

На правах рукописи

Конашенкова Татьяна Дмитриевна

**ВЕЙВЛЕТ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ТОЧНОСТИ И  
ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ  
ПРИ УДАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка  
информации (информационно-вычислительное обеспечение)

**АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук**

Москва – 2020

Работа выполнена в отделении 6 "Стохастические и интеллектуальные методы и средства моделирования и построения систем с интенсивным использованием данных" Федерального государственного учреждения "Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук" (ФИЦ ИУ РАН)

Научный руководитель:

**Синицын Игорь Николаевич**

доктор технических наук, профессор,

Заслуженный деятель науки РФ,

главный научный сотрудник ФИЦ ИУ РАН

**Бахтадзе Наталья Николаевна,**

доктор технических наук, профессор,

главный научный сотрудник

Института проблем управления им. В.А.

Трапезникова РАН (ИПУ РАН)

**Мунерман Виктор Иосифович,**

кандидат технических наук,

доцент кафедры информатики

Смоленского государственного университета

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего

образования "Московский государственный

технический университет

имени Н.Э. Баумана (национальный

исследовательский университет)"

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Ведущая организация:

Защита состоится

на заседании

диссертационного совета Д 002.073.04 на базе ФИЦ ИУ РАН  
по адресу: 117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 9  
(конференц-зал, 1-ый этаж)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИЦ ИУ РАН по адресу:  
Москва, ул. Вавилова, д. 40 и на официальном сайте ФИЦ ИУ РАН:  
<http://www.frcsc.ru>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью  
учреждения, просьба высылать по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова,  
д. 44, корп. 2. ФИЦ ИУ РАН, диссертационный совет Д 002.073.04.

Автореферат разослан

Телефон для справок:

Ученый секретарь

диссертационного совета

Д 002.073.04,

В.Н. Крутько

доктор технических наук,

профессор

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Функционирование технических изделий (ТИ) научноемкой продукции высокой точности в условиях экстремальных нестационарных ударных механических, тепловых и электромагнитных возмущений и воздействия стохастических факторов промышленного производства и эксплуатации требует разработки методического, алгоритмического и инструментального программного обеспечения расчетного обоснования точностных характеристик ТИ на всех этапах жизненного цикла. Решению задач, касающихся ударного взаимодействия тел в механике и физике, в детерминированной постановке посвящено множество работ. Однако, очевидно, что наиболее адекватное методическое обеспечение основано на методах стохастического системного анализа.<sup>1</sup> Большой вклад в развитие теории стохастического системного анализа внесли Пугачев В.С. (ВВИА им. Н.Е. Жуковского, ИПУ им. В.А. Трапезникова, ИПИ РАН), Казаков И.Е., Мальчиков С.В., Евланов Л.Г., Гладков Д.И, (ВВИА им. Н.Е. Жуковского), Синицын И.Н. (ВВИА им. Н.Е. Жуковского, ИПИ РАН, ФИЦ ИУ РАН), Шин В.И., Андреев Н.И., Сысоев Л.П., Шайкин М.Е., Добровидов А.В. (ИПУ им. В.А. Трапезникова), Кибзун А.И., Панков А.Р., Мошук Н.К., Рыбаков К.А. (МАИ), Синицын В.И., Борисов А.В., Босов А.В., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В. (ФИЦ ИУ РАН). Вопросам идентификации в задачах системного анализа посвящены работы Бахтадзе Н.Н.

Техническое изделие, выполненное по определенным стандартам и условиям применения, рассматривается как *ударная стохастическая система* (*УдСтС*). Стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее ошибки функционирования ТИ как следствие стохастических факторов и детерминированных и стохастических ударных воздействий, является математической моделью УдСтС. Стохастическое ударное воздействие характеризуется ударной *случайной функцией* (*УдСФ*). *Центральной задачей стохастического системного анализа* является задача анализа одно- и многомерных распределений стохастических процессов (СтП) в УдСтС, которые определяют их динамические ошибки функционирования. Для решения задачи анализа распределений в УдСтС применяют следующие три принципиально различных подхода. *Первый подход* состоит в использовании прямого численного решения стохастических уравнений ошибок методом Монте-Карло (методом статистического моделирования). *Второй подход* состоит в непосредственном составлении и интегрировании уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова (и его обобщений) для плотности вероятности или уравнения Пугачева (и его обобщений) для характеристической функции стохастического процесса, заданного стохастическим дифференциальным

---

<sup>1</sup> Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. – М.: Логос, 2000, 2004. 1000 с. [Англ. пер. Stochastic Systems. Theory and Applications. Singapore. World Scientific, 2001. 908 р.].

уравнением. *Третий подход* состоит в применении аналитических методов для приближенного решения уравнений, определяющих параметры одно- и многомерных распределений. К их числу относятся методы нормальной аппроксимации и статистической линеаризации, методы моментов, семиинвариантов, моментно-семиинвариантные методы и их модификации, методы ортогональных разложений и методы структурной параметризации. Эти методы позволяют по исходной УдСтС получить детерминированные нестационарные уравнения для параметров одно- и многомерных распределений.

Точное нахождение всех конечномерных вероятностных распределений вектора состояния УдСтС, в общем случае невозможно. Оно имеет место для линейных и узкого класса нелинейных систем. Поэтому актуальна проблема разработки приближенных методов вероятностного анализа УдСтС. Решению задач в вероятностной постановке, в том числе касающихся ударного взаимодействия тел в механике и физике, посвящено много публикаций. Наряду с общими методами нелинейной теории выделяют специальные методы, ориентированные на конкретные классы дифференциальных стохастических систем (СтС). Например, среди классов дифференциальных СтС с импульсными воздействиями получила развитие теория импульсных СтС. Особенностью этих работ является то обстоятельство, что изучение свойств УдСтС ведется на основе их математических моделей из-за трудности проведения натурных испытаний. Для проведения расчетных оценок в режиме реального времени широкое распространение получили фильтр Калмана и условно-оптимальные фильтры Пугачева. Для нестационарных задач расчетной практики разработано инструментальное программное обеспечение с использованием методического обеспечения на основе канонических разложений (КР), вейвлет разложений (ВЛР) и вейвлет канонических разложений (ВЛКР) случайных функций.

Для решения задачи анализа распределений СтП и обработки информации в УдСтС применение вейвлет технологий представляет собой актуальную научную проблему стохастического системного анализа. *Вейвлет анализ* позволяет исследовать временные ряды с выраженной неоднородностью. В отличие от преобразования Фурье, локализующего частоты, но не дающего временного разрешения процесса, и от аппарата д-функций, локализующего моменты времени, но не имеющего частотного разрешения, вейвлет преобразование эффективно выявляет как низкочастотные, так и высокочастотные характеристики сигнала на разных временных масштабах. Вопрос оценки погрешности аппроксимации детерминированной функции конечной линейной комбинацией ортонормированных вейвлетов с конечным носителем в работе не рассматривается, так как это отдельная и сложная задача.

**Основная цель** диссертации заключается в разработке методов и алгоритмов для инструментального программного обеспечения (ИПО)

вейвлет анализа точности и обработки информации в стохастических системах при ударных воздействиях.

Для ее достижения требуется решить следующие задачи:

- 1) разработать методы и алгоритмы построения скалярных и векторных УдСФ посредством их ВЛКР;
- 2) разработать вейвлет методы и алгоритмы анализа динамической точности УдСтС;
- 3) изучить возможности использования авторской модификации моментно-семиинвариантного метода для анализа точности УдСтС;
- 4) для типовых круговых нелинейностей в УдСтС провести аналитические расчеты коэффициентов статистической круговой намотанной нормальной линеаризации;
- 5) разработать методы и алгоритмы вейвлет обработки информации в режиме реального времени в линейных и линейных с параметрическими шумами УдСтС;
- 6) разработать типовую методику анализа точности УдСтС.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

- 1) представлены вейвлет методы построения канонического разложения скалярной и векторной ударных функций в заданной области изменения аргумента на основе ортогональных вейвлетов с компактным носителем;
- 2) представлены алгоритмы нахождения неизвестных математического ожидания, ковариационной матрицы, матрицы ковариационных функций на основе применения метода Галёркина и вейвлет разложений (ВЛР) для линейной и линейной с параметрическими шумами УдСтС;
- 3) представлен вейвлет метод построения оптимального в среднем квадратическом (с.к.) линейного оператора для обработки информации и разработан вейвлет метод синтеза с.к. оптимальной линейной системы для обработки информации в режиме реального времени в случае линейной зависимости сигнала от параметров и аддитивной помехи;
- 4) представлены вейвлет модификации фильтра Калмана–Бьюси обработки информации в линейных УдСтС и линейного фильтра Пугачева обработки информации в линейных УдСтС с параметрическими шумами;
- 5) представлены основные положения методики анализа точности УдСтС.

**Научная новизна**, выносимых на защиту результатов состоит в следующем:

- 1) разработана вейвлет теория точности линейной и линейной с параметрическими шумами УдСтС на основе применения метода Галёркина и вейвлет разложений;
- 2) разработан алгоритм построения с.к. оптимального линейного оператора для обработки информации с применением вейвлет технологий;

3) разработаны вейвлет модификации фильтра Калмана–Бьюси и линейного фильтра Пугачева обработки информации в режиме реального времени в линейных и линейных с параметрическими шумами УдСтС соответственно.

**Методы исследования**, используемые в работе, включают в себя методы теории линейных и нелинейных стохастических систем, методы теории вейвлетов, методы теории канонических разложений, методы оптимизации.

**Объектом исследования** являются стохастические системы, функционирующие в условиях нестационарных ударных возмущений и под воздействием стохастических факторов.

**Предметом исследования** являются методы и алгоритмы для инструментальных программных средств анализа точности и обработки информации в нестационарных СтС при ударных воздействиях.

**Теоретическая и практическая значимость работы.**

Теоретическая значимость работы заключается в разработке и обосновании методов анализа точностных характеристик и синтеза систем обработки информации в УдСтС на основе ВЛР, КР и ВЛКР.

Практическая значимость работы состоит в разработке типовой методики анализа и синтеза точностных характеристик прецизионной информационно-управляющей системы и тестовых примеров.

**Соответствие паспорту специальности.** Содержание диссертации соответствует:

- п. 1 "Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации",
- п. 4 "Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации",

в части вейвлет методов стохастического анализа и обработки информации.

**Реализация результатов работы.** Результаты диссертации реализованы в 3-х НИР ИПИ АН СССР (1987-1992гг.), в 3-х НИР ИПИ РАН (2009-2011 гг.), в 2-х проектах РФФИ (№№ 15-07-002244 и 10-07-00021), в 3-х НИОКТР ФИЦ ИУ РАН (2018, 2019, 2020 гг.).

**Апробация работы.** Основные результаты докладывались на следующих конференциях и научных семинарах: Международная научная конференция "Системы компьютерной математики и их приложения", г. Смоленск, 2017, 2018, 2019, 2020; XIII Международная научно-практическая конференция "Современные информационные технологии и ИТ-образование", г. Москва, 2018 г; Международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей, г. Светлогорск, 2012 г.; VI международный рабочий семинар "Прикладные задачи теории вероятности и математической статистики, связанные с моделированием информационных

систем", г. Светлогорск, 2012 г.; XXIX Международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей, г. Москва, 2011 г.

**Публикации.** Основные научные результаты изложены в 22 публикациях, в том числе в 16 статьях в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, в 3 журналах, входящих в международные базы цитирования Scopus и Web of science [1,13,14].

**Личный вклад.** Все результаты, изложенные в диссертации, принадлежат лично автору. В совместных работах автор принимал непосредственное участие в разработке методов и алгоритмов анализа и синтеза СтС, реализации вычислительных процедур:

- формулировки и доказательства теорем в статьях [8-11,13,14] и в сборнике трудов конференций [6];
- идея замыкания системы уравнений для моментов в статье [1];
- идея вейвлет метода построения с.к. оптимального линейного оператора для обработки информации в сборнике трудов конференций [6];
- результаты аналитических расчетов коэффициентов статистической круговой намотанной нормальной линеаризации для типовых круговых нелинейных СФ в статье [7] и в сборниках трудов конференций [1,2];
- разработка тестовых примеров, реализация вычислительных процедур в виде соответствующего ИПО в статьях [1-6,12-16] и в сборниках трудов конференций [3-5].

**Структура и объем диссертации.** Диссертация содержит введение, четыре раздела, заключение, список сокращений и условных обозначений, список литературы, приложение, список публикаций автора по теме диссертации. В конце каждого раздела приведены выводы.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** дается обоснование актуальности диссертационной работы и ее научная новизна, формулируются основные цели и задачи диссертационного исследования, приводятся основные положения, выносимые на защиту, а также кратко сформулировано основное содержание глав диссертации.

**В разделе 1 "Обзор работ и постановка задач"** вводятся основные понятия и определения. Приводятся определения удара и ударного воздействия. Вводится понятие ударной стохастической системы в качестве технического изделия, выполненного по определенным стандартам и условиям применения и подвергающегося УВ и стохастическим факторам в процессе эксплуатации. При этом УВ характеризуется векторной ударной случайной функцией (УдСФ). Приводятся основные характеристики УВ, использующиеся в теории действительных стохастических ударных процессов. Дается обзор работ в области теории ударных стохастических систем. Для анализа и обработки ударных воздействий предлагается использовать вейвлет анализ, позволяющий одинаково хорошо выявлять

низкочастотные и высокочастотные характеристики сигнала на разных временных масштабах. Для исследования выделены вопросы анализа динамической точности и обработки информации в УдСтС. Сформулированы теоретические и прикладные задачи исследования и разработки.

**Раздел 2 "Вейвлет методы и алгоритмы построения канонических разложений ударных случайных функций"** посвящен корреляционной теории вейвлет канонических разложений для УдСФ. В подразделах 2.1 и 2.2 приведены основные понятия вейвлет анализа и описан разработанный автором метод построения вейвлет КР для УдСФ. Идея ВЛКР была впервые высказана В.С. Пугачевым и И.Н. Синицыным<sup>2</sup>. Предлагаемый метод является дальнейшим развитием алгоритмов построения КР случайных функций, разработанных В.С. Пугачевым и И.Н. Синицыным, на основе ортонормированных вейвлет базисов, порожденных вейвлетами с конечными носителями, например, вейвлетами Добеши. В подразделе 2.1 доказана теорема о построении КР скалярной УдСФ на основе ортогонального разложения ее ковариационной функции по двумерному ортонормированному вейвлет базису. На основании этой теоремы разработан алгоритм построения ВЛКР скалярной УдСФ. В подразделе 2.2 изложен метод построения ВЛКР для векторных УдСФ.

Векторная УдСФ  $X(t) = [X_1(t), \dots, X_l(t)]^T$  задана на промежутке  $[0, T]$ . В пространстве  $L^2[0, T]$  определен ортонормированный базис вейвлетов с конечными носителями вида

$$\{\varphi_{00}(t); \psi_{jk}(t)\}, \quad (1)$$

где  $\varphi_{00}(t) = \varphi(t)$  – масштабирующая функция;  $\varphi_{jk}(t) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j t - k)$  ;  $\psi_{00}(t) = \psi(t)$  – материнский вейвлет;  $\psi_{jk}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k)$ ;  $j=1,2,\dots,J^t$ ;  $k=0,1,\dots,2^j - 1$ ;  $J^t$  – максимальный уровень вейвлет разрешения. Считается, что каждый элемент ковариационной функции  $K^X(t_1, t_2)$  принадлежит пространству  $L^2([0, T] \times [0, T])$ . В пространстве  $L^2([0, T] \times [0, T])$  определен двумерный ортонормированный вейвлет базис в виде тензорного произведения двух вейвлет базисов вида (1) для случая, когда масштабирование по обеим переменным происходит одинаково:

$$\begin{aligned} \Phi_{00}^A(t_1, t_2) &= \varphi_{00}(t_1) \varphi_{00}(t_2), \Psi_{jkn}^H(t_1, t_2) = \varphi_{jk}(t_1) \psi_{jn}(t_2), \\ \Psi_{jkn}^B(t_1, t_2) &= \psi_{jk}(t_1) \varphi_{jn}(t_2), \Psi_{jkn}^D(t_1, t_2) = \psi_{jk}(t_1) \psi_{jn}(t_2), \\ j &= 0, 1, \dots, J^t; n, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда действительная функция  $K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2)$  имеет сходящееся ВЛР:

$$K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2) = a^{th_1 h_2} \Phi_{00}^A(t_1, t_2) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j - 1} \sum_{n=0}^{2^j - 1} [h_{jkn}^{th_1 h_2} \Psi_{jkn}^H(t_1, t_2) +$$

<sup>2</sup> Pugachev V.S., I.N.Sinitsyn. Lectures on Functional Analysis and Applications. –Scientific, Singapore, 1999.

$$+b_{jkn}^{th_1h_2}\Psi_{jkn}^B(t_1, t_2) + d_{jkn}^{th_1h_2}\Psi_{jkn}^D(t_1, t_2)] , \quad (3)$$

$$\text{где } a^{th_1h_2} = \int_0^T \int_0^T K_{h_1h_2}^x(t_1, t_2) \Phi_{00}^A(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

$$h_{jkn}^{th_1h_2} = \int_0^T \int_0^T K_{h_1h_2}^x(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^H(t_1, t_2) dt_1 dt_2 ,$$

$$b_{jkn}^{th_1h_2} = \int_0^T \int_0^T K_{h_1h_2}^x(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^B(t_1, t_2) dt_1 dt_2 ,$$

$$d_{jkn}^{th_1h_2} = \int_0^T \int_0^T K_{h_1h_2}^x(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^D(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Для удобства одномерный вейвлет базис (1) представлен в виде:

$$f_1(t) = \varphi_{00}(t), \quad f_2(t) = \psi_{00}(t),$$

$$f_\nu(t) = \psi_{jk}(t) \text{ для } \nu = 2^j + k + 1; \quad j = 1, 2, \dots, J^t; \quad k = 0, 1, \dots, 2^j - 1; \quad (4)$$

$$L^t = 2 * 2^{J^t}; \quad \nu = 3, 4, \dots, L^t.$$

Введены вспомогательные случайные величины (СВ)

$$A_r = \sum_{h=1}^l \int_0^T f_r(t) X_h(t) dt \quad (r = 1, 2, \dots, L^t).$$

Определены ковариационные моменты СВ  $A_\nu$ :

$$k_{\nu\mu} = M[A_\nu \overline{A_\mu}] = \sum_{h_1}^l \sum_{h_2}^l \int_0^T f_\nu(t_1) f_\mu(t_2) K_{h_1h_2}^x(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (\nu, \mu = 1, 2, \dots, L^t).$$

На основании (3) получены выражения:

$$k_{11} = \sum_{h_1}^l \sum_{h_2}^l a^{th_1h_2} ; \quad k_{12} = \sum_{h_1}^l \sum_{h_2}^l h_{000}^{th_1h_2} ;$$

$$k_{21} = \sum_{h_1}^l \sum_{h_2}^l b_{000}^{th_1h_2} ; \quad k_{22} = \sum_{h_1}^l \sum_{h_2}^l d_{000}^{th_1h_2} ;$$

$$k_{\nu\mu} = \sum_{h_1}^l \sum_{h_2}^l d_{jkn}^{th_1h_2} \text{ для } \nu = 2^j + k + 1; \quad \mu = 2^j + n + 1;$$

$$j = 1, 2, \dots, J^t; \quad k, n = 0, 1, \dots, 2^j - 1.$$

Остальные взаимные ковариационные моменты равны нулю:  $k_{\nu\mu} = 0$ .

Независимые СВ  $V_\nu$  определены рекуррентными соотношениями:

$$A_1^\circ = V_1, \quad A_r^\circ = - \sum_{\nu=1}^{r-1} c_{r\nu} V_\nu + V_r \quad (r = 2, 3, \dots, L^t),$$

где

$$c_{\nu 1} = - \frac{k_{\nu 1}}{D_1} \quad (\nu = 2, 3, \dots, L^t);$$

$$c_{\nu\mu} = - \frac{1}{D_\mu} (k_{\nu\mu} - \sum_{\lambda=1}^{\mu-1} D_\lambda c_{\mu\lambda} c_{\nu\lambda}) \quad (\mu = 2, 3, \dots, \nu - 1; \quad \nu = 3, 4, \dots, L^t); \quad (5)$$

$$D_1 = D[V_1] = k_{11}; \quad D_\nu = D[V_\nu] = k_{\nu\nu} - \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} D_\nu |c_{\nu\lambda}|^2 \quad (\nu = 2, 3, \dots, L^t). \quad (6)$$

Координатные функции  $x_{vh}(t)$  представлены в виде линейных комбинаций базисных вейвлет функций вида (1):

$$x_{vh}(t) = \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} \left[ a_{vjk}^{xh} \varphi_{jk}(t) + d_{vjk}^{xh} \psi_{jk}(t) \right] \quad (\nu = 1, 2, \dots, L^t). \quad (7)$$

Получен следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть выполнены следующие условия:

1) векторная УДСФ  $X(t) = [X_1(t), \dots, X_l(t)]^T$  на  $[0, T]$  обладает конечными моментами первого и второго порядка;

2) элементы ковариационной функции  $K_{h_1h_2}^x(t_1, t_2)$  принадлежат пространству  $L^2([0, T] \times [0, T])$ .

Тогда ВЛКР составляющих векторной УДСФ  $X(t) = [X_1(t), \dots, X_l(t)]^T$  на  $[0, T]$  имеет вид  $X_h(t) = m_h^x(t) + \sum_{\nu=1}^{L^t} V_\nu x_{vh}(t)$  ( $h = 1, \dots, l$ ), где

$V_1, \dots, V_{L^t}$  – некоррелированные СВ с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями  $D_\nu$ , вычисляемыми по формулам (5), (6);  $x_1(t), \dots, x_{L^t}(t)$  – координатные функции, определяемые формулами (7).

В подразделе 2.3 приведена краткая информация о КР линейных и квазилинейных преобразований УдСФ. В подразделе 2.4 даны сведения о моделировании УдСФ.

В приложении П.1 проведен сравнительный анализ построения КР и ВЛКР на примере типовой скалярной случайной функции (СФ)  $X(t)$  с математическим ожиданием, равным 0, и ковариационной функцией  $K_X(t, \tau) = D \exp(-\alpha|t - \tau|)$  на  $[0, 15]$ . Для сравнения рассматривались ВЛКР, построенное на основе базиса Хаара, и КР, построенное на основе тригонометрического базиса  $f_{2\nu+1}(t) = \cos \frac{2\pi\nu t}{T}$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ),

$$f_{2\nu}(t) = \sin \frac{2\pi\nu t}{T} \quad (\nu = 1, 2, \dots), \quad T = 15, \quad t \in [0, 15]. \quad \text{Точность методов}$$

оценивалась по формуле:  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (D_a(t_i) - D_T(t_i))^2}$ , где  $D_a(t_i)$  – аппроксимирующее значение дисперсии в точке  $t_i$ ,  $D_T(t_i)$  – точное значение дисперсии, равное в данном случае единице. В таблице 1 приведены значения  $\sigma$  в зависимости от числа членов  $n$  в каноническом разложении  $X(t)$  на основе тригонометрического базиса и в вейвлет каноническом разложении  $X(t)$  для  $J^t=2$ .

Таблица 1

Вид КР	КР на основе тригонометрического базиса					ВЛКР
$n$	11	21	31	41	51	8
$\sigma$	0.5355	0.3435	0.2533	0.1986	0.1649	0,0057

*Вывод.* Как показали вычислительные эксперименты, уже при наименьшем уровне вейвлет разрешения  $J^t=2$  точность ВЛКР значительно выше аналогичного метода КР, построенного на основе тригонометрического базиса.

В приложении П.2 дано описание ИПО построения ВЛКР СФ "СтИТ-КРВЛ.1". В приложении П.3 приведены примеры аналитического построения ВЛКР скалярных СФ. В приложении П.4 изложен рекуррентный алгоритм построения ВЛКР двумерной векторной СФ в заданной области изменения аргумента.

**Раздел 3 "Вейвлет методы и алгоритмы анализа точности стохастических систем при ударных воздействиях"** посвящен методике анализа точности СтС в условиях сложных детерминированных и стохастических ударных воздействий, трудно реализуемых при натурных испытаниях. Ярким примером УдСтС являются прецизионные информационно-управляющие системы (ИУС), особенностями которых являются скоротечность воздействия на них СФ и фильтрационные свойства измерительно-управляющих подсистем. При этом нелинейные

стохастические эффекты не успевают развиваться. В таких случаях практически приемлемой моделью УдСтС являются нестационарные линейные дифференциальные СтС или нестационарные линейные дифференциальные СтС с параметрическими шумами (или приводимые к ним), описывающие накапливающиеся систематические и случайные ошибки.

В подразделах 3.1 и 3.2 приведены корреляционные методы и алгоритмы анализа точности линейных и линейных с параметрическими шумами УдСтС, разработанные автором на основе применения метода вейвлетов Хаара и метода Галёркина (далее – метод вейвлетов Хаара–Галёркина (МВЛХГ))<sup>34</sup>. Главным преимуществом применения МВЛХГ по сравнению с другими приближенными методами решения задачи Коши является замена решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих ударные функции (дельта-функцию или кусочно-непрерывные функции), решением системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с постоянными коэффициентами с сохранением точности приближенных вычислений.

Рассмотрена линейная УдСтС, заданная стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) при  $t \in [t_0, T]$ <sup>56</sup>:

$$\dot{Y} = aY + a_0 + bV, \quad Y(t_0) = Y_0, \quad (8)$$

где  $Y$  – вектор состояния системы размерности  $p$ ;  $V$  – белый шум (в широком смысле) размерности  $n_v$  с интенсивностью  $v = v(t)$ ;  $a = a(t)$ ,  $a_0 = a_0(t)$ ,  $b = b(t)$  – известные коэффициенты размерности  $(p \times p)$ ,  $(p \times 1)$ ,  $(p \times n_v)$  соответственно. Для применения МВЛХГ осуществлен переход к соответствующему СДУ при  $\bar{t} \in [0, 1]$  с помощью замены переменных  $\bar{t} = \frac{(t-t_0)}{(T-t_0)}$ :

$$\bar{Y}' = \bar{a}(\bar{t})\bar{Y} + \bar{a}_0(\bar{t}) + \bar{b}(\bar{t})\bar{V}(\bar{t}) \quad (9)$$

с начальным условием  $\bar{Y}(0) = Y_0$  и белым шумом  $\bar{V}(\bar{t})$  с интенсивностью  $\bar{v}(\bar{t}) = v((T-t_0)\bar{t} + t_0)$ . Здесь приняты следующие обозначения:

$$\bar{Y}(\bar{t}) = Y((T-t_0)\bar{t} + t_0), \quad \bar{V}(\bar{t}) = V((T-t_0)\bar{t} + t_0),$$

$$\bar{a}(\bar{t}) = (T-t_0)a((T-t_0)\bar{t} + t_0), \quad \bar{a}_0(\bar{t}) = (T-t_0)a_0((T-t_0)\bar{t} + t_0),$$

$$\bar{b}(\bar{t}) = (T-t_0)b((T-t_0)\bar{t} + t_0),$$

где штрихом отмечена операция дифференцирования по безразмерному времени  $\bar{t}$ . В дальнейшем для простоты записи положим  $\bar{t} = t$ .

Как известно, в основе корреляционной теории нестационарных СтП лежат известные обыкновенные дифференциальные уравнения:

<sup>3</sup> Xu J. and Shann W. Galerkin-wavelet methods for two point value problems. Numer. Math. 63, pp. 123-144, 1992

<sup>4</sup> U. Lepik. Numerical solution of differential equations using Haar wavelets. Mathematics and Computers in Simulation, 68 (2005), pp. 127-143

<sup>5</sup> Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – 2-е изд., доп. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1990. – 632 с. – ISBN 5-02-014392-8.

<sup>6</sup> Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. – М.: Логос, 2000, 2004. 1000 с. [Англ пер. Stochastic Systems Theory and Applications. Singapore. World Scientific, 2001. 908 p.]

$$\dot{m}_y = am_y + a_0, \quad m_y(t_0) = m_0, \quad (10)$$

$$\dot{K}_y = aK_y + K_y a^T + bvb^T, \quad K(t_0) = K_0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial K_y(t_1, t_2)}{\partial t_2} = K_y(t_1, t_2)a(t_2)^T \text{ при } t_1 < t_2,$$

$$K_y(t_1, t_1) = K_y(t_1) \text{ при } t_1 > t_2, \quad K_y(t_1, t_2) = K_y(t_2, t_1)^T, \quad (12)$$

где  $m_y$  – вектор математического ожидания,  $K_y$  – ковариационная матрица,  $K_y(t_1, t_2)$  – матрица ковариационных функций.

Для решения уравнения

$$\bar{m}' = \bar{a}\bar{m} + \bar{a}_0, \quad \bar{m}(0) = m_0, \quad (13)$$

определенного математическое ожидание  $\bar{m} = M\bar{Y}$ , будем считать, что элементы векторно-матричных функций  $\bar{m}'$ ,  $\bar{m}$ ,  $\bar{a}$ ,  $\bar{a}_0$  принадлежат пространству  $L^2[0,1]$  и имеют ВЛР по ортонормированному вейвлет базису Хаара<sup>7</sup>:

$$w_1(t) = \varphi(t) = \varphi_{00}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0,1), \\ 0 & \text{при } t \notin [0,1); \end{cases} \quad w_2(t) = \psi(t) = \psi_{00}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1 & \text{при } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ 0 & \text{при } t \notin [0,1); \end{cases}$$

$$w_i(t) = \psi_{jk}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^j} & \text{при } t \in \left[\frac{k}{l}, \frac{k+0.5}{l}\right), \\ -\sqrt{2^j} & \text{при } t \in \left[\frac{k+0.5}{l}, \frac{k+1}{l}\right), \\ 0 & \text{при } t \notin \left[\frac{k}{l}, \frac{k+1}{l}\right). \end{cases} \quad (14)$$

где  $k=0,1,\dots,l-1$ ;  $l=2^j$ ;  $j=1,2,\dots,J^t$ ;  $L^t = 2 * 2^{J^t}$ ;  $i=l+k+1$ ;  $i=3,4,\dots,L^t$ ;  $J^t$  – натуральное число (максимальный уровень вейвлет разрешения). Определены интегралы от вейвлетов Хаара:

$$p_i(t) = \int_0^t w_i(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2, \dots, L^t), \quad (15)$$

$$\text{где } p_1(t) = \begin{cases} t & \text{при } t \in [0,1), \\ 0 & \text{при } t \notin [0,1), \end{cases} \quad p_i(t) = \begin{cases} \sqrt{2^j} \left(t - \frac{k}{l}\right) & \text{при } t \in \left[\frac{k}{l}, \frac{k+0.5}{l}\right), \\ \sqrt{2^j} \left(\frac{k+1}{l} - t\right) & \text{при } t \in \left[\frac{k+0.5}{l}, \frac{k+1}{l}\right), \\ 0 & \text{при } t \notin \left[\frac{k}{l}, \frac{k+1}{l}\right). \end{cases}$$

Для каждой составляющей  $\bar{m}_h = \bar{m}_h(t)$  ( $h=1,\dots,p$ ) вектора  $\bar{m} = \bar{m}(t)$  уравнение (13) дает выражения:

$$\bar{m}'_h = \sum_{k=1}^p \bar{a}_{hk}(t) \bar{m}_k(t) + \bar{a}_{0h}(t), \quad \bar{m}_h(0) = m_{0h}. \quad (16)$$

Вейвлет разложение  $\bar{m}'_h$  по ортонормированному базису вейвлетов Хаара имеет вид:

$$\bar{m}'_h = \sum_{i=1}^L c_{hi} w_i(t), \quad \text{где } c_{hi} = \int_0^1 \bar{m}'_h(\tau) w_i(\tau) d\tau. \quad (17)$$

Тогда решение (16) относительно  $\bar{m}_h$  можно представить в виде

$$\bar{m}_h(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^L c_{hi} w_i(\tau) d\tau + m_{0h} = \sum_{i=1}^L c_{hi} p_i(t) + m_{0h} \quad (h = 1, \dots, p). \quad (18)$$

После подстановки (17), (18) в (16) получено соотношение:

<sup>7</sup> Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. - Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004, 464 стр.

$$\sum_{i=1}^L c_{hi} w_i(t) = \sum_{k=1}^p \bar{a}_{hk}(t) \left[ \sum_{i=1}^L c_{hi} p_i(t) + m_{0h} \right] + \bar{a}_{0h}(t). \quad (19)$$

Проецируя (19) на базис  $w_i(t)$ , приходим к системе  $(L \times p)$  линейных алгебраических уравнений:

$$c_{hs} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^L c_{hi} g_s^{hki} + m_{0h} \sum_{i=1}^L q_s^{hk} + \rho_s^h \quad (s=1,2,\dots,L; h=1,2,\dots,p). \quad (20)$$

где  $g_j^{hki} = \int_0^1 \bar{a}_{hk}(\tau) p_i(\tau) w_j(\tau) d\tau$ ,  $q_j^{hk} = \int_0^1 \bar{a}_{hk}(\tau) w_j(\tau) d\tau$ ,  
 $\rho_j^h = \int_0^1 \bar{a}_{0h}(\tau) w_j(\tau) d\tau$ .

Получен новый результат.

### Теорема 2.

Пусть выполнены условия:

- 1) вектор состояния  $Y=Y(t)$  размерности  $p$  определяется линейной дифференциальной СтС (8), система (8) приведена к виду (9);
- 2) скалярные функции  $\bar{m}_h'$ ,  $\bar{m}_h$ ,  $\bar{a}_{hk}$ ,  $\bar{a}_{0h}$  ( $h,k=1,2,\dots,p$ ) принадлежат пространству  $L^2[0,1]$ .

Тогда решение системы дифференциальных уравнений (13) для составляющих  $\bar{m}_h$  вектора математического ожидания стохастического процесса  $\bar{Y}(t)$  имеет вид

$$\bar{m}_h(t) = \sum_{i=1}^L c_{hi} p_i(t) + m_{0h} \quad (h = 1, \dots, p),$$

где  $p_i(t)$  – известные функции вида (15), коэффициенты  $c_{hi}$  определяются СЛАУ (20).

Аналогичные методы и теоремы разработаны для решения системы дифференциальных уравнений (11) относительно элементов ковариационной матрицы  $K_y$  и для решения системы дифференциальных уравнений (12) относительно элементов матрицы ковариационных функций стохастического процесса  $Y(t)$ , описываемого линейной СтС (8).

В качестве линейной СтС с параметрическими шумами рассматривалась СтС вида

$$\dot{Y} = a(t)Y + a_0(t) + (b_0(t) + \sum_{n=1}^p b_n(t)Y_n) V(t) \quad (21)$$

при  $t \in [t_0, T]$  с начальным условием  $Y(0)=Y_0$ . Здесь  $Y$  – вектор состояния размерности  $p$ ,  $V(t)$  – вектор белых шумов в строгом смысле размерности  $n_v$  с интенсивностью  $\nu(t)$ ;  $a(t)$ ,  $a_0(t)$ ,  $b_0(t)$ ,  $b_n(t)$ ,  $\nu(t)$  – известные матричные функции размерностей  $p \times p$ ,  $p \times 1$ ,  $p \times n_v$ ,  $p \times n_v$ ,  $n_v \times n_v$  соответственно. Как известно, для данной системы получены точные корреляционные уравнения<sup>8</sup>:

$$\dot{m} = am + a_0, \quad m(t_0) = m_0, \quad (22)$$

$$\dot{K} = aK + Ka^T + b_0 \nu b_0^T + \sum_{h=1}^p (b_h \nu b_h^T + b_0 \nu b_h^T) m_h + \sum_{h=1}^p \sum_{l=1}^p b_h \nu b_l^T (m_h m_l + K_{hl}), \quad K(t_0) = K_0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2} = K(t_1, t_2) a(t_2)^T, \quad K(t_1, t_1) = K(t_1) \quad . \quad (24)$$

<sup>8</sup> Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – 2-е изд., доп. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1990. – 632 с. – ISBN 5-02-014392-8.

Для нахождения неизвестных математического ожидания  $m(t)$ , ковариационной матрицы  $K(t)$  и матрицы ковариационных функций  $K(t_1, t_2)$ , повторяя предыдущие рассуждения, были разработаны аналогичные методы, позволяющие заменить процедуру интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений решением системы линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами.

В приложении П.5 дано сравнение решения задачи анализа точности УдСтС, полученного с применением вейвлет методов, с точным решением на примере информационно-управляющей системы:

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = Y_2, \\ \dot{Y}_2 = -\omega^2 Y_1 - 2\varepsilon\omega Y_2 + S + n_t^{\text{уд}} + V_t. \end{cases}$$

Здесь  $\varepsilon, \omega$  – постоянные параметры,  $S$  – полезное постоянное ускорение,  $n_t^{\text{уд}}$  – регулярная часть ударного ускорения:  $n_t^{\text{уд}} = n_m \delta(t - t_{\text{уд}})$ .

Уравнения для составляющих математического ожидания  $M[Y(t)] = [m_1, m_2]^T$  имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = m_2, \\ \dot{m}_2 = -\omega^2 m_1 - 2\varepsilon\omega m_2 + S + n_t^{\text{уд}}. \end{cases}$$

Точное решение для  $m_1(t)$ <sup>9</sup>:

$$m_1(t) = \frac{S\omega^2}{\omega_0} \int_{t_0}^t e^{-\varepsilon\omega(t-\tau)} \sin \omega_0(t-\tau) d\tau + I_2^1, \quad \omega_0 = \omega\sqrt{1-\varepsilon^2},$$

$$I_2^1 = \begin{cases} 0, & \text{если } t < t_{\text{уд}}, \\ \frac{n_m \omega^2}{\omega_0} e^{-\varepsilon\omega(t-t_{\text{уд}})} \sin \omega_0(t-t_{\text{уд}}), & \text{если } t \geq t_{\text{уд}}. \end{cases}$$

Исходные данные:  $n_m = 8$ ;  $t_{\text{уд}} = 2,1875$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,7$ ;  $S = 1, 10, 20$ .

Точность методов оценивалась ошибкой приближения:

$$\sigma = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (m_i^1 - m_i^{\text{1ап}})^2},$$

где  $m_i^1$  – точное значение,  $m_i^{\text{1ап}}$  – приближенной значение. Результаты вычислительных экспериментов приведены на рис. 1.

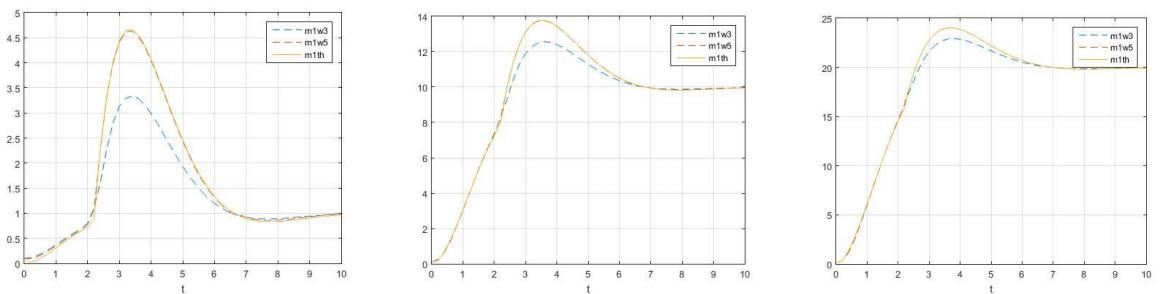


Рисунок 1–Графики  $m_1(t)$  для  $S = 1, 10, 20$

В таблице 2 приведены значения погрешности  $\sigma$  вычисления  $m_1(t)$  с применением МВЛХГ для  $J=3$  и  $J=5$ .

<sup>9</sup> Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. – М.: Логос, 2000, 2004. 1000 с. [Англ пер. Stochastic Systems Theory and Applications. Singapore. World Scientific, 2001. 908 p.]

Таблица 2

Метод	S	$\sigma$
MBX (J=3)	1	0,0785
MBX (J=5)		0,0086
MBX (J=3)	10	0,0751
MBX (J=5)		0,0083
MBX (J=3)	20	0,0717
MBX (J=5)		0,0081

*Вывод.* При решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных функций, содержащих дельта-функцию, МВЛХГ позволяет получить приближенное решение с точностью  $\sigma$  менее 10% при  $J=3$ , менее 1% при  $J=5$ .

*В приложении П.6* дано описание ИПО "СтС-ВЛ-Анализ" для анализа динамической точности УдСтС.

*В подразделе 3.3* при исследовании долговременных нестационарных воздействий, когда нелинейные возмущения существенны, предлагается использовать модифицированный моментно-семиинвариантный метод (ММСМ), предложенный автором для определения математического ожидания  $m(t)$  и ковариационной матрицы  $K(t)$  с учетом определенного набора старших моментов вектора состояния  $Y=Y(t) \in R^p$  вида  $M(Y_{j_1}^{l_1} \dots Y_{j_k}^{l_k})$ , где  $j_1, \dots, j_k$  – выборка k различных чисел из  $J=\{1,2,\dots,p\}$ ;  $l_1, \dots, l_k$  – выборка k чисел из  $\mathcal{L}=\{1,2,\dots,N\}$ , удовлетворяющих условию  $3 \leq l_1 + \dots + l_k \leq N$ .

*В приложении П.7* на тестовом примере приведен сравнительный анализ ММСМ, МНА, МЭА. Вычислительные эксперименты показали, что ММСМ дает более высокую точность (менее 2%) по сравнению с МНА и МЭА определения математического ожидания и ковариационной матрицы вектора состояния СтС, удовлетворяющих замкнутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений для математического ожидания и ковариационной матрицы, а также определенного набора вероятностных старших моментов. *В приложении П.8* дано описание ИПО "СтС-Анализ-ММСМ", которое реализует ММСМ

*В подразделе 3.4* рассматривается метод аналитического моделирования круговых нелинейных УдСФ, основанный на эквивалентной статистической круговой намотанной нормальной линеаризации нелинейных преобразований. Круговой случайной величиной  $X$  называется случайный угол, принимающий значения в пределах  $0 \leq X < 2\pi$ . По определению нормальным намотанным на единичную окружность распределением называется распределение круговой случайной величины  $X$ , связанной с линейной нормально распределенной случайной величиной  $X_N$  соотношением:  $X = X_N (\text{mod} 2\pi)$ . Для типовых нелинейных функций определены значения коэффициентов статистической линеаризации.

В подразделе 3.5 описана методика анализа динамической точности УдСтС на основе уравнения ошибок, являющихся следствием стохастических факторов и детерминированных и стохастических ударных воздействий. В рамках теории марковских СтС, выбрана удобная для практики математическая модель для уравнения ошибок в виде векторного стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$\dot{Z} = a^{\text{уд}}(Z, t) + b^{\text{уд}}(Z, t)V, Z(t_0) = Z_0, \quad (25)$$

где  $Z = Z(t)$  –  $p$ -мерный вектор состояния,  $V = V(t)$  –  $n$ -мерный белый шум в строгом смысле,  $a^{\text{уд}}(Z, t)$  и  $b^{\text{уд}}(Z, t)$  – известные матричные функции соответствующих размерностей. Систематические ошибки определяются вектором математических ожиданий  $m_Z(t)$ , а случайные ошибки – ковариационной матрицей  $K_Z(t)$  и матрицей ковариационных функций  $K_Z(t, t')$ .

Если уравнение ошибок УдСтС имеет вид нестационарной линейной дифференциальной СтС (8) с коэффициентами  $a(t) = a^{\text{уд}}(t)$ ,  $a_0(t) = a_0^{\text{уд}}(t)$ ,  $b(t) = b^{\text{уд}}(t)$ , определяющими УВ, то в основе корреляционной теории точности лежат уравнения (10)–(12), а вейвлет алгоритмы расчетов вектора математических ожиданий  $m_Z(t)$ , ковариационной матрицы  $K_Z(t)$ , матрицы ковариационных функций  $K_Z(t, t')$  определяются соответствующими вейвлет методами и алгоритмами, описанными в подразделе 3.1.

Если уравнение ошибок имеет вид нестационарной линейной дифференциальной СтС с параметрическими шумами (21), то в основе корреляционной теории точности лежат уравнения (22)–(24), а для расчетов математических ожиданий, ковариационной матрицы и матрицы ковариационных функций применяются соответствующие вейвлет методы и алгоритмы, описанные в подразделе 3.2.

Если УдСтС является квазилинейной вида (25), где

$$\begin{aligned} a^{\text{уд}}(Z, t) &= a_0^{\text{уд}}(t) + a_1^{\text{уд}}(t)Z + \mu \bar{F}_{0t}, \\ b^{\text{уд}}(Z, t) &= b_0^{\text{уд}}(t) + \sum_{h=1}^p b_h^{\text{уд}}(t)Z_h + \sqrt{\mu} \bar{F}_{1t}, \end{aligned}$$

$\mu$  – малый параметр, функции  $\mu \bar{F}_{0t}$  и  $\sqrt{\mu} \bar{F}_{1t}$  зависят от времени, параметров УВ и инструментальных ошибок, то в простейшем случае можно использовать решение, полученное с применением МНА. Более точные результаты получаются с применением ММСМ. Если функции  $\mu \bar{F}_{0t}$  и  $\sqrt{\mu} \bar{F}_{1t}$ , вследствие их малости, аппроксимировать функциями времени, то для расчета точности квазилинейной УдСтС применяются корреляционные вейвлет методы и алгоритмы, разработанные для анализа точности линейных УдСтС с параметрическими шумами вида (21).

В приложении П.9 приведены результаты анализа точности УдСтС на примере прецизионной ИУС при продольно-поперечном ударе.

В разделе 4 "Вейвлет методы и алгоритмы обработки информации в режиме реального времени в стохастических системах при ударных воздействиях" рассматриваются вейвлет методы и алгоритмы

обработки информации в режиме реального времени в линейных УдСтС. В подразделе 4.1 доказана общая теорема о построении вейвлет с.к. оптимального линейного оператора в виде набора формальных правил, описывающих реакцию оператора на базисные вейвлет функции. В подразделе 4.2 доказана теорема о построении вейвлет с.к. оптимального линейного оператора для случая линейной зависимости сигнала от параметров и аддитивной помехи.

Наблюдаемый сигнал  $Z(t)$  и сигнал  $W(s)$ , подлежащий воспроизведению, представлены в виде суммы линейной комбинации известных функций со случайными коэффициентами и помехи в виде некоторой случайной функции:

$$Z(t) = \sum_{r=1}^N U_r \xi_r(t) + X(t), \quad t \in T, \quad T = [t_0, t_1], \quad (26)$$

$$W(s) = \sum_{r=1}^N U_r \zeta_r(s) + Y(s), \quad s \in S, \quad S = [s_0, s_1]. \quad (27)$$

Здесь  $X(t)$ ,  $Y(s)$  – СФ с нулевыми математическими ожиданиями;  $\xi_1, \dots, \xi_N, \zeta_1, \dots, \zeta_N(s)$  – заданные структурные функции;  $U_1, \dots, U_N$  – случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и не коррелированные со случайными функциями  $X(t)$  и  $Y(s)$ .

Требуется найти такой оператор  $A_t$ , чтобы СФ

$$W^*(s) = A_t Z(t) \quad (28)$$

была с.к. оптимальной оценкой сигнала  $W(s)$ . Для того, чтобы линейный оператор  $A_t$  был с.к. оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял уравнению<sup>10</sup>:

$$A_t [K_X(t, \tau)] = K_{YX}(s, \tau) + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \{ \zeta_p(s) - A_t [\xi_p(t)] \} \xi_q(\tau). \quad (29)$$

Здесь  $K_X(t, \tau) = M[X(t) \overline{X(\tau)}]$ ,  $K_{YX}(s, \tau) = M[Y(s) \overline{X(\tau)}]$ ,  $\gamma_{pq} = M[U_p \overline{U_q}]$ .

В пространстве  $L^2(T)$  определим ортонормированный базис вейвлетов с конечными носителями вида (1):

$$\{\varphi_{00}^t(t), \psi_{jk}^t(t)\} \quad (30)$$

где  $j=1, 2, \dots, J^t$ ;  $k=0, 1, \dots, 2^j - 1$ ;  $J^t$  – максимальный уровень разрешения.

Аналогично, в пространстве  $L^2(S)$  определим ортонормированный вейвлет базис вида (1):

$$\{\varphi_{00}^s(s), \psi_{jk}^s(s)\} \quad (31)$$

где  $j=1, 2, \dots, J^s$ ;  $k=0, 1, \dots, 2^j - 1$ ;  $J^s$  – максимальный уровень разрешения.

Пусть функции  $\xi_1, \dots, \xi_N \in L^2[t_0, t_1]$  и, как следствие, представимы в виде сходящихся вейвлет рядов:

$$\xi_p(t) = a_p^\xi \varphi_{00}^t(t) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{pj}^\xi \psi_{jk}^t(t) \quad (p = 1, \dots, N), \quad (32)$$

где  $a_p^\xi = \int_T \xi_p(t) \varphi_{00}^t(t) dt$ ,  $d_{pj}^\xi = \int_T \xi_p(t) \psi_{jk}^t(t) dt$ .

Пусть функции  $\zeta_1, \dots, \zeta_N(s) \in L^2[s_0, s_1]$  и, как следствие, представимы в виде сходящихся вейвлет рядов:

$$\zeta_p(t) = a_p^\zeta \varphi_{00}^s(s) + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{pj}^\zeta \psi_{jk}^s(s) \quad (p = 1, \dots, N), \quad (33)$$

<sup>10</sup> Синицын И.Н. Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. М.: ТОРУС-ПРЕСС. 2009.

где  $a_p^\zeta = \int_S \zeta_p(s) \varphi_{00}^s(s) ds$ ,  $d_{pj_k}^\zeta = \int_S \zeta_p(s) \psi_{jk}^s(s) ds$ .

Пусть  $K_X(t, \tau) \in L^2(T \times T)$ ,  $K_{YX}(s, \tau) \in L^2(S \times T)$ . В пространстве  $L^2(T \times T)$  определим двумерный ортонормированный базис путем тензорного произведения двух одномерных вейвлет базисов (30) для случая, когда масштабирование по обеим переменным происходит одинаково:

$$\Phi_{00}^{tA}(t_1, t_2) = \varphi_{00}^t(t_1) \varphi_{00}^t(t_2), \quad (34)$$

$$\Psi_{jkn}^{tH}(t_1, t_2) = \varphi_{jk}^t(t_1) \psi_{jn}^t(t_2), \quad (35)$$

$$\Psi_{jkn}^{tB}(t_1, t_2) = \psi_{jk}^t(t_1) \varphi_{jn}^t(t_2), \quad (36)$$

$$\Psi_{jkn}^{tD}(t_1, t_2) = \psi_{jk}^t(t_1) \psi_{jn}^t(t_2), \quad (37)$$

где  $j=1, \dots, J^t$ ;  $k, n=0, 1, \dots, 2^j - 1$ . Тогда двумерное вейвлет разложение  $K_X(t, \tau)$  в  $L^2(T \times T)$  имеет вид:

$$K_X(t, \tau) = a^t \Phi_{00}^{tA}(t, \tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} [h_{jkn}^t \Psi_{jkn}^{tH}(t, \tau) + b_{jkn}^t \Psi_{jkn}^{tB}(t, \tau) + d_{jkn}^t \Psi_{jkn}^{tD}(t, \tau)], \quad (38)$$

где  $a^t = \int_T \int_T K_X(t_1, t_2) \Phi_{00}^{tA}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ ,  $h_{jkn}^t = \int_T \int_T K_X(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^{tH}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ ,

$$b_{jkn}^t = \int_T \int_T K_X(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^{tB}(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad d_{jkn}^t = \int_T \int_T K_X(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^{tD}(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

В пространстве  $L^2(S \times T)$  определим двумерный ортонормированный базис путем тензорного произведения двух одномерных вейвлет базисов (30) и (31) для случая, когда масштабирование по обеим переменным происходит по-разному:

$$\Phi_{00}^{sA}(s, t) = \varphi_{00}^s(s) \varphi_{00}^t(t), \quad (39)$$

$$\Psi_{j_2 n}^{sH}(s, t) = \varphi_{00}^s(s) \psi_{j_2 n}^t(t), \quad (40)$$

$$\Psi_{j_1 k}^{sB}(s, t) = \psi_{j_1 k}^s(s) \varphi_{00}^t(t), \quad (41)$$

$$\Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, t) = \psi_{j_1 k}^s(s) \psi_{j_2 n}^t(t), \quad (42)$$

где  $j_1=0, 1, \dots, J^s$ ;  $k=0, 1, \dots, 2^{j_1} - 1$ ;  $j_2=0, 1, \dots, J^t$ ;  $n=0, 1, \dots, 2^{j_2} - 1$ . Тогда двумерное вейвлет разложение  $K_{YX}(s, \tau)$  в  $L^2(S \times T)$  имеет вид:

$$K_{YX}(s, \tau) = a^s \Phi_{00}^{sA}(s, \tau) + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} h_{jk}^s \Psi_{jk}^{sH}(s, \tau) + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} b_{jk}^s \Psi_{jk}^{sB}(s, \tau) + \sum_{j_1=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} \sum_{j_2=0}^{J^t} \sum_{n=0}^{2^{j_2}-1} d_{j_1 k j_2 n}^s \Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, \tau), \quad (43)$$

где  $a^s = \int_S \int_T K_{YX}(s, \tau) \Phi_{00}^{sA}(s, \tau) dt ds$ ,  $h_{jk}^s = \int_T \int_T K_{YX}(s, \tau) \Psi_{jk}^{sH}(s, \tau) dt ds$ ,

$b_{jk}^s = \int_T \int_T K_{YX}(s, \tau) \Psi_{jk}^{sB}(s, \tau) dt ds$ ,  $d_{j_1 k j_2 n}^s = \int_T \int_T K_{YX}(s, \tau) \Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, \tau) dt ds$ .

Получен следующий результат.

### Теорема 3.

Пусть выполняются следующие условия:

1) наблюдаемый сигнал  $Z(t)$  имеет вид (26), сигнал, подлежащий воспроизведению,  $W(s)$  имеет вид (27);

2)  $\xi_1, \dots, \xi_N \in L^2(T)$  и имеют ВЛР (32),  $\zeta_1, \dots, \zeta_N(s) \in L^2(S)$  и имеют ВЛР (33),  $K_X(t_1, t_2) = M[X(t_1) \overline{X(t_2)}] \in L^2(T \times T)$  и имеет ВЛР (38),

$K_{YX}(s, t) = M[Y(s) \overline{X(t)}] \in L^2(S \times T)$  и имеет ВЛР (43);

3) результатом воздействия неизвестного линейного оператора  $A_t$  на базисные вейвлет функции вида (30) представляют собой функции, принадлежащие  $L^2(S)$ .

Тогда с.к. оптимальный линейный оператор  $A_t$ , который определяется уравнением (29), задается набором формальных правил:

$$\begin{aligned} A_t[\varphi_{jk}^t(t)] &= u_{jk}(s) \ (j = 0, 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1), \\ A_t[\psi_{00}^t(t)] &= v_{00}(s), \\ A_t[\psi_{jk}^t(t)] &= 0 \ (j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1), \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} u_{00}(s) &= a_{00}^u \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{00in}^u \psi_{in}^s(s); \\ v_{00}(s) &= a_{00}^v \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{00in}^v \psi_{in}^s(s); \\ u_{jk}(s) &= a_{jk}^u \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{jkin}^u \psi_{in}^s(s) \ (j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1); \\ \text{а параметры } a_{jk}^u, d_{jkin}^u, a_{00}^u, d_{00in}^u, a_{00}^v, d_{00in}^v \ (i = 0, \dots, J^s; n = 0, 1, \dots, 2^i - 1; j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1) \text{ определяются СЛАУ:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^t a_{00}^u + b_{000}^t a_{00}^v &= a^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \{a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v\} a_q^\xi, \\ d_{000}^t a_{00}^v + h_{000}^t a_{00}^u &= h_{00}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \{a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v\} d_{q00}^\xi, \\ \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t a_{jk}^u &= h_{jn}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \{a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v\} d_{qjn}^\xi, \\ a^t d_{00il}^u + b_{000}^t d_{000il}^v &= b_{il}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \{d_{pil}^\zeta - a_p^\xi d_{00il}^u - d_{p00}^\xi d_{000il}^v\} a_q^\xi, \\ d_{000}^t d_{000il}^v + h_{000}^t d_{000il}^u &= d_{il00}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \{d_{pil}^\zeta - a_p^\xi d_{00il}^u - d_{p00}^\xi d_{000il}^v\} d_{q00}^\xi, \\ \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t d_{jkil}^u &= d_{iljn}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \{d_{pil}^\zeta - a_p^\xi d_{00il}^u - d_{p00}^\xi d_{000il}^v\} d_{qjn}^\xi \end{aligned}$$

Качество с.к. оптимального линейного оператора  $A_t$  определяется с.к. оценкой:

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \left( \zeta_q(s) - a_q^\xi u_{00}(s) - d_{q00}^\xi v_{00}(s) \right) + \\ &+ K_Y(s, s) - \left( (a^s \varphi_{00}^s(s) + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^s \psi_{jk}^s(s)) u_{00}(s) + h_{00}^s \varphi_{00}^s(s) v_{00}(s) \right) \end{aligned}$$

Пусть выполнены условия теоремы 3 и СФ  $X(t)$  представлена в виде ВЛКР в соответствие с теоремой 1. Тогда с.к. оптимальная оценка  $W^*(s)$  сигнала  $W(s)$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} W^*(s) &= A_t Z(t) = \sum_{r=1}^N U_r \left( a_r^\xi u_{00}(s) + d_{r00}^\xi v_{00}(s) \right) + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{L^t} V_\nu (d_{\nu00}^x v_{00}(s) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{\nu jk}^x u_{jk}(s)). \end{aligned}$$

В приложении П.10 построен вейвлет с.к. оптимальный линейный оператор для СтС при ударных воздействиях, описываемых дельта-функцией. Вычислительные эксперименты показали, что уже при  $J^t = 2$  и  $J^s = 2$  с.к. оценка  $\eta$  качества с.к. оптимального линейного оператора  $A_t$  равна 0,7973 при значениях сигнала  $W(s) \in [-12; 10]$ . В приложении П.11 дано описание ИПО "Синтез-ВЛ", реализующее методы разделов 4.1 и 4.2

В подразделах 4.3 и 4.4 приведены вейвлет модификации фильтра Калмана-Бьюси (ФКБ) и линейного фильтра Пугачева (ЛФП) для обработки информации в режиме реального времени в УдСтС. Вейвлет ФКБ (ВЛФКБ) и вейвлет ЛФП (ВЛЛФП) решают систему линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами в отличие от ФКБ и ЛФП, которые должны интегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для линейной с.к. оптимальной обработки информации в линейных нестационарных дифференциальных СтС широкое распространение получил дифференциальный ФКБ.<sup>11</sup>. Пусть нестационарная дифференциальная СтС описывается уравнениями:

$$\dot{X}_t = a_{0t}^{\text{уд}} + a_1^{\text{уд}} X_t + V_1^{\text{уд}}, \quad (45)$$

$$Z_t = \dot{Y}_t = b_1 X_t + V_2. \quad (46)$$

Здесь  $X_t$ ,  $Y_t$  – векторы состояния и наблюдения системы, а  $V_1^{\text{уд}} = V_1$  и  $V_2$  – независимые белые шумы (в общем случае негауссовские) с матрицами  $v_{1t}^{\text{уд}}$  и  $v_2$  интенсивностей.

Как известно, в случае невырожденности шумов в наблюдениях ( $|\det v_2| \neq 0$ ) уравнения с.к. оптимального несмещенного дифференциального фильтра имеют вид:

$$\dot{\hat{X}}_t = a_{0t}^{\text{уд}} + a_1^{\text{уд}} \hat{X}_t + \beta_t (Z_t - b_1 \hat{X}_t), \quad \hat{X}(t_0) = \hat{X}_0, \quad (47)$$

$$\beta_t = R_t b_1^T v_2^{-1}, \quad (48)$$

$$\dot{R}_t = a_1 R_t + R_t a_1^T + v_{1t}^{\text{уд}} - \beta_t v_2 \beta_t^T, \quad R(t_0) = R_0. \quad (49)$$

Здесь  $\hat{X}_t$  – с.к. оценка  $X_t$ ,  $R_t$  – ковариационная матрица ошибки фильтрации,  $\beta_t$  – матричный коэффициент усиления. Для вычисления  $R_t$  и  $\beta_t$  не требуются результаты измерений, и они вычисляются заранее.

В этих условиях уравнение (47) является линейным. После перехода в (47) от  $t \in [t_0, T]$  к  $\bar{t} = \frac{t-t_0}{T-t_0}$ ,  $\bar{t} \in [0,1]$ , имеем:

$$\hat{\dot{X}}'(\bar{t}) = \bar{A}_{0\bar{t}} + \bar{A}_{\bar{t}} \hat{\dot{X}}(\bar{t}), \quad \hat{\dot{X}}(0) = \hat{X}_0. \quad (50)$$

где  $\hat{\dot{X}}(\bar{t}) = \hat{X}((T-t_0)\bar{t}+t_0)$ ,  $\bar{A}(\bar{t}) = (T-t_0)[a_1 - \beta_t((T-t_0)\bar{t}+t_0)b_1]$ ,  $\bar{A}_0(\bar{t}) = (T-t_0)[a_{0t}^{\text{уд}}((T-t_0)\bar{t}+t_0) + \beta_t((T-t_0)\bar{t}+t_0)Z_t((T-t_0)\bar{t}+t_0)]$ .  
Здесь штрих – дифференцирование по безразмерному времени.

Пусть  $\hat{\dot{X}}'_h$ ,  $\hat{\dot{X}}_h$ ,  $\bar{A}_{hk}$ ,  $\bar{A}_{h0}$  ( $h, k = 1, 2, \dots, p$ )  $\in L^2[0,1]$ . Согласно МВЛХГ, решение (50) относительно  $\hat{\dot{X}}_h$  ( $h = 1, 2, \dots, p$ ) вектора  $\hat{\dot{X}}(\bar{t})$  имеет вид:

$$\hat{\dot{X}}_h = \sum_{i=1}^L c_{hi} p_i + \hat{X}_{0h}. \quad (51)$$

Для нахождения неизвестных параметров  $c_{hi}$  составлена СЛАУ:

$$c_{hs} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^L c_{hi} g_s^{hki} + \hat{X}_{0h} \sum_{i=1}^L q_s^{hk} + \rho_s^h \quad (s = 1, 2, \dots, L), \quad (52)$$

где  $g_j^{hki} = \int_0^1 \bar{A}_{hk} p_i w_j d\tau$ ,  $q_j^{hk} = \int_0^1 \bar{A}_{hk} w_j d\tau$ ,  $\rho_j^h = \int_0^1 \bar{A}_{h0} w_j d\tau$ .

Получен следующий новый результат.

<sup>11</sup> Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева: Монография. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. Логос, 2007.

#### Теорема 4.

Пусть нестационарная дифференциальная СтС описывается уравнениями (45), (46); в (50) скалярные функции  $\hat{X}'_h$ ,  $\hat{X}_h$ ,  $\bar{A}_{hk}$ ,  $\bar{A}_{h0}$  ( $h, k = 1, 2, \dots, p$ ) принадлежат пространству  $L^2[0,1]$ . Тогда ВЛФКБ определяется соотношениями (51), где  $p_i(t)$  – известные функции вида (15), коэффициенты  $c_{hi}$  определяются СЛАУ (52).

В подразделе 4.4 рассмотрена задача фильтрации для линейной дифференциальной стохастической системы Ито с параметрическими шумами при УВ:

$$\dot{X}_t = a_{0t} + a_{1t}X_t + a_t Y_t + \left( c_{10t} + \sum_{r=1}^{n_Y} c_{1rt}Y_r + \sum_{r=1}^{n_X} c_{1,n_Y+r,t}X_r \right) V, \\ X(t_0) = X_0 \quad (53)$$

$$\dot{Y}_t = b_{0t} + b_t Y_t + b_{1t}X_t + (c_{20t} + \sum_{r=1}^{n_Y} c_{2rt}Y_r + \sum_{r=1}^{n_X} c_{2,n_Y+r,t}X_r) V. \\ Y(t_0) = Y_0 \quad (54)$$

В этом случае уравнения линейного фильтра Пугачева (ЛФП) с векторным белым шумом в строгом смысле имеют вид<sup>12</sup>:

$$\dot{\hat{X}}_t = a_{0t} + a_t Y_t + a_{1t}\hat{X}_t + \beta_t \left( Z_t - (b_{0t} + b_t Y_t + b_{1t}\hat{X}_t) \right), \quad \hat{X}(t_0) = \hat{X}_0. \quad (55)$$

Оптимальный коэффициент  $\beta_t$  не зависит от текущих измерений в процессе фильтрации и вычисляется заранее. Для случая  $a_t = 0$ ,  $b_t = 0$ ,  $b_{0t} = 0$ , повторяя предыдущие рассуждения, была разработана вейвлет модификация ЛФП.

В приложении 12 построен ВЛФКБ для ИУС в условиях УВ и дано описание ИПО "СтС-ВЛ-Фильтр" для моделирования ВЛФКБ.

**В заключении** приведены основные результаты диссертации.

#### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Для скалярной и векторной ударных СФ разработаны алгоритмы построения вейвлет канонических разложений (теорема 2.1.5 и алгоритм 2.1.5, теорема 2.2.2 и алгоритм 2.2.2).

2. В случае линейной УдСтС и линейной УдСтС с параметрическими шумами при решении известных замкнутых систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных математического ожидания, ковариационной матрицы, матрицы ковариационных функций разработаны алгоритмы на основе ВЛР, позволяющие заменить решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих ударные функции (дельта-функцию или кусочно-непрерывную функцию) решением системы линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами (теоремы 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 и алгоритмы 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3; теоремы 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 и алгоритмы 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3).

---

<sup>12</sup> Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева: Монография. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. Логос, 2007.

3. Для нелинейной УдСтС, когда невозможно выписать замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных математического ожидания, ковариационной матрицы, матрицы ковариационных функций, предлагается использовать модифицированный моментно-семиинвариантный метод (теорема 3.3.1 и алгоритм 3.3.1), который позволяет определять вероятностные моменты первого и второго порядков с учетом некоторого набора старших начальных моментов. Для типовых круговых УдСФ аналитически рассчитаны коэффициенты статистической круговой намотанной нормальной линеаризации (таблица 3.4.1).

4. Разработан метод синтеза вейвлет с.к. оптимального линейного оператора (теорема 4.1.1) и метод построения вейвлет с.к. оптимального линейного оператора в случае линейной зависимости сигнала от параметров и аддитивной помехи (теорема 4.2.1 и алгоритмы 4.2.1.1 и 4.2.1.2).

5. Разработана вейвлет модификация фильтра Калмана-Бьюси для обработки информации в режиме реального времени в линейных УдСтС (теорема 4.3.2 и алгоритм 4.3.2) и вейвлет модификация линейного фильтра Пугачева для обработки информации в режиме реального времени в линейных УдСтС с параметрическими шумами (теорема 4.4.2 и алгоритм 4.4.2).

6. Разработаны основные положения методики анализа точности УдСтС.

## **ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ** **Публикации в журналах, входящих в перечень ВАК РФ**

1. Конашенкова Т.Д., Шин В.И. Приближенный метод определения моментов фазовых координат многомерных стохастических систем. // Автоматика и телемеханика, 1990. №1. С. 43-52.
2. Андреева Е.В., Конашенкова Т.Д., Маишева Е.Ю., Огнева О.С., Петрова М.В., Шин В.И. Модифицированные квазимоментные и моментно-семиинвариантные методы анализа многомерных стохастических систем и их программная реализация. // Системы и средства информатики, М.:Наука, 1992, Вып. 2, с. 160-171.
3. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д., Семенджиев Н.Н., Басилашвили Д.А. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (I). // Системы высокой доступности. 2009. Т. 5. №3. С. 4-52.
4. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д., Семенджиев Н.Н., Сергеев И.В., Басилашвили Д.А. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (II). // Системы высокой доступности. 2010. Т.6. №2. С. 4-45.
5. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д., Семенджиев Н.Н., Сергеев И.В., Басилашвили Д.А. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (III). // Системы высокой доступности. 2010. Т.6. №4. С. 23-47.
6. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Шоргин В.С., Макаренкова И.В., Конашенкова Т.Д., Агафонов Е.С., Семенджиев Н.Н. Развитие компьютерной

- поддержки статистических научных исследований систем высокой точности и доступности // Системы и средства информатики, 2011. Вып.21. №1. С. 3-33.
7. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д. Развитие математического обеспечения для анализа нелинейных многоканальных круговых стохастических систем. // Системы и средства информатики. –М.: ИПИ РАН, 2012. Т. 22. № 1. С.3-21.
  8. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (IV). // Системы высокой доступности, 2017. Т 13. №3. С. 55–69
  9. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (V). // Системы высокой доступности, 2018. Т.14. №1. С. 59-70.
  10. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (VI). // Системы высокой доступности, 2018. Т. 14. №2. С. 40-56.
  11. Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (VII). // Системы высокой доступности, 2019. Т. 15. №1. С. 47-61.
  12. Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (VIII). // Системы высокой доступности, 2019. Т. 15. №1. С. 62-69.
  13. Konashenkova, Tatyana Dmitrievna. Развитие моментно-семиинвариантного программного обеспечения стохастического анализа. // Международный журнал "Современные информационные технологии и ИТ-образование" [S. I.], v. 15, n. 1, p. 232-241, apr. 2019. ISSN 2411-1473.  
<http://sitico.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/490>
  14. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Оптимизация стохастических систем на основе вейвлет канонических разложений. // Автоматика и телемеханика, 2020. № 11. С. 138–156.
  15. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (IX) // Системы высокой доступности. 2020. Т. 16. № 4.С. 5–23.
  16. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (X) // Системы высокой доступности. 2020. Т. 16. № 4.С. 24–39.

### **Публикации в сборниках трудов конференций**

1. Sinitsyn I.N. ,Belousov V.V., Konashenkova T.D. Software tools for circular stochastic systems fnalyses. // XXIX International Seminar on stability Problems for stochastic models. Book of abstracts. 2011, Institute of Informatics Problems RAS. – P. 86-87.
2. Sinitsyn I.N. , Belousov V.V., Konashenkova T.D. Software tools for spherical stochastic systems analysis and filtering. // Международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей (ISSPSM-2012) и VI международный рабочий семинар «Прикладные задачи теории вероятности и математической статистики, связанные с моделированием информационных систем» (АРТР+МС'2012). Сборник тезисов. – М.: ИПИ РАН, 2012. С. 91-93.
3. Синицын И. Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Стохастические канонические вейвлет разложения в задачах моделирования вибруударонадежности компьютерного оборудования. // XVIII международная научная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (СКМП – 2017), г. Смоленск, 19-21 мая 2017 года. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2017. С. 123–124.

4. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Экспресс моделирование стохастических систем высокой доступности на основе вейвлет канонических разложений. // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIX международной научной конференции, посвященной 100-летию физико-математического факультета СмолГУ. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018. Вып. 19. С.213-220.
5. Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Развитие прямых методов аналитического интерполяционного моделирования распределений в стохастических системах.// Системы компьютерной математики и их приложения: Материалы XX международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2019. Вып. 20.4.1. С. 256-260.
6. Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Метод линейной оптимальной обработки информации посредством вейвлет разложений. // Системы компьютерной математики и их приложения: Материалы XXI Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. – Вып. 21. С.213–221. [http://fizmat.smolgu.ru/images/stories/SKMP/skmp\\_2020.pdf](http://fizmat.smolgu.ru/images/stories/SKMP/skmp_2020.pdf).