \left. -y(x,t)\int\limits_0^1 \left(1-\varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right)\psi_0\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right) dw\right].\end{gathered} \tag{3.5}$$

Передачу Пигу-Дальтона $\psi_0(\cdot)$, удовлетворяющую Определению 10, мы построим посредством следующей леммы.

Лемма 3.1. Пусть $\hat{y}(x)$ – произвольное стационарное решение уравнения (3.5), являющееся дважды непрерывно дифференцируемой выпуклой строго возрастающей функцией на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяющее условиям $\hat{y}(0)=0$, $\hat{y}(1)=1$. Пусть также справедливо неравенство

$$\gamma\varphi'(\gamma) > \varphi(\gamma) - 1,\ \gamma \in [0, 2H]. \tag{3.6}$$

Тогда функция, задающая для функции $\hat{y}(x)$ передачу Пигу-Дальтона, имеет вид $\psi_0(\gamma) = \frac{C\gamma}{1-\varphi(\gamma)}$, где константа $C = C(\hat{y}(\cdot))$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{C} = \int\limits_0^1 \frac{\frac{d\hat{y}(x)}{dx}}{1-\varphi\left(\frac{d\hat{y}(x)}{dx}\right)}\,dx. \tag{3.7}$$

Замечание 16. Из неравенства (3.6) следует, что справедливо неравенство $\varphi(0) < 1$ и функция $\frac{\gamma}{1-\varphi(\gamma)}$ возрастает по γ. Тогда, в свою очередь, неравенство (3.6) следует из неравенства

$$\gamma\varphi'(\gamma) > \varphi(\gamma) - \varphi(0),$$

которое справедливо в предположении, что функция $\varphi(\cdot)$ выпукла на отрезке $[0, 2H]$. Для этого достаточно воспользоваться неравенством

$$\varphi(\gamma_1) \geq \varphi(\gamma_2) + \varphi'(\gamma_2)(\gamma_1 - \gamma_2),\ \gamma_1, \gamma_2 \in [0, 2H],$$

и положить в нем $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \gamma$.

Доказательство. Подставив $y(x,t) = \hat{y}(x)$ в уравнение (3.5), имеем

$$0 = \frac{r}{1-\beta}\left[\int\limits_0^x \left(1-\varphi\left(\frac{d\hat{y}(w)}{dw}\right)\right)\psi_0\left(\frac{d\hat{y}(w)}{dw}\right)dw - \right.$$
$$\left. -\hat{y}(x)\int\limits_0^1 \left(1-\varphi\left(\frac{d\hat{y}(w)}{dw}\right)\right)\psi_0\left(\frac{d\hat{y}(w)}{dw}\right)dw\right].$$

Проводя арифметические преобразования, получаем уравнение на стационарное решение:

$$\hat{y}(x) = \frac{\int\limits_0^x \left(1-\varphi\left(\frac{d\hat{y}(w)}{dw}\right)\right)\psi_0\left(\frac{d\hat{y}(w)}{dw}\right)dw}{\int\limits_0^1 \left(1-\varphi\left(\frac{d\hat{y}(w)}{dw}\right)\right)\psi_0\left(\frac{d\hat{y}(w)}{dw}\right)dw}.$$

Дифференцируя обе части по x, имеем

$$\frac{d\hat{y}\left(x\right)}{dx}=\frac{\left(1-\varphi\left(\frac{d\hat{y}(x)}{dx}\right)\right)\psi_0\left(\frac{d\hat{y}(x)}{dx}\right)}{\int\limits_0^1\left(1-\varphi\left(\frac{d\hat{y}(w)}{dw}\right)\right)\psi_0\left(\frac{d\hat{y}(w)}{dw}\right)\,dw}.$$

Обозначив через $C\left(\psi_0\left(\cdot\right),\hat{y}\left(\cdot\right)\right)=\int\limits_0^1\left(1-\varphi\left(\frac{d\hat{y}(w)}{dw}\right)\right)\psi_0\left(\frac{d\hat{y}(w)}{dw}\right)\,dw$, получаем, что $\psi_0\left(\gamma\right)=\frac{C_{\psi_0}\gamma}{1-\varphi(\gamma)}$.

Покажем, что $C\left(\psi_0\left(\cdot\right),\hat{y}\left(\cdot\right)\right)$ не зависит от функции $\psi_0\left(\cdot\right)$. В самом деле, разделив обе части ранее полученного выражения на $1-\varphi\left(\frac{d\hat{y}(x)}{dx}\right)$, проинтегрировав их от 0 до 1 и применив также условие (3.3), получаем следующее равенство:

$$\int\limits_0^1\frac{\frac{d\hat{y}(x)}{dx}}{1-\varphi\left(\frac{d\hat{y}(x)}{dx}\right)}\,dx=\frac{\int\limits_0^1\psi_0\left(\frac{d\hat{y}(x)}{dx}\right)\,dx}{C}=\frac{\int\limits_0^1\frac{d\hat{y}(x)}{dx}\,dx}{C}=\frac{1}{C}.$$

Отсутствие функции $\psi_0\left(\cdot\right)$ в левой части тождества, оказывающегося соотношением (3.7), доказывает, что C не зависит от $\psi_0\left(\cdot\right)$. Осталось убедиться в том, что производная функции $\psi_0\left(\gamma\right)$ по γ положительна:

$$\psi_0'\left(\gamma\right)=C\frac{1-\varphi\left(\gamma\right)+\gamma\varphi'\left(\gamma\right)}{\left(1-\varphi\left(\gamma\right)\right)^2}>0,\ \forall\gamma\geq0.$$

Лемма доказана. □

Пусть $\hat{y}\left(x\right)$ – некоторая кривая Лоренца, которая удовлетворяет условиям Леммы 3.1 и выражает общественный договор. В силу строгого возрастания и непрерывности функции $\hat{y}$ можно построить обратную к ней функцию $x=\hat{y}^{-1}\left(y\right)$, которая по величине относительного дохода y определяет позицию в распределении доходов, соответствующем кривой Лоренца $\hat{y}\left(\cdot\right)$. В свою очередь, функция $\frac{d\hat{y}(x)}{dx}$ выражает величину дохода агента x, деленную на средний доход населения.

Определим функцию перераспределения доходов следующим образом:

$$\psi\left(y\right)=\psi_0\left(\xi\left(y\right)\right),$$

где $\xi\left(y\right)=\left.\frac{d\hat{y}(x)}{dx}\right|_{x=\hat{y}^{-1}(y)}$.

Заменив функцию $\psi_0\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)$ на функцию $\psi\left(y\left(w,t\right)\right)$ в уравнении (3.5), можно рассмотреть динамику кривой Лоренца с данным принципом налогообложения и субсидирования:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{r}{1-\beta}\left[\int\limits_0^x \left(1-\varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right)\psi\left(y(w,t)\right)dw - \right.$$
$$\left. -y(x,t)\int\limits_0^1 \left(1-\varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right)\psi\left(y(w,t)\right)dw\right], \quad (x,t)\in M, \tag{3.8a}$$

$$y(x,0) = y_0(x), \quad x\in[0,1], \tag{3.8b}$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(1,t) = 1, \quad t\in[0,+\infty). \tag{3.8c}$$

Полученная нами задача (3.8) является смешанной задачей для интегро-дифференциального уравнения (3.8a), так как содержит начальное условие (3.8b) и краевые условия (3.8c). Задачу (3.8) будем также называть *моделью государства всеобщего благосостояния.*

3.5. Исследование смешанной задачи для интегро-дифференциального уравнения

Заметим, что переход к задаче (3.8) является неэквивалентным в том смысле, что решение $y(x,t)$ более не связано с функцией $\alpha(x,t)$.

В связи с этим возникают следующие вопросы:

- Является ли решение $y(x,t)$ задачи (3.8) кривой Лоренца?
- Существует ли решение задачи (3.8), и, если существует, является ли оно единственным?
- Единственно ли стационарное решение уравнения (3.8a)?
- Является ли стационарное решение $\hat{y}$ уравнения (3.8a) асимптотически устойчивым?

В данном параграфе даются ответы на эти вопросы. Всюду далее для удобства, если не оговорено иное, мы обозначим $F(a,b) = (1-\varphi(b))\,\psi(a)$.

3.5.1. Глобальное сохранение свойств кривой Лоренца

Положительный ответ на первый вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3.3. Пусть существует решение $y(x,t)\in C^{1,1}(M)$ задачи (3.8), при этом смешанные частные производные y_{xt} и y_{tx} определены и непрерывны на M. Пусть также $y_0(x)$ – кривая Лоренца и пусть $\varphi(0) < 1$.

Тогда $y(x,t)$ является кривой Лоренца.

Доказательство. Сначала докажем, что для уравнения динамики (3.8a) выполнение двойного неравенства $0 \le y(x,t) \le 1$ для любых $(x,t) \in M$ возможно в том и только в том случае, когда для любых $(x,t) \in M$ выполняется неравенство $\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \ge 0$.

Пусть для любого $(x,t) \in M$ выполняется неравенство $0 \le y(x,t) \le 1$. Докажем тогда, что нарушение неравенства $\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \ge 0$ невозможно. Предположим противное, то есть найдутся такие момент времени t^*, точка $x^* \in (0,1)$ и число $\delta > 0$, что $\frac{\partial y}{\partial x}(x,t^*) < 0, \forall x \in (x^*-\delta, x^*+\delta)$. Очевидно, что тогда найдутся такие момент времени $\tilde{t} < t^*$ и точка $\tilde{x} \in [0,1]$, что $\frac{\partial y}{\partial x}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right) = 0$, при этом для любого $x \in [0,1] \setminus \{\tilde{x}\}$ выполняется неравенство $\frac{\partial y}{\partial x}\left(x,\tilde{t}\right) \ge 0$. Тогда, продифференцировав уравнение динамики (3.8a) по x и воспользовавшись тем, что $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}(x,t)$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)\right) = \frac{r}{1-\beta}\left(F\left(y(x,t), \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)\right) - \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)\int\limits_0^1 F\left(y(w,t), \frac{\partial y}{\partial w}(w,t)\right) dw\right). \tag{3.9}$$

Положив в соотношении (3.9) $x = \tilde{x}$, $t = \tilde{t}$, получаем, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)\right)\Bigg|_{\substack{x=\tilde{x},\\ t=\tilde{t}}} &= \frac{r}{1-\beta}F\left(y\left(\tilde{x},\tilde{t}\right), \frac{\partial y}{\partial x}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)\right) = \\ &= \frac{r}{1-\beta}\left(1-\varphi(0)\right)C\frac{\hat{y}'\left(\hat{y}^{-1}\left(y\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)\right)\right)}{1-\varphi\left(\hat{y}'\left(\hat{y}^{-1}\left(y\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)\right)\right)\right)} \ge 0,\end{aligned}$$

причем $\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)$ равняется нулю в том и только в том случае, когда $\hat{y}'(0) = 0$ и $y\left(\tilde{x},\tilde{t}\right) = 0$. Покажем, что единственно возможным вариантом является точка $\tilde{x} = 0$. В самом деле, тогда в противном случае либо в силу непрерывности функции y по x при фиксированном $t = \tilde{t}$ $y\left(x,\tilde{t}\right)$ убывает, что противоречит выбранному моменту времени $\tilde{t}$, либо же $y\left(x,\tilde{t}\right) = 0$, $\forall x \in [0,\tilde{x}]$. С другой стороны, решая уравнение (3.9) как ОДУ относительно функции $\frac{\partial y}{\partial x}$ с фиксированным моментом времени $\tilde{t}$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x}\left(x,\tilde{t}\right) &= y_0'(x)\, e^{-\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^{\tilde{t}}\int\limits_0^1 F\left(y(w,\tau), \frac{\partial y}{\partial w}(w,\tau)\right) dw\, d\tau} + \\ &+\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^{\tilde{t}} F\left(y(x,s), \frac{\partial y}{\partial x}(x,s)\right) e^{-\frac{r}{1-\beta}\int\limits_s^{\tilde{t}}\int\limits_0^1 F\left(y(w,\tau), \frac{\partial y}{\partial w}(w,\tau)\right) dw\, d\tau} ds.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Так как для любого $x \in [0,\tilde{x}]$ функция $y\left(x,\tilde{t}\right)$ равна нулю, то и ее частная производная по x также равна нулю. Но тогда в силу неотрицательности второго слагаемого мы получаем, что $y_0'(x) \le 0$, что противоречит определению функции $y_0(x)$ как кривой Лоренца. Следовательно, $\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right)$ равна нулю в том и только в том случае, когда $\tilde{x} = 0$. Однако, этот случай тривиален в силу краевых условий (3.8c). Но тогда $\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}\left(\tilde{x},\tilde{t}\right) > 0$ при любом $\tilde{x} > 0$, что приводит к противоречию с предположением о том, что производная $\frac{\partial y}{\partial x}$ в момент времени t^* отрицательна в δ-окрестности точки x^*. Необходимость доказана.

Достаточность устанавливается за счет следующих неравенств:

$$y(x,t) = y(0,t) + \int\limits_0^x \frac{\partial y}{\partial w}(w,t)\,dw \ge y(0,t) = 0,$$

$$y(x,t) = y(1,t) - \int\limits_x^1 \frac{\partial y}{\partial w}(w,t)\,dw \le y(1,t) = 1.$$

Покажем теперь, что и $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \ge 0$. Для этого в формуле (3.10) мы последовательно возьмем частные производные по x и по t. Получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)\right) = -\frac{r}{1-\beta}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)\int\limits_0^1 F\left(y(w,t), \frac{\partial y}{\partial w}(w,t)\right)dw +$$
$$+\frac{r}{1-\beta}\left(\frac{\partial F}{\partial a}\left(y(x,t), \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)\right)\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial F}{\partial b}\left(y(x,t), \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)\right).$$

Видим, что в правой части есть еще одно слагаемое, содержащее вторую частную производную по x. Сгруппировав слагаемые и разрешив ОДУ при фиксированном x, получаем формулу

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = y_0''(x)\,E(x,0,t) +$$
$$+\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^t \frac{\partial F}{\partial a}\left(y(x,s), \frac{\partial y}{\partial x}(x,s)\right)\frac{\partial y}{\partial x}(x,s)\,E(x,s,t)\,ds,$$

где

$$E(x,s,t) = \exp\left\{\frac{r}{1-\beta}\int\limits_s^t \left[\frac{\partial F}{\partial b}\left(y(x,\tau), \frac{\partial y}{\partial x}(x,\tau)\right) - \int\limits_0^1 F\left(y(w,\tau), \frac{\partial y}{\partial w}(w,\tau)\right)dw\right]d\tau\right\}.$$

Так как функция $E(x,s,t)$ и частная производная $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b)$ положительны, а функция $y_0''(x)$ и частная производная $\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$ неотрицательны, то в силу полученной формулы получаем, что и вторая частная производная функции $y(x,t)$ неотрицательна, что является достаточным условием выпуклости функции по x при фиксированном t.

Осталось заметить, что функция $y(x,t)$ никогда не окажется равной 0 или 1 в какой-либо промежуточной точке отрезка $[0,1]$ в любой момент времени $t \in (0,+\infty)$, так как в противном случае в силу краевых условий (3.8c), непрерывности функции $y(x,t)$ и ее частной производной $\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$ найдется непустой интервал, в котором частная производная $\frac{\partial y}{\partial x}$ отрицательна, что невозможно в силу ранее доказанного.

Таким образом, помимо выполнения краевых условий (3.8c) мы доказали, что для любых $(x,t) \in M$ справедливо двойное неравенство $0 \leq y(x,t) \leq 1$, функция $y(x,t)$ строго возрастает по x и выпукла по x при любом $t \in (0,+\infty)$. Следовательно, функция $y(x,t)$ удовлетворяет Определению 9, что и требовалось доказать. □

Замечание 17. Всюду далее в текущем параграфе предполагается, что выполнено условие $\varphi(0) < 1$. Благодаря нему справедлива Теорема 3.3, что позволяет нам говорить о функции $y(x,t)$, являющейся решением задачи (3.8), как о кривой Лоренца.

3.5.2. Существование и единственность решения

Положительный ответ на второй вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3.4. Существует и единственно решение $y(x,t) \in C^{1,1}(M)$ задачи (3.8).

Для доказательства мы будем рассматривать эквивалентное уравнению (3.8) интегральное уравнение вида

$$\begin{gathered} y(x,t) = y_0(x) + \\ + \frac{r}{1-\beta} \int\limits_0^t \left\{ \int\limits_0^x F\left(y(w,\tau), \frac{\partial y(w,\tau)}{\partial w}\right) dw - y(x,\tau) \int\limits_0^1 F\left(y(w,\tau), \frac{\partial y(w,\tau)}{\partial w}\right) dw \right\} d\tau. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Тогда, обозначив правую часть уравнения через $Ty(x,t)$, нам требуется доказать, что у оператора T существует и единственна неподвижная точка $y^*(x,t) \in C^{1,0}(M)$ такая, что $Ty^* = y^*$.

Рассмотрим теперь метрическое пространство $(C^{1,0}(M), d_S)$ с метрикой вида

$$d_S(f,g) = \sup_{(x,t)\in M} \left\{ \left(|f(x,t) - g(x,t)| + \left| \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} \right| \right) e^{-St} \right\}.$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 3.2. Пусть для функций $\alpha(x,t), \beta(x,t) \in C(M)$, $f(x,t), g(x,t) \in C^{1,0}(M)$ существуют такие константы $D, R, Y_{\max} > 0$, что $|\alpha(x,t)| < D$, $|\beta(x,t)| < D$, $|f(x,t)| < R$, $|g(x,t)| < R$, $\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right| < Y_{\max}$, $\left|\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}\right| < Y_{\max}$, $(x,t) \in M$. Пусть также функция $F(a,b)$ непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b)$, $\frac{\partial F}{\partial b}(a,b)$ на множестве $[0,R] \times [0, Y_{\max}]$, при этом существуют константы $B_i > 0, i = \overline{0,2}$, такие что

$$|F(a,b)| < B_0, \left|\frac{\partial F}{\partial a}(a,b)\right| < B_1, \left|\frac{\partial F}{\partial b}(a,b)\right| < B_2, (a,b) \in [0,R] \times [0, Y_{\max}].$$

Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{gathered} \left| F\left(f(w,\tau), \frac{\partial f(w,\tau)}{\partial w}\right) - F\left(g(w,\tau), \frac{\partial g(w,\tau)}{\partial w}\right) \right| \leq \\ \leq B_1 |f(w,\tau) - g(w,\tau)| + B_2 \left| \frac{\partial f(w,\tau)}{\partial w} - \frac{\partial g(w,\tau)}{\partial w} \right|, \end{gathered} \tag{3.12}$$

$$\left|\alpha\left(x,\tau\right)\int\limits_0^1 F\left(f\left(w,\tau\right),\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right)\,dw-\beta\left(x,\tau\right)\int\limits_0^1 F\left(g\left(w,\tau\right),\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right)\,dw\right|\leq$$
$$\leq D\left(B_1\int\limits_0^1\left|f\left(w,\tau\right)-g\left(w,\tau\right)\right|\,dw+B_2\int\limits_0^1\left|\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}-\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right|\,dw\right)+ \tag{3.13}$$
$$+B_0\left|\alpha\left(x,\tau\right)-\beta\left(x,\tau\right)\right|.$$

Доказательство. Выведем сначала оценку (3.12), воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\left|F\left(f\left(w,\tau\right),\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right)-F\left(g\left(w,\tau\right),\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right)\right|=$$
$$=\left|\frac{\partial F}{\partial a}\left(\xi_1\left(w,\tau\right),\xi_2\left(w,\tau\right)\right)\left(f\left(w,\tau\right)-g\left(w,\tau\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial F}{\partial b}\left(\xi_1\left(w,\tau\right),\xi_2\left(w,\tau\right)\right)\left(\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}-\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right)\right|\leq$$
$$\leq B_1\left|f\left(w,\tau\right)-g\left(w,\tau\right)\right|+B_2\left|\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}-\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right|,$$

где

$$\xi_1\left(w,\tau\right)=g\left(w,\tau\right)+\theta_1\left(w,\tau\right)\left(f\left(w,\tau\right)-g\left(w,\tau\right)\right),$$
$$\xi_2\left(w,\tau\right)=\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}+\theta_2\left(w,\tau\right)\left(\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}-\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right),$$
$$0\leq\theta_i\left(w,\tau\right)\leq 1,\;\; i=1,2.$$

Теперь выведем оценку (3.13):

$$\left|\alpha\left(x,\tau\right)\int\limits_0^1 F\left(f\left(w,\tau\right),\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right)\,dw-\beta\left(x,\tau\right)\int\limits_0^1 F\left(g\left(w,\tau\right),\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right)\,dw\right|=$$
$$=\left|\left(\alpha\left(x,\tau\right)-\beta\left(x,\tau\right)\right)\int\limits_0^1 F\left(\xi_4\left(w,\tau\right),\xi_5\left(w,\tau\right)\right)\,dw+\right.$$
$$+\xi_3\left(x,\tau\right)\int\limits_0^1\frac{\partial F}{\partial a}\left(\xi_4\left(w,\tau\right),\xi_5\left(w,\tau\right)\right)\left(f\left(w,\tau\right)-g\left(w,\tau\right)\right)\,dw+$$
$$\left.+\xi_3\left(x,\tau\right)\int\limits_0^1\frac{\partial F}{\partial b}\left(\xi_4\left(w,\tau\right),\xi_5\left(w,\tau\right)\right)\left(\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}-\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right)\,dw\right|\leq$$
$$\leq B_0\left|\alpha\left(x,\tau\right)-\beta\left(x,\tau\right)\right|+DB_1\int\limits_0^1\left|f\left(w,\tau\right)-g\left(w,\tau\right)\right|\,dw+DB_2\int\limits_0^1\left|\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}-\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right|\,dw,$$

где

$$\xi_3(x,\tau) = \beta(x,\tau) + \theta_3(x,\tau)(\alpha(x,\tau) - \beta(x,\tau)),$$

$$\xi_4(x,\tau) = g(w,\tau) + \theta_4(w,\tau)(f(w,\tau) - g(w,\tau)),$$

$$\xi_5(x,\tau) = \frac{\partial g(w,\tau)}{\partial w} + \theta_5(w,\tau)\left(\frac{\partial f(w,\tau)}{\partial w} - \frac{\partial g(w,\tau)}{\partial w}\right),$$

$$0 \le \theta_i(x,\tau) \le 1,\ i = 3,4,5.$$

□

Лемма 3.3. Пусть выполнены условия Леммы 3.2. Тогда справедлива оценка

$$d_S(Tf,Tg) \le \frac{r}{1-\beta}\frac{B_0 + (Y_{\max} + R + 2)\max\{B_1,B_2\}}{S} d_S(f,g). \tag{3.14}$$

Доказательство. Мы оценим сначала разность $|(Tf)(x,t) - (Tg)(x,t)|$:

$$|(Tf)(x,t) - (Tg)(x,t)| =$$

$$= \frac{r}{1-\beta}\left|\int_0^t\int_0^x\left[F\left(f(w,\tau), \frac{\partial f(w,\tau)}{\partial w}\right) - F\left(g(w,\tau), \frac{\partial g(w,\tau)}{\partial w}\right)\right] dwd\tau -\right.$$

$$\left.-\int_0^t\left[f(x,\tau)\int_0^1 F\left(f(w,\tau), \frac{\partial f(w,\tau)}{\partial w}\right) dw - g(x,\tau)\int_0^1 F\left(g(w,\tau), \frac{\partial g(w,\tau)}{\partial w}\right) dw\right] d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{r}{1-\beta}\left(\underbrace{\int_0^t\int_0^x\left|F\left(f(w,\tau), \frac{\partial f(w,\tau)}{\partial w}\right) - F\left(g(w,\tau), \frac{\partial g(w,\tau)}{\partial w}\right)\right| dwd\tau}_{\mathcal{D}_1(x,t)} +\right.$$

$$\left.+\underbrace{\int_0^t\left|f(x,\tau)\int_0^1 F\left(f(w,\tau), \frac{\partial f(w,\tau)}{\partial w}\right) dw - g(x,\tau)\int_0^1 F\left(g(w,\tau), \frac{\partial g(w,\tau)}{\partial w}\right) dw\right| d\tau}_{\mathcal{D}_2(x,t)}\right).$$

Применяя к подынтегральному выражению функции $\mathcal{D}_1(x,t)$ выведенную в Лемме 3.2 оценку (3.12), получим следующее неравенство:

$$\mathcal{D}_1(x,t) \le B_1\int_0^t\int_0^x |f(w,\tau) - g(w,\tau)|\, dwd\tau + B_2\int_0^t\int_0^x\left|\frac{\partial f(w,\tau)}{\partial w} - \frac{\partial g(w,\tau)}{\partial w}\right| dwd\tau.$$

Теперь применим оценку (3.13) из Леммы 3.2 к подынтегральному выражению функции $\mathcal{D}_2(x,t)$, положив $\alpha = f, \beta = g, D = R$:

$$\mathcal{D}_2(x,t) \le B_0\int_0^t |f(x,\tau) - g(x,\tau)|\, d\tau + RB_1\int_0^t\int_0^1 |f(w,\tau) - g(w,\tau)|\, dwd\tau +$$

$$+RB_2\int_0^t\int_0^1\left|\frac{\partial f(w,\tau)}{\partial w} - \frac{\partial g(w,\tau)}{\partial w}\right| dwd\tau.$$

Тогда

$$\left|\left(Tf\right)(x,t)-\left(Tg\right)(x,t)\right|\leq$$

$$\leq\frac{r}{1-\beta}\left(\left(R+1\right)\max\left\{B_1,B_2\right\}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(\left|f\left(w,\tau\right)-g\left(w,\tau\right)\right|+\left|\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}-\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right|\right)dwd\tau+\right.$$

$$\left.+B_0\int\limits_0^t\left|f\left(x,\tau\right)-g\left(x,\tau\right)\right|d\tau\right).$$

Займемся теперь вторым слагаемым:

$$\left|\frac{\partial\left(Tf\right)(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial\left(Tg\right)(x,t)}{\partial x}\right|=$$

$$=\frac{r}{1-\beta}\left|\int\limits_0^t\left[F\left(f\left(x,\tau\right),\frac{\partial f\left(x,\tau\right)}{\partial x}\right)-F\left(g\left(x,\tau\right),\frac{\partial g\left(x,\tau\right)}{\partial x}\right)\right]d\tau-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^t\left[\frac{\partial f\left(x,\tau\right)}{\partial x}\int\limits_0^1F\left(f\left(w,\tau\right),\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right)dw-\frac{\partial g\left(x,\tau\right)}{\partial x}\int\limits_0^1F\left(g\left(w,\tau\right),\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right)dw\right]d\tau\right|\leq$$

$$\leq\frac{r}{1-\beta}\left(\underbrace{\int\limits_0^t\left|F\left(f\left(x,\tau\right),\frac{\partial f\left(x,\tau\right)}{\partial x}\right)-F\left(g\left(x,\tau\right),\frac{\partial g\left(x,\tau\right)}{\partial x}\right)\right|d\tau}_{\mathcal{D}_3(x,t)}+\right.$$

$$\left.+\underbrace{\int\limits_0^t\left|\frac{\partial f\left(x,\tau\right)}{\partial x}\int\limits_0^1F\left(f\left(w,\tau\right),\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right)dw-\frac{\partial g\left(x,\tau\right)}{\partial x}\int\limits_0^1F\left(g\left(w,\tau\right),\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right)dw\right|d\tau}_{\mathcal{D}_4(x,t)}\right).$$

Используя оценку (3.12) для функции $\mathcal{D}_3\left(x,t\right)$, имеем

$$\mathcal{D}_3\left(x,t\right)\leq B_1\int\limits_0^t\left|f\left(x,\tau\right)-g\left(x,\tau\right)\right|d\tau+B_2\int\limits_0^t\left|\frac{\partial f\left(x,\tau\right)}{\partial x}-\frac{\partial g\left(x,\tau\right)}{\partial x}\right|d\tau.$$

Для функции $\mathcal{D}_4\left(x,t\right)$ мы используем неравенство (3.13), на этот раз положив $\alpha=\frac{\partial f}{\partial x},\beta=\frac{\partial g}{\partial x},D=Y_{\max}$:

$$\mathcal{D}_4\left(x,t\right)\leq B_0\int\limits_0^t\left|\frac{\partial f\left(x,\tau\right)}{\partial x}-\frac{\partial g\left(x,\tau\right)}{\partial x}\right|d\tau+Y_{\max}B_1\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left|f\left(w,\tau\right)-g\left(w,\tau\right)\right|dwd\tau+$$

$$+Y_{\max}B_2\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left|\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}-\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right|dwd\tau.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\partial\left(Tf\right)\left(x,t\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(Tg\right)\left(x,t\right)}{\partial x}\right|\leq$$

$$\leq\frac{r}{1-\beta}\left(Y_{\max}+1\right)\max\left\{B_1,B_2\right\}\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(\left|f\left(w,\tau\right)-g\left(w,\tau\right)\right|+\left|\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}-\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right|\right)dwd\tau+$$

$$+\frac{r}{1-\beta}B_0\int\limits_0^t\left|\frac{\partial f\left(x,\tau\right)}{\partial x}-\frac{\partial g\left(x,\tau\right)}{\partial x}\right|d\tau.$$

Складывая два неравенства, получаем

$$\left|\left(Tf\right)\left(x,t\right)-\left(Tg\right)\left(x,t\right)\right|+\left|\frac{\partial\left(Tf\right)\left(x,t\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(Tg\right)\left(x,t\right)}{\partial x}\right|\leq$$

$$\leq\frac{r}{1-\beta}\left(Y_{\max}+R+2\right)\max\left\{B_1,B_2\right\}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^t\int\limits_0^1\left(\left|f\left(w,\tau\right)-g\left(w,\tau\right)\right|+\left|\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}-\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right|\right)dwd\tau+$$

$$+\frac{r}{1-\beta}B_0\int\limits_0^t\left(\left|f\left(x,\tau\right)-g\left(x,\tau\right)\right|+\left|\frac{\partial f\left(x,\tau\right)}{\partial x}-\frac{\partial g\left(x,\tau\right)}{\partial x}\right|\right)d\tau.$$

Выведем оценку при любых $w\in[0,1]$, $t\in[0,+\infty)$ для следующего выражения:

$$\int\limits_0^t\left(\left|f\left(w,\tau\right)-g\left(w,\tau\right)\right|+\left|\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}-\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right|\right)e^{-S\tau}e^{S\tau}d\tau\leq$$

$$\leq\sup_{(w,\tau)\in[0,1]\times[0,t]}\left\{\left(\left|f\left(w,\tau\right)-g\left(w,\tau\right)\right|+\left|\frac{\partial f\left(w,\tau\right)}{\partial w}-\frac{\partial g\left(w,\tau\right)}{\partial w}\right|\right)e^{-S\tau}\right\}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 e^{S\tau}\,dwd\tau\leq$$

$$\leq d_S\left(f,g\right)\frac{e^{St}-1}{S}.$$

Тогда

$$\left(\left|\left(Tf\right)\left(x,t\right)-\left(Tg\right)\left(x,t\right)\right|+\left|\frac{\partial\left(Tf\right)\left(x,t\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(Tg\right)\left(x,t\right)}{\partial x}\right|\right)e^{-St}\leq$$

$$\leq\frac{r}{1-\beta}\left(B_0+\left(Y_{\max}+R+2\right)\max\left\{B_1,B_2\right\}\right)\frac{1-e^{-St}}{S}d_S\left(f,g\right)\leq$$

$$\leq\frac{r}{1-\beta}\frac{B_0+\left(Y_{\max}+R+2\right)\max\left\{B_1,B_2\right\}}{S}d_S\left(f,g\right),\quad (x,t)\in M.$$

Взяв супремум в левой части последнего неравенства по $(x,t)\in M$, окончательно выводим неравенство (3.14), что и требовалось.

□

Напомним следующее определение.

Определение 11. Пусть (X,d) – полное метрическое пространство. Отображение $T: X \to X$ называется сжимающим, если существует такое $k > 1$, что для любых $x, y \in X$ выполняется неравенство

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x,y).$$

Также напомним формулировку принципа сжимающих отображений.

Теорема (Принцип сжимающих отображений)**.** Пусть (X,d) – полное метрическое пространство и отображение $T: X \to X$ является сжимающим. Тогда у отображения T существует и единственна неподвижная точка $x^* \in X$.

Доказательство Теоремы 3.4. Воспользуемся доказанной в Лемме 3.3 оценкой (3.14), положив $S > \frac{r}{1-\beta}\left(B_0 + (Y_{\max} + R + 2)\max\{B_1, B_2\}\right)$. Тогда $k = \frac{r}{1-\beta}\frac{B_0 + (Y_{\max}+R+2)\max\{B_1,B_2\}}{S} < 1$, и в силу Определения 11 отображение T является сжимающим. Так как метрика d_S образует полное метрическое пространство $\left(C^{1,0}(M), d_S\right)$, то в силу принципа сжимающих отображений у отображения T существует единственная неподвижная точка $y^*(x,t) \in C^{1,0}(M)$. Следовательно, функция $y^*(x,t)$ является единственным решением интегрального уравнения (3.11), а следовательно, и задачи (3.8), причем $y^*(x,t) \in C^{1,1}(M)$. Теорема доказана. □

3.5.3. Единственность стационарного решения

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.5. Функция $\hat{y}(x)$ является единственным стационарным гладким решением уравнения (3.8a).

Доказательство. Стационарность и гладкость функции $\hat{y}(x)$ очевидно следуют по построению уравнения (3.8a).

Докажем теперь единственность. Предположим противное, т.е. существует такая функция $\bar{y}(x) \not\equiv \hat{y}(x)$, удовлетворяющая Определению 9, что для нее справедливо равенство

$$\bar{y}(x) = \frac{\int\limits_0^x \left(1 - \varphi\left(\bar{y}'(w)\right)\right)\psi\left(\bar{y}(w)\right)\, dw}{\int\limits_0^1 \left(1 - \varphi\left(\bar{y}'(w)\right)\right)\psi\left(\bar{y}(w)\right)\, dw}. \tag{3.15}$$

Изучим поведение функции

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left[\hat{y}^{-1}\left(\bar{y}(x)\right)\right] - 1.$$

Ясно, что $f(x) \not\equiv 0\ \forall x \in [0,1]$, так как в противном случае отсюда следует, что

$$\int\limits_0^x f(s)\, ds \equiv 0 \Rightarrow \hat{y}^{-1}\left(\bar{y}(x)\right) = x \Leftrightarrow \bar{y}(x) \equiv \hat{y}(x)\ \ \forall x \in [0,1].$$

Заметим, что $\int\limits_0^1 f(s)\,ds = \hat{y}^{-1}(\bar{y}(1)) - 1 = 0$, поэтому функция $f(s)$ не может быть знакопостоянной. Следовательно, функция $f(s)$ меняет знак хотя бы один раз на отрезке $[0,1]$. Тогда существуют такие $\delta_i > 0, x_i \in (0,1)\,, i = 1,2$, что выполняются неравенства

$$0 \le x_1 - \delta_1 < x_1 + \delta_1 \le x_2 - \delta_2 < x_2 + \delta_2 \le 1,$$

$$f(x) < 0 \quad \forall\, x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)\,,$$

$$f(x) > 0 \quad \forall\, x \in (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2)\,.$$

По теореме о производной сложной функции имеем

$$f(x) = \left(\hat{y}^{-1}\right)'(\bar{y}(x))\,\bar{y}'(x) - 1.$$

Так как по теореме о дифференцировании обратной функции $\left(\hat{y}^{-1}\right)'(\bar{y}(x)) = \frac{1}{\hat{y}'(\hat{y}^{-1}(\bar{y}(x)))} = \frac{1}{\xi(\bar{y}(x))}$, то два приведенных выше неравенства можно записать в эквивалентном виде:

$$\xi(\bar{y}(x)) > \bar{y}'(x) \quad \forall\, x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)\,,$$

$$\xi(\bar{y}(x)) < \bar{y}'(x) \quad \forall\, x \in (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2)\,.$$

Применив к обоим неравенствам функцию $\psi_0(\cdot)$ и домножив обе части каждого неравенства на $1 - \varphi(\bar{y}'(x))$, получаем

$$(1 - \varphi(\bar{y}'(x)))\,\psi_0(\xi(\bar{y}(x))) > (1 - \varphi(\bar{y}'(x)))\,\psi_0(\bar{y}'(x)) = C\bar{y}'(x)\,,\ x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)\,,$$

$$(1 - \varphi(\bar{y}'(x)))\,\psi_0(\xi(\bar{y}(x))) < (1 - \varphi(\bar{y}'(x)))\,\psi_0(\bar{y}'(x)) = C\bar{y}'(x)\,,\ x \in (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2)\,.$$

Дифференцированием по x равенства (3.15) получаем, что производная функции $\bar{y}(x)$ имеет вид

$$\bar{y}'(x) = \frac{(1 - \varphi(\bar{y}'(x)))\,\psi(\bar{y}(x))}{\int\limits_0^1 (1 - \varphi(\bar{y}'(w)))\,\psi(\bar{y}(w))\,dw} \quad \forall\, x \in [0,1]\,.$$

Но тогда из первого неравенства следует, что

$$(1 - \varphi(\bar{y}'(x)))\,\psi(\bar{y}(x)) > C\frac{(1 - \varphi(\bar{y}'(x)))\,\psi(\bar{y}(x))}{\int\limits_0^1 (1 - \varphi(\bar{y}'(w)))\,\psi(\bar{y}(w))\,dw} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 (1 - \varphi(\bar{y}'(w)))\,\psi(\bar{y}(w))\,dw > C,$$

в то время как из второго неравенства следует, что

$$(1 - \varphi(\bar{y}'(x)))\,\psi(\bar{y}(x)) < C\frac{(1 - \varphi(\bar{y}'(x)))\,\psi(\bar{y}(x))}{\int\limits_0^1 (1 - \varphi(\bar{y}'(w)))\,\psi(\bar{y}(w))\,dw} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 (1 - \varphi(\bar{y}'(w)))\,\psi(\bar{y}(w))\,dw < C.$$

Получаем пару противоречащих друг другу неравенств. Таким образом, от противного мы показали единственность стационарного гладкого решения. Теорема доказана. □

3.5.4. Асимптотическая устойчивость стационарного решения

Теорема 3.6. Пусть функции $\hat{y}(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемы на отрезках $[0,1]$ и $[0,2H]$ соответственно. Пусть также справедлива одна из следующих альтернатив:

1. либо $\hat{y}'(0) \geq \hat{y}'(1)\, e^{-\pi}$;

2. либо $0 < \hat{y}'(0) < \hat{y}'(1)\, e^{-\pi}$, при этом $\frac{\hat{y}'}{\hat{y}''} \in C^1[0,1]$, и производная функции $\frac{\hat{y}'(x)}{\hat{y}''(x)}$ неотрицательна всюду на отрезке $[0,1]$.

Тогда стационарное решение $\hat{y}(\cdot)$ уравнения (3.8a) является асимптотически устойчивым.

Обозначим теперь правую часть уравнения (3.8a) следующим образом:

$$\mathcal{A}(y(x,t)) = \frac{r}{1-\beta}\left[\int\limits_0^x \left(1-\varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right)\psi(y(w,t))\, dw - \right.$$
$$\left. - y(x,t)\int\limits_0^1 \left(1-\varphi\left(\frac{\partial y(w,t)}{\partial w}\right)\right)\psi(y(w,t))\, dw\right].$$

Тогда $\mathcal{A}$ является нелинейным интегро-дифференциальным оператором.

Обозначив через $\mathcal{L}(X,Y)$ пространство всех линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y, напомним определение производной по Фреше.

Определение 12 (см. [6])**.** Пусть оператор P переводит открытое множество Ω пространства X во множество Δ пространства Y. Если при фиксированном $x_0 \in \Omega$ существует такой линейный непрерывный оператор $U \in \mathcal{L}(X,Y)$, что при любом $x \in X$ выполняется

$$\lim_{t\to 0} \frac{P(x_0+tx)-P(x_0)}{t} = U(x), \tag{3.16}$$

то говорят, что линейный оператор U является производной оператора P в точке x_0, а производную P'_{x_0} называют производной по Гато.

Если предельное соотношение (3.16) выполняется равномерно относительно $x \in \overline{K} = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$, то говорят, что оператор P дифференцируем в точке x_0, а производную P'_{x_0} называют производной по Фреше.

Мы линеаризуем оператор $\mathcal{A}$. Для этого требуется найти производную по Фреше оператора $\mathcal{A}$ в точке $y = \hat{y}(x)$. Результат дает следующая лемма.

Лемма 3.4. Пусть функция $F(a,b)$ дважды непрерывно дифференцируема по (a,b) на множестве $[0,1]\times[0,2H]$, при этом относительно частных производных первого и второго порядков функции F для любых $(a,b)\in[0,1]\times[0,2H]$ справедливы следующие неравенства:

$$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial a^2}(a,b)\right|\le F_0,\quad \left|\frac{\partial^2 F}{\partial a\partial b}(a,b)\right|\le F_1,\quad \left|\frac{\partial^2 F}{\partial b^2}(a,b)\right|\le F_2,$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial a}(a,b)\right|\le F_3,\quad \left|\frac{\partial F}{\partial b}(a,b)\right|\le F_4.$$

Тогда оператор $\mathcal{A}$ переводит $C^{1,0}(M)$ в $C^{1,0}(M)$ и является дифференцируемым в каждой внутренней точке множества $B_0(q)=\left\{y(x,t)\,\middle|\,\|y\|_{C^{1,0}(M)}\le q\right\}, q>0$, причем его производная по Фреше в точке $\hat{y}=\hat{y}(x,t)$ вычисляется по формуле

$$\begin{gathered}\left(\mathcal{A}'_{\hat{y}}\tilde{y}\right)(x,t)=\\ =\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^x\left(\frac{\partial F}{\partial a}\left(\hat{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)\right)\tilde{y}(w,t)+\frac{\partial F}{\partial b}\left(\hat{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)\right)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right)dw-\\ -\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^1\left[\hat{y}(x,t)\left(\frac{\partial F}{\partial a}\left(\hat{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)\right)\tilde{y}(w,t)+\frac{\partial F}{\partial b}\left(\hat{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)\right)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right)+\right.\\ \left.+\tilde{y}(x,t)F\left(\hat{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)\right)\right]dw.\end{gathered}\tag{3.17}$$

Доказательство. Перевод оператором $\mathcal{A}$ множества $C^{1,0}(M)$ в $C^{1,0}(M)$ следует из Теоремы 3.4. Мы теперь докажем, что оператор $\mathcal{A}$ дифференцируем, и его производная определяется формулой (3.17). Пусть $Y_\varepsilon=\frac{\mathcal{A}(\hat{y}+\varepsilon\tilde{y})-\mathcal{A}(\hat{y})}{\varepsilon}$, тогда рассмотрим разность $Y_\varepsilon-\mathcal{P}\tilde{y}$, имеющую вид

$$\begin{gathered}Y_\varepsilon-\mathcal{P}\tilde{y}=\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^x\mathcal{I}_1\left(\hat{y}(w,t),\tilde{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t),\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t),\varepsilon\right)dw-\\ -\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^1\mathcal{I}_2\left(\hat{y}(x,t),\tilde{y}(x,t),\hat{y}(w,t),\tilde{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t),\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t),\varepsilon\right)dw,\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}\mathcal{I}_1\left(\hat{y}(w,t),\tilde{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t),\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t),\varepsilon\right)=\\ =\frac{F\left(\hat{y}(w,t)+\varepsilon\tilde{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)+\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right)-F\left(\hat{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)\right)}{\varepsilon}-\\ -\left(\frac{\partial F}{\partial a}\left(\hat{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)\right)\tilde{y}(w,t)+\frac{\partial F}{\partial b}\left(\hat{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)\right)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right),\end{gathered}$$

$$\mathcal{I}_2\left(\hat{y}(x,t),\tilde{y}(x,t),\hat{y}(w,t),\tilde{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t),\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t),\varepsilon\right)=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}\left(\left(\hat{y}(x,t)+\varepsilon\tilde{y}(x,t)\right)F\left(\hat{y}(w,t)+\varepsilon\tilde{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)+\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right)-\right.$$
$$\left.-\hat{y}(x,t)F\left(\hat{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)\right)\right)-\left(\tilde{y}(x,t)F\left(\hat{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)\right)+\right.$$
$$\left.+\hat{y}(x,t)\left(\frac{\partial F}{\partial a}\left(\hat{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)\right)\tilde{y}(w,t)+\frac{\partial F}{\partial b}\left(\hat{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)\right)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right)\right).$$

Оценим выражения $\mathcal{I}_i, i=1,2,$ используя формулу Тейлора второго порядка с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\left|\mathcal{I}_1\left(\hat{y}(w,t),\tilde{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t),\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t),\varepsilon\right)\right|=$$
$$=\frac{|\varepsilon|}{2}\left|\mathcal{F}_2\left(\theta_1,\theta_2,\hat{y}(w,t),\tilde{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t),\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right)\right|\le$$
$$\le\frac{|\varepsilon|}{2}\max_{i=\overline{0,2}}F_i\left(|\tilde{y}(w,t)|+\left|\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right|\right)^2,$$

$$\left|\mathcal{I}_2\left(\hat{y}(x,t),\tilde{y}(x,t),\hat{y}(w,t),\tilde{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t),\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t),\varepsilon\right)\right|=$$
$$=\frac{|\varepsilon|}{2}\left|\left(\hat{y}(x,t)+\theta_3\varepsilon\tilde{y}(x,t)\right)\mathcal{F}_2\left(\theta_4,\theta_5,\hat{y}(w,t),\tilde{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t),\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right)+\right.$$
$$\left.+2\tilde{y}(x,t)\left[\frac{\partial F}{\partial a}\left(\hat{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)\right)\tilde{y}(w,t)+\frac{\partial F}{\partial b}\left(\hat{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t)\right)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right]\right|\le$$
$$\le\frac{|\varepsilon|}{2}\left\{\max_{i=\overline{0,2}}F_i\left(|\hat{y}(x,t)|+|\varepsilon|\,|\tilde{y}(x,t)|\right)\left(|\tilde{y}(w,t)|+\left|\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right|\right)^2+\right.$$
$$\left.+2\max\{F_3,F_4\}\,|\tilde{y}(x,t)|\left(|\tilde{y}(w,t)|+\left|\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right|\right)\right\},$$

где

$$\mathcal{F}_2\left(\xi_1,\xi_2,\hat{y},\tilde{y},\frac{\partial\hat{y}}{\partial w},\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}\right)=\frac{\partial^2F}{\partial a^2}\left(\hat{y}+\xi_1\varepsilon\tilde{y},\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}+\xi_2\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}\right)\tilde{y}^2+$$
$$+\frac{\partial^2F}{\partial a\partial b}\left(\hat{y}+\xi_1\varepsilon\tilde{y},\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}+\xi_2\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}\right)\cdot2\tilde{y}\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}+\frac{\partial^2F}{\partial b^2}\left(\hat{y}+\xi_1\varepsilon\tilde{y},\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}+\xi_2\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}\right)^2.$$

Тогда

$$|Y_\varepsilon(x,t)-(\mathcal{P}\tilde{y})(x,t)|\le$$
$$\le\frac{r}{1-\beta}\int_0^x\left|\mathcal{I}_1\left(\hat{y}(w,t),\tilde{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t),\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t),\varepsilon\right)\right|dw+$$
$$+\frac{r}{1-\beta}\int_0^1\left|\mathcal{I}_2\left(\hat{y}(x,t),\tilde{y}(x,t),\hat{y}(w,t),\tilde{y}(w,t),\frac{\partial\hat{y}}{\partial w}(w,t),\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t),\varepsilon\right)\right|dw\le$$
$$\le\frac{|\varepsilon|}{2}\frac{r}{1-\beta}\left\{\max_{i=\overline{0,2}}F_i\,\|\tilde{y}\|^2_{C^{1,0}(M)}\left(1+|\hat{y}(x,t)|+|\varepsilon|\,|\tilde{y}(x,t)|\right)+\right.$$
$$\left.+2\max\{F_3,F_4\}\,|\tilde{y}(x,t)|\,\|\tilde{y}\|_{C^{1,0}(M)}\right\}.$$

Рассмотрим теперь разность $\frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial(\mathcal{P}\tilde{y})}{\partial x}(x,t)$. Для начала заметим, что в силу линейности функции $\mathcal{I}_2$ по первым двум аргументам справедливо соотношение

$$\frac{d}{dx}\mathcal{I}_2\left(\hat{y}(x,t), \tilde{y}(x,t), \hat{y}(w,t), \tilde{y}(w,t), \frac{\partial \hat{y}}{\partial w}(w,t), \frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t), \varepsilon\right) =$$
$$= \mathcal{I}_2\left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}(x,t), \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(x,t), \hat{y}(w,t), \tilde{y}(w,t), \frac{\partial \hat{y}}{\partial w}(w,t), \frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t), \varepsilon\right),$$

поэтому

$$\frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial(\mathcal{P}\tilde{y})}{\partial x} = \frac{r}{1-\beta}\mathcal{I}_1\left(\hat{y}(x,t), \tilde{y}(x,t), \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}(x,t), \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(x,t), \varepsilon\right) -$$
$$-\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^1 \mathcal{I}_2\left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}(x,t), \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(x,t), \hat{y}(w,t), \tilde{y}(w,t), \frac{\partial \hat{y}}{\partial w}(w,t), \frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t), \varepsilon\right) dw.$$

Оценка первого слагаемого сводится к оценке функции $\mathcal{I}_1$, в то время как подынтегральное выражение во втором слагаемом оценивается следующим образом:

$$\left|\mathcal{I}_2\left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}(x,t), \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(x,t), \hat{y}(w,t), \tilde{y}(w,t), \frac{\partial \hat{y}}{\partial w}(w,t), \frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t), \varepsilon\right)\right| \leq$$
$$\leq \frac{|\varepsilon|}{2}\left\{\max_{i=\overline{0,2}} F_i\left(\left|\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}(x,t)\right| + |\varepsilon|\left|\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(x,t)\right|\right)\left(|\tilde{y}(w,t)| + \left|\frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right|\right)^2 +\right.$$
$$\left.+2\max\{F_3, F_4\}\left|\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(x,t)\right|\left(|\tilde{y}(w,t)| + \left|\frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right|\right)\right\}.$$

Тогда

$$\left|\frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial(\mathcal{P}\tilde{y})}{\partial x}(x,t)\right| \leq$$
$$\leq \frac{r}{1-\beta}\left|\mathcal{I}_1\left(\hat{y}(x,t), \tilde{y}(x,t), \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}(x,t), \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(x,t), \varepsilon\right)\right| +$$
$$+\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^1 \left|\mathcal{I}_2\left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}(x,t), \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(x,t), \hat{y}(w,t), \tilde{y}(w,t), \frac{\partial \hat{y}}{\partial w}(w,t), \frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t), \varepsilon\right)\right| dw \leq$$
$$\leq \frac{|\varepsilon|}{2}\frac{r}{1-\beta}\left\{\max_{i=\overline{0,2}} F_i\left(1 + \left|\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}(x,t)\right| + |\varepsilon|\left|\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(x,t)\right|\right)\|\tilde{y}\|^2_{C^{1,0}(M)} +\right.$$
$$\left.+2\max\{F_3, F_4\}\left|\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(x,t)\right|\|\tilde{y}\|_{C^{1,0}(M)}\right\}.$$

Наконец, складывая оценки, получаем

$$|Y_\varepsilon(x,t) - (\mathcal{P}\tilde{y})(x,t)| + \left|\frac{\partial Y_\varepsilon}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial(\mathcal{P}\tilde{y})}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{|\varepsilon|}{2}\frac{r}{1-\beta}\cdot$$
$$\cdot\left\{\max_{i=\overline{0,2}} F_i\left(2 + \left(|\hat{y}(x,t)| + \left|\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}(x,t)\right|\right) + |\varepsilon|\left(|\tilde{y}(x,t)| + \left|\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(x,t)\right|\right)\right)\|\tilde{y}\|^2_{C^{1,0}(M)} +\right.$$
$$\left.+2\max\{F_3, F_4\}\left(|\tilde{y}(x,t)| + \left|\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(x,t)\right|\right)\|\tilde{y}\|_{C^{1,0}(M)}\right\} \leq$$
$$\leq \frac{|\varepsilon|}{2}\frac{r}{1-\beta}\left\{\max_{i=\overline{0,2}} F_i\left(2 + \|\hat{y}\|_{C^{1,0}(M)} + |\varepsilon|\,\|\tilde{y}\|_{C^{1,0}(M)}\right)\|\tilde{y}\|^2_{C^{1,0}(M)} +\right.$$
$$\left.+2\max\{F_3, F_4\}\|\tilde{y}\|^2_{C^{1,0}(M)}\right\}.$$

Таким образом, окончательно выводим, что

$$\|Y_\varepsilon - \mathcal{P}\tilde{y}\|_{C^{1,0}(M)} \leq$$
$$\leq \frac{|\varepsilon|}{2}\frac{r}{1-\beta}\|\tilde{y}\|^2_{C^{1,0}(M)}\left\{\max_{i=\overline{0,2}} F_i\left(2+q+|\varepsilon|\,\|\tilde{y}\|_{C^{1,0}(M)}\right)+2\max\left\{F_3,F_4\right\}\right\}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

равномерно относительно $\tilde{y}(x,t)\in C^{1,0}(M)$ с $\|\tilde{y}\|_{C^{1,0}(M)}=1$, что доказывает дифференцируемость по Фреше оператора $\mathcal{A}$ в точке $\hat{y}\in B_0(q)$, при этом $\mathcal{A}'(\hat{y})=\mathcal{P}$. □

Лемма 3.5. Пусть функция $\varphi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,2H]$. Тогда производная по Фреше оператора $\mathcal{A}$ в точке $y=\hat{y}(x)$ по направлению $\tilde{y}(x,t)$, удовлетворяющему условиям $\tilde{y}(0,t)=\tilde{y}(1,t)=0$, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{A}'_{\hat{y}}\tilde{y}\right)(x,t)=\frac{rC}{1-\beta}\Bigg[&-M(x)\,\tilde{y}(x,t)+\int\limits_0^x \mathcal{K}(w)\,\tilde{y}(w,t)\,dw-\\&-\hat{y}(x)\int\limits_0^1 \mathcal{K}(w)\,\tilde{y}(w,t)\,dw\Bigg],\end{aligned}\tag{3.18}$$

где

$$M(x)=1+\frac{\varphi'(\hat{y}'(x))\,\hat{y}'(x)}{1-\varphi(\hat{y}'(x))},\tag{3.19}$$

$$\mathcal{K}(x)=\frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x)+M'(x).\tag{3.20}$$

Доказательство. Применим Лемму 3.4. Тогда по формуле (3.17) производная по Фреше оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{A}'_{\hat{y}}\tilde{y}\right)(x,t)=&\left.\frac{d}{d\varepsilon}[\mathcal{A}(\hat{y}(x)+\varepsilon\tilde{y}(x,t))]\right|_{\varepsilon=0}=\\=\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^x&\left((1-\varphi(\hat{y}'(w)))\,\psi'(\hat{y}(w))\,\tilde{y}(w,t)-\varphi'(\hat{y}'(w))\,\psi(\hat{y}(w))\,\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right)dw-\\-\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^1&\left[\hat{y}(x)\left((1-\varphi(\hat{y}'(w)))\,\psi'(\hat{y}(w))\,\tilde{y}(w,t)-\varphi'(\hat{y}'(w))\,\psi(\hat{y}(w))\,\frac{\partial\tilde{y}}{\partial w}(w,t)\right)+\right.\\&\left.+\tilde{y}(x,t)\,(1-\varphi(\hat{y}'(w)))\,\psi(\hat{y}(w))\right]dw.\end{aligned}$$

Нам будет удобно представить производную в виде следующего выражения:

$$\mathcal{A}'=\frac{r}{1-\beta}\left(\mathcal{A}_{11}-\mathcal{A}_{12}\right),$$

где

$$\mathcal{A}_{11}=\int\limits_0^x Y_\varphi(w,t)\,dw,$$

$$\mathcal{A}_{12} = \tilde{y}(x,t) \int\limits_0^1 \left[1 - \varphi\left(\hat{y}'(w)\right)\right] \psi\left(\hat{y}(w)\right)\, dw + \hat{y}(x) \int\limits_0^1 Y_\varphi(w,t)\, dw,$$

а под записью $Y_\varphi(w,t)$ понимается выражение вида

$$Y_\varphi(w,t) = \left(1 - \varphi\left(\hat{y}'(w)\right)\right) \psi'\left(\hat{y}(w)\right) \tilde{y}(w,t) - \varphi'\left(\hat{y}'(w)\right) \psi\left(\hat{y}(w)\right) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t).$$

Так как $\psi(y) = \psi_0(\xi(y))$, то при $y = \hat{y}(x)$ имеем

$$\psi\left(\hat{y}(x)\right) = \psi_0\left(\hat{y}'(x)\right) = C \frac{\hat{y}'(x)}{1 - \varphi\left(\hat{y}'(x)\right)}.$$

Найдем теперь производную $\psi'(y)$:

$$\psi'(y) = \psi_0'\left(\xi(y)\right) \cdot \xi'(y) = C \frac{1 - \varphi\left(\xi(y)\right) + \xi(y)\, \varphi'\left(\xi(y)\right)}{\left(1 - \varphi\left(\xi(y)\right)\right)^2} \cdot \xi'(y),$$

$$\xi'(y) = \left(\frac{d\hat{y}}{dx}(\chi)\Big|_{\chi = \hat{y}^{-1}(y)} \right)'_y = \frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(\chi)\Big|_{\chi = \hat{y}^{-1}(y)} \left(\hat{y}^{-1}\right)'(y) = \frac{\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(\chi)\Big|_{\chi = \hat{y}^{-1}(y)}}{\frac{d\hat{y}}{dx}(\chi)\Big|_{\chi = \hat{y}^{-1}(y)}}.$$

Тогда $\xi'\left(\hat{y}(x)\right) = \frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}$, и

$$\psi'\left(\hat{y}(x)\right) = C \cdot \frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)} \frac{1 - \varphi\left(\hat{y}'(x)\right) + \hat{y}'(x)\, \varphi'\left(\hat{y}'(x)\right)}{\left(1 - \varphi\left(\hat{y}'(x)\right)\right)^2}.$$

Подставляя выведенные выражения в формулу для $Y_\varphi(w,t)$, получаем

$$\begin{gathered} Y_\varphi(w,t) = C \left[-\frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t) \frac{\varphi'\left(\hat{y}'(w)\right) \hat{y}'(w)}{1 - \varphi\left(\hat{y}'(w)\right)} + \right. \\ \left. + \tilde{y}(w,t) \left(1 + \frac{\varphi'\left(\hat{y}'(w)\right) \hat{y}'(w)}{1 - \varphi\left(\hat{y}'(w)\right)}\right) \frac{\hat{y}''(w)}{\hat{y}'(w)} \right] = \\ = C \left[\frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t) + \left(1 + \frac{\varphi'\left(\hat{y}'(w)\right) \hat{y}'(w)}{1 - \varphi\left(\hat{y}'(w)\right)}\right) \left(\frac{\hat{y}''(w)}{\hat{y}'(w)} \tilde{y}(w,t) - \frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t) \right) \right]. \end{gathered}$$

Используя формулу (3.19) для функции $M(x)$, окончательно выводим

$$Y_\varphi(w,t) = C \left[\frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t) + M(w) \left(\frac{\hat{y}''(w)}{\hat{y}'(w)} \tilde{y}(w,t) - \frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t) \right) \right].$$

Интегрируя функцию $Y_\varphi(w,t)$ по w в пределах от 0 до $x \in [0,1]$ и применив операцию интегрирования по частям к подынтегральному слагаемому $-M(w) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t)$, получаем равенство

$$\begin{gathered} \int\limits_0^x Y_\varphi(w,t)\, dw = C \int\limits_0^x \left[\frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t) + M(w) \left(\frac{\hat{y}''(w)}{\hat{y}'(w)} \tilde{y}(w,t) - \frac{\partial \tilde{y}}{\partial w}(w,t) \right) \right] dw = \\ = C \left[\tilde{y}(x,t) - \tilde{y}(0,t) - \left(M(x)\, \tilde{y}(x,t) - M(0)\, \tilde{y}(0,t)\right) + \right. \\ \left. + \int\limits_0^x \left(\frac{\hat{y}''(w)}{\hat{y}'(w)} M(w) + M'(w) \right) \tilde{y}(w,t)\, dw \right]. \end{gathered}$$

Тогда заметив, что первое слагаемое у оператора $\mathcal{A}_{12}$ имеет вид

$$\tilde{y}\left(x,t\right)\int\limits_0^1\left[1-\varphi\left(\hat{y}'\left(w\right)\right)\right]\psi\left(\hat{y}\left(w\right)\right)\,dw=C\tilde{y}\left(x,t\right)\int\limits_0^1\hat{y}'\left(w\right)\,dw=C\tilde{y}\left(x,t\right),$$

можем вывести выражения для операторов $\mathcal{A}_{1i}, i=1,2$:

$$\mathcal{A}_{11}=C\left[\tilde{y}\left(x,t\right)-\tilde{y}\left(0,t\right)-\left(M\left(x\right)\tilde{y}\left(x,t\right)-M\left(0\right)\tilde{y}\left(0,t\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^x\left(\frac{\hat{y}''\left(w\right)}{\hat{y}'\left(w\right)}M\left(w\right)+M'\left(w\right)\right)\tilde{y}\left(w,t\right)\,dw\right],$$

$$\mathcal{A}_{12}=C\tilde{y}\left(x,t\right)+C\hat{y}\left(x\right)\left[\tilde{y}\left(1,t\right)-\tilde{y}\left(0,t\right)-\left(M\left(1\right)\tilde{y}\left(1,t\right)-M\left(0\right)\tilde{y}\left(0,t\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^1\left(\frac{\hat{y}''\left(w\right)}{\hat{y}'\left(w\right)}M\left(w\right)+M'\left(w\right)\right)\tilde{y}\left(w,t\right)\,dw\right].$$

Следовательно, применяя формулу (3.20) для функции $\mathcal{K}\left(w\right)$, мы можем окончательно найти выражение для производной $\mathcal{A}'$:

$$\mathcal{A}'=\frac{rC}{1-\beta}\left[\left(M\left(0\right)-1\right)\tilde{y}\left(0,t\right)-M\left(x\right)\tilde{y}\left(x,t\right)+\right.$$

$$+\hat{y}\left(x\right)\left(\left(M\left(1\right)-1\right)\tilde{y}\left(1,t\right)-\left(M\left(0\right)-1\right)\tilde{y}\left(0,t\right)-\int\limits_0^1\mathcal{K}\left(w\right)\tilde{y}\left(w,t\right)\,dw\right)+$$

$$\left.+\int\limits_0^x\mathcal{K}\left(w\right)\tilde{y}\left(w,t\right)\,dw\right].$$

Так как функция $\hat{y}\left(x\right)+\varepsilon\tilde{y}\left(x,t\right)$ является кривой Лоренца для любого $\varepsilon>0$, для функции $\tilde{y}\left(x,t\right)$ должны выполняться краевые условия вида $\tilde{y}\left(0,t\right)=\tilde{y}\left(1,t\right)=0$. Тогда оператор $\mathcal{A}'$ обретает вид (3.18), что завершает доказательство леммы. □

Мы заинтересованы в определении спектра оператора $\mathcal{A}'$. Для этого необходимо рассмотреть уравнение вида $\left(\mathcal{A}'-\tilde{\lambda}I\right)\tilde{y}=\tilde{z}$ при $\tilde{\lambda}\in\mathbb{C}$ и определить, при каких $\tilde{\lambda}\in\mathbb{C}$ оператор $\mathcal{A}'-\tilde{\lambda}I$ является непрерывно обратимым. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что мы рассматриваем задачу вида $\left(\mathcal{A}'-\lambda I\right)\tilde{y}=z, \lambda\in\mathbb{C}$, где $\tilde{\lambda}=\frac{rC}{1-\beta}\lambda, \tilde{z}=\frac{rC}{1-\beta}z, \mathcal{A}':=\frac{1-\beta}{rC}\mathcal{A}'$.

Тогда мы приходим к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases}-M\left(x\right)\tilde{y}\left(x\right)+\int\limits_0^x\mathcal{K}\left(w\right)\tilde{y}\left(w\right)\,dw-\hat{y}\left(x\right)\int\limits_0^1\mathcal{K}\left(w\right)\tilde{y}\left(w\right)\,dw-\lambda\tilde{y}\left(x\right)=z,\quad x\in\left[0,1\right],\\ \tilde{y}\left(0\right)=\tilde{y}\left(1\right)=0.\end{cases}\tag{3.21}$$

Введем следующие обозначения: $\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda, \lambda_2 = \operatorname{Im}\lambda, \tilde{y}_1(x) = \operatorname{Re}\tilde{y}(x), \tilde{y}_2(x) = \operatorname{Im}\tilde{y}(x)$. Используя алгебраическое представление комплексных чисел и правило их умножения, выраженное формулой $\lambda\tilde{y} = \lambda_1\tilde{y}_1 - \lambda_2\tilde{y}_2 + i(\lambda_1\tilde{y}_2 + \lambda_2\tilde{y}_1)$, мы можем переписать уравнение краевой задачи (3.21) следующим образом:

$$\begin{cases} -M(x)\tilde{y}_1(x) + \int\limits_0^x \mathcal{K}(w)\tilde{y}_1(w)\,dw - \hat{y}(x)\int\limits_0^1 \mathcal{K}(w)\tilde{y}_1(w)\,dw - \lambda_1\tilde{y}_1(x) + \lambda_2\tilde{y}_2(x) = z_1(x), \\ -M(x)\tilde{y}_2(x) + \int\limits_0^x \mathcal{K}(w)\tilde{y}_2(w)\,dw - \hat{y}(x)\int\limits_0^1 \mathcal{K}(w)\tilde{y}_2(w)\,dw - \lambda_1\tilde{y}_2(x) - \lambda_2\tilde{y}_1(x) = z_2(x). \end{cases}$$

Обозначив $\mu_i = \int\limits_0^1 \mathcal{K}(w)\tilde{y}_i(w)\,dw, i = 1, 2$, рассмотрим вместо задачи (3.21) следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} -M(x)\tilde{y}_1(x) + \int\limits_0^x \mathcal{K}(w)\tilde{y}_1(w)\,dw - \mu_1\hat{y}(x) - \lambda_1\tilde{y}_1(x) + \lambda_2\tilde{y}_2(x) = z_1(x), \\ -M(x)\tilde{y}_2(x) + \int\limits_0^x \mathcal{K}(w)\tilde{y}_2(w)\,dw - \mu_2\hat{y}(x) - \lambda_1\tilde{y}_2(x) - \lambda_2\tilde{y}_1(x) = z_2(x), \\ \tilde{y}_i(0) = \tilde{y}_i(1) = 0, \quad i = 1, 2, \\ \mu_i = \int\limits_0^1 \mathcal{K}(w)\tilde{y}_i(w)\,dw, \quad i = 1, 2. \end{cases} \tag{3.22}$$

Получена система из двух интегральных уравнений типа Вольтерра с параметрами $\mu_i, \lambda_i, i = 1, 2$. Для решения задачи (3.22) нам будет удобно продифференцировать каждое уравнение системы по x и перейти к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} (M(x) + \lambda_1)\tilde{y}_1'(x) - \lambda_2\tilde{y}_2'(x) = \dfrac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x)\tilde{y}_1(x) - \mu_1\hat{y}'(x) - z_1'(x), \\ \lambda_2\tilde{y}_1'(x) + (M(x) + \lambda_1)\tilde{y}_2'(x) = \dfrac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x)\tilde{y}_2(x) - \mu_2\hat{y}'(x) - z_2'(x), \\ \tilde{y}_i(0) = \tilde{y}_i(1) = 0, \quad i = 1, 2, \\ \mu_i = \int\limits_0^1 \mathcal{K}(w)\tilde{y}_i(w)\,dw, \quad i = 1, 2. \end{cases} \tag{3.23}$$

В обозначениях

$$A(x) = \begin{bmatrix} M(x) + \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & M(x) + \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda(x) = \begin{bmatrix} \frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x) & 0 \\ 0 & \frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x) \end{bmatrix},$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} -\mu_1\hat{y}'(x) \\ -\mu_2\hat{y}'(x) \end{pmatrix}$$

система задачи (3.23) может быть записана в матричной форме как

$$A(x)\,\tilde{y}'(x) = \Lambda(x)\,\tilde{y}(x) + f(x) - z'(x)\,.$$

Пусть $M_- = \min\limits_{x\in[0,1]} M(x)$, $M_+ = \max\limits_{x\in[0,1]} M(x)$. Тогда $\det A = (M(x)+\lambda_1)^2 + \lambda_2^2 > 0$ для любого $x \in [0,1]$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\lambda_1 \notin [-M_+, -M_-]\,, \quad \lambda_2 \neq 0. \tag{3.24}$$

В этом случае матрица A обратима, и ее обратная матрица имеет вид

$$A^{-1}(x) = \frac{1}{(M(x)+\lambda_1)^2 + \lambda_2^2} \begin{bmatrix} M(x)+\lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & M(x)+\lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, мы можем перейти к системе вида

$$\tilde{y}'(x) = A^{-1}(x)\,\Lambda(x)\,\tilde{y}(x) + A^{-1}(x)\,f(x) - A^{-1}(x)\,z'(x) \equiv B(x)\,\tilde{y}(x) + g(x) - A^{-1}(x)\,z'(x)\,,$$

где

$$B(x) = \frac{\frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)} M(x)}{(M(x)+\lambda_1)^2 + \lambda_2^2} \begin{pmatrix} M(x)+\lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & M(x)+\lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$g(x) = \frac{1}{(M(x)+\lambda_1)^2 + \lambda_2^2} \begin{pmatrix} -\hat{y}'(x)\,(\mu_1(M(x)+\lambda_1) + \mu_2\lambda_2) \\ -\hat{y}'(x)\,(-\mu_1\lambda_2 + \mu_2(M(x)+\lambda_1)) \end{pmatrix}.$$

Введем функцию $G(x)$, такую что

$$\cos G(x) = \frac{M(x)+\lambda_1}{\sqrt{(M(x)+\lambda_1)^2 + \lambda_2^2}}, \quad \sin G(x) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{(M(x)+\lambda_1)^2 + \lambda_2^2}}.$$

Для полученной линейной неавтономной системы ОДУ первого порядка удается построить решение в явном виде.

Лемма 3.6. Фундаментальная матрица однородной системы имеет вид

$$Y(x) = \begin{pmatrix} S(x)\cos T(x) & S(x)\sin T(x) \\ -S(x)\sin T(x) & S(x)\cos T(x) \end{pmatrix}, \tag{3.25}$$

где

$$S(x) = \exp\left\{ \int\limits_0^x \frac{\hat{y}''(s)}{\hat{y}'(s)} \frac{M(s)}{\sqrt{(M(s)+\lambda_1)^2 + \lambda_2^2}} \cos G(s)\,ds \right\}, \tag{3.26}$$

$$T(x) = \int\limits_0^x \frac{\hat{y}''(s)}{\hat{y}'(s)} \frac{M(s)}{\sqrt{(M(s)+\lambda_1)^2 + \lambda_2^2}} \sin G(s)\,ds. \tag{3.27}$$

Доказательство. Будем искать решение, допускающее полярное представление вида

$$\tilde{y}_1(x) = r(x)\cos\varphi(x), \quad \tilde{y}_2(x) = r(x)\sin\varphi(x), \quad r(x) > 0.$$

Тогда

$$\tilde{y}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' \\ \varphi' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Матрица $\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$ обратима при $\det\Phi = r > 0$. При этом обратная матрица имеет вид $\Phi^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, и тогда

$$\begin{pmatrix} r' \\ \varphi' \end{pmatrix} = \Phi^{-1} B \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Вычислим правую часть:

$$\Phi^{-1} B \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\left(M(x)+\lambda_1\right)^2 + \lambda_2^2} \begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \left(M(x)+\lambda_1\right)\frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x) & \lambda_2\frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x) \\ -\lambda_2\frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x) & \left(M(x)+\lambda_1\right)\frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\left(M(x)+\lambda_1\right)^2 + \lambda_2^2} \begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \left(M(x)+\lambda_1\right)\frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x)\cos\varphi + \lambda_2\frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x)\sin\varphi \\ -\lambda_2\frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x)\cos\varphi + \left(M(x)+\lambda_1\right)\frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x)\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\left(M(x)+\lambda_1\right)^2 + \lambda_2^2} \begin{bmatrix} \left(M(x)+\lambda_1\right)\frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x)\, r \\ -\lambda_2\frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x) \end{bmatrix}.$$

Следовательно, мы получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{r'}{r} = \dfrac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)} \dfrac{M(x)}{\sqrt{\left(M(x)+\lambda_1\right)^2 + \lambda_2^2}} \cos G(x), \\ \varphi' = -\dfrac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)} \dfrac{M(x)}{\sqrt{\left(M(x)+\lambda_1\right)^2 + \lambda_2^2}} \sin G(x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(x) = C_1 S(x), \\ \varphi(x) = C_2 - T(x). \end{cases}$$

Тогда решением однородной системы является матрица

$$Y(x) = \Big(Y_1(x) \,|\, Y_2(x)\Big) = \begin{pmatrix} C_{11} S(x)\cos\left(C_{12} - T(x)\right) & C_{21} S(x)\cos\left(C_{22} - T(x)\right) \\ C_{11} S(x)\sin\left(C_{12} - T(x)\right) & C_{21} S(x)\sin\left(C_{22} - T(x)\right) \end{pmatrix}.$$

Из условия $Y(0) = I$ можно найти значения констант:

$$Y_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}\cos C_{12} \\ C_{11}\sin C_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{11} = 1, C_{12} = 0,$$

$$Y_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{21}\cos C_{22} \\ C_{21}\sin C_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow C_{21} = 1, C_{22} = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда фундаментальная матрица принимает вид (3.25). □

Представим следующие обозначения:

$$a_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) = \frac{S(x)}{S(\xi)} \frac{\hat{y}'(\xi)}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}} \cos\left(T(x) - T(\xi) + G(\xi)\right), \tag{3.28}$$

$$a_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) = \frac{S(x)}{S(\xi)} \frac{\hat{y}'(\xi)}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}} \sin\left(T(x) - T(\xi) + G(\xi)\right), \tag{3.29}$$

$$\begin{gathered} b_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) = \frac{S(x)}{S(\xi)} \frac{1}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}} \left[z_1'(\xi)\cos\left(T(x) - T(\xi) + G(\xi)\right) + \right. \\ \left. + z_2'(\xi)\sin\left(T(x) - T(\xi) + G(\xi)\right)\right], \end{gathered} \tag{3.30}$$

$$\begin{gathered} b_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) = \frac{S(x)}{S(\xi)} \frac{1}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}} \left[-z_1'(\xi)\sin\left(T(x) - T(\xi) + G(\xi)\right) + \right. \\ \left. + z_2'(\xi)\cos\left(T(x) - T(\xi) + G(\xi)\right)\right]. \end{gathered} \tag{3.31}$$

Лемма 3.7. Вектор-функция

$$-\begin{pmatrix} \int\limits_0^x \left(b_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + \mu_1 a_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + \mu_2 a_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\right) d\xi \\ \int\limits_0^x \left(b_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) - \mu_1 a_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + \mu_2 a_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\right) d\xi \end{pmatrix}$$

является решением неоднородной системы $\tilde{y}' = By + g - A^{-1}z'$, $\tilde{y}(0) = 0$.

Доказательство. Решение линейной неоднородной системы определяется формулой

$$\tilde{y}(x) = Y(x)Y^{-1}(0)\tilde{y}(0) + \int\limits_0^x Y(x)Y^{-1}(\xi)\left(g(\xi) - A^{-1}(\xi)z'(\xi)\right) d\xi.$$

Так как $\tilde{y}(0) = 0$, первое слагаемое обращается в нулевой вектор. Остается посчитать подынтегральное выражение во втором слагаемом. Так как фундаментальная матрица обратима, то существует обратная к ней матрица, которая вычисляется по формуле

$$Y^{-1}(\xi) = \frac{1}{S(\xi)} \begin{pmatrix} \cos T(\xi) & -\sin T(\xi) \\ \sin T(\xi) & \cos T(\xi) \end{pmatrix}.$$

Тогда $Y(x)\,Y^{-1}(\xi) = \frac{S(x)}{S(\xi)} \begin{pmatrix} \cos(T(x) - T(\xi)) & \sin(T(x) - T(\xi)) \\ -\sin(T(x) - T(\xi)) & \cos(T(x) - T(\xi)) \end{pmatrix}$, и

$$Y(x)\,Y^{-1}(\xi)\left(g(\xi) - A^{-1}(\xi)\,z'(\xi)\right) = -\frac{S(x)}{S(\xi)} \frac{1}{\sqrt{(M(\xi) + \lambda_1)^2 + \lambda_2^2}} \times$$

$$\times \left[\begin{pmatrix} z_1'(\xi)\cos(T(x) - T(\xi) + G(\xi)) + z_2'(\xi)\sin(T(x) - T(\xi) + G(\xi)) \\ -z_1'(\xi)\sin(T(x) - T(\xi) + G(\xi)) + z_2'(\xi)\cos(T(x) - T(\xi) + G(\xi)) \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. +\hat{y}'(\xi) \begin{pmatrix} \mu_1\cos(T(x) - T(\xi) + G(\xi)) + \mu_2\sin(T(x) - T(\xi) + G(\xi)) \\ -\mu_1\sin(T(x) - T(\xi) + G(\xi)) + \mu_2\cos(T(x) - T(\xi) + G(\xi)) \end{pmatrix} \right] =$$

$$= -\begin{pmatrix} b_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + \mu_1 a_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + \mu_2 a_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) \\ b_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) - \mu_1 a_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + \mu_2 a_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

Интегрирование полученной функции от 0 до x по ξ приводит к утверждению леммы. $\square$

Теперь нам необходимо найти значения параметров μ_1 и μ_2, а также комплексных λ, при которых выполняются краевые условия задачи. Условия $\tilde{y}_i(0) = 0, i = 1, 2$, учтены по Лемме 3.7.

Из условий $\tilde{y}_i(1) = 0, i = 1, 2$, мы получаем следующую систему:

$$\mu_1 \int_0^1 a_1(1,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi + \mu_2 \int_0^1 a_2(1,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi = -\int_0^1 b_1(1,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi,$$

$$-\mu_1 \int_0^1 a_2(1,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi + \mu_2 \int_0^1 a_1(1,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi = -\int_0^1 b_2(1,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi.$$

Итак, получена линейная неоднородная система уравнений, зависящая от значений параметров $\mu_i, i = 1, 2$. Обозначим

$$A_i(\lambda_1,\lambda_2) = \int_0^1 a_i(1,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi, \quad i = 1, 2,$$

$$B_i(\lambda_1,\lambda_2) = \int_0^1 b_i(1,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi, \quad i = 1, 2.$$

Система однозначно разрешима в том и только в том случае, когда определитель матрицы, составленной из коэффициентов при μ_i, не обращается в нуль, то есть когда выполняется неравенство

$$(A_1(\lambda_1,\lambda_2))^2 + (A_2(\lambda_1,\lambda_2))^2 > 0. \tag{3.32}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{A_1^2 + A_2^2} \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{A_1^2 + A_2^2} \begin{pmatrix} A_1 B_1 - A_2 B_2 \\ A_2 B_1 + A_1 B_2 \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Выпишем теперь условия на значения параметров $\mu_i, i = 1, 2$:

$$\mu_1 \left(1 + \int_0^1 \mathcal{K}(w) \left(\int_0^w a_1(w, \xi; \lambda_1, \lambda_2)\, d\xi\right) dw\right) +$$
$$+\mu_2 \int_0^1 \mathcal{K}(w) \left(\int_0^w a_2(w, \xi; \lambda_1, \lambda_2)\, d\xi\right) dw = -\int_0^1 \mathcal{K}(w) \left(\int_0^w b_1(w, \xi; \lambda_1, \lambda_2)\, d\xi\right) dw,$$
$$\mu_1 \int_0^1 \mathcal{K}(w) \left(\int_0^w a_2(w, \xi; \lambda_1, \lambda_2)\, d\xi\right) dw-$$
$$-\mu_2 \left(1 + \int_0^1 \mathcal{K}(w) \left(\int_0^w a_1(w, \xi; \lambda_1, \lambda_2)\, d\xi\right) dw\right) = -\int_0^1 \mathcal{K}(w) \left(\int_0^w b_2(w, \xi; \lambda_1, \lambda_2)\, d\xi\right) dw.$$

Нами вновь получена линейная неоднородная система уравнений, зависящая от значений параметров. Обозначим

$$A_{i+2}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^1 \mathcal{K}(w) \left(\int_0^w a_i(w, \xi; \lambda_1, \lambda_2)\, d\xi\right) dw, \quad i = 1, 2,$$
$$B_{i+2}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^1 \mathcal{K}(w) \left(\int_0^w b_i(w, \xi; \lambda_1, \lambda_2)\, d\xi\right) dw, \quad i = 1, 2.$$

Тогда система однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$(1 + A_3(\lambda_1, \lambda_2))^2 + (A_4(\lambda_1, \lambda_2))^2 > 0. \tag{3.34}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{(1 + A_3)^2 + A_4^2} \begin{pmatrix} 1 + A_3 & -A_4 \\ A_4 & 1 + A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{(1 + A_3)^2 + A_4^2} \begin{pmatrix} (1 + A_3) B_3 - A_4 B_4 \\ A_4 B_3 + (1 + A_3) B_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Далее мы покажем, однако, что полученные по формуле (3.35) соотношения для значений параметров μ_1 и μ_2 оказываются такими же, что и соотношения в формуле (3.33). Для начала докажем следующую лемму.

Лемма 3.8. Для функции

$$\Upsilon_i(x, \lambda_1, \lambda_2) = \int_0^x \mathcal{K}(w) \left(\int_0^w \upsilon_i(w, \xi; \lambda_1, \lambda_2)\, d\xi\right) dw, \quad i = 1, 2, \tag{3.36}$$

где

$$\upsilon_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) = \upsilon(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2,\gamma_1(\xi),\gamma_2(\xi)), \tag{3.37}$$

$$\upsilon_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) = \upsilon(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2,\gamma_2(\xi),-\gamma_1(\xi)), \tag{3.38}$$

$$\begin{gathered}\upsilon(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2,h_1(\xi),h_2(\xi)) = \frac{S(x)}{S(\xi)}\frac{1}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}\cdot \\ \cdot\left[h_1(\xi)\cos(T(x)-T(\xi)+G(\xi))+h_2(\xi)\sin(T(x)-T(\xi)+G(\xi))\right],\end{gathered} \tag{3.39}$$

справедливо следующее тождество:

$$\begin{gathered}\Upsilon_i(x,\lambda_1,\lambda_2) = (M(x)+\lambda_1)\int\limits_0^x \upsilon_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi+ \\ +(-1)^i\lambda_2\int\limits_0^x \upsilon_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi-\int\limits_0^x\gamma_i(w)\,dw,\quad i=1,2.\end{gathered} \tag{3.40}$$

Доказательство. Представим выражения $\Upsilon_i(x,\lambda_1,\lambda_2)$, $i=1,2$, в следующем виде:

$$\Upsilon_i(x,\lambda_1,\lambda_2) = \Upsilon_{i,1}(x,\lambda_1,\lambda_2)+\Upsilon_{i,2}(x,\lambda_1,\lambda_2),$$

$$\Upsilon_{i,1}(x,\lambda_1,\lambda_2) = \int\limits_0^x \frac{\hat{y}''(w)}{\hat{y}'(w)}M(w)\left(\int\limits_0^w \upsilon_i(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi\right)dw,\ i=1,2,$$

$$\Upsilon_{i,2}(x,\lambda_1,\lambda_2) = \int\limits_0^x M'(w)\left(\int\limits_0^w \upsilon_i(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi\right)dw,\ i=1,2.$$

Зафиксировав $i\in\{1,2\}$, рассмотрим теперь выражение $\Upsilon_{i,2}(x,\lambda_1,\lambda_2)$ и применим к нему операцию интегрирования по частям:

$$\begin{gathered}\Upsilon_{i,2}(x,\lambda_1,\lambda_2) = \int\limits_0^x\left(\int\limits_0^w \upsilon_i(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi\right)d(M(w)+\lambda_1) = \\ =(M(x)+\lambda_1)\int\limits_0^x \upsilon_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi-\int\limits_0^x (M(w)+\lambda_1)\,\upsilon_i(w,w;\lambda_1,\lambda_2)\,dw- \\ -\int\limits_0^x (M(w)+\lambda_1)\left(\int\limits_0^w \frac{\partial\upsilon_i(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)}{\partial w}d\xi\right)dw.\end{gathered}$$

Найдем теперь частную производную $\frac{\partial\upsilon_i}{\partial w}(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\upsilon_i}{\partial w}(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\hat{y}''(w)}{\hat{y}'(w)}\frac{M(w)(M(w)+\lambda_1)}{(M(w)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}\upsilon_i(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)+ \\ +\frac{\hat{y}''(w)}{\hat{y}'(w)}\frac{M(w)\lambda_2}{(M(w)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}\cdot(-1)^{i-1}\upsilon_{3-i}(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2).\end{gathered} \tag{3.41}$$

Тогда последнее слагаемое в выражении $\Upsilon_{i,2}$ имеет вид

$$\int\limits_0^x (M(w)+\lambda_1)\left(\int\limits_0^w \frac{\partial \upsilon_i}{\partial w}(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi\right)dw =$$

$$= \int\limits_0^x \frac{\hat{y}''(w)}{\hat{y}'(w)}\frac{M(w)(M(w)+\lambda_1)^2}{(M(w)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}\left(\int\limits_0^w \upsilon_i(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi\right)dw+$$

$$+(-1)^{i-1}\lambda_2\int\limits_0^x \frac{\hat{y}''(w)}{\hat{y}'(w)}\frac{M(w)(M(w)+\lambda_1)}{(M(w)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}\left(\int\limits_0^w \upsilon_{3-i}(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi\right)dw.$$

Учитывая тот факт, что $S'(w)=\frac{\hat{y}''(w)}{\hat{y}'(w)}\frac{M(w)(M(w)+\lambda_1)}{(M(w)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}S(w)$, мы применим операцию интегрирования по частям к интегралу во втором слагаемом:

$$(-1)^{i-1}\lambda_2\int\limits_0^x \frac{\hat{y}''(w)}{\hat{y}'(w)}\frac{M(w)(M(w)+\lambda_1)}{(M(w)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}\left(\int\limits_0^w \upsilon_{3-i}(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi\right)dw =$$

$$=(-1)^{i-1}\lambda_2\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^w \frac{\upsilon_{3-i}(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)}{S(w)}\,d\xi\right)dS(w)=$$

$$=(-1)^{i-1}\lambda_2\int\limits_0^x \upsilon_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi+(-1)^i\lambda_2\int\limits_0^x \upsilon_{3-i}(w,w;\lambda_1,\lambda_2)\,dw+$$

$$+(-1)^i\lambda_2\int\limits_0^x S(w)\left(\int\limits_0^w \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\upsilon_{3-i}(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)}{S(w)}\right)d\xi\right)dw.$$

Так как

$$(-1)^i\lambda_2\int\limits_0^x S(w)\left(\int\limits_0^w \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\upsilon_{3-i}(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)}{S(w)}\right)d\xi\right)dw=$$

$$=(-1)^i\lambda_2\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^w S(w)\,\frac{\frac{\partial\upsilon_{3-i}}{\partial w}(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,S(w)-\upsilon_{3-i}(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,S'(w)}{S^2(w)}\,d\xi\right)dw=$$

$$=(-1)^i\lambda_2\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^w\left(\frac{\partial\upsilon_{3-i}}{\partial w}(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)-\upsilon_{3-i}(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,\frac{S'(w)}{S(w)}\right)d\xi\right)dw=$$

$$=\int\limits_0^x \frac{\hat{y}''(w)}{\hat{y}'(w)}\frac{M(w)\,\lambda_2^2}{(M(w)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}\left(\int\limits_0^w \upsilon_i(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi\right)dw,$$

то последнее слагаемое в выражении $\Upsilon_{i,2}$ обретает следующий вид:

$$\int\limits_0^x \left(M\left(w\right)+\lambda_1\right)\left(\int\limits_0^w \frac{\partial \upsilon_i\left(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)}{\partial w}\,d\xi\right)\,dw =$$

$$=\int\limits_0^x \frac{\hat{y}''\left(w\right)}{\hat{y}'\left(w\right)}\frac{M\left(w\right)\left(M\left(w\right)+\lambda_1\right)^2}{\left(M\left(w\right)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}\left(\int\limits_0^w \upsilon_i\left(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi\right)\,dw+$$

$$+\left(-1\right)^{i-1}\lambda_2\int\limits_0^x \upsilon_{3-i}\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi+\left(-1\right)^{i}\lambda_2\int\limits_0^x \upsilon_{3-i}\left(w,w;\lambda_1,\lambda_2\right)\,dw+$$

$$+\int\limits_0^x \frac{\hat{y}''\left(w\right)}{\hat{y}'\left(w\right)}\frac{M\left(w\right)\lambda_2^2}{\left(M\left(w\right)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}\left(\int\limits_0^w \upsilon_i\left(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi\right)\,dw =$$

$$=\left(-1\right)^{i-1}\lambda_2\int\limits_0^x \upsilon_{3-i}\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi+\left(-1\right)^{i}\lambda_2\int\limits_0^x \upsilon_{3-i}\left(w,w;\lambda_1,\lambda_2\right)\,dw+$$

$$+\underbrace{\int\limits_0^x \frac{\hat{y}''\left(w\right)}{\hat{y}'\left(w\right)}M\left(w\right)\left(\int\limits_0^w \upsilon_i\left(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi\right)\,dw}_{\Upsilon_{i,1}\left(x,\lambda_1,\lambda_2\right)}\,.$$

Следовательно,

$$\Upsilon_{i,2}\left(x,\lambda_1,\lambda_2\right)=\left(M\left(x\right)+\lambda_1\right)\int\limits_0^x \upsilon_i\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi-\int\limits_0^x \left(M\left(w\right)+\lambda_1\right)\upsilon_i\left(w,w;\lambda_1,\lambda_2\right)\,dw+$$

$$+\left(-1\right)^{i}\lambda_2\int\limits_0^x \upsilon_{3-i}\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi+\left(-1\right)^{i+1}\lambda_2\int\limits_0^x \upsilon_{3-i}\left(w,w;\lambda_1,\lambda_2\right)\,dw-\Upsilon_{i,1}\left(x,\lambda_1,\lambda_2\right).$$

Группируя второе и четвертое слагаемые в $\Upsilon_{i,2}$, получаем, что

$$\Upsilon_{i}\left(x,\lambda_1,\lambda_2\right)=\left(M\left(x\right)+\lambda_1\right)\int\limits_0^x \upsilon_i\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi+\left(-1\right)^{i}\lambda_2\int\limits_0^x \upsilon_{3-i}\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_0^x \Big[\left(M\left(w\right)+\lambda_1\right)\upsilon_i\left(w,w;\lambda_1,\lambda_2\right)+\left(-1\right)^{i}\lambda_2\upsilon_{3-i}\left(w,w;\lambda_1,\lambda_2\right)\Big]\,dw.$$

Подробно распишем подынтегральное выражение в последнем слагаемом. При $i=1$ имеем

$$\left(M\left(w\right)+\lambda_1\right)\upsilon_1\left(w,w;\lambda_1,\lambda_2\right)-\lambda_2\upsilon_2\left(w,w;\lambda_1,\lambda_2\right)=$$

$$=\underbrace{\frac{M\left(w\right)+\lambda_1}{\sqrt{\left(M\left(w\right)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}}}_{\cos G\left(w\right)}\left[\gamma_1\left(w\right)\cos G\left(w\right)+\gamma_2\left(w\right)\sin G\left(w\right)\right]-$$

$$-\underbrace{\frac{\lambda_2}{\sqrt{\left(M\left(w\right)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}}}_{\sin G\left(w\right)}\left[\gamma_2\left(w\right)\cos G\left(w\right)-\gamma_1\left(w\right)\sin G\left(w\right)\right]=\gamma_1\left(w\right).$$

При $i = 2$ имеем

$$\left(M\left(w\right)+\lambda_1\right)\upsilon_2\left(w,w;\lambda_1,\lambda_2\right)+\lambda_2\upsilon_1\left(w,w;\lambda_1,\lambda_2\right)=$$
$$=\underbrace{\frac{M\left(w\right)+\lambda_1}{\sqrt{\left(M\left(w\right)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}}}_{\cos G(w)}\left[-\gamma_1\left(w\right)\sin G\left(w\right)+\gamma_2\left(w\right)\cos G\left(w\right)\right]+$$
$$+\underbrace{\frac{\lambda_2}{\sqrt{\left(M\left(w\right)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}}}_{\sin G(w)}\left[\gamma_1\left(w\right)\cos G\left(w\right)+\gamma_2\left(w\right)\sin G\left(w\right)\right]=\gamma_2\left(w\right).$$

Таким образом, окончательно получаем формулу (3.40). □

Следствие 3.1. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial a_i}{\partial x}\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)=\frac{\hat{y}''\left(x\right)}{\hat{y}'\left(x\right)}\frac{M\left(x\right)\left(M\left(x\right)+\lambda_1\right)}{\left(M\left(x\right)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}a_i\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)+\\+\left(-1\right)^i\frac{\hat{y}''\left(x\right)}{\hat{y}'\left(x\right)}\frac{M\left(x\right)\lambda_2}{\left(M\left(x\right)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}a_{3-i}\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right),\quad i=1,2,\end{gathered}\tag{3.42}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial b_i}{\partial x}\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)=\frac{\hat{y}''\left(x\right)}{\hat{y}'\left(x\right)}\frac{M\left(x\right)\left(M\left(x\right)+\lambda_1\right)}{\left(M\left(x\right)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}b_i\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)+\\+\left(-1\right)^{i-1}\frac{\hat{y}''\left(x\right)}{\hat{y}'\left(x\right)}\frac{M\left(x\right)\lambda_2}{\left(M\left(x\right)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}b_{3-i}\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right),\quad i=1,2,\end{gathered}\tag{3.43}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^x\mathcal{K}\left(w\right)\left(\int\limits_0^w a_i\left(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)d\xi\right)dw=\left(M\left(x\right)+\lambda_1\right)\int\limits_0^x a_i\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)d\xi+\\+\left(-1\right)^{i-1}\lambda_2\int\limits_0^x a_{3-i}\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)d\xi-\delta_{i1}\hat{y}\left(x\right),\quad i=1,2,\end{gathered}\tag{3.44}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^x\mathcal{K}\left(w\right)\left(\int\limits_0^w b_i\left(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)d\xi\right)dw=\left(M\left(x\right)+\lambda_1\right)\int\limits_0^x b_i\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)d\xi+\\+\left(-1\right)^{i}\lambda_2\int\limits_0^x b_{3-i}\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)d\xi-z_i\left(x\right),\quad i=1,2,\end{gathered}\tag{3.45}$$

$$\begin{gathered}A_3\left(\lambda_1,\lambda_2\right)=\left(M\left(1\right)+\lambda_1\right)A_1\left(\lambda_1,\lambda_2\right)+\lambda_2A_2\left(\lambda_1,\lambda_2\right)-1,\\A_4\left(\lambda_1,\lambda_2\right)=\left(M\left(1\right)+\lambda_1\right)A_2\left(\lambda_1,\lambda_2\right)-\lambda_2A_1\left(\lambda_1,\lambda_2\right),\\B_3\left(\lambda_1,\lambda_2\right)=\left(M\left(1\right)+\lambda_1\right)B_1\left(\lambda_1,\lambda_2\right)-\lambda_2B_2\left(\lambda_1,\lambda_2\right),\\B_4\left(\lambda_1,\lambda_2\right)=\left(M\left(1\right)+\lambda_1\right)B_2\left(\lambda_1,\lambda_2\right)+\lambda_2B_1\left(\lambda_1,\lambda_2\right).\end{gathered}\tag{3.46}$$

Здесь в формуле (3.44) под записью δ_{i1} понимается символ Кронекера: $\delta_{i1}=\begin{cases}1, i=1,\\0, i\neq 1.\end{cases}$

Доказательство. Выведем требуемые соотношения, используя Лемму 3.8. Положим сначала в формуле (3.39) $h_1(\xi) = h_2(\xi) = \hat{y}'(\xi)$. Тогда по формулам (3.37) и (3.38) имеем

$$v_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) = a_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + (-1)^{i-1} a_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2), \quad i = 1,2.$$

Кроме того, из формулы (3.41) можно получить соотношения

$$\frac{\partial(a_1+a_2)}{\partial x} = \frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)} \frac{M(x)(M(x)+\lambda_1)}{(M(x)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}(a_1+a_2) + \frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)} \frac{M(x)\lambda_2}{(M(x)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}(a_1-a_2),$$

$$\frac{\partial(a_1-a_2)}{\partial x} = \frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)} \frac{M(x)(M(x)+\lambda_1)}{(M(x)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}(a_1-a_2) - \frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)} \frac{M(x)\lambda_2}{(M(x)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}(a_1+a_2).$$

Взяв полусумму и полуразность этих равенств, получаем формулу (3.42).

Теперь, используя формулы (3.36) и (3.40), а также соотношение $\int\limits_0^x \hat{y}'(w)\,dw = \hat{y}(x)$, получаем следующую систему:

$$\int\limits_0^x \mathcal{K}(w)\left(\int\limits_0^w (a_1(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + a_2(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2))\,d\xi\right) dw =$$
$$= (M(x)+\lambda_1)\int\limits_0^x (a_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + a_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2))\,d\xi -$$
$$-\lambda_2 \int\limits_0^x (a_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) - a_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2))\,d\xi - \hat{y}(x),$$

$$\int\limits_0^x \mathcal{K}(w)\left(\int\limits_0^w (a_1(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2) - a_2(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2))\,d\xi\right) dw =$$
$$= (M(x)+\lambda_1)\left(\int\limits_0^x (a_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) - a_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2))\,d\xi\right) +$$
$$+\lambda_2\left(\int\limits_0^x (a_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + a_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2))\,d\xi\right) - \hat{y}(x).$$

Взяв полусумму и полуразность соотношений, получаем

$$\int\limits_0^x \mathcal{K}(w)\left(\int\limits_0^w a_1(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi\right) dw = (M(x)+\lambda_1)\int\limits_0^x a_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi +$$
$$+\lambda_2 \int\limits_0^x a_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi - \hat{y}(x),$$

$$\int\limits_0^x \mathcal{K}(w)\left(\int\limits_0^w a_2(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi\right) dw = (M(x)+\lambda_1)\int\limits_0^x a_2(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi -$$
$$-\lambda_2 \int\limits_0^x a_1(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\,d\xi,$$

что в точности соответствует компактной записи, выраженной формулой (3.44).

Положим теперь в формуле (3.39) $h_i(\xi) = z_i'(\xi)$, $i = 1, 2$. Тогда по формулам (3.37) и (3.38) имеем

$$v_i(x, \xi; \lambda_1, \lambda_2) = b_i(x, \xi; \lambda_1, \lambda_2), \quad i = 1, 2.$$

Тогда из формулы (3.41) сразу следует формула (3.43). Применяя теперь формулы (3.36) и (3.40), а также соотношение $\int\limits_0^x z_i'(w)\, dw = z_i(x)$, $i = 1, 2$, выводим следующую систему:

$$\int\limits_0^x \mathcal{K}(w) \left(\int\limits_0^w b_1(w, \xi; \lambda_1, \lambda_2)\, d\xi \right) dw = (M(x) + \lambda_1) \int\limits_0^x b_1(x, \xi; \lambda_1, \lambda_2)\, d\xi -$$
$$- \lambda_2 \int\limits_0^x b_2(x, \xi; \lambda_1, \lambda_2)\, d\xi - z_1(x),$$

$$\int\limits_0^x \mathcal{K}(w) \left(\int\limits_0^w b_2(w, \xi; \lambda_1, \lambda_2)\, d\xi \right) dw = (M(x) + \lambda_1) \int\limits_0^x b_2(x, \xi; \lambda_1, \lambda_2)\, d\xi +$$
$$+ \lambda_2 \int\limits_0^x b_1(x, \xi; \lambda_1, \lambda_2)\, d\xi - z_2(x),$$

что в точности является формулой (3.45).

Соотношения (3.46) выводятся из формул (3.44) и (3.45) подстановкой $x = 1$.

Лемма доказана. $\square$

Покажем теперь, используя соотношения (3.46), что формула (3.35) является формулой (3.33). Действительно, вычислив выражения

$$(1 + A_3)^2 + A_4^2 = ((M(1) + \lambda_1) A_1 + \lambda_2 A_2)^2 + ((M(1) + \lambda_1) A_2 - \lambda_2 A_1)^2 =$$
$$= \left((M(1) + \lambda_1)^2 + \lambda_2^2 \right) \left(A_1^2 + A_2^2 \right),$$

$$(1 + A_3) B_3 - A_4 B_4 = ((M(1) + \lambda_1) A_1 + \lambda_2 A_2) ((M(1) + \lambda_1) B_1 - \lambda_2 B_2) -$$
$$- ((M(1) + \lambda_1) A_2 - \lambda_2 A_1) ((M(1) + \lambda_1) B_2 + \lambda_2 B_1) = (M(1) + \lambda_1)^2 (A_1 B_1 - A_2 B_2) +$$
$$+ \lambda_2 (M(1) + \lambda_1) (A_2 B_1 - A_1 B_2) - \lambda_2 (M(1) + \lambda_1) (A_2 B_1 - A_1 B_2) + \lambda_2^2 (A_1 B_1 - A_2 B_2) =$$
$$= \left((M(1) + \lambda_1)^2 + \lambda_2^2 \right) (A_1 B_1 - A_2 B_2),$$

$$A_4 B_3 + (1 + A_3) B_4 = ((M(1) + \lambda_1) A_2 - \lambda_2 A_1) ((M(1) + \lambda_1) B_1 - \lambda_2 B_2) +$$
$$+ ((M(1) + \lambda_1) A_1 + \lambda_2 A_2) ((M(1) + \lambda_1) B_2 + \lambda_2 B_1) = (M(1) + \lambda_1)^2 (A_2 B_1 + A_1 B_2) +$$
$$- \lambda_2 (M(1) + \lambda_1) (A_2 B_2 + A_1 B_1) + \lambda_2 (M(1) + \lambda_1) (A_2 B_2 + A_1 B_1) + \lambda_2^2 (A_1 B_2 + A_2 B_1) =$$
$$= \left((M(1) + \lambda_1)^2 + \lambda_2^2 \right) (A_1 B_2 + A_2 B_1),$$

и подставив результаты вычислений в формулу (3.35), нетрудно заметить, что мы приходим к формуле (3.33), так как можно сократить на один и тот же множитель $(M(1)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2$.

Обозначим через $C^{1,0}(M,\mathbb{R}^2)$ пространство двумерных вектор-функций, каждая компонента которой принадлежит пространству $C^{1,0}(M)$. Соответственно, через $C_0^{1,0}(M,\mathbb{R}^2)$ обозначим подмножество $C^{1,0}(M,\mathbb{R}^2)$, такое что если $w\in C^{1,0}(M,\mathbb{R}^2)$, то $w_i(0,t)=w_i(1,t)=0\,\forall\, t\in[0,+\infty)\,,i=1,2$. Тогда нами окончательно построено решение задачи $y=f(z)\,,f: C_0^{1,0}(M,\mathbb{R}^2)\to C_0^{1,0}(M,\mathbb{R}^2)$, имеющее следующий вид:

$$y_i(x)=-\int\limits_0^x\Big(b_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)+\mu_1(-1)^{i-1}a_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)+\mu_2a_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\Big)\,d\xi=(f(z))_i\,,$$

$$i=1,2.$$

Нам осталось показать, что полученное решение в действительности определяет обратный оператор $(\mathcal{A}'-\lambda I)^{-1}$, причем он является ограниченным.

Лемма 3.9. Оператор $\mathcal{A}'-\lambda I$ является непрерывно обратимым для всех комплексных λ, для которых выполняются одновременно условия (3.24) и (3.32).

Доказательство. См. раздел A.2 Приложения A. □

Замечание 18. Неизвестно, является ли точной оценка, полученная в доказательстве Леммы 3.9 для нормы обратного оператора, в связи с чем результат Леммы 3.9 позволяет дать лишь нижнюю оценку для резольвентного множества:

$$\rho(\mathcal{A}')\supseteq\mathbb{C}\setminus(\Lambda_1\cup\Lambda_2)\,,$$

$$\Lambda_1=\{\lambda\in\mathbb{C}\,|\,-M_+\le\lambda_1\le-M_-,\ \lambda_2=0\}\,,$$

$$\Lambda_2=\left\{\lambda\in\mathbb{C}\,\middle|\,(A_1(\lambda_1,\lambda_2))^2+(A_2(\lambda_1,\lambda_2))^2=0\right\}.$$

Следовательно, для спектра оператора $\mathcal{A}'$ справедлива следующая верхняя оценка:

$$\sigma(\mathcal{A}')\subseteq\Lambda_1\cup\Lambda_2.$$

Так как множество Λ_1 лежит во внутренности левой полуплоскости, нам остается изучить множество Λ_2. Заметим, что $\frac{M(s)}{\sqrt{(M(s)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}\cos G(s)=\frac{M(s)(M(s)+\lambda_1)}{(M(s)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}=1-\frac{\lambda_1(M(s)+\lambda_1)+\lambda_2^2}{(M(s)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}$, и $\int\limits_s^1\frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)}\,d\xi=\ln\frac{\hat{y}'(1)}{\hat{y}'(s)}$, поэтому

$$\frac{S(1)}{S(s)}=\frac{\hat{y}'(1)}{\hat{y}'(s)}\exp\left\{-\int\limits_s^1\frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)}\frac{\lambda_1(M(\xi)+\lambda_1)+\lambda_2^2}{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}\,d\xi\right\}.$$

Домножив функцию A_2 на $-i$ и прибавив к ней функцию A_1, получим

$$A_1 - iA_2 = \hat{y}'(1)\int\limits_0^1 \frac{\exp\left\{-\int\limits_s^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)}\frac{\lambda_1(M(\xi)+\lambda_1)+\lambda_2^2}{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}\,d\xi\right\}}{\sqrt{(M(s)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}} e^{-i(T(1)-T(s)+G(s))}\,ds =$$

$$= \hat{y}'(1)\int\limits_0^1 \frac{M(s)+\lambda_1-i\lambda_2}{(M(s)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}\exp\left\{-\int\limits_s^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)}\frac{M(\xi)(\lambda_1+i\lambda_2)+\lambda_1^2+\lambda_2^2}{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}\,d\xi\right\}ds =$$

$$= \hat{y}'(1)\int\limits_0^1 \frac{1}{M(s)+\lambda_1+i\lambda_2}\exp\left\{-\int\limits_s^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)}\frac{\lambda_1+i\lambda_2}{M(\xi)+\lambda_1+i\lambda_2}\,d\xi\right\}ds.$$

Тогда, введя для последнего полученного выражения обозначение $A(\lambda)$, получаем следующий интеграл с комплексным параметром λ:

$$A(\lambda) = \hat{y}'(1)\int\limits_0^1 e^{-\int\limits_s^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)}\frac{\lambda}{M(\xi)+\lambda}\,d\xi}\,\frac{ds}{M(s)+\lambda}.$$

Следовательно, нам необходимо определить расположение комплексных корней уравнения $A(\lambda) = 0$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 3.10. Пусть выполняется одна из альтернатив, сформулированных в Теореме 3.6.

Тогда функция комплексной переменной $A(\lambda)$ не имеет корней в правой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0\}$.

Доказательство. Рассмотрим альтернативу 1. Заметим, что мнимая часть функции $A(\lambda)$, а именно функция $-A_2(\lambda_1,\lambda_2)$ является нечетной по λ_2. Следовательно, $A_2(\lambda_1, 0) = 0$ при любом $\lambda_1 \geq 0$. Однако,

$$A_1(\lambda_1, 0) = \hat{y}'(1)\int\limits_0^1 e^{-\int\limits_s^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)}\frac{\lambda_1}{M(\xi)+\lambda_1}\,d\xi}\,\frac{ds}{M(s)+\lambda_1} > 0, \lambda_1 \geq 0,$$

поэтому корней в правой полуплоскости при $\lambda_2 = 0$ нет.

Используя нечетность функции A_2 по λ_2, докажем, что при $\lambda_2 > 0$ функция $A_2(\lambda_1, \lambda_2)$ положительна всюду в правой полуплоскости. Рассмотрим функцию

$$f(s, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_2}{(M(s)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}.$$

Исследуем ее поведение при фиксированных значениях $s, \lambda_1 \geq 0$ как функцию от параметра λ_2, взяв от нее частную производную по λ_2:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_2}(s, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{(M(s)+\lambda_1)^2-\lambda_2^2}{\left((M(s)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2\right)^2}.$$

Видим, что частная производная $\frac{\partial f}{\partial \lambda_2}$ меняет знак с положительного на отрицательный при переходе через значение $\lambda_2 = M(s) + \lambda_1$. Следовательно, в этой точке функция f достигает по λ_2 максимального значения, в силу чего справедливо неравенство

$$f(s, \lambda_1, \lambda_2) \leq f(s, \lambda_1, M(s) + \lambda_1) = \frac{1}{2(M(s) + \lambda_1)}.$$

Тогда

$$\lambda_2 \int\limits_s^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)} \frac{M(\xi)}{(M(\xi) + \lambda_1)^2 + \lambda_2^2} \, d\xi = \int\limits_s^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)} f(\xi, \lambda_1, \lambda_2) \, M(\xi) \, d\xi <$$
$$< \frac{1}{2} \int\limits_s^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)} \frac{M(\xi)}{M(\xi) + \lambda_1} \, d\xi \leq \frac{1}{2} \int\limits_s^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)} \, d\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{\hat{y}'(1)}{\hat{y}'(s)}.$$

Отсюда следует, что

$$0 \leq \lambda_2 \int\limits_0^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)} \frac{M(\xi)}{(M(\xi) + \lambda_1)^2 + \lambda_2^2} \, d\xi < \frac{1}{2} \ln \frac{\hat{y}'(1)}{\hat{y}'(0)} \leq \frac{1}{2} \ln e^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

то есть подынтегральная функция в $A_2(\lambda_1, \lambda_2)$ является неотрицательной и отлична от нуля. Следовательно, $A_2(\lambda_1, \lambda_2) > 0, \forall \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 > 0$, и тогда мнимая часть функции $A(\lambda)$ не обращается в нуль при любых $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \neq 0$. Таким образом, альтернатива 1 доказана.

Рассмотрим теперь альтернативу 2, и пусть функция $\frac{\hat{y}'}{\hat{y}''}$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$. Заметим, что $\lambda = 0$ не является корнем уравнения $A(\lambda) = 0$, так как $A(0) = \hat{y}'(1) \int\limits_0^1 \frac{ds}{M(s)} > 0$. Тогда применим к функции $A(\lambda)$ формулу интегрирования по частям при $\lambda \neq 0$:

$$A(\lambda) = \frac{\hat{y}'(1)}{\lambda} \int\limits_0^1 \frac{\hat{y}'(s)}{\hat{y}''(s)} d\left(e^{-\int\limits_s^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)} \frac{\lambda}{M(\xi)+\lambda} d\xi}\right) = \frac{\hat{y}'(1)}{\lambda} \left[\frac{\hat{y}'(1)}{\hat{y}''(1)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\hat{y}'(0)}{\hat{y}''(0)} e^{-\int\limits_0^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)} \frac{\lambda}{M(\xi)+\lambda} d\xi} - \int\limits_0^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{\hat{y}'(s)}{\hat{y}''(s)}\right) e^{-\int\limits_s^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)} \frac{\lambda}{M(\xi)+\lambda} d\xi} ds \right].$$

Приравняем полученное для функции $A(\lambda)$ выражение к нулю. Добавляя и вычитая в квадратных скобках слагаемое $\frac{\hat{y}'(0)}{\hat{y}''(0)}$, получаем эквивалентное уравнение вида

$$\int\limits_0^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{\hat{y}'(s)}{\hat{y}''(s)}\right) \left(1 - e^{-\int\limits_s^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)} \frac{\lambda}{M(\xi)+\lambda} d\xi}\right) ds = -\frac{\hat{y}'(0)}{\hat{y}''(0)} \left(1 - e^{-\int\limits_0^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)} \frac{\lambda}{M(\xi)+\lambda} d\xi}\right).$$

Действительная часть этого уравнения имеет вид

$$\begin{gathered}\int\limits_0^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{\hat{y}'(s)}{\hat{y}''(s)}\right)\left(1-e^{-\int\limits_s^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)}\frac{\lambda_1(M(\xi)+\lambda_1)+\lambda_2^2}{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}d\xi}\cdot\right.\\ \left.\cdot\cos\left(\lambda_2\int\limits_s^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)}\frac{M(\xi)}{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}d\xi\right)\right)ds=\\ =-\frac{\hat{y}'(0)}{\hat{y}''(0)}\left(1-e^{-\int\limits_0^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)}\frac{\lambda_1(M(\xi)+\lambda_1)+\lambda_2^2}{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}d\xi}\cdot\right.\\ \left.\cdot\cos\left(\lambda_2\int\limits_0^1 \frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)}\frac{M(\xi)}{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}d\xi\right)\right).\end{gathered}\tag{3.47}$$

Разберем сначала случай, когда $\frac{d}{ds}\left(\frac{\hat{y}'(s)}{\hat{y}''(s)}\right)\equiv 0, \forall s\in[0,1]$. Тогда $\frac{\hat{y}'(x)}{\hat{y}''(x)}\equiv\frac{1}{\alpha}, \alpha>0$, и $A(\lambda)=\frac{1}{\alpha\lambda}\left(1-e^{-\alpha\int\limits_0^1\frac{\lambda}{M(\xi)+\lambda}d\xi}\right)$. Очевидно, что

$$|A(\lambda)|\geq\frac{1}{\alpha|\lambda|}\left|1-\left|e^{-\alpha\int\limits_0^1\frac{\lambda}{M(\xi)+\lambda}d\xi}\right|\right|=\frac{1}{\alpha|\lambda|}\left(1-e^{-\alpha\int\limits_0^1\frac{\lambda_1(M(\xi)+\lambda_1)+\lambda_2^2}{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}d\xi}\right)>0,$$

поэтому в этом случае корней нет.

Пусть теперь производная $\frac{d}{ds}\left(\frac{\hat{y}'(s)}{\hat{y}''(s)}\right)$ отлична от нуля. Так как правая часть уравнения (3.47) отрицательна, а левая часть уравнения положительна в силу неотрицательности и отличности от нуля подынтегральной функции, то отсюда следует, что корней уравнения (3.47) нет, вследствие чего нет корней и уравнения $A(\lambda)=0$.

Лемма доказана. $\square$

Теперь мы готовы доказать Теорему 3.6.

Доказательство Теоремы 3.6. Так как мы имеем автономное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, т.е. его правая часть не зависит явно от t, мы используем важный результат, полученный Ю. Л. Далецким и М. Г. Крейном (см. [5, с. 293]), о том, что если спектр $\sigma(\mathcal{A}')$ оператора, полученного в Лемме 3.5, лежит во внутренности левой полуплоскости, стационарное решение уравнения является асимптотически устойчивым. Лемма 3.9 позволяет дать верхнюю оценку на спектр оператора. Затем нами показано, что вопрос локализации спектра оператора в конечном счете сводится к поиску комплексных нулей функции $A(\lambda)$, полученной с помощью Лемм 3.6, 3.7 и 3.8. Завершает доказательство применение Леммы 3.10, устанавливающей условия отсутствия комплексных нулей функции в правой полуплоскости. $\square$

3.6. Численные эксперименты

В данном параграфе мы приводим два численных эксперимента, которые указывают на то, что выбранная социальным государством кривая Лоренца, задающая стационарное распределение доходов, является асимптотически устойчивым стационарным решением уравнения (3.8a). Основой для численных расчетов является смешанная задача (3.8), в которой начальное условие (3.8b) определяется кривой Лоренца, принадлежащей двухпараметрическому семейству вида

$$y_0(x) = \frac{x(1+(p-1)x)}{1+(p-1)x+q(1-x)}, \quad q>0,\ 0<p<1+q. \tag{3.48}$$

Для каждого примера расчетов подобраны две начальные кривые Лоренца, причем если первая кривая близка к линии равенства, соответствующей эгалитарному распределению доходов, то вторая кривая обладает сильной степенью неравенства – так, на десятый дециль, т.е. на 10% самых богатых агентов приходится около 90% всех доходов.

Также для численных расчетов используется функция $\varphi(\cdot)$ вида

$$\varphi(x) = \varphi_{\max} - \frac{\varphi_{\max}-\varphi_{\min}}{\operatorname{arctg} 2H}\operatorname{arctg} x. \tag{3.49}$$

Результаты расчетов приведены на рис. 3.3 и 3.4. В первом примере, соответствующем рис. 3.3, стационарное распределение доходов задано кривой Лоренца вида

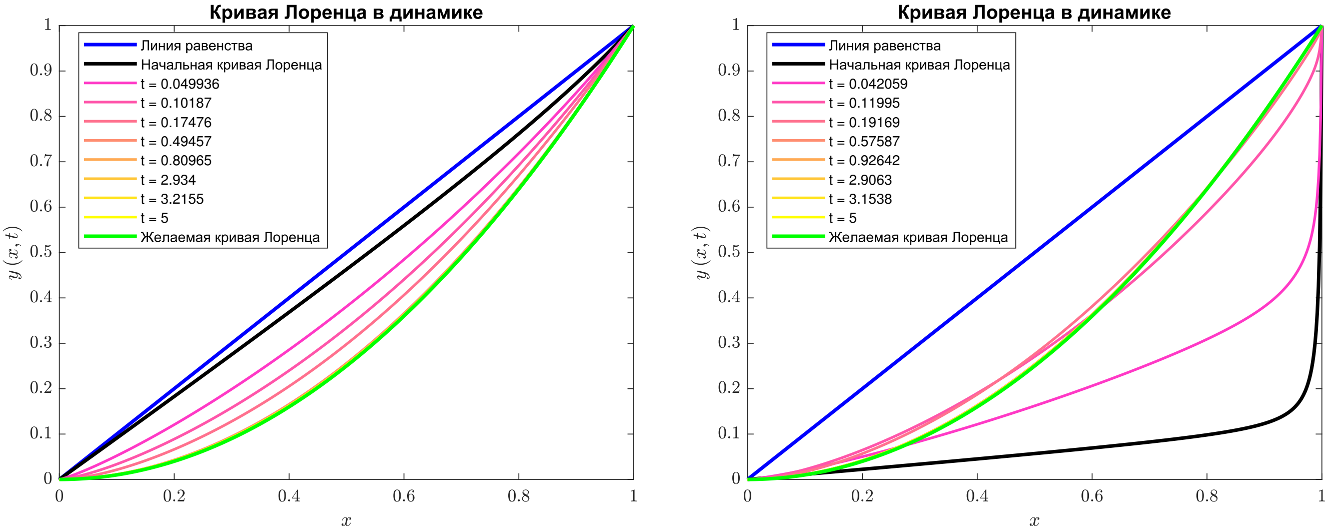
$$\hat{y}^1(x) = x^2.$$

Как можно заметить на графиках, в обоих случаях наблюдается сходимость решения $y(x,t)$ смешанной задачи (3.8) к кривой Лоренца $\hat{y}^1(x)$. При этом на рис. 3.3, *а* наблюдается плавная сходимость, в то время как на рис. 3.3, *б* с течением времени решение $y(x,t)$ пересекает стационарное решение $\hat{y}^1(x)$, что, впрочем, не мешает решению $y(x,t)$ сойтись к кривой Лоренца $\hat{y}^1(x)$.

Рассмотрим теперь второй пример, где в качестве стационарного распределения доходов положим кривую Лоренца вида

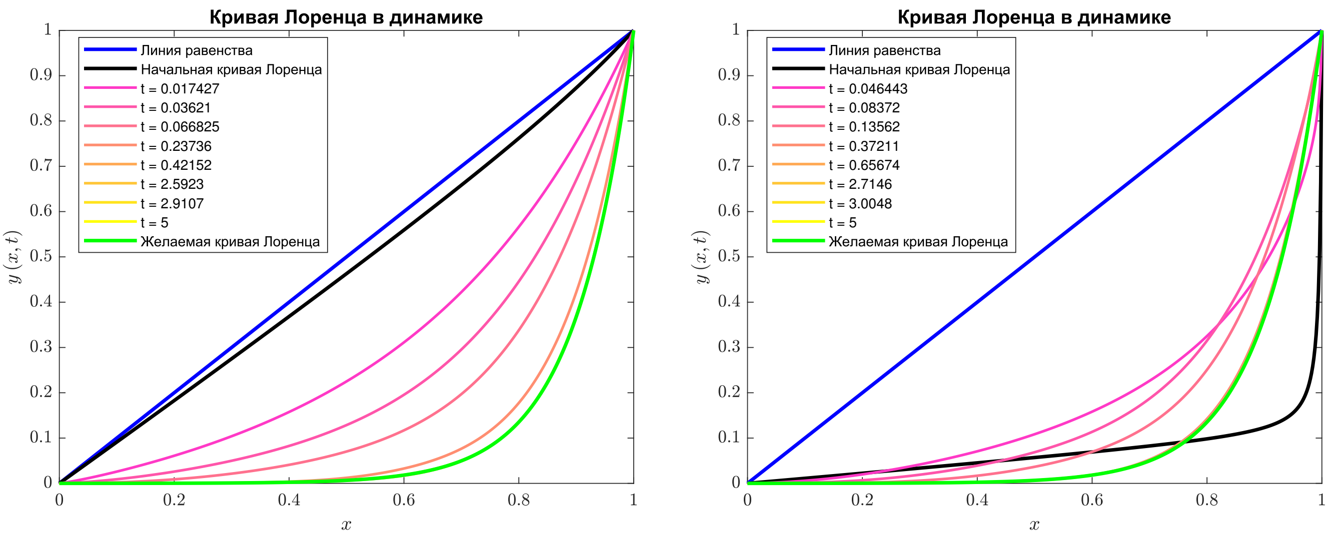
$$\hat{y}^2(x) = \frac{e^{10x}-1}{e^{10}-1}.$$

Иллюстрация к примеру приведена на рис. 3.4. Обратим внимание, что на рис. 3.4, *а* также наблюдается плавная сходимость решения $y(x,t)$ к стационарному решению $\hat{y}^2(x)$. Рис. 3.4, *б* снова свидетельствует о том, что факт пересечения начальной кривой $y_0(x)$ со стационарным решением $\hat{y}^2(x)$ не повлиял на сходимость решения.



(а) (б)

Рис. 3.3. Эволюция кривой Лоренца во времени t, построенной по уравнению динамики смешанной задачи (3.8). Подсчитана при $H = 500$, $T = 5$, $\beta = 0.1$, $r = 0.1$, $w = 5 \cdot 10^3$, $\hat{y}^1(x) = x^2$. Функция $\varphi(\cdot)$ задана формулой (3.49) со значениями параметров $\varphi_{\max} = 0.9$, $\varphi_{\min} = \beta$. Начальная кривая Лоренца задана формулой (3.48) со следующими значениями параметров: на графике (а) $p = 0.25$, $q = 0.1$, на графике (б) $p = 0.03$, $q = 8$.



(а) (б)

Рис. 3.4. Эволюция кривой Лоренца во времени t, построенной по уравнению динамики смешанной задачи (3.8). Подсчитана при $H = 500$, $T = 5$, $\beta = 0.1$, $r = 0.1$, $w = 5 \cdot 10^3$, $\hat{y}^2(x) = \frac{e^{10x}-1}{e^{10}-1}$. Функция $\varphi(\cdot)$ задана формулой (3.49) со значениями параметров $\varphi_{\max} = 0.9$, $\varphi_{\min} = \beta$. Начальная кривая Лоренца задана формулой (3.48) со следующими значениями параметров: на графике (а) $p = 0.25$, $q = 0.1$, на графике (б) $p = 0.03$, $q = 8$.

Заключение

Перечислим основные результаты, полученные в диссертации:

1. Исследованы задачи оптимального управления, возникающие в моделях рационального репрезентативного потребителя рамсеевского типа с допущением потребительского кредита (модель Рамсея-Бьюли), его запретом (модель Рамсея-Беккера), с неликвидным капиталом и с ограниченной ликвидностью капитала. Для данных задач удалось построить решения в форме синтеза;

2. Исследована асимптотика решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в моделях социальной динамики в случаях Бьюли, Беккера, неликвидного капитала и капитала с ограниченной ликвидностью. Предложены достаточные условия выполнения гипотезы Рамсея о социальной стратификации. Доказана соответствующая теорема, обосновывающая справедливость гипотезы и приводящая к выводу о том, что неограниченные рыночные механизмы приводят к двухклассовому обществу. Также доказана теорема о связи между индексом неравенства Джини и функцией Ляпунова для моделей социальной динамики в случаях Бьюли, Беккера и неликвидного капитала. В условиях доказанной теоремы установлено, что получаемое в пределе распределение капиталов домашних хозяйств является глобально асимптотически устойчивым по Ляпунову положением равновесия;

3. Исследовано интегро-дифференциальное уравнение динамики кривой Лоренца для континуального аналога модели Рамсея-Бьюли. Для решения уравнения доказано свойство межвременной мажоризации по Лоренцу. Также изучена смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения, моделирующая государственное влияние на социальную динамику. Доказаны существование и единственность решения задачи, глобальное сохранение решением свойств кривой Лоренца, а также единственность стационарного решения уравнения смешанной задачи. Кроме того, приведены достаточные условия того, какой кривой Лоренца должно быть стационарное решение уравнения (3.8a), чтобы оно было асимптотически устойчивым.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, академику РАН, доктору физико-математических наук, профессору Александру Алексеевичу Шананину за беспрестанное внимание к работе, многочисленные

ценные замечания и постоянную поддержку, а также признательность всем, благодаря кому данная работа стала возможной.

Список литературы

1. Асеев С. М., Бесов К. О., Кряжимский А. В. Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // УМН. — 2012. — Т. 67, № 2. — С. 3—64.
2. Асеев С. М., Кряжимский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИАН. — 2007. — Т. 257. — С. 3—271.
3. Аски Р., Рой Р., Эндрюс Д. Специальные функции. — М. : МЦНМО, 2013. — 652 с. — Перевод с англ. под ред. Ю. А. Неретина.
4. Борисов К. Ю., Пахнин М. А. Модели экономического роста с неоднородным дисконтированием // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2023. — Т. 63, № 3. — С. 355—379.
5. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М. : Наука, 1970. — 536 с.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — 3-е издание, переработанное. — М. : Наука, 1984. — 752 с.
7. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. — 4-е изд. — М. : Наука, 1983. — 392 с.
8. Милютин А. А. Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 303 с.
9. Парастаев Г. С. Гипотеза Рамсея в условиях ограниченной ликвидности капитала // Тихоновские чтения: тезисы докладов: научная конференция; 28 октября – 02 ноября 2024 г. — Москва : МАКС Пресс, 2024. — С. 77—77.
10. Парастаев Г. С. Об асимптотической устойчивости кривых Лоренца в модели государства всеобщего благосостояния // Тихоновские чтения: тезисы докладов: научная конференция; 27–31 октября 2025 г. — Москва : МАКС Пресс, 2025. — С. 120—120.
11. Парастаев Г. С., Шананин А. А. Гипотеза Рамсея о социальной стратификации как принцип отбора по Фишеру // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2024. — Т. 64, № 12. — С. 2420—2448.
12. Парастаев Г. С., Шананин А. А. Мажоризация по Лоренцу в модели Рамсея-Бьюли // Ломоносовские чтения. Научная конференция. 24 марта – 4 апреля 2025 г.: тезисы докладов. — Москва : МАКС Пресс, 2025. — С. 118—120.

13. Парастаев Г. С., Шананин А. А. Мажоризация по Лоренцу и передачи Пигу-Дальтона в модели Рамсея-Бьюли // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2025. — Т. 65, № 10. — С. 1608—1624.

14. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. В 3 т. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы. — 2-е изд., исправл. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 688 с.

15. Рудева А. В., Шананин А. А. Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учетом ограничения ликвидности // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 12. — С. 1799—1803.

16. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. Учеб.: Для вузов. — 4-е. — М. : Физматлит, 2005. — 256 с.

17. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. — Москва : Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. — 102 с.

18. Acemoglu D. Introduction to Modern Economic Growth. — Princeton University Press, 2009.

19. Acemoglu D., Johnson S. Power and Progress: Our Thousand-Year Struggle Over Technology and Prosperity. — New York : Public Affairs, 2023. — 560 p.

20. Aghion P., Williamson J. G. Growth, Inequality and Globalization: Theory, History and Policy. — Cambridge University Press, 1999.

21. Alvarez F., Shimer R. Search and Rest Unemployment // Econometrica. — 2011. — Vol. 79, no. 1. — P. 75–122.

22. Atkinson A. B. Inequality: What Can Be Done? — Harvard University Press, 2015.

23. Becker R. A. Equilibrium Dynamics with Many Agents // Handbook on Optimal Growth 1: Discrete Time / ed. by R.-A. Dana, C. L. Van, T. Mitra, K. Nishimura. — Berlin : Springer, 2006. — P. 385–442.

24. Becker R. A. On the Long-run Steady State in a Simple Dynamic Model of Equilibrium with Heterogeneous Households // Quarterly Journal of Economics. — 1980. — Vol. 95, no. 2. — P. 375–382.

25. Becker R. A., Borissov K., Dubey R. S. Ramsey Equilibrium with Liberal Borrowing // Journal of Mathematical Economics. — 2015. — Vol. 61. — P. 296–304.

26. Becker R. A., Mitra T. Efficient Ramsey equilibria // Macroeconomic Dynamics. — 2012. — Vol. 16. — P. 18–32.

27. Benabou R. Unequal Societies: Income Distribution and the Social Contract // American Economic Review. — 2000. — Vol. 90, no. 1. — P. 96–129.

28. Benhabib J., Bisin A., Zhu S. The Distribution of Wealth in the Blanchard-Yaari Model // Macroeconomic Dynamics. — 2016. — Vol. 20, no. 2. — P. 466–481.

29. Bertotti M. L. A Mathematical Model for the Dynamics of Income Distribution in the Presence of Production // Complexity. — 2024. — Vol. 2024, no. 3190620. — P. 1–10.

30. Bewley T. F. An integration of equilibrium theory and turnpike theory // Journal of Mathematical Economics. — 1982. — Vol. 10. — P. 233–267.

31. Borissov K. Growth and Distribution in a Model with Endogeneous Time Preferences and Borrowing Constraints // Mathematical Social Sciences. — 2013. — Vol. 66, no. 2. — P. 117–128.

32. Borissov K. Inequality and Growth in a Model with Borrowing Constraints // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2025. — Vol. 46, no. 9. — P. 4804–4825.

33. Borissov K. The Rich and the Poor in a Simple Model of Growth and Distribution // Macroeconomic Dynamics. — 2016. — Vol. 20, no. 7. — P. 1934–1952.

34. Borissov K., Dubey R. S. A Characterization of Ramsey Equilibrium in a Model with Limited Borrowing // Journal of Mathematical Economics. — 2015. — Vol. 56. — P. 67–78.

35. Borissov K., Lambrecht S. Growth and Distribution in an AK-model with Endogeneous Impatience // Economic Theory. — 2009. — Vol. 39, no. 1. — P. 93–112.

36. Bosi S., Seegmuller T. On the Ramsey equilibrium with heterogeneous consumers and endogenous labor supply // Journal of Mathematical Economics. — 2010. — Vol. 46, no. 4. — P. 475–492.

37. Bourguignon F. Pareto Superiority of Unegalitarian Equilibria in Stiglitz' Model of Wealth Distribution with Convex Saving Function // Econometrica. — 1981. — Vol. 49. — P. 1469–1475.

38. Bourguignon F., Scott-Railton T. The Globalization of Inequality. — Princeton, Oxford : Princeton University Press, 2015.

39. Cao D., Luo W. Persistent Heterogeneous Returns and Top End Wealth Inequality // Review of Economic Dynamics. — 2017. — Vol. 26. — P. 301–326.

40. Carlson D. A., Haurie A. B., Leizarowitz A. Infinite Horizon Optimal Control: Theory and Applications. — Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1991.

41. Cesari L. Optimization – Theory and Applications. Problems with Ordinary Differential Equations. — Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1983.

42. Duesenberry J. S. Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior. — Cambridge, MA : Harvard University Press, 1949.

43. Espino E. On Ramsey's conjecture: efficient allocations in the neoclassical growth model with private information // Journal of Economic Theory. — 2005. — Vol. 121, no. 2. — P. 192–213.

44. Fisher R. A. The Genetical Theory of Natural Selection. — Oxford : Clarendon Press, 1930.

45. Fleming W. H., Soner H. M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. — New York : Springer, 2006.

46. Hartman P. Ordinary Differential Equations. — Second Edition. — Philadelphia : Society of Industrial, Applied Mathematics, 2002.

47. Income and Wealth Distribution in Macroeconomics: A Continuous-Time Approach / Y. Achdou [et al.] // Review of Economic Studies. — 2022. — Vol. 89, no. 1. — P. 45–86.

48. Jones C. I. Pareto and Piketty: The Macroeconomics of Top Income and Wealth Inequality // Journal of Economic Perspectives. — 2015. — Vol. 29, no. 1. — P. 29–46.

49. Jones C. I., Kim J. A Schumpeterian Model of Top Income Inequality // Journal of Political Economy. — 2018. — Vol. 126, no. 5. — P. 1785–1826.

50. Kasa K., Lei X. Risk, Uncertainty, and the Dynamics of Inequality // Journal of Monetary Economics. — 2018. — Vol. 94. — P. 60–78.

51. Koopmans T. C. Stationary Ordinal Utility and Impatience // Econometrica. — 1960. — Vol. 28, no. 2. — P. 287–309.

52. Lasry J.-M., Lions P.-L. Mean field games // Japanese Journal of Mathematics. — 2007. — Vol. 2, no. 1. — P. 229–260.

53. Luttmer E. G. J. On the Mechanics of Firm Growth // Review of Economic Studies. — 2011. — Vol. 78. — P. 1042–1068.

54. Luttmer E. G. J. Selection, Growth, and the Size Distribution of Firms // The Quarterly Journal of Economics. — 2007. — Vol. 122, no. 3. — P. 1103–1144.

55. Marshall A. W., Olkin I., Arnold B. C. Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. — Second Edition. — New York : Springer, 2011.

56. Miao J. Optimal Capital Structure and Industry Dynamics // Journal of Finance. — 2005. — Vol. 60, no. 6. — P. 2621–2659.

57. Mitra T., Sorger G. On Ramsey's conjecture // Journal of Economic Theory. — 2013. — Vol. 148, no. 5. — P. 1953–1976.

58. Moll B. Productivity Losses from Financial Frictions: Can Self-Financing Undo Capital Misallocation? // American Economic Review. — 2014. — Vol. 104, no. 10. — P. 3186–3221.

59. Moscarini G. Job Matching and the Wage Distribution // Econometrica. — 2005. — Vol. 73, no. 2. — P. 481–516.

60. Parastaev G. S. On Asymptotic Stability of Lorenz Curve in the Welfare State Model // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2025. — Vol. 46, no. 11. — P. 5972–5985.

61. Parastaev G. S. On Ramsey's Conjecture in Continuous-Time Economic Growth Model with Limited Capital Liquidity // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2025. — Vol. 46, no. 1. — P. 301–316.

62. Parastaev G. S., Shananin A. A. Ramsey's Conjecture for the Model with Non-liquid Capital // Lecture Notes in Computer Science. — 2025. — Vol. 15218. — P. 209–224.

63. Parastaev G. S., Shananin A. A. The Gini Index and the Ramsey's Conjecture on Social Stratification // "Dynamic Systems: Stability, Control, Differential Games" (SCDG 2024): Proceedings of the International Conference devoted to the 100th anniversary of Academician N.N.Krasovskii, Yekaterinburg, Russia, 9–13 September 2024 / ed. by T. F. Filippova, V. I. Maksimov, A. M. Tarasyev. — Yekaterinburg : IMM UB RAS, 2024. — P. 487–490.

64. Piketty T., Goldhammer A. Capital in the Twenty-First Century. — Cambridge, MA : The Belknap Press of Harvard University Press, 2014.

65. Ramsey F. P. A Mathematical Theory of Saving // The Economic Journal. — 1928. — Vol. 38, no. 152. — P. 543–559.

66. Schlicht E. A Neoclassical Theory of Wealth Distribution // Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik. — 1975. — Vol. 189. — P. 78–96.

67. Seierstad A., Sydsæter K. Optimal control theory with economic applications. — Amsterdam : North-Holland, 1987.

68. Szarski J. Differential Inequalities. — Warsaw : PWN - Polish Scientific Publishers, 1965.

69. Toda A. A., Walsh K. The Double Power Law in Consumption and Implications for Testing Euler Equations // Journal of Political Economy. — 2015. — Vol. 123, no. 5. — P. 1177–1200.

70. Uzawa H. Time Preference, the Consumption Function, and Optimal Asset Holdings // Value, Capital and Growth: Papers in Honour of Sir John Hicks / ed. by J. N. Wolfe. — Chicago : Aldine Publishing Company, 1968. — P. 485–505.

71. World inequality database / F. Alvaredo, A. B. Atkinson, T. Piketty, E. Saez. — 2024. — Accessed on 2025-07-07. Available at: https://wid.world/data.

Приложение A

Некоторые примеры и доказательства утверждений

A.1. Примеры с нарушением порядка доходов

Для доказательства теоремы о справедливости гипотезы Рамсея в Главе 2 использовался факт о сохранении порядка доходов домохозяйств на протяжении всего бесконечного неотрицательного полуинтервала времени. Здесь приводятся два примера моделей социальной динамики с разными уровнями заработных плат, при которых вышеупомянутый порядок доходов может нарушаться. Стоит отметить, что из этих примеров не следует, что гипотеза Рамсея не выполняется для указанных моделей. Напротив, есть основание полагать, что гипотеза Рамсея также выполняется и для этих моделей, а ее доказательство предполагает использование другой техники.

A.1.1. Пример 1. Случай Беккера

Приведем сначала пример для модели социальной динамики Рамсея-Беккера (2.4) со следующими значениями параметров:

$$H = 3, \beta = \frac{1}{2},$$

$$r = 0.1,$$

$$k_0^1 = 100, k_0^2 = 50, k_0^3 = 30,$$

$$w^1 = 20, w^2 = 20, w^3 = 22,$$

$$\varphi(x) = \frac{3-\beta}{2} - \frac{3}{2}(1-\beta)x, \quad x \in [0,1].$$

Тогда $30 = rk_0^1 + w^1 > rk_0^2 + w^2 = rk_0^3 + w^3 = 25$, причем $rK_0 + W = r\sum_{j=1}^{3} k_0^j + \sum_{j=1}^{3} w_0^j = 80$. Кроме того,

$$\varphi\left(\frac{rk_0^1 + w^1}{rK_0 + W}\right) = \varphi\left(\frac{3}{8}\right) < \varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3-\beta}{2} - \frac{1}{2}(1-\beta) = 1,$$

$$\varphi\left(\frac{rk_0^j + w^j}{rK_0 + W}\right) = \varphi\left(\frac{5}{16}\right) = \frac{3-\beta}{2} - \frac{15}{32}(1-\beta) = \frac{33-\beta}{32} > 1, \quad j = 2, 3.$$

Положим теперь $y^j = rk^j + w^j$, $j = 1, 2, 3$, и рассмотрим разность производных $\frac{dy^2}{dt} - \frac{dy^3}{dt}$ в момент времени $t = 0$. Так как $\varphi\left(\frac{y_0^j}{Y_0}\right) > 1$, $j = 2, 3$, то функция c_2 будет решением уравнения (1.10), однако в силу разных значений уровней заработных плат более корректной записью решения этого уравнения будет функция не только от капитала k и коэффициента дисконтирования ρ, но также и от заработной платы w. Тогда, используя формулу (2.4), имеем

$$\frac{dy^2}{dt}(0) - \frac{dy^3}{dt}(0) = y^2(0) - y^3(0) -$$
$$-\left(\tilde{c}_2\left(w^2, y^2(0), r\varphi\left(\frac{y^2(0)}{Y(0)}\right)\right) - \tilde{c}_2\left(w^3, y^3(0), r\varphi\left(\frac{y^3(0)}{Y(0)}\right)\right)\right).$$

Найдем теперь частную производную функции $\tilde{c}_2(y, \rho, w)$ по w. Для этого продифференцируем уравнение (1.10) по w:

$$0 = \frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial w} + \frac{\rho - r}{(1-\beta) r}\left(\frac{w}{\tilde{c}_2}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho - r}} + w\left(\frac{w}{\tilde{c}_2}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho - r}}\left(\frac{1}{w} - \frac{\frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial w}}{\tilde{c}_2}\right).$$

Тогда

$$\frac{\partial \tilde{c}_2}{\partial w} = -\frac{\rho - \beta r}{(1-\beta) r}\frac{\left(\frac{w}{\tilde{c}_2}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho - r}}}{1 - \left(\frac{w}{\tilde{c}_2}\right)^{1 + \frac{(1-\beta)r}{\rho - r}}} < 0.$$

Из отрицательности частной производной функции $\tilde{c}_2$ по w следует, что при $w' > w''$ выполняется неравенство $\tilde{c}_2(y, \rho, w') < \tilde{c}_2(y, \rho, w'')$. Но тогда $\frac{d}{dt}(y^2 - y^3)(0) < 0$, откуда следует, что существует такое положительное $\delta > 0$, что для любого $t \in (0, \delta)$ выполняется неравенство $y^2(t) < y^3(t)$. Таким образом, мы показали, что разность $y^2 - y^3$ на интервале $(0, \delta)$ отлична от нуля и отрицательна.

A.1.2. Пример 2. Случай с ограниченной ликвидностью капитала

Нам понадобится следующая теорема.

Теорема (Интегральное представление Эйлера)**.** Если $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ и $|\arg(1-q)| < \pi$, то

$$_2F_1(a, b; c; q) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}(1-qx)^{-a}\,dx, \tag{A.1}$$

где $_2F_1(a, b; c; q) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n}\frac{q^n}{n!}$ – гипергеометрическая функция Гаусса, $(a)_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(a+k), (a)_0 = 1$ – символ Похгаммера, $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ – гамма-функция Эйлера.

Доказательство интегрального представления Эйлера можно найти в [3, §2.2, с. 77].

Для модели социальной динамики с ограниченной ликвидностью капитала (2.5) мы здесь приведем пример со следующими значениями параметров:

$$H = 3, \beta = \frac{1}{2},$$
$$r = \frac{1}{49}, \theta = \frac{67}{3},$$
$$k_0^1 = 343, k_0^2 = 294, k_0^3 = 49,$$
$$w^1 = 392, w^2 = 29, w^3 = 34,$$
$$\varphi(x) = \frac{3-\beta}{2} - \frac{3}{2}(1-\beta)x, \quad x \in [0,1].$$

Тогда

$$399 = rk_0^1 + w^1 > rk_0^2 + w^2 = rk_0^3 + w^3 = 35,$$
$$rK_0 + W = 469,$$
$$\varphi\left(\frac{rk_0^1 + w^1}{rK_0 + W}\right) = \varphi\left(\frac{57}{67}\right) = \frac{5 - 3 \cdot \frac{57}{67}}{4} = \frac{46}{67} < 1,$$
$$\varphi\left(\frac{rk_0^2 + w^2}{rK_0 + W}\right) = \varphi\left(\frac{rk_0^3 + w^3}{rK_0 + W}\right) = \varphi\left(\frac{5}{67}\right) = \frac{5 - 3 \cdot \frac{5}{67}}{4} = \frac{80}{67} > 1.$$

Обоснуем выбор значений параметров. Заметим, что $\beta + \frac{1-\beta}{\theta r} = \frac{1}{2}\left(\frac{147}{67} + 1\right) = \frac{107}{67} > \frac{80}{67}$, поэтому программа потребительских расходов для второго и третьего домохозяйств будет определяться сравнением

$$\frac{k_0^j}{k_0^j + w^j\theta} \vee q\left(\beta, \theta, r, r\varphi\left(\frac{rk_0^j + w^j}{rK_0 + W}\right)\right), j = 2, 3.$$

Рассмотрим теперь левую часть уравнения (1.28):

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)u}}{\left(1 - q\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\theta} - r\right)u}\right)\right)^{1-\beta}} du = \left\{ \begin{aligned} &1 - e^{-\left(\frac{1}{\theta} - r\right)u} = x, u = -\frac{1}{\frac{1}{\theta} - r}\ln(1-x), \\ &du = \frac{dx}{\left(\frac{1}{\theta} - r\right)(1-x)} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\frac{1}{\theta} - r}\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{\rho}{\frac{1}{\theta} - r}}}{(1-qx)^{1-\beta}} dx.$$

Используя интегральное представление Эйлера (A.1) при $a = 1 - \beta, b = 1, c = 2 + \frac{\rho}{\frac{1}{\theta} - r}$, имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\left(\rho - r + \frac{1}{\theta}\right)u}}{\left(1 - q\left(1 - e^{-\left(\frac{1}{\theta} - r\right)u}\right)\right)^{1-\beta}} du =$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{\theta} - r\right)} \cdot \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(1 + \frac{\rho}{\frac{1}{\theta} - r}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{\rho}{\frac{1}{\theta} - r}\right)} {}_2F_1\left(1 - \beta, 1; 2 + \frac{\rho}{\frac{1}{\theta} - r}; q\right) =$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{\theta} - r\right)\left(1 + \frac{\rho}{\frac{1}{\theta} - r}\right)} {}_2F_1\left(1 - \beta, 1; 2 + \frac{\rho}{\frac{1}{\theta} - r}; q\right).$$

Тогда мы можем переписать наше уравнение в терминах гипергеометрической функции Гаусса:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{\theta}-r\right)\left(1+\frac{\rho}{\frac{1}{\theta}-r}\right)}{}_2F_1\left(1-\beta,1;2+\frac{\rho}{\frac{1}{\theta}-r};q\right)=\theta\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow{}_2F_1\left(1-\beta,1;2+\frac{\rho}{\frac{1}{\theta}-r};q\right)=1+\theta\left(\rho-r\right).$$

Положим теперь $\beta=\frac{1}{2},\rho=\frac{1}{\theta}-r$. Тогда

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;3;q\right)=2\left(1-\theta r\right). \tag{A.2}$$

Согласно [14, раздел 7.3.2, с. 399, формула №86], имеем

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;3,q\right)=\frac{4}{3q^2}\left[2\left(1-q\right)^{\frac{3}{2}}-2+3q\right].$$

Вместо того, чтобы разрешать уравнение (A.2) относительно q при известных значениях θ и r, мы будем искать такие q,θ,r, чтобы уравнение (A.2) обратилось в тождество. Будем искать q в виде

$$q=1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2,n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Тогда

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;3,q\right)=\frac{4}{3\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)^2}\left[2\left(\frac{n-1}{n}\right)^3-2+3\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\right]=$$

$$=\frac{4n^4}{3\left(2n-1\right)^2}\cdot\frac{n^3-3n\left(n-1\right)^2+2\left(n-1\right)^3}{n^3}=$$

$$=\frac{4n^4}{3\left(2n-1\right)^2}\cdot\frac{n^3+\left(n-1\right)^2\left(2\left(n-1\right)-3n\right)}{n^3}=$$

$$=\frac{4n}{3\left(2n-1\right)^2}\cdot\left(n^3-\left(n-1\right)^2\left(n+2\right)\right)=$$

$$=\frac{4n}{3\left(2n-1\right)^2}\left(n^3-\left(n^2-2n+1\right)\left(n+2\right)\right)=$$

$$=\frac{4n}{3\left(2n-1\right)^2}\left(n^3-\left(n^3-2n^2+n+2n^2-4n+2\right)\right)=\frac{4n\left(3n-2\right)}{3\left(2n-1\right)^2}.$$

Тогда $\frac{4n(3n-2)}{3(2n-1)^2}=2\left(1-\theta r\right)$, и $\theta r=1-\frac{2}{3}\frac{n(3n-2)}{(2n-1)^2}=\frac{6n^2-8n+3}{3(2n-1)^2}$. Обратим внимание, что тогда $\varphi\left(\frac{rk_0^2+w^2}{rK_0+W}\right)=\varphi\left(\frac{rk_0^3+w^3}{rK_0+W}\right)=\frac{1}{\theta r}-1$. Нетрудно проверить, что подстановкой $n=4$ мы получаем то число, которое дает произведение значений параметров θ и r, а именно $\theta r=\frac{67}{147}$. Тогда $q=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$.

Нам осталось проверить, как разрешается сравнение $\frac{k_0^j}{k_0^j+w^j\theta}\vee q$ при подобранных для примера значениях $k_0^j,w^j,j=2,3$. Сравнение $\frac{k_0^j}{k_0^j+w^j\theta}\vee q$ можно посредством арифметических преобразований привести к виду

$$k_0^j\vee w^j\theta\frac{q}{1-q}.$$

Тогда

$$294 \vee 29 \cdot \frac{67}{3} \frac{\frac{7}{16}}{\frac{9}{16}} \Leftrightarrow 42 \cdot 27 < 29 \cdot 67,$$

$$49 \vee 34 \cdot \frac{67}{3} \frac{\frac{7}{16}}{\frac{9}{16}} \Leftrightarrow 7 \cdot 27 < 34 \cdot 67.$$

Следовательно, $c_4\left(k_0^j, r\varphi\left(\frac{rk_0^j+w^j}{rK_0+W}\right)\right) = \frac{k_0^j}{\theta} + w^j, j = 2, 3$. Но тогда, положив $y^j = rk^j + w^j, j = 2, 3$, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(y^2 - y^3\right)(0) = -\left(\frac{1}{\theta} - r\right)\left(y^2(0) - w^2 - y^3(0) + w^3\right) =$$
$$= -\left(\frac{1}{\theta} - r\right)\left(y^2(0) - y^3(0)\right) + \left(\frac{1}{\theta} - r\right)\left(w^2 - w^3\right) = \left(\frac{1}{\theta} - r\right)\left(w^2 - w^3\right) < 0.$$

Таким образом, производная разности $y^2 - y^3$ отрицательна в момент времени $t = 0$. Тогда существует $\delta_2 > 0$, такое что для любого $t \in (0, \delta_2)$ выполняется неравенство $y^2(t) < y^3(t)$. Следовательно, разность $y^2 - y^3$ отлична от нуля и отрицательна на интервале $(0, \delta_2)$.

A.2. Доказательство Леммы 3.9

Докажем сначала, что $f = (\mathcal{A}' - \lambda I)^{-1}$. Заметим, что

$$\left((\mathcal{A}' - \lambda I)\, y\right)_i = -\left(M(x) + \lambda_1\right) y_i(x) + (-1)^{i-1} \lambda_2 y_{3-i}(x) + \int_0^x \mathcal{K}(w)\, y_i(w)\, dw -$$
$$-\hat{y}(x) \int_0^1 \mathcal{K}(w)\, y_i(w)\, dw.$$

1. $(\mathcal{A}' - \lambda I)[f(z)] = z$. По построению решения нам известно, что $\int_0^1 \mathcal{K}(w)\, y_i(w)\, dw = \mu_i, i = 1, 2$. Используя соотношения (3.44) и (3.45), полученные в Следствии 3.1, для $i \in \{1, 2\}$

найдем

$$\int\limits_0^x \mathcal{K}(w)\, y_i(w)\, dw =$$

$$= -\int\limits_0^x \mathcal{K}(w) \left(\int\limits_0^w b_i(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\, d\xi \right) dw + \mu_1 (-1)^i \int\limits_0^x \mathcal{K}(w) \left(\int\limits_0^w a_i(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\, d\xi \right) dw -$$

$$-\mu_2 \int\limits_0^x \mathcal{K}(w) \left(\int\limits_0^w a_{3-i}(w,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\, d\xi \right) dw =$$

$$= -\left(M(x)+\lambda_1\right) \int\limits_0^x b_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\, d\xi + (-1)^{i+1} \lambda_2 \int\limits_0^x b_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\, d\xi + z_i(x) +$$

$$+\mu_1 (-1)^i \left(\left(M(x)+\lambda_1\right) \int\limits_0^x a_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\, d\xi + (-1)^{i-1} \lambda_2 \int\limits_0^x a_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\, d\xi - \delta_{i1} \hat{y}(x) \right) -$$

$$-\mu_2 \left(\left(M(x)+\lambda_1\right) \int\limits_0^x a_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\, d\xi + (-1)^i \lambda_2 \int\limits_0^x a_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\, d\xi - \delta_{3-i,1} \hat{y}(x) \right) =$$

$$= \left(M(x)+\lambda_1\right) \underbrace{\left(-\int\limits_0^x \Big(b_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + \mu_1 (-1)^{i-1} a_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + \mu_2 a_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) \Big)\, d\xi \right)}_{y_i(x)} +$$

$$+ (-1)^i \lambda_2 \underbrace{\left(-\int\limits_0^x \Big(b_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + \mu_1 (-1)^{2-i} a_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + \mu_2 a_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) \Big)\, d\xi \right)}_{y_{3-i}(x)} +$$

$$+z_i(x) + \Big(\mu_2 \delta_{3-i,1} - (-1)^i \mu_1 \delta_{i,1} \Big) \hat{y}(x) =$$

$$= \left(M(x)+\lambda_1\right) y_i(x) - (-1)^{i-1} \lambda_2 y_{3-i}(x) + z_i(x) + \mu_i \hat{y}(x).$$

Следовательно,

$$\left(\left(\mathcal{A}' - \lambda I\right) f(z)\right)_i(x) = -\left(M(x)+\lambda_1\right) y_i(x) + (-1)^{i-1} \lambda_2 y_{3-i}(x) +$$

$$+ \Big(\left(M(x)+\lambda_1\right) y_i(x) - (-1)^{i-1} \lambda_2 y_{3-i}(x) + z_i(x) + \mu_i \hat{y}(x) \Big) - \mu_i \hat{y}(x) = z_i(x), \quad i = 1,2.$$

2. Теперь покажем, что $f\left(\left(\mathcal{A}' - \lambda I\right) y\right) = y$. Обозначив $\zeta = \left(\mathcal{A}' - \lambda I\right) y$, для удобства продифференцируем по x компоненты вектора и получим

$$\zeta_i'(x) = -\left(M(x)+\lambda_1\right) y_i'(x) + (-1)^{i-1} \lambda_2 y_{3-i}'(x) + \frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)} M(x)\, y_i(x) - \hat{y}'(x) \int\limits_0^1 \mathcal{K}(w)\, y_i(w)\, dw.$$

Тогда

$$(-1)^{i-1}\zeta'_{3-i}(x) = -(M(x)+\lambda_1)(-1)^{i-1}y'_{3-i}(x) - \lambda_2 y'_i(x) + (-1)^{i-1}\frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}M(x)\,y_{3-i}(x) -$$

$$-(-1)^{i-1}\hat{y}'(x)\int\limits_0^1 \mathcal{K}(w)\,y_{3-i}(w)\,dw.$$

Представим в следующем виде выражение

$$\frac{1}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}\Big\{\zeta'_i(\xi)\cos(T(x)-T(\xi)+G(\xi))+$$

$$+(-1)^{i-1}\zeta'_{3-i}(\xi)\sin(T(x)-T(\xi)+G(\xi))\Big\} = I_1+I_2+I_3,$$

где

$$I_1 = -\overbrace{\frac{M(\xi)+\lambda_1}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}}^{\cos G(\xi)}\Big\{y'_i(\xi)\cos(T(x)-T(\xi)+G(\xi))+$$

$$+(-1)^{i-1}y'_{3-i}(\xi)\sin(T(x)-T(\xi)+G(\xi))\Big\} -$$

$$-\overbrace{\frac{\lambda_2}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}}^{\sin G(\xi)}\Big\{y'_i(\xi)\sin(T(x)-T(\xi)+G(\xi)) -$$

$$-(-1)^{i-1}y'_{3-i}(\xi)\cos(T(x)-T(\xi)+G(\xi))\Big\} =$$

$$= -y'_i(\xi)\cos(T(x)-T(\xi)) - (-1)^{i-1}y'_{3-i}(\xi)\sin(T(x)-T(\xi)),$$

$$I_2 = \frac{\frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)}M(\xi)}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}y_i(\xi)\cos(T(x)-T(\xi)+G(\xi))+$$

$$+\frac{\frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)}M(\xi)}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}(-1)^{i-1}y_{3-i}(\xi)\sin(T(x)-T(\xi)+G(\xi)),$$

$$I_3 = -\frac{\hat{y}'(\xi)}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}\left\{\int\limits_0^1 \mathcal{K}(w)\,y_i(w)\,dw\cdot\cos(T(x)-T(\xi)+G(\xi))+\right.$$

$$\left.+(-1)^{i-1}\int\limits_0^1 \mathcal{K}(w)\,y_{3-i}(w)\,dw\cdot\sin(T(x)-T(\xi)+G(\xi))\right\}.$$

Рассмотрим выражение I_2:

$$I_2 = \frac{\frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)} M(\xi)}{\sqrt{\left(M(\xi)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}} y_i(\xi) \left\{\cos\left(T(x)-T(\xi)\right)\cos G(\xi) - \right.$$

$$\left. -\sin\left(T(x)-T(\xi)\right)\sin G(\xi)\right\} +$$

$$+\frac{\frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)} M(\xi)}{\sqrt{\left(M(\xi)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}} (-1)^{i-1} y_{3-i}(\xi) \left\{\sin\left(T(x)-T(\xi)\right)\cos G(\xi) + \right.$$

$$\left. +\cos\left(T(x)-T(\xi)\right)\sin G(\xi)\right\} =$$

$$= \frac{\frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)} M(\xi)\left(M(\xi)+\lambda_1\right)}{\left(M(\xi)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2} \Big\{ y_i(\xi)\cos\left(T(x)-T(\xi)\right) + (-1)^{i-1} y_{3-i}(\xi)\sin\left(T(x)-T(\xi)\right)\Big\} +$$

$$+\frac{\frac{\hat{y}''(\xi)}{\hat{y}'(\xi)} M(\xi)\lambda_2}{\left(M(\xi)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2} \Big\{ -y_i(\xi)\sin\left(T(x)-T(\xi)\right) + (-1)^{i-1} y_{3-i}(\xi)\cos\left(T(x)-T(\xi)\right)\Big\} =$$

$$= \frac{S'(\xi)}{S(\xi)} \Big\{ y_i(\xi)\cos\left(T(x)-T(\xi)\right) + (-1)^{i-1} y_{3-i}(\xi)\sin\left(T(x)-T(\xi)\right)\Big\} +$$

$$+T'(\xi) \Big\{ -y_i(\xi)\sin\left(T(x)-T(\xi)\right) + (-1)^{i-1} y_{3-i}(\xi)\cos\left(T(x)-T(\xi)\right)\Big\}.$$

Заметим, что

$$y_i'(\xi)\cos\left(T(x)-T(\xi)\right) + (-1)^{i-1} y_{3-i}'(\xi)\sin\left(T(x)-T(\xi)\right) -$$

$$-T'(\xi) \Big\{ -y_i(\xi)\sin\left(T(x)-T(\xi)\right) + (-1)^{i-1} y_{3-i}(\xi)\cos\left(T(x)-T(\xi)\right)\Big\} =$$

$$= \frac{d}{d\xi}\Big(y_i(\xi)\cos\left(T(x)-T(\xi)\right) + (-1)^{i-1} y_{3-i}(\xi)\sin\left(T(x)-T(\xi)\right)\Big),$$

тогда сумму $I_1 + I_2$ можно записать как

$$I_1 + I_2 = \frac{S'(\xi)}{S(\xi)} \Big\{ y_i(\xi)\cos\left(T(x)-T(\xi)\right) + (-1)^{i-1} y_{3-i}(\xi)\sin\left(T(x)-T(\xi)\right)\Big\} -$$

$$-\frac{d}{d\xi}\Big(y_i(\xi)\cos\left(T(x)-T(\xi)\right) + (-1)^{i-1} y_{3-i}(\xi)\sin\left(T(x)-T(\xi)\right)\Big) =$$

$$= -S(\xi)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{y_i(\xi)\cos\left(T(x)-T(\xi)\right) + (-1)^{i-1} y_{3-i}(\xi)\sin\left(T(x)-T(\xi)\right)}{S(\xi)}\right).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^x b_i\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi=\int\limits_0^x \frac{S\left(x\right)}{S\left(\xi\right)}\left(I_1+I_2+I_3\right)\,d\xi=$$

$$=-S\left(x\right)\int\limits_0^x \frac{d}{d\xi}\left(\frac{y_i\left(\xi\right)\cos\left(T\left(x\right)-T\left(\xi\right)\right)+\left(-1\right)^{i-1}y_{3-i}\left(\xi\right)\sin\left(T\left(x\right)-T\left(\xi\right)\right)}{S\left(\xi\right)}\right)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_0^1 \mathcal{K}\left(w\right)y_i\left(w\right)\,dw\int\limits_0^x a_1\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi-\left(-1\right)^{i-1}\int\limits_0^1 \mathcal{K}\left(w\right)y_{3-i}\left(w\right)\,dw\int\limits_0^x a_2\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi=$$

$$=-y_i\left(x\right)-\int\limits_0^1 \mathcal{K}\left(w\right)y_i\left(w\right)\,dw\cdot\int\limits_0^x a_1\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi-$$

$$-\left(-1\right)^{i-1}\int\limits_0^1 \mathcal{K}\left(w\right)y_{3-i}\left(w\right)\,dw\cdot\int\limits_0^x a_2\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi.$$

Заметим также, что

$$\mu_i\left(\zeta\right)=-\frac{A_iB_1-\left(-1\right)^{i-1}A_{3-i}B_2}{A_1^2+A_2^2}=-\frac{A_i}{A_1^2+A_2^2}\left(-A_1\int\limits_0^1 \mathcal{K}\left(w\right)y_1\left(w\right)\,dw-A_2\int\limits_0^1 \mathcal{K}\left(w\right)y_2\left(w\right)\right)+$$

$$+\frac{\left(-1\right)^{i-1}A_{3-i}}{A_1^2+A_2^2}\left(-A_1\int\limits_0^1 \mathcal{K}\left(w\right)y_2\left(w\right)\,dw+A_2\int\limits_0^1 \mathcal{K}\left(w\right)y_1\left(w\right)\right)=\int\limits_0^1 \mathcal{K}\left(w\right)y_i\left(w\right)\,dw,\quad i=1,2,$$

поэтому окончательно имеем

$$\left(f\left(\zeta\right)\right)_i\left(x\right)=-\int\limits_0^x\Big(b_i\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)+\mu_1\left(\zeta\right)\left(-1\right)^{i-1}a_i\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)+\mu_2\left(\zeta\right)a_{3-i}\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\Big)\,d\xi=$$

$$=y_i\left(x\right)+\int\limits_0^1 \mathcal{K}\left(w\right)y_i\left(w\right)\,dw\cdot\int\limits_0^x a_1\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi+$$

$$+\left(-1\right)^{i-1}\int\limits_0^1 \mathcal{K}\left(w\right)y_{3-i}\left(w\right)\,dw\cdot\int\limits_0^x a_2\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi-$$

$$-\left(-1\right)^{i-1}\int\limits_0^1 \mathcal{K}\left(w\right)y_1\left(w\right)\,dw\cdot\int\limits_0^x a_i\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_0^1 \mathcal{K}\left(w\right)y_2\left(w\right)\,dw\cdot\int\limits_0^x a_{3-i}\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\,d\xi=y_i\left(x\right),\quad i=1,2.$$

3. Ограниченность. Покажем, что конечна норма оператора $\left(\mathcal{A}'-\lambda I\right)^{-1}$, определяемая как

$$\left\|\left(\mathcal{A}'-\lambda I\right)^{-1}\right\|=\sup_{z\neq 0}\left\{\frac{\left\|\left(\mathcal{A}'-\lambda I\right)^{-1}z\right\|_{C^{1,0}\left(M,\mathbb{R}^2\right)}}{\left\|z\right\|_{C^{1,0}\left(M,\mathbb{R}^2\right)}}\right\},$$

где

$$\|z\|_{C^{1,0}(M,\mathbb{R}^2)} = \sup_{(x,t)\in M} \|z(x,t)\|_{\mathbb{R}^2} + \sup_{(x,t)\in M} \left\| \frac{\partial z}{\partial x}(x,t) \right\|_{\mathbb{R}^2}.$$

$$\left((\mathcal{A}' - \lambda I)^{-1} z \right)_i (x) =$$

$$= -\int_0^x \Big(b_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + \mu_1 (-1)^{i-1} a_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + \mu_2 a_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) \Big)\, d\xi.$$

Рассмотрим выражение с произвольными числами $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$:

$$b_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + c_1(-1)^{i-1} a_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + c_2 a_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) =$$

$$= \frac{S(x)}{S(\xi)} \frac{1}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2 + \lambda_2^2}} \Big[(z_i'(\xi) + c_i \hat{y}'(\xi)) \cos(T(x) - T(\xi) + G(\xi)) +$$

$$+ (-1)^{i-1} \left(z_{3-i}'(\xi) + c_{3-i}\hat{y}'(\xi) \right) \sin(T(x) - T(\xi) + G(\xi)) \Big] \overset{\substack{\text{нер-во} \\ \text{К-Б}}}{\leq}$$

$$\leq \frac{S(x)}{S(\xi)} \frac{1}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2 + \lambda_2^2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (z_i'(\xi) + c_i \hat{y}'(\xi))^2} \overset{\substack{\text{нер-во} \\ \text{треуг-ика}}}{\leq}$$

$$\leq \frac{S(x)}{S(\xi)} \frac{1}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2 + \lambda_2^2}} \left(\sqrt{(z_1'(\xi))^2 + (z_2'(\xi))^2} + \hat{y}'(\xi) \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \right).$$

Тогда при $c_i = \mu_i, i = 1, 2$, с помощью выведенного выше неравенства можно получить оценку вида

$$\left\| (\mathcal{A}' - \lambda I)^{-1} z \right\|_{\mathbb{R}^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \left(\int_0^x \Big(b_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + \mu_1(-1)^{i-1} a_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) + \mu_2 a_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2) \Big)\, d\xi \right)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{2} \left(\int_0^x \frac{S(x)}{S(\xi)} \frac{1}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2 + \lambda_2^2}} \sqrt{(z_1'(\xi))^2 + (z_2'(\xi))^2}\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} \int_0^x \frac{S(x)}{S(\xi)} \frac{\hat{y}'(\xi)}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2 + \lambda_2^2}}\, d\xi \right),$$

а при $c_1 = c_2 = 0$ можно оценить интеграл

$$B_i = \int_0^1 b_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\, d\xi \leq \int_0^1 \frac{S(1)}{S(\xi)} \frac{1}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2 + \lambda_2^2}} \sqrt{(z_1'(\xi))^2 + (z_2'(\xi))^2}\, d\xi.$$

Оценку для B_i можно, в свою очередь, использовать для оценки суммы $\mu_1^2+\mu_2^2$:

$$\begin{gathered}\mu_1^2+\mu_2^2=\frac{1}{\left(A_1^2+A_2^2\right)^2}\left(\left(A_1B_1-A_2B_2\right)^2+\left(A_2B_1+A_1B_2\right)^2\right)=\\
=\frac{1}{\left(A_1^2+A_2^2\right)^2}\left(\left(A_1^2+A_2^2\right)B_1^2-2A_1A_2B_1B_2+2A_1A_2B_1B_2+\left(A_1^2+A_2^2\right)B_2^2\right)=\\
=\frac{B_1^2+B_2^2}{A_1^2+A_2^2}\le\frac{2}{A_1^2+A_2^2}\left(\int\limits_0^1\frac{S(1)}{S(\xi)}\frac{1}{\sqrt{\left(M(\xi)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}}\sqrt{\left(z_1'(\xi)\right)^2+\left(z_2'(\xi)\right)^2}\,d\xi\right)^2.\end{gathered}\tag{A.3}$$

Тогда

$$\left\|\left(\mathcal{A}'-\lambda I\right)^{-1}z\right\|_{\mathbb{R}^2}\le Q_1\left(\lambda_1,\lambda_2\right)\|z\|_{C^{1,0}(M,\mathbb{R}^2)},$$

где

$$\begin{gathered}Q_1\left(\lambda_1,\lambda_2\right)=\sqrt{2}\int\limits_0^1\frac{S(1)}{S(\xi)}\frac{1}{\sqrt{\left(M(\xi)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}}\,d\xi\cdot\\
\cdot\left(1+\sqrt{\frac{2}{A_1^2+A_2^2}}\int\limits_0^1\frac{S(1)}{S(\xi)}\frac{\hat{y}'(\xi)}{\sqrt{\left(M(\xi)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}}\,d\xi\right).\end{gathered}$$

Теперь займемся оценкой $\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\mathcal{A}'-\lambda I\right)^{-1}z\right)\right\|_{\mathbb{R}^2}$. Заметим, что

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\mathcal{A}'-\lambda I\right)^{-1}z\right)\right)_i=\\
=-\underbrace{\left(b_i\left(x,x;\lambda_1,\lambda_2\right)+\mu_1(-1)^{i-1}a_i\left(x,x;\lambda_1,\lambda_2\right)+\mu_2a_{3-i}\left(x,x;\lambda_1,\lambda_2\right)\right)}_{J_{1,i}}-\\
\underbrace{-\int\limits_0^x\left(\frac{\partial b_i}{\partial x}\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)+\mu_1(-1)^{i-1}\frac{\partial a_i}{\partial x}\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)+\mu_2\frac{\partial a_{3-i}}{\partial x}\left(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2\right)\right)d\xi}_{J_{2,i}}.\end{gathered}$$

Посчитаем $J_{1,i}$:

$$\begin{gathered}J_{1,i}=-\left(\left(z_i'(x)+\mu_i\hat{y}'(x)\right)\frac{M(x)+\lambda_1}{\left(M(x)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}+\right.\\
\left.+(-1)^{i-1}\left(z_{3-i}'(x)+\mu_{3-i}\hat{y}'(x)\right)\frac{\lambda_2}{\left(M(x)+\lambda_1\right)^2+\lambda_2^2}\right).\end{gathered}$$

Посчитаем теперь $J_{2,i}$. Сначала вычислим подынтегральное выражение, используя формулы

(3.42) и (3.43):

$$\frac{\partial b_i}{\partial x}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)+\mu_1(-1)^{i-1}\frac{\partial a_i}{\partial x}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)+\mu_2\frac{\partial a_{3-i}}{\partial x}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)=$$
$$=\underbrace{\frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}\frac{M(x)(M(x)+\lambda_1)}{(M(x)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}_{\frac{S'(x)}{S(x)}}\Big(b_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)+\mu_1(-1)^{i-1}a_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)+$$
$$+\mu_2 a_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\Big)+(-1)^{i-1}\underbrace{\frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)}\frac{M(x)\lambda_2}{(M(x)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}_{T'(x)}\Big(b_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)+$$
$$+\mu_1(-1)^i a_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)+\mu_2 a_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\Big).$$

Тогда

$$J_{2,i}=\frac{S'(x)}{S(x)}\int\limits_0^x\Big(b_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)+\mu_1(-1)^{i-1}a_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)+\mu_2 a_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\Big)\,d\xi+$$
$$+(-1)^{i-1}T'(x)\int\limits_0^x\Big(b_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)+\mu_1(-1)^i a_{3-i}(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)+\mu_2 a_i(x,\xi;\lambda_1,\lambda_2)\Big)\,d\xi.$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^2 J_{1,i}^2}=\frac{1}{\sqrt{(M(x)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}\sqrt{\sum_{i=1}^2\left(z_i'(x)+\mu_i\hat{y}'(x)\right)^2}\overset{\substack{\text{нер-во}\\ \text{треуг-ика}}}{\leq}$$
$$\leq\frac{1}{\sqrt{(M(x)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^2(z_i'(x))^2}+\hat{y}'(x)\sqrt{\sum_{i=1}^2\mu_i^2}\right)\overset{(A.3)}{\leq}$$
$$\leq\frac{1}{\sqrt{(M(x)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^2(z_i'(x))^2}+\hat{y}'(x)\sqrt{\frac{2}{A_1^2+A_2^2}}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\int\limits_0^1\frac{S(1)}{S(\xi)}\frac{1}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}\sqrt{(z_1'(\xi))^2+(z_2'(\xi))^2}\,d\xi\right)\leq\sup_{(x,t)\in M}\left\|\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_{\mathbb{R}^2}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{\sqrt{(M(x)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}\left(1+\hat{y}'(1)\sqrt{\frac{2}{A_1^2+A_2^2}}\int\limits_0^1\frac{S(1)}{S(\xi)}\frac{1}{\sqrt{(M(\xi)+\lambda_1)^2+\lambda_2^2}}\,d\xi\right).$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{2} J_{2,i}^{2}} = \sqrt{\left(\left(\frac{S'(x)}{S(x)}\right)^{2} + \left(T'(x)\right)^{2}\right)} \cdot \left\| \left(\mathcal{A}' - \lambda I\right)^{-1} z \right\|_{\mathbb{R}^2} =$$

$$= \frac{\hat{y}''(x)}{\hat{y}'(x)} \frac{M(x)}{\sqrt{\left(M(x) + \lambda_1\right)^2 + \lambda_2^2}} \cdot \left\| \left(\mathcal{A}' - \lambda I\right)^{-1} z \right\|_{\mathbb{R}^2} \le \sup_{(x,t)\in M} \left\| \frac{\partial z}{\partial x} \right\|_{\mathbb{R}^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{\left(M(x) + \lambda_1\right)^2 + \lambda_2^2}} \cdot \sqrt{2} \max_{s\in[0,1]} \left(\frac{\hat{y}''(s)}{\hat{y}'(s)} M(s)\right) \int_0^1 \frac{S(1)}{S(\xi)} \frac{1}{\sqrt{\left(M(\xi) + \lambda_1\right)^2 + \lambda_2^2}} d\xi \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \sqrt{\frac{2}{A_1^2 + A_2^2}} \int_0^1 \frac{S(1)}{S(\xi)} \frac{\hat{y}'(\xi)}{\sqrt{\left(M(\xi) + \lambda_1\right)^2 + \lambda_2^2}} d\xi \right).$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\mathcal{A}' - \lambda I\right)^{-1} z \right) \right\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} \left(J_{1,i} + J_{2,i}\right)^2} \overset{\substack{\text{нер-во} \\ \text{треуг-ика}}}{\le} \sqrt{\sum_{i=1}^{2} J_{1,i}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{2} J_{2,i}^2} \le$$

$$\le Q_2(\lambda_1, \lambda_2) \left\| z \right\|_{C^{1,0}(M,\mathbb{R}^2)},$$

где

$$Q_2(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{\left(M_* + \lambda_1\right)^2 + \lambda_2^2}} \left[1 + \int_0^1 \frac{S(1)}{S(\xi)} \frac{1}{\sqrt{\left(M(\xi) + \lambda_1\right)^2 + \lambda_2^2}} d\xi \cdot \right.$$

$$\cdot \left\{ \hat{y}'(1) \sqrt{\frac{2}{A_1^2 + A_2^2}} + \sqrt{2} \max_{s\in[0,1]} \left(\frac{\hat{y}''(s)}{\hat{y}'(s)} M(s)\right) \cdot \right.$$

$$\left. \left. \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{2}{A_1^2 + A_2^2}} \int_0^1 \frac{S(1)}{S(\xi)} \frac{\hat{y}'(\xi)}{\sqrt{\left(M(\xi) + \lambda_1\right)^2 + \lambda_2^2}} d\xi \right) \right\} \right],$$

при этом

$$M_* = \min\left\{\max\left\{-\lambda_1, M_-\right\}, M_+\right\}.$$

Таким образом, при любом $z \in C^{1,0}(M, \mathbb{R}^2)$, $z \ne 0$, мы окончательно получаем

$$\left\| \left(\mathcal{A}' - \lambda I\right)^{-1} z \right\|_{C^{1,0}(M,\mathbb{R}^2)} \le \left(Q_1(\lambda_1, \lambda_2) + Q_2(\lambda_1, \lambda_2)\right) \left\| z \right\|_{C^{1,0}(M,\mathbb{R}^2)},$$

то есть, $\left\| \left(\mathcal{A}' - \lambda I\right)^{-1} \right\| \le Q_1(\lambda_1, \lambda_2) + Q_2(\lambda_1, \lambda_2)$. Осталось заметить, что при выполнении условий (3.24) и (3.32) число $Q_1 + Q_2$ оказывается конечным, что доказывает ограниченность оператора $\left(\mathcal{A}' - \lambda I\right)^{-1}$. Лемма доказана.

Приложение Б

Статистика неравенства и сравнительный анализ кривых Лоренца

Таблица Б.1. Данные из базы о мировом неравенстве [71] за 1983, 2013 и 2023 годы (до вычета налогов).

Страна	Год	Индекс Джини	Доходы с 1-го по 5-ый дециль	Доходы с 6-го по 9-ый дециль	Доходы 10% самых богатых	Доходы 1% самых богатых
США	1983	0.4803	0.1832	0.4632	0.3536	0.115
	2013	0.5773	0.1345	0.4165	0.449	0.1846
	2023	0.5869	0.1344	0.3981	0.4676	0.2073
Швеция	1983	0.3602	0.2652	0.4669	0.2679	0.0843
	2013	0.377	0.2557	0.4512	0.2931	0.0948
	2023	0.3923	0.246	0.4498	0.3042	0.1075
Германия	1983	0.3768	0.2488	0.4732	0.2779	0.0912
	2013	0.4846	0.1895	0.4396	0.371	0.1275
	2023	0.4709	0.1994	0.4337	0.3669	0.1266

Здесь обсуждаются вопросы, касающиеся перераспределения доходов и возможного устройства прогрессивной шкалы налогообложения, на примере двух параметрических семейств кривых Лоренца – квадратичного

$$\hat{y}^1_\alpha(x) = \alpha x^2 + (1-\alpha)x,\ \alpha \in [0,1],$$

и экспоненциального

$$\hat{y}^2_\alpha(x) = \frac{e^{\alpha x}-1}{e^\alpha - 1},\ \alpha \in [0,+\infty).$$

В качестве параметра, описывающего характер поведения кривых Лоренца, мы будем использовать индекс Джини, причем для данных семейств значение индекса Джини можно

Таблица Б.2. Данные из базы о мировом неравенстве [71] за 1983, 2013 и 2023 годы (после вычета налогов).

Страна	Год	Индекс Джини	Доходы с 1-го по 5-ый дециль	Доходы с 6-го по 9-ый дециль	Доходы 10% самых богатых	Доходы 1% самых богатых
США	1983	0.4109	0.2313	0.4515	0.3172	0.0961
	2013	0.4805	0.1959	0.4237	0.3805	0.1462
	2023	0.4673	0.2065	0.4195	0.3739	0.149
Швеция	1983	0.1786	0.3656	0.434	0.2004	0.0589
	2013	0.2161	0.3454	0.4305	0.224	0.069
	2023	0.2422	0.3398	0.4442	0.216	0.0657
Германия	1983	0.286	0.3043	0.4582	0.2375	0.0749
	2013	0.3367	0.2593	0.4299	0.3107	0.1029
	2023	0.3179	0.2722	0.4243	0.3035	0.1019

посчитать аналитически как функцию от α:

$$G_1(\alpha) = 2\int\limits_0^1 \left(x - \hat{y}_\alpha^1(x)\right)\,dx = 2\alpha\int\limits_0^1 \left(x - x^2\right)\,dx = \frac{\alpha}{3},$$

$$G_2(\alpha) = 2\int\limits_0^1 \left(x - \hat{y}_\alpha^2(x)\right)\,dx = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^\alpha - 1}\int\limits_0^1 \left(e^{\alpha x} - 1\right)\,dx\right) = 1 - 2\frac{e^\alpha - \alpha - 1}{\alpha\left(e^\alpha - 1\right)}.$$

Следовательно, для квадратичного семейства мы перейдем к индексу Джини посредством замены $\alpha = 3G$, а для экспоненциального семейства – с помощью функции, обратной к функции $G_2(\alpha)$. В силу перехода от α к значению индекса Джини G далее мы будем использовать обозначение $\hat{y}_G^i(x), i = 1, 2$, для соответствующего семейства кривых Лоренца. Можно также заметить, что для квадратичного семейства диапазоном значений индекса Джини является отрезок $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, в то время как для экспоненциального семейства значения индекса Джини покрывают весь полуинтервал $[0, 1)$.

Посмотрим теперь, как для каждого семейства кривых Лоренца происходит перераспределение доходов. Функции перераспределения доходов имеют вид

$$\psi_G^1(y) = \frac{\sqrt{(1-3G)^2+12Gy}}{1-\varphi\left(\sqrt{(1-3G)^2+12Gy}\right)} \cdot \left(\int_0^1 \frac{6Gx+1-3G}{1-\varphi(6Gx+1-3G)}\,dx\right)^{-1},$$

$$\psi_G^2(y) = \frac{1+\left(e^{\alpha(G)}-1\right)y}{1-\varphi\left(\frac{\alpha(G)\left(1+\left(e^{\alpha(G)}-1\right)y\right)}{e^{\alpha(G)}-1}\right)} \cdot \left(\int_0^1 \frac{e^{\alpha(G)x}}{1-\varphi\left(\frac{\alpha(G)e^{\alpha(G)x}}{e^{\alpha(G)}-1}\right)}\,dx\right)^{-1}.$$

Перераспределение доходов в соответствии с передачами Пигу-Дальтона в системе налогообложения и субсидирования можно охарактеризовать величиной $I_R(y)$. Она определяется как отношение перераспределенного дохода к исходному доходу домохозяйства, оказавшегося по шкале доходов кривой Лоренца $\hat{y}(x)$ в позиции $x = \hat{y}^{-1}(y)$:

$$I_R(y) = \frac{\psi(y)}{\xi(y)} - 1 = \frac{\psi_0(\xi(y))}{\xi(y)} - 1 = \frac{C_y}{1-\varphi(\xi(y))} - 1, \quad \xi(y) = \hat{y}'\left(\hat{y}^{-1}(y)\right).$$

С помощью данной характеристики для произвольной кривой Лоренца $y = y(x)$ по позиции в распределении доходов x можно определить, какая часть населения облагается налогом, а какой части следует выделить субсидии. Характеристику I_R будем называть *стимулирующей ставкой*. Знак стимулирующей ставки I_R позволяет определить, поддается ли соответствующая часть населения налогообложению или субсидированию, в то время как величина стимулирующей ставки определяется значением выражения $|I_R|$.

На рис. Б.1 представлены два графика стимулирующей ставки, построенные по стационарному распределению доходов. Как можно заметить, в обоих случаях значению индекса Джини $G = 0$ соответствует кривая Лоренца, являющаяся линией равенства. В этом случае стимулирующая ставка тождественно равна нулю для всего населения.

Для квадратичного семейства можно отметить следующие обстоятельства. Так, наиболее интенсивное субсидирование и налогообложение обеспечиваются при максимально возможном значении индекса Джини $G = \frac{1}{3}$: первому децилю, т.е. 10 процентам самых бедных полагаются субсидии в размере от 157 до 415.66%, в то время как десятый дециль, т.е. 10 процентов самых богатых облагается налогом в размере от 19.69% до 22.37%. Кроме того, при $G = \frac{1}{3}$ обладателем нулевой стимулирующей ставки, т.е. теми, кто получит ровно столько, сколько и зарабатывает, является малочисленная группа людей, стоящая в позиции 54-го процентиля, что соответствует величине, немного превышающей величину медианного дохода. Заметим также, что с уменьшением значения индекса Джини G объемы субсидирования сокращаются сильнее, чем ставки налогообложения.

Для случая с экспоненциальным семейством нулевая стимулирующая ставка с ростом G смещается сильнее. Так, при $G = 0.3$ группа людей, получившая ровно столько дохода, сколько она заработала, оказывается в 59-м процентиле, а при $G = 0.9$ она смещается в сторону 91-го процентиля. Для бедных слоев населения субсидирование с увеличением индекса Джини G также увеличивается, но при этом уменьшается разброс. К примеру, при $G = 0.5$ стимулирующая ставка по субсидированию для первого дециля принимает значения от 198.8% до 242.26%, а уже при $G = 0.8$ ставка принимает более узкий диапазон значений – от 544.07% до 546.64%. Стимулирующая ставка по налогообложению для богатых слоев населения, однако, с ростом G ведет себя нелинейно – например, для десятого дециля самые большие величины ставки приходятся на значение индекса Джини, равное $G = 0.5$, когда уплачивается от 27.12% до 32.24% налогов, в то время как при $G = 0.8$ десятый дециль платит налоги в меньшем размере – от 15.3% до 23.72%.

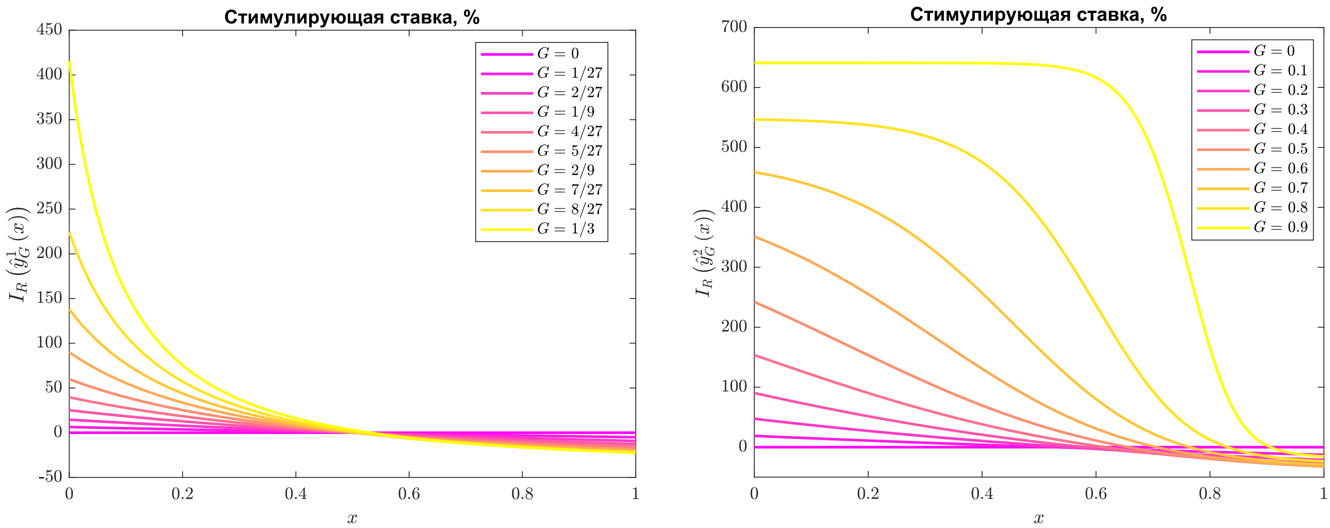


Рис. Б.1. Графики стимулирующей ставки $I_R\left(\hat{y}^i_G(x)\right), i = 1, 2$. Здесь в обоих случаях функция $\varphi(\cdot)$ задана формулой (3.49) со значениями параметров $\varphi_{\max} = 0.9$, $\varphi_{\min} = \beta = 0.1$.

Помимо индекса Джини, на структуру стимулирующей ставки, определяющей системы налогообложения и субсидирования, может влиять функция $\varphi(\cdot)$, которая описывает социокультурную среду. В частности, нас интересует, как отношение $\frac{\varphi_{\min}}{\varphi_{\max}}$, выражающее степень подражательного поведения домохозяйств, влияет на изменение стимулирующей ставки. Чем меньше это отношение, тем меньше степень подражательного поведения, т.е. домохозяйства в меньшей степени обращают внимание на других при планировании своих сбережений и потребительских расходов. В случае, когда $\varphi_{\max} = \varphi_{\min}$, домохозяйства полностью копируют поведение друг друга, следуя одному и тому же шаблону. На рис. Б.2 представлены графики стимулирующей ставки с фиксированными значениями индекса Джини для каждого семейства и разными значениями степени подражательного поведения. Считая за базовый сценарий стимулирующую ставку при значениях параметров $\varphi_{\max} = 0.9, \varphi_{\min} = 0.1$, сравним этот сценарий с другими парами значений параметров. При этом значение параметра $\varphi_{\min}$ фиксировано.

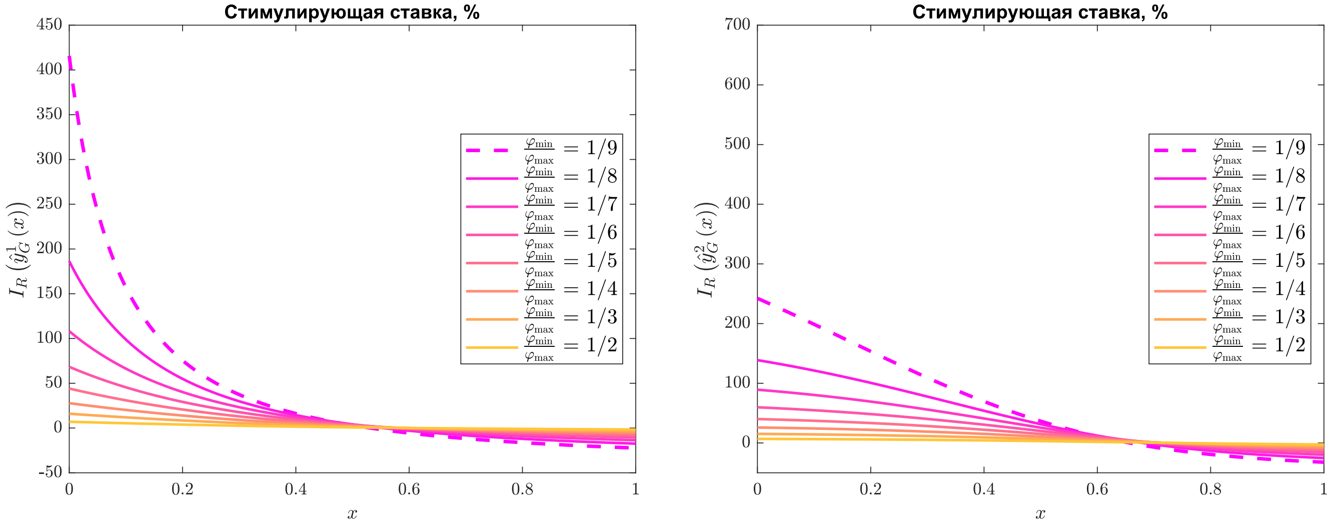


Рис. Б.2. Графики стимулирующей ставки $I_R\left(\hat{y}_G^i(x)\right), i = 1, 2$, в зависимости от степени подражательного поведения $\frac{\varphi_{\min}}{\varphi_{\max}}$. Здесь в обоих случаях функция $\varphi(\cdot)$ задана формулой (3.49). На левом графике ставка посчитана для кривой Лоренца из квадратичного семейства с индексом Джини $G = \frac{1}{3}$, на правом – для кривой Лоренца из экспоненциального семейства с индексом Джини $G = 0.5$.

Видно, что в обоих случаях увеличение степени подражательного поведения приводит к сокращению объемов субсидирования и налогообложения. Так, в случае принадлежности кривой Лоренца квадратичному семейству увеличение отношения $\frac{\varphi_{\min}}{\varphi_{\max}}$ с $\frac{1}{9}$ до $\frac{1}{2}$ приводит ставки субсидирования для первого дециля к значениям от 5.35% до 7.01%, а ставки налогообложения для десятого дециля оказываются в диапазоне от 1.34% до 1.65%. Кроме того, увеличение степени подражательного поведения смещает группу людей, обладающих нулевой стимулирующей ставкой, до 61-го процентиля.

Похожая картина наблюдается и в случае с экспоненциальным семейством: увеличение степени подражательного поведения приводит ставку субсидирования для первого дециля к диапазону значений от 6.42% до 6.78%, а также ставку налогообложения для десятого дециля к диапазону значений от 1.74% до 2.49%. Группа людей с нулевой стимулирующей ставкой при этом смещается от 66-го к 74-му процентилю.

В заключение мы попытаемся выяснить, насколько полезными могут быть семейства кривых Лоренца для согласования с эмпирическими данными, взятыми из базы [71], по основным показателям, отражающим степень неравенства в доходах в разных странах. Нами предлагается провести такой анализ на примере трех стран: США, Швеции и Германии. Для данных стран за 1983, 2013 и 2023 годы приведены сведения в табл. Б.1 по таким показателям, как значение индекса Джини и доли доходов разных групп населения.

В силу удобства мы используем экспоненциальное семейство кривых Лоренца для анализа сведений из табл. Б.1. В табл. Б.3 приведены подсчеты показателей из предыдущей таблицы для кривых Лоренца, полученных по значениям индекса Джини для разных стран.

Таблица Б.3. Посчитанные для экспоненциального семейства кривых Лоренца показатели по данным из табл. Б.1.

Страна	Год	Индекс Джини	Доходы с 1-го по 5-ый дециль	Доходы с 6-го по 9-ый дециль	Доходы 10% самых богатых	Доходы 1% самых богатых
США	1983	0.4803	0.1548	0.5473	0.2979	0.0345
	2013	0.5773	0.0958	0.5384	0.3659	0.0444
	2023	0.5869	0.0903	0.5361	0.3736	0.0456
Швеция	1983	0.3602	0.2357	0.5326	0.2317	0.0257
	2013	0.377	0.224	0.536	0.24	0.0268
	2023	0.3923	0.2134	0.5387	0.2479	0.0278
Германия	1983	0.3768	0.2241	0.5359	0.24	0.0268
	2013	0.4846	0.2134	0.5387	0.2479	0.0278
	2023	0.4709	0.1609	0.547	0.2921	0.0337

Из табл. Б.1 можно заключить, что за последние 40 лет во всех трех странах усилилось неравенство по доходам. Если в Швеции усиление неравенства оказалось несильным и выразилось в увеличении индекса Джини примерно на 0.03, то в США и Германии индекс Джини поднялся примерно на 0.1, причем в промежуточном 2013-м году индекс Джини в Германии был еще выше, чем соответствующий показатель 2023-го года. Также в табл. Б.1 можно отметить следующий порядок по доходам трех непересекающихся групп населения: в Швеции и Германии в разное время наибольшее количество доходов имелось у группы населения с 6-го по 9-ый дециль, следом шел десятый дециль, а замыкала тройку группа населения с 1-го по 5-ый дециль. В США в 1983 году порядок групп населения по доходам был точно таким же, однако со временем он изменился: наибольшим количеством доходов стал обладать десятый дециль. Результат подсчета в табл. Б.3 показывает, что экспоненциальное семейство кривых Лоренца смогло сохранить данный порядок для данных по Германии и Швеции, а также для данных по США за 1983 год, однако данному семейству не удалось поймать эффект изменения позиций в распределении доходов, произошедший в США. Существенное отличие распределения доходов в США от распределений доходов в Швеции и Германии, по-видимому, объясняется различием социокультурных сред в этих странах.