

**Федеральное государственное учреждение  
"Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление"  
Российской академии наук"  
(ФИЦ ИУ РАН)**

*На правах рукописи  
УДК [621]*

**Конашенкова Татьяна Дмитриевна**

**ВЕЙВЛЕТ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ТОЧНОСТИ И  
ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ  
ПРИ УДАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

*05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации  
(информационно-вычислительное обеспечение)*

Научно-квалификационная работа (диссертация)  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Научный руководитель:  
д. т. н., профессор, заслуженный деятель науки РФ  
Игорь Николаевич Синицын**

Москва 2020 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>5</b>
<b>1. Обзор работ и постановка задач .....</b>	<b>14</b>
1.1. Обзор работ в области теории ударных стохастических систем .....	14
1.2. Модели ударных воздействий.....	17
1.3. Характеристики ударных воздействий .....	19
1.4. Постановка задач .....	23
<b>2. Вейвлет методы и алгоритмы построения канонических разложений ударных</b>	
<b>случайных функций .....</b>	<b>24</b>
2.1. Вейвлет анализ и построение канонического разложения ударной	
скалярной случайной функции .....	24
2.1.1. Каноническое разложение скалярной УдСФ .....	24
2.1.2. Каноническое разложение скалярной УдСФ в заданной области	
изменения аргумента .....	26
2.1.3. Основные понятия вейвлет анализа .....	27
2.1.4. Вейвлет каноническое разложение скалярной УдСФ в заданной	
области изменения аргумента.....	35
2.2. Построение канонического разложения векторной ударной случайной	
функции .....	41
2.2.1. Каноническое разложение векторной УдСФ .....	41
2.2.2. Вейвлет каноническое разложение векторной УдСФ в заданной	
области изменения аргумента .....	43
2.3. Канонические разложения линейных и квазилинейных	
преобразований УдСФ .....	47
2.4. О моделировании ударной случайной функции .....	51
2.5. Выводы к разделу 2 .....	52
<b>3. Вейвлет методы и алгоритмы анализа точности стохастических систем при</b>	
<b>ударных воздействиях .....</b>	<b>53</b>

3.1 Корреляционные методы и алгоритмы анализа точности линейных УдСтС53	
3.1.1 Линейные УдСтС .....	53
3.1.2 Вейвлет метод вычисления математического ожидания .....	54
3.1.3 Вейвлет метод вычисления ковариационной матрицы .....	57
3.1.4 Вейвлет метод вычисления ковариационных функций .....	59
3.2 Корреляционные методы и алгоритмы вейвлет анализа точности линейных УдСтС с параметрическими шумами .....	61
3.2.1 Линейные УдСтС с параметрическими шумами .....	61
3.2.2 Вейвлет метод вычисления математического ожидания .....	62
3.2.3 Вейвлет метод вычисления ковариационной матрицы .....	63
3.2.4. Вейвлет метод вычисления матрицы ковариационных функций .....	67
3.3. Модифицированный моментно-семиинвариантный метод и алгоритм анализа динамической точности нелинейной УдСтС .....	69
3.4. Метод аналитического моделирования круговых нелинейных УдСФ, основанный на эквивалентной статистической линеаризации.....	76
3.5. Методы анализа динамической точности УдСтС .....	81
3.5.1. Уравнение ошибок УдСтС .....	81
3.5.2. Точность линейной УдСтС .....	83
3.5.3. Точность линейной параметрической УдСтС .....	84
3.5.4. Точность квазилинейной УдСтС .....	85
3.6. Выводы к разделу 3 .....	86
4. Вейвлет методы и алгоритмы обработки информации в режиме реального времени в стохастических системах при ударных воздействиях .....	89
4.1. Теорема о вейвлете с.к. оптимальном линейном операторе.....	89
4.2. Построение вейвлет с.к. оптимального линейного оператора в случае линейной зависимости сигнала от параметров и аддитивной помехи .....	98
4.3. Вейвлет модификация фильтра Калмана – Бьюси.....	104
4.4. Вейвлет модификация линейного фильтра Пугачева.....	107
4.5. Выводы к разделу 4 .....	111

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	113
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ .....	115
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	117
ПРИЛОЖЕНИЯ .....	128
П.1. Сравнительный анализ построения КР и ВЛКР типовой скалярной СФ..	128
П.2. Описание ИПО построения ВЛКР СФ "СтИТ-КРВЛ.1" .....	130
П.3. Примеры построения ВЛКР скалярных СФ .....	131
П.4. Пример построения ВЛКР двумерной векторной СФ.....	134
П.5. Сравнение вейвлет методов анализа динамической точности ИУС с точным решением.....	137
П.6. Описание ИПО "СтС-ВЛ-Анализ".....	141
П.7. Сравнительный анализ ММСМ с МНА и МЭА .....	146
П.8. Описание ИПО "СтС-Анализ-ММСМ" .....	148
П.9. Анализ точности информационно-управляющей системы при продольно-поперечном УВ.....	149
П.10. Вейвлет с.к. линейная оптимизация при ударных воздействиях .....	151
П.11. Описание ИПО "Синтез-ВЛ".....	154
П.12. Вейвлет фильтры для информационно-управляющей системы в условиях ударных воздействий.....	156
ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ.....	162
Публикации в журналах, входящих в перечень ВАК РФ .....	162
Публикации в сборниках трудов конференций .....	164

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.** Функционирование технических изделий (ТИ) наукоемкой продукции высокой точности в условиях экстремальных нестационарных ударных механических, тепловых и электромагнитных возмущений и воздействия стохастических факторов промышленного производства и эксплуатации требует разработки методического, алгоритмического и инструментального программного обеспечения расчетного обоснования точностных характеристик ТИ на всех этапах жизненного цикла. Решению задач, касающихся ударного взаимодействия тел в механике и физике, в детерминированной постановке посвящено множество работ [1-18]. Однако, очевидно, что наиболее адекватное методическое обеспечение основано на методах стохастического системного анализа [19,20]. Большой вклад в развитие теории стохастического системного анализа внесли Пугачев В.С. (ВВИА им. Н.Е. Жуковского, ИПУ им. В.А. Трапезникова, ИПИ РАН), Казаков И.Е., Мальчиков С.В., Евланов Л.Г., Гладков Д.И, (ВВИА им. Н.Е. Жуковского), Синицын И.Н. (ВВИА им. Н.Е. Жуковского, ИПИ РАН, ФИЦ ИУ РАН), Шин В.И., Андреев Н.И., Сысоев Л.П., Шайкин М.Е., Добровидов А.В. (ИПУ им. В.А. Трапезникова), Кибзун А.И., Панков А.Р., Мощук Н.К., Рыбаков К.А. (МАИ), Синицын В.И., Борисов А.В., Босов А.В., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В. (ФИЦ ИУ РАН). Вопросам идентификации в задачах системного анализа посвящены работы Бахтадзе Н.Н.

Техническое изделие, выполненное по определенным стандартам и условиям применения, рассматривается как *ударная стохастическая система (УдСтС)*. Стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее ошибки функционирования ТИ как следствие стохастических факторов и детерминированных и стохастических ударных воздействий, является математической моделью УдСтС. Стохастическое ударное воздействие характеризуется ударной *случайной функцией (УдСФ)*. Центральной задачей стохастического системного анализа является задача анализа одно- и многомерных распределений стохастических процессов (СтП) в УдСтС, которые определяют их динамические ошибки функционирования. Для решения за-

дачи анализа распределений в УдСтС применяют следующие три принципиально различных подхода. *Первый подход* состоит в использовании прямого численного решения стохастических уравнений ошибок методом Монте-Карло (методом статистического моделирования). *Второй подход* состоит в непосредственном составлении и интегрировании уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова (и его обобщений) для плотности вероятности или уравнения Пугачева (и его обобщений) для характеристической функции стохастического процесса, заданного стохастическим дифференциальным уравнением. *Третий подход* состоит в применении аналитических методов для приближенного решения уравнений, определяющих параметры одно- и многомерных распределений. К их числу относятся методы нормальной аппроксимации и статистической линеаризации, методы моментов, семиинвариантов, моментно-семиинвариантные методы и их модификации, методы ортогональных разложений и методы структурной параметризации. Эти методы позволяют по исходной УдСтС получить детерминированные нестационарные уравнения для параметров одно- и многомерных распределений.

Точное нахождение всех конечномерных вероятностных распределений вектора состояния УдСтС, в общем случае невозможно. Оно имеет место для линейных и узкого класса нелинейных систем. Поэтому актуальна проблема разработки приближенных методов вероятностного анализа УдСтС. Решению задач в вероятностной постановке, в том числе касающихся ударного взаимодействия тел в механике и физике, посвящено много публикаций. Наряду с общими методами нелинейной теории выделяют специальные методы, ориентированные на конкретные классы дифференциальных стохастических систем (СтС). Например, среди классов дифференциальных СтС с импульсными воздействиями получила развитие теория импульсных СтС. Особенностью этих работ является то обстоятельство, что изучение свойств УдСтС ведется на основе их математических моделей из-за трудности проведения натурных испытаний. Для проведения расчетных оценок в режиме реального времени широкое распространение получили фильтр Калмана и условно-оптимальные фильтры Пугачева. Для нестационарных задач расчетной практики разработано инstrumentальное программное обеспечение с использованием мето-

дического обеспечения на основе канонических разложений (КР), вейвлет разложений (ВЛР) и вейвлет канонических разложений (ВЛКР) случайных функций.

Для решения задачи анализа распределений СтП и обработки информации в УдСтС применение вейвлет технологий представляет собой актуальную научную проблему стохастического системного анализа. *Вейвлет анализ* позволяет исследовать временные ряды с выраженной неоднородностью. В отличие от преобразования Фурье, локализующего частоты, но не дающего временного разрешения процесса, и от аппарата дельта-функций, локализующего моменты времени, но не имеющего частотного разрешения, вейвлет преобразование эффективно выявляет как низкочастотные, так и высокочастотные характеристики сигнала на разных временных масштабах. Вопрос оценки погрешности аппроксимации детерминированной функции конечной линейной комбинацией ортонормированных вейвлетов с конечным носителем в работе не рассматривается, так как это отдельная и сложная задача.

**Основная цель** диссертации заключается в разработке методов и алгоритмов для инструментального программного обеспечения (ИПО) анализа точности и обработки информации в стохастических системах при ударных воздействиях с применением вейвлет технологий.

Для ее достижения требуется решить следующие задачи:

- 1) разработать методы и алгоритмы построения скалярных и векторных УдСФ посредством их ВЛКР;
- 2) разработать вейвлет методы и алгоритмы анализа динамической точности УдСтС;
- 3) изучить возможности использования авторской модификации моментно-семиинвариантного метода для анализа точности УдСтС;
- 4) для типовых круговых нелинейностей в УдСтС провести аналитические расчеты коэффициентов статистической круговой намотанной нормальной линеаризации;

- 5) разработать методы и алгоритмы вейвлет обработки информации в режиме реального времени в линейных и линейных с параметрическими шумами УдСтС;
- 6) разработать типовую методику анализа точности УдСтС.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

- 1) представлены вейвлет методы построения канонического разложения скалярной и векторной ударных функций в заданной области изменения аргумента на основе ортогональных вейвлетов с компактным носителем;
- 2) представлены алгоритмы нахождения неизвестных математического ожидания, ковариационной матрицы, матрицы ковариационных функций на основе применения метода Галёркина и вейвлет разложений (ВЛР) для линейной и линейной с параметрическими шумами УдСтС;
- 3) представлен вейвлет метод построения оптимального в среднем квадратическом (с.к.) линейного оператора для обработки информации и разработан вейвлет метод синтеза с.к. оптимальной линейной системы для обработки информации в режиме реального времени в случае линейной зависимости сигнала от параметров и аддитивной помехи;
- 4) представлены вейвлет модификации фильтра Калмана–Бьюси обработки информации в линейных УдСтС и линейного фильтра Пугачева обработки информации в линейных УдСтС с параметрическими шумами;
- 5) представлены основные положения методики анализа точности УдСтС.

**Научная новизна, выносимых на защиту результатов состоит в следующем:**

- 1) разработана вейвлет теория точности линейной и линейной с параметрическими шумами УдСтС на основе применения метода Галёркина и вейвлет разложений;
- 2) разработан алгоритм построения с.к. оптимального линейного оператора для обработки информации с применением вейвлет технологий;
- 3) разработаны вейвлет модификации фильтра Калмана–Бьюси и линейного фильтра Пугачева обработки информации в режиме реального времени в линейных и линейных с параметрическими шумами УдСтС соответственно.

**Методы исследования**, используемые в работе, включают в себя методы теории линейных и нелинейных стохастических систем, методы теории вейвлетов, методы теории канонических разложений, методы оптимизации.

**Объектом исследования** являются стохастические системы, функционирующие в условиях нестационарных ударных возмущений и под воздействием стохастических факторов.

**Предметом исследования** являются методы и алгоритмы для инструментальных программных средств расчетного обоснования точности динамических и точностных характеристик нестационарных СтС при ударных воздействиях.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Теоретическая значимость работы заключается в разработке и обосновании методов и алгоритмов анализа точностных характеристик и синтеза систем обработки информации в УдСтС на основе ВЛР, КР и ВЛКР.

Практическая значимость работы состоит в разработке типовой методики анализа и синтеза точностных характеристик прецизионной информационно-управляющей системы и тестовых примеров.

**Соответствие паспорту специальности.** Содержание диссертации соответствует:

- п. 1 "Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации",
- п. 4 "Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации",

в части вейвлет методов стохастического анализа и обработки информации.

**Реализация результатов работы.** Результаты диссертации реализованы в 3-х НИР ИПИ АН СССР (1987-1992 гг.), в 3-х НИР ИПИ РАН (2009-2011 гг.), в 2-х проектах РФФИ (№№ 15-07-002244 и 10-07-00021), в 3-х НИОКТР ФИЦ ИУ РАН (2018, 2019, 2020 гг.).

**Апробация работы.** Основные результаты докладывались на следующих конференциях и научных семинарах: Международная научная конференция "Системы компьютерной математики и их приложения", г. Смоленск, 2017, 2018, 2019,

2020; XIII Международная научно-практическая конференция "Современные информационные технологии и ИТ-образование", г. Москва, 2018 г; Международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей, г. Светлогорск, 2012 г.; VI международный рабочий семинар "Прикладные задачи теории вероятности и математической статистики, связанные с моделированием информационных систем", г. Светлогорск, 2012 г.; XXIX Международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей, г. Москва, 2011 г.

**Публикации по теме диссертации.** Основные научные результаты изложены в 22 публикациях, в том числе в 16 статьях в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, в 3 журналах, входящих в международные базы цитирования Scopus и Web of science [1,13,14].

**Личный вклад.** Все результаты, изложенные в диссертации, принадлежат лично автору. В совместных работах автор принимал непосредственное участие в разработке методов и алгоритмов анализа и синтеза СтС, реализации вычислительных процедур:

- формулировки и доказательства теорем в статьях [8-11,13,14] и в сборнике трудов конференций [6];
- идея замыкания системы уравнений для моментов в статье [1];
- идея вейвлет метода построения с.к. оптимального линейного оператора для обработки информации в сборнике трудов конференций [6];
- результаты аналитических расчетов коэффициентов статистической круговой намотанной нормальной линеаризации для типовых круговых нелинейных СФ в статье [7] и в сборниках трудов конференций [1,2];
- разработка тестовых примеров, реализация вычислительных процедур в виде соответствующего ИПО в статьях [1-6,12-16] и в сборниках трудов конференций [3-5].

**Структура и содержание диссертации.** Диссертация содержит введение, четыре главы, приложение, заключение, список сокращений, библиографию, список публикаций автора по теме диссертации. В конце каждой главы приведены выводы по главе.

**В разделе 1 "Обзор работ и постановка задач"** вводятся основные понятия и определения. Приводятся определения удара и ударного воздействия. Вводится понятие ударной стохастической системы в качестве технического изделия, выполненного по определенным стандартам и условиям применения и подвергающегося УВ и стохастическим факторам в процессе эксплуатации. При этом УВ характеризуется векторной ударной случайной функцией (УдСФ). Приводятся основные характеристики УВ, использующиеся в теории действительных стохастических ударных процессов. Дается обзор работ в области теории ударных стохастических систем. Для анализа и обработки ударных воздействий предлагается использовать вейвлет анализ, позволяющий одинаково хорошо выявлять низкочастотные и высокочастотные характеристики сигнала на разных временных масштабах. Для исследования выделены вопросы анализа динамической точности и обработки информации в УдСтС. Сформулированы теоретические и прикладные задачи исследования и разработки.

**Раздел 2 "Вейвлет методы и алгоритмы построения канонических разложений ударных случайных функций"** посвящен корреляционной теории вейвлет канонических разложений для УдСФ. В подразделах 2.1 и 2.2 приведены основные понятия вейвлет анализа и описан разработанный автором метод построения вейвлет КР для УдСФ. Идея ВЛКР была впервые высказана В.С. Пугачевым и И.Н. Синицыным[22]. Предлагаемый метод является дальнейшим развитием алгоритмов построения КР случайных функций, разработанных В.С. Пугачевым и И.Н. Синицыным, на основе ортонормированных вейвлет базисов, порожденных вейвлетами с конечными носителями, например, вейвлетами Добеши. В подразделе 2.1 доказана теорема о построении КР скалярной УдСФ на основе ортогонального разложения ее ковариационной функции по двумерному ортонормированному вейвлет базису. На основании этой теоремы разработан алгоритм построения ВЛКР скалярной УдСФ. В подразделе 2.2 доказана теорема о построении ВЛКР векторной УдСФ на основе ортогонального разложения элементов ее ковариационной функции по двумерному ортонормированному вейвлет базису. На основании теоремы разработан алгоритм построения ВЛКР векторной УдСФ. В подразделе 2.3 приве-

дена краткая информация о КР линейных и квазилинейных преобразований УдСФ. В подразделе 2.4 даны сведения о моделировании УдСФ.

**Раздел 3 "Вейвлет методы и алгоритмы анализа точности СтС при ударных воздействиях"** посвящен методике анализа точности СтС в условиях сложных детерминированных и стохастических ударных воздействий, трудно реализуемых при натурных испытаниях. Ярким примером УдСтС являются прецизионные информационно-управляющие системы (ИУС), особенностями которых являются скоротечность воздействия на них СФ и фильтрационные свойства измерительно-управляющих подсистем. При этом нелинейные стохастические эффекты не успевают развиваться. В таких случаях практически приемлемой моделью УдСтС являются нестационарные линейные дифференциальные СтС или нестационарные линейные дифференциальные СтС с параметрическими шумами (или приводимые к ним), описывающие накапливающиеся систематические и случайные ошибки.

В подразделах 3.1 и 3.2 приведены корреляционные методы и алгоритмы анализа точности линейных и линейных с параметрическими шумами УдСтС, разработанные автором на основе применения метода вейвлетов Хаара и метода Галёркина (далее – метод вейвлетов Хаара–Галеркина (МВЛХГ)) [23,24] для решения известных систем обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения неизвестных параметров. Главным преимуществом применения МВЛХГ по сравнению с другими приближенными методами решения задачи Коши является замена решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих ударные функции (дельта-функцию или кусочно-непрерывные функции), решением системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с постоянными коэффициентами с сохранением точности приближенных вычислений.

В подподразделе 3.3 при исследовании долговременных нестационарных воздействий, когда нелинейные возмущения существенны, предлагается использовать модифицированный моментно-семиинвариантный метод (ММСМ), предложенный автором для определения математического ожидания  $m(t)$  и ковариационной матрицы  $K(t)$  с учетом определенного набора старших моментов вектора состояния  $Y=Y(t)\in R^p$  вида  $M(Y_{j_1}^{l_1} \dots Y_{j_k}^{l_k})$ , где  $j_1, \dots, j_k$  – выборка  $k$  различных чисел из

$J=\{1,2,\dots,p\}$ ;  $l_1, \dots, l_k$  – выборка к чисел из  $\mathcal{L}=\{1,2,\dots,N\}$ , удовлетворяющих условию  $3 \leq l_1 + \dots + l_k \leq N$ .

*В подразделе 3.4* рассматривается метод аналитического моделирования круговых нелинейных УдСтС, основанный на эквивалентной статистической круговой намотанной нормальной линеаризации нелинейных преобразований. Для типовых нелинейных функций определены значения коэффициентов статистической линеаризации.

*В подразделе 3.5* описана методика анализа динамической точности УдСтС на основе уравнения ошибок, являющихся следствием стохастических факторов и ударных воздействий. В рамках теории марковских СтС, выбрана удобная для практики математическая модель для уравнения ошибок в виде векторного стохастического дифференциального уравнения Ито.

**В разделе 4 "Вейвлет методы и алгоритмы обработки информации в режиме реального времени в стохастических системах при ударных воздействиях"** рассматриваются вейвлет методы и алгоритмы обработки информации в режиме реального времени в линейных УдСтС. *В подразделе 4.1* доказана общая теорема о построении вейвлет с.к. оптимального линейного оператора в виде набора формальных правил, описывающих реакцию оператора на базисные вейвлет функции. *В подразделе 4.2* доказана теорема о построении вейвлет с.к. оптимального линейного оператора для случая линейной зависимости сигнала от параметров и аддитивной помехи, получены формулы для вычисления с.к. оценки качества этого оператора и с.к. оценки требуемого выходного сигнала.

*В подразделах 4.3 и 4.4* приведены вейвлет модификации фильтра Калмана-Бьюси (ФКБ) и линейного фильтра Пугачева (ЛФП) для обработки информации в режиме реального времени в УдСтС. Вейвлет ФКБ (ВЛФКБ) и вейвлет ЛФП (ВЛЛФП) решают систему линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами в отличие от ФКБ и ЛФП, которые должны интегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих ударные функции.

**В заключении** приведены основные результаты диссертации. **Приложение** содержит обширный материал с описанием ИПО и тестовых примеров.

## 1. ОБЗОР РАБОТ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

### 1.1. Обзор работ в области теории ударных стохастических систем

Как известно [1-4], в технике ударом называют взаимодействие материальных систем, приводящее к конечному изменению их скоростей за бесконечно малый промежуток времени, называемый временем удара  $T$ . Оно не должно быть больше наименьшего периода собственных колебаний системы  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Согласно [1-4] в детерминированной теории различают простые (в виде однополярного короткого импульса) и сложные (в виде совокупности импульсов одного и разных знаков с наложенными колебаниями) ударные воздействия (УВ). В отличие от простого удара сложное УВ может охватывать несколько периодов собственных колебаний. Системы могут подвергаться не только одиночным ударам (простым и сложным), но также последовательности ударов.

Решению задач, касающихся ударного взаимодействия тел в механике и физике, посвящено в детерминированной постановке множество работ, например, [4-18]. Технические изделия (ТИ) наукоемкой продукции высокой точности функционируют в условиях экстремальных нестационарных ударных механических, тепловых и электромагнитных возмущений и воздействия стохастических факторов промышленного производства и эксплуатации. Адекватной математической моделью, описывающей поведение ТИ под воздействием внешних условий, может быть только *стохастическая*. Техническое изделие, выполненное по определенным стандартам и условиям применения, рассматривается как *ударная стохастическая система (УдСтС)*. Ударное воздействие характеризуется ударной *случайной функцией (УдСФ)*  $X=X(t,U)$  времени  $t$  и параметра  $U$ .

Технические изделия в процессе эксплуатации подвергаются интенсивным УВ. Причинами ударов могут быть механические столкновения, электромагнитные импульсы, взрывы, аварийные режимы при неправильном обращении с оборудованием. Результаты УВ на изделия сложны и многообразны. Поэтому вводят различные показатели ударостойкости. Для того чтобы гарантировать удовлетворительное

функционирование изделий системы в условиях УВ, их подвергают испытаниям путем приложения контрольных эталонных УВ согласно рекомендациям ГОСТ 28213-89 (МЭК 68-2-27-87) [3]. Создание соответствующего испытательного оборудования связано с одной стороны с глубоким пониманием существа УВ, а с другой стороны необходимо сложное дорогостоящее и узкоспециализированное оборудование. Поэтому актуальна задача разработки методов и алгоритмов анализа точности УдСтС на основе ее математической модели. Стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее ошибки функционирования ТИ как следствие стохастических факторов и детерминированных и стохастических ударных воздействий, рассматривается в качестве математической модели УдСтС.

*Центральной задачей стохастического системного анализа УдСтС является задача анализа нестационарных одно- и многомерных распределений. Для решения задачи анализа вероятностных распределений в УдСтС применяют следующие три принципиально различных подхода. Первый подход* состоит в использовании статистических методов обработки экспериментальных данных, например, прямых численных расчетов методом Монте-Карло. *Второй подход* состоит в непосредственном составлении и интегрировании уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для плотности вероятности и его обобщений или уравнения Пугачева для характеристической функции и его обобщений для стохастического процесса, заданного стохастическим дифференциальным уравнением. *Третий подход* состоит в применении аналитических методов для приближенного решения уравнений, определяющих параметры нестационарных одно- и многомерных распределений. К их числу относятся методы нормальной аппроксимации (МНА) и статистической линеаризации (МСЛ), методы моментов (ММ) и семиинвариантов (МС), моментно-семиинвариантные методы (МСМ) и их модификации, методы ортогональных разложений (МОР) и методы структурной параметризации. Эти методы позволяют по исходной УдСтС получить детерминированные нестационарные уравнения для параметров одно- и многомерных вероятностных распределений.

Точное нахождение всех конечномерных вероятностных распределений вектора состояния УдСтС, в общем случае невозможно. Оно имеет место для линейных

и узкого класса нелинейных систем. Поэтому актуальна проблема разработки приближенных методов вероятностного анализа УдСтС. Решению задач в вероятностной постановке, в том числе касающихся ударного взаимодействия тел в механике и физике, посвящено много публикаций, например, [25-35].

Широкое применение для описания математических моделей сложных систем в условиях случайных возмущений нашли стохастические дифференциальные системы (СДС) [36-46]. Наряду с общими методами нелинейной теории выделяют специальные методы, ориентированные на конкретные классы дифференциальных СтС. Среди классов дифференциальных СтС с импульсными воздействиями получила развитие теория импульсных СтС. В ее основе лежат стохастические дифференциальные уравнения для моментов времени, когда не происходят импульсы, и стохастические разностные уравнения в моменты действия импульсов. Обзор работ по направлению импульсных СтС содержится в [34, 35]. Обзор работ по анализу и синтезу нестационарных СтС до 2011 года содержится в [19-21]. В дальнейшем работы велись по развитию методов анализа применительно к следующим типам СтС:

- эредитарным (интегродифференциальным, приводимым к дифференциальным) [47-55];
- круговым, сферическим, кватернионным, неголономным и на многообразиях [56-59];
- со сложными нелинейностями, описываемыми специальными функциями, а также интегральными нелинейностями [60-86].

Для проведения непрерывного оценивания вектора состояния стохастической дифференциальной системы при ударных воздействиях по результатам непрерывных наблюдений в режиме реального времени широкое распространение получили фильтр Калмана и условно-оптимальные фильтры Пугачева [87,88]. Часто математические модели УдСтС содержат параметры, известные с ограниченной точностью, и возникает задача непрерывного оценивания этих параметров по результатам непрерывных наблюдений. Одним из способов ее решения является прием, когда уточняемые параметры включаются в вектор состояния системы. Таким образом, задача уточнения параметров УдСтС сводится к задаче фильтрации. В [89]

приведен обстоятельный обзор современных подходов решения задачи синтеза линейных оптимальных в среднем квадратическом фильтров. В [90-105] дано дальнейшее развитие методов построения субоптимальных фильтров и условно-оптимальных фильтров Пугачева.

Для нестационарных задач расчетной практики разработано инструментальное программное обеспечение, реализующее методы канонического разложения (КР) случайных функций, вейвлет разложения (ВЛР) ковариационной функции СФ, вейвлет канонического разложения (ВЛКР) случайной функции [106-120].

## 1.2. Модели ударных воздействий

В [1,2] представлен ряд удобных для расчета точности детерминированных моделей УВ, основанных на воздействиях детерминированных импульсов различной формы на линейную детерминированную систему второго порядка. Для задач удародиагностики и испытаний в соответствии с рекомендациями МЭК [3] предлагаются брать прямоугольные, пилообразные, полугармонические и др. формы импульсов. В [9] описаны основные принципы моделирования детерминированных УВ, приведены основные характеристики УВ для различных тел и в различных условиях, даны рекомендации по их использованию при решении практических задач с применением программного комплекса автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем ЭЙЛЕР (EULER).

Для анализа УВ с заданным ударным спектром традиционно используется преобразование Фурье, дающее разложение исследуемой реализации УВ  $x(t)$  в ряд по тригонометрическим функциям, или в более общей форме записи

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(int).$$

Коэффициенты  $c_n$  являются амплитудами гармонических колебаний соответствующей частоты и определяются формулой

$$c_n = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} x(t) \exp(-int) dt.$$

Множество функций  $\exp(int)$  образует ортонормированный базис пространства  $L^2(0,2\pi)$ . Аппарат Фурье–преобразований дает достаточно простые для расчетов

формулы и прозрачную интерпретацию результатов, но не лишен и некоторых недостатков. Преобразование, например, не отличает сигнал, являющийся суммой двух синусоид, от ситуации последовательного включения синусоид, не дает информации о преимущественном распределении частот во времени, может дать неверные результаты для сигналов с участками резкого изменения. Исследуемые ряды также далеко не всегда удовлетворяют требованию периодичности и заданы на ограниченном отрезке времени.

В настоящее время для исследования временных рядов с выраженной неоднородностью применяют теорию вейвлетов [121-123]. Анализ и обработка нестационарных сигналов разных типов представляют собой основное поле применения вейвлет анализа [124,125]. Практические приложения теории вейвлетов были разработаны в середине 80-х годов Морле и Гроссманом [126] как альтернатива преобразованию Фурье для исследования временных (пространственных) рядов с выраженной неоднородностью. В отличие от преобразования Фурье, локализующего частоты, но не дающего временного разрешения процесса, и от аппарата дельта-функций, локализующего моменты времени, но не имеющего частотного разрешения, вейвлет-преобразование, обладающее самонастраивающимся подвижным частотно-временным окном, одинаково хорошо выявляет как низкочастотные, так и высокочастотные характеристики сигнала на разных временных масштабах. По этой причине вейвлет анализ часто сравнивают с "математическим микроскопом", вскрывающим внутреннюю структуру существенно неоднородных объектов. Указанная универсальность обеспечивает вейвлет анализу широкое использование при обработке информации в технических задачах, в том числе, при обработке и синтезе сигналов.

Подобно тому, как в основе аппарата преобразований Фурье лежит единственная функция  $w(t)=\exp(it)$ , порождающая ортонормированный базис пространства  $L^2(0,2\pi)$  путем масштабного преобразования, так и вейвлет преобразование строится на основе единственной базисной функции  $\varphi(t)$ , принадлежащей пространству  $L^2(R)$ . Любая функция из  $L^2(R)$  может быть представлена суперпозицией

масштабных преобразований и сдвигов базисного вейвлета с коэффициентами, зависящими от масштаба (частоты) и параметра сдвига (времени).

В задачах современной практики УВ имеют сложный характер и предполагают использование сложных моделей УВ. Современные корреляционные модели УВ, основанные на вейвлет разложениях, канонических разложениях и вейвлет канонических разложениях обладают важным преимуществом, связанным с возможностью использования нестационарных стохастических УВ сложной формы. Применение при вычислительных процедурах вейвлет технологий позволяет повысить оценку точности УдСтС в сложных экстремальных условиях, реализуемых на основе натурного имитационного моделирования.

### 1.3. Характеристики ударных воздействий

Для однократных УВ в качестве интегральных характеристик УдСФ  $X=X(t, U)$  вводят понятие ударного импульса  $l$ -го порядка

$$I_l = \int_0^T X^{(l)}(t, U) dt \quad (l = 1, 2, \dots).$$

При простом ударе длительности  $T \gg T_0$  УдСФ характеризуется ударным импульсом, а форма УВ не имеет значения. Ударные СФ сложной формы могут иметь как отличный от нуля, так и нулевой импульс.

В корреляционной теории действительных УдСФ используются следующие корреляционные характеристики:

$$m^{I_l} = M[I_l], \quad (1.1.1)$$

$$K^{I_l} = M[I_l^0 \bar{I}_l^0] \quad (I_l^0 = I_l - m^{I_l}), \quad (1.1.2)$$

$$\Gamma^{I_l} = M[I_l \bar{I}_l] = K^{I_l} + m^{I_l} \bar{m}^{I_l}. \quad (1.1.3)$$

Если УдСФ задана каноническим разложением

$$X = X(t, U) = m^X(t, U) + \sum_{\nu} V_{\nu} x_{\nu}(t, U),$$

$$K^X = K^X(t, U) = \sum_{\nu} D_{\nu} x_{\nu}(t, U) \bar{x}_{\nu}(t, U),$$

то корреляционные характеристики (1.1.1) – (1.1.3) будут вычисляться по формулам

$$m^{I_l} = \int_0^T m^{X^{(l)}}(t, U) dt,$$

$$K^{I_l} = \sum_{\nu} D_{\nu} \int_0^T \int_0^T x_{\nu}(t, U) \bar{x}_{\nu}(t', U) dt dt'.$$

Как правило, УдСФ являются существенно негауссовскими марковскими процессами, поэтому в рамках теории марковских процессов [19-21] в качестве тонких согласованных вероятностных характеристик используют  $n$ -мерные характеристические функции (х.ф.)

$$g_n^{I_l} = g_n^{I_l}(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n, U) = M\{\exp[i \sum_{k=1}^n \lambda_k^T I_l(t_k, U)]\}$$

или  $n$ -мерные плотности вероятности

$$f_n^{I_l} = f_n^{I_l}(\lambda_1, \dots, \lambda_n; t_1, \dots, t_n, U)$$

Для многократных УВ соответствующие характеристики вычисляются для моментов времени  $T_h$  ( $h = 2, 3, \dots$ ).

В инженерных приложениях, пользуясь корреляционным принципом эквивалентности СФ, стремятся заменить негауссовские СФ эквивалентными гауссовскими и пользоваться нелинейной корреляционной теорией анализа и обработки информации в УдСтС. При этом решается задача стохастического анализа на основе не осредненных характеристик, зависящих от параметра  $U$ ,

$$i_{1X}^{\text{уд}} = \int_0^T X(t, U) dt, i_{2X}^{\text{уд}} = \operatorname{tr} \int_0^T K^X(t, U) dt$$

или

$$i_{1X}^{\text{уд}} = \int_0^T m^X(t, U) dt, i_{2X}^{\text{уд}} = \sum_{\nu} D_{\nu} \int_0^T x_{\nu}(t, U) x_{\nu}(t, U)^T dt.$$

В соответствии с [19-21] для оценки и оптимизации показателей ударостойкости СтС (динамической точности, надежности, безопасности и др.) используются соответствующие критерии риска, вычисляемые на основе одно- и многомерных распределений.

Так как любая стохастическая система осуществляет преобразование функций (каждой данной функции  $X(t, U)$  на входе соответствует вполне определенная функция  $Y(t, U)$  на выходе), то каждой системе соответствует вполне определенный оператор  $A$ :

$$Y(t, U) = AX(t, U).$$

В общей теории СтС обычно используется следующий общий принцип анализа качества системы. Всякое отклонение выходного сигнала  $Y$  системы от требу-

емого сигнала  $Y_{\text{тр}}$  вызывает потери, которые в каждом конкретном случае характеризуются некоторой функцией потерь  $l = l(Y, Y_{\text{тр}}, U)$ .

Качество системы в среднем для данной реализации требуемого выходного сигнала  $Y_{\text{тр}}$  при всех возможных реализациях действительного выходного сигнала  $Y$ , соответствующих  $Y_{\text{тр}}$  и параметрах  $U$ , оцениваются условным математическим ожиданием функции потерь при данной реализации требуемого выходного сигнала  $\rho(A|Y_{\text{тр}}, U) = M[l(Y, Y_{\text{тр}}, U)|Y_{\text{тр}}, U]$ . Эту величину называют условным риском. Она зависит от оператора  $A$ , определяющего  $Y$ , а также от  $Y_{\text{тр}}$ . Среднее качество системы при всех возможных реализациях  $Y$ , соответствующих  $Y_{\text{тр}}$ , характеризуется математическим ожиданием условного риска, равным безусловному математическому ожиданию функции потерь:  $R(A) = M[\rho(A|Y_{\text{тр}}, U)] = M[l(Y, Y_{\text{тр}}, U)]$ . Величина  $R(A)$  характеризует средние потери или средний риск и является обобщенным показателем качества системы.

Для количественного описания качества УдСтС необходимо определить вероятностные характеристики показателей качества выходного сигнала системы при известных характеристиках системы и входного сигнала  $X(t, U)$ .

Для вычисления многомерных распределений выходного сигнала широкое распространение получили методы их параметризации посредством МНА и МСЛ, ММ, МСМ, МОР и их модификаций, а также методы структурной параметризации (эллипсоидальной аппроксимации и др.).

В инженерных приложениях прецизионных информационно-управляющих систем особенностью УдСтС являются скоротечность ударных СФ и фильтрационные свойства измерительно-управляющих подсистем. В этих условиях нелинейные стохастические эффекты не успевают развиваться, и практически приемлемой моделью процессов в УдСтС являются нестационарные линейные дифференциальные СтС или нестационарные линейные дифференциальные СтС с параметрическими шумами (или приводимые к ним). Такой подход позволяет оценить накапливающиеся *систематические и случайные ошибки*: разности между фактическими выходными сигналами системы и требуемыми выходными сигналами представляют собой

систематические ошибки, а случайные колебания выходных сигналов – случайные ошибки системы.

Для оценки УдСтС при нормально распределенном векторном параметре  $U$  размерности  $p^U$  выбирается условная функция потерь  $\rho$  [128], допускающая квадратичную аппроксимацию [69,85]

$$\rho = \rho(U) = \rho(m^U) + \sum_{i=1}^{p^U} \rho'_i(m^U) U_i^\circ + \sum_{i,j}^{p^U} \rho''_i(m^U) U_i^\circ U_j^\circ,$$

и показатель  $\varepsilon$ , равный

$$\varepsilon = \varepsilon_2^{1/4}, \quad \varepsilon_2 = M_N[\rho(U)]^2 - (\rho(m^U))^2,$$

где  $M_N$  – символ математического ожидания для нормального распределения,

$$\begin{aligned} M_N[\rho(U)]^2 &= (\rho(m^U))^2 + \rho'(m^U)^T K^U \rho'_i(m^U) + 2\rho(m^U) \text{tr}[\rho''(m^U) K^U] + \\ &+ \{\text{tr}[\rho''(m^U) K^U]\}^2 + 2\text{tr}[\rho''(m^U) K^U]^2. \end{aligned}$$

Для нахождения производных  $\rho'$  и  $\rho''$  необходимо решить уравнения для математического ожидания  $m_t = m_t(U)$  и ковариационной матрицы  $K_t = K_t(U)$  стохастического процесса  $Y(t, U)$ , описываемого нестационарной линейной дифференциальной СтС или нестационарной линейной дифференциальной СтС с параметрическими шумами:

$$\begin{aligned} \dot{m}_t &= A^m(m_t, K_t, U), m(t_0) = m_0; \\ \dot{K}_t &= A^K(m_t, K_t, U), K(t_0) = K_0. \end{aligned}$$

Как известно [69,85], методы чувствительности в инженерной практике широко применяются для приближенного анализа точности СтС со случайными параметрами  $U$  в предположении малых дисперсий этих параметров по сравнению с их математическими ожиданиями. В случае УдСтС при нормальном векторном параметре  $U$  получаются следующие уравнения для функций чувствительности первого порядка  $\nabla^U m_t$  ( $\nabla^U = \partial / \partial U$ ),  $\nabla^U K_t$  ( $\nabla^U = \partial / \partial U$ ):

$$\begin{aligned} \nabla^U \dot{m}_t &= \nabla^U A^m, \nabla^U m(t_0) = 0; \\ \nabla^U \dot{K}_t &= \nabla^U A^K, \nabla^U K(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично записываются уравнения функций чувствительности второго порядка  $\nabla^U (\nabla^U)^T m_t$  и  $\nabla^U (\nabla^U)^T K_t$ .

## 1.4. Постановка задач

Основная цель диссертации заключается в разработке методов и алгоритмов для инструментального программного обеспечения анализа точности и обработки информации в стохастических системах при ударных воздействиях с применением вейвлет технологий.

Для ее достижения требуется решить следующие задачи:

- 1) разработать методы и алгоритмы построения скалярных и векторных УдСФ посредством их ВЛКР;
- 2) разработать вейвлет методы и алгоритмы анализа динамической точности УдСтС;
- 3) рассмотреть возможности использования авторской модификации моментно-семиинвариантного метода для анализа точности УдСтС;
- 4) провести для типовых круговых нелинейностей в УдСФ аналитические расчеты коэффициентов статистической круговой намотанной нормальной линеаризации;
- 5) разработать методы и алгоритмы вейвлет оптимизации систем обработки информации в линейных УдСтС;
- 6) разработать методы и алгоритмы вейвлет обработки информации в режиме реального времени в линейных и линейных с параметрическими шумами УдСтС;
- 7) разработать типовую методику анализа точности УдСтС.

Первая задача рассматривается в разделе 2. Второй задаче посвящены подразделы 3.1, 3.2. Третья и четвертая задачи рассмотрены в подразделах 3.3 и 3.4. Пятой задаче посвящены подразделы 4.1, 4.2. В подразделах 4.3 и 4.4 рассматривается шестая задача. Задаче 7 посвящен пораздел 3.5. В приложение вынесен обширный материал с описанием ИПО и тестовых примеров.

## 2. ВЕЙВЛЕТ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ КАНОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ УДАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

### 2.1. Вейвлет анализ и построение канонического разложения ударной скалярной случайной функции

#### 2.1.1. Каноническое разложение скалярной УдСФ

Создание общей теории канонических разложений случайных функций связано с именами Лоэва, Колмогорова, Карунена и Пугачева и относится к 40-50 гг. XX века. Как известно [21], канонические разложения представляют собой выражения СФ через дискретный белый шум. Канонические разложения удобны для выполнения различных операций анализа над СФ. Объясняется это тем, что в каноническом разложении СФ ее зависимость от аргумента  $t$  выражается при помощи вполне определенных неслучайных координатных функций, что дает возможность свести выполнение различных линейных операций к соответствующим операциям над неслучайными координатными функциями.

Методы и алгоритмы, разработанные В.С. Пугачевым и И.Н. Синицыным [21], применимы для построения КР скалярной УдСФ. Ударная случайная функция представляет собой математический объект большой сложности. В общем случае ее можно трактовать как несчетное множество скалярных случайных величин (СВ). Если известны и конечны математическое ожидание, дисперсия и ковариационные моменты УдСФ  $X(t)$ , то ее можно построить ее *каноническое разложение* в виде

$$X(t) = m_x(t) + \sum_v V_v x_v(t), \quad (2.1.1)$$

где  $V_v$  – некоррелированные скалярные СВ, математические ожидания которых равны нулю, а  $x_v(t)$  – некоторые детерминированные функции. Случайные величины  $V_v$  называются *коэффициентами КР*, функции  $x_v(t)$  – *координатными функциями КР*. Каноническое разложение УдСФ в общем случае представляет собой бесконечный ряд. В частных случаях оно может быть конечной суммой.

Выразив УдСФ  $X(t)$  с помощью КР (2.1.1), можно для вычисления ее ковариационной функции (как ковариационного момента величин  $X(t)$  и  $X(t')$ ) применить формулу:

$$K_x(t, t') = M[X(t)\overline{X(t')}] = \sum_v D_v x_v(t) \overline{x_v(t')}, \quad (2.1.2)$$

где  $D_v$  – дисперсии СВ  $V_v$ , черта сверху – символ комплексного сопряжения. Всякое представление ковариационной функции формулой вида (2.1.2) называется *каноническим разложением ковариационной функции*. Полагая в (2.1.2)  $t = t'$ , имеем формулу для дисперсии СФ  $X(t)$ :

$$D_x(t) = K_x(t, t) = \sum_v D_v |x_v(t)|^2. \quad (2.1.3)$$

Последовательность некоррелированных СВ  $V_v$  можно рассматривать как дискретный (импульсный) белый шум. Тогда КР (2.1.1) УдСФ  $X(t)$  можно трактовать как выражение ее через импульсный белый шум

Пусть  $V_v$  – произвольные некоррелированные СВ, имеющие математические ожидания, равные нулю, и дисперсии  $D_v$ :

$$\begin{cases} M[V_v] = 0, & M[V_v \bar{V}_\mu] = 0 \quad (\mu \neq v), \\ D[V_v] = M[|V_v|^2] = D_v. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Справедливы следующие утверждения [21].

**Теорема 2.1.1.** *Пусть скалярная УдСФ допускает КР (2.1.1), тогда КР ковариационной функции имеет КР (2.1.2). Наоборот, если ковариационная функция представлена КР (2.1.2) с линейно независимыми координатными функциями, тогда УдСФ может быть представлена КР (2.1.1) с теми же координатными функциями. При этом выбор координатных функций  $x_v(t)$  по формуле*

$$x_v(t) = \frac{1}{D_v} M[X^0(t) \bar{V}_v] \quad (2.1.5)$$

*дает наилучшее среднее квадратическое (с.к.) приближение к УдСФ  $X^0(t) = X(t) - m_X(t)$  с любым данным числом членов ряда  $X^0(t) = \sum_v V_v x_v(t)$  при данном выборе случайных коэффициентов  $V_v$ .*

**Теорема 2.1.2.** *Формула*

$$X^0(t) = \sum_{n=1}^N V_n \psi_n(t) + R_n(t) \quad (2.1.6)$$

*с отброшенным остаточным членом  $R_n(t)$  дает приближенное каноническое разложение УдСФ  $X^0(t)$  с координатными функциями  $\psi_v$ .*

**Замечание 2.1.1.** Координатные функции  $x_v(t)$ , определяемые формулой (2.1.5), называются *с.к. оптимальными* координатными функциями. Полагая в (2.1.6)  $\psi_v(t) \equiv x_v(t)$  ( $v = 1, n$ ), по известной формуле определяется математическое ожидание квадрата модуля остаточного члена КР с с.к. оптимальными координатными функциями:

$$\Delta_n = M[|R_n(t)|^2] = D_x(t) - \sum_{v=1}^n D_v |x_v(t)|^2. \quad (2.1.7)$$

### 2.1.2. Каноническое разложение скалярной УдСФ в заданной области изменения аргумента

Возьмем в качестве случайных коэффициентов  $V_v$  канонического разложения (2.1.1) УдСФ  $X(t)$  линейные комбинации значений  $X^0(t)$ , соответствующих всем значениям аргумента  $t$  в данной области  $T$ , т.е. интегралы

$$V_v = \int_T \overline{a_v(t)} X^0(t) dt. \quad (2.1.8)$$

Условие некоррелированности величин  $V_v$ ,  $V_\mu$  при  $\mu \neq v$  дает уравнения, которым должны удовлетворять функции  $a_v(t)$  [21]:

$$\int_T \int_T \overline{a_v(t)} a_\mu(t') K_x(t, t') dt dt' = 0 \quad (\mu \neq v). \quad (2.1.9)$$

Функции  $a_v(t)$ , удовлетворяющие уравнениям (2.1.9) можно определить бесчисленным множеством способов. Определив функции  $a_v(t)$ , можно найти дисперсии  $D_v$  CB  $V_v$ :

$$D_v = M[|V_v|^2] = \int_T \int_T \overline{a_v(t)} a_v(t') K_x(t, t') dt dt', \quad (2.1.10)$$

и определить вид координатных функций  $x_v(t)$ :

$$x_\nu(t) = \frac{1}{D_\nu} \int_T a_\nu(s) K_x(t, s) ds. \quad (2.1.11)$$

Из формул (2.1.9) и (2.1.10) следуют условия *биортогональности* функций  $a_\nu(t)$  и  $x_\nu(t)$ :

$$\int_T \overline{a_\nu(t)} x_\mu(t) dt = \delta_{\nu\mu}. \quad (2.1.12)$$

Известны следующие утверждения [21].

**Теорема 2.1.3.** *Если ковариационная функция  $K_x(t, t')$  скалярной УдСФ  $X^0(t)$  удовлетворяет условиям (2.1.10), то ее КР в данной области изменения аргумента имеет вид (2.1.2). При этом случайные коэффициенты  $V_\nu$  и их дисперсии определяются (2.1.8), (2.1.10), а координатные функции  $x_\nu(t)$  – условиями биортогональности (2.1.12).*

**Теорема 2.1.4.** *В условиях теоремы 2.1.3, если взять произвольную последовательность функций  $f_\nu(t)$ , положив  $a_1(t) = f_1(t)$  и определив функции  $a_\nu(t)$ ,  $x_\nu(t)$  рекуррентными формулами  $a_n(t) = \sum_{\nu=1}^{n-1} c_{n\nu} a_\nu(t) + f_n(t)$ ,  $c_{n\mu} = \int_T f_n(t) \overline{x_\mu(t)} dt$  ( $\mu = \overline{1, n-1}$ ), то можно найти систему пар функций  $a_\nu(t)$ ,  $x_\nu(t)$ , удовлетворяющих условиям (2.1.11) и (2.1.12).*

### 2.1.3. Основные понятия вейвлет анализа

**Вводные замечания [121-127].** Анализ и обработка УдСФ с применением вейвлет базиса позволяют выявить характерные частоты (масштабы) и моменты времени, при которых эти частоты проявляют себя. Общий принцип построения вейвлет базиса состоит в использовании масштабного преобразования и смещений. Базисы на основе вейвлетов, определенных на  $\mathbb{R}$ , не являются строго говоря ортонормированными, поскольку элементы базиса бесконечно дифференцируемы и экспоненциально спадают на бесконечности, что противоречит строгой ортонормированности. Любой вейвлет с конечным носителем порождает полную ортонормированную систему функций с конечным носителем. За счет изменения масштабов

вейвлетов выявляются различные частоты, а путем сдвига анализируются свойства функции в разные моменты времени.

Согласно [122], "вейвлет базисы обладают универсальной применимостью: "все, что попадается под руку", будь то обычная или обобщенная функция, представимо в виде вейвлет ряда, и, в отличие от ситуации с рядами Фурье, коэффициенты вейвлет ряда передают свойства функции или распределения просто, точно и надежно". Выбор конкретного вейвлета зависит от вида анализируемой функции, и критерием выбора вейвлета является простота получаемого разложения. В то же время прямой переход от чистой математики к разработке инструментального программного обеспечения не тривиален и требует индивидуального подхода к изучаемой задаче и правильного выбора используемого вейвлета.

Вейвлеты с конечным носителем не могут быть записаны в аналитической форме, кроме простейшего из них – вейвлета Хаара, а характеризуются набором численных коэффициентов в некоторых функциональных уравнениях, содержащих изменение масштаба и сдвиг аргументов. В практических вычислениях конкретная форма вейвлетов не выписывается, а используются только величины этих коэффициентов функциональных уравнений. Вейвлет базис задается с помощью итерационного алгоритма с изменением масштаба и сдвигом единственной функции. Это приводит к процедуре многомасштабного анализа, который делает возможными быстрые численные расчеты локальных характеристик на разных масштабах.

При анализе УдСФ в большинстве случаев мы имеем дело с квадратично-интегрируемыми функциями, определенными в конечной области вещественной оси. Для УдСФ оказывается важным определить момент времени, когда та или иная частотная характеристика изменилась. Поэтому базисные функции должны иметь конечную область определения: такими функциями являются вейвлеты с конечным носителем. С их помощью можно покрыть всю область изменения УдСФ, используя смещение по разному сжатых вариантов одной-единственной функции. Выбор анализирующего вейвлета определяется решаемой проблемой. Хорошим наглядным примером ортонормированных вейвлетов базисов являются вейвлеты Хаара.

**Вейвлеты Хаара [121,127].** Построим в пространстве  $L^2(\mathbf{R})$  ортонормированный базис Хаара. Он определяется на основе функции прямоугольной волны

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & \text{для других } x, \end{cases}$$

а процедуру построения базиса Хаара проведем в несколько этапов. Сначала определим возрастающую последовательность подпространств  $L^2(\mathbf{R})$ , в пределе имеющую все пространство  $L^2(\mathbf{R})$ . На основе этой последовательности будут естественным образом вводится пространства вейвлетов и сами вейвлеты Хаара. Далее рассмотрим систему функций, полученную из  $\varphi(x)$  целочисленными сдвигами:

$$\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x - n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим через  $U_0$  – пространство в  $L^2(\mathbf{R})$ , порожденное линейными комбинациями таких сдвигов ( $U_0$  – замыкание линейной оболочки системы  $\varphi_{0,n}(x)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ). Система  $\{\varphi_{0,n}(x)\}$  образует ортонормированный базис пространства  $U_0$ .

Теперь рассмотрим масштабированные сдвиги  $\varphi(2x - n)$ . Они получаются из  $\varphi(2x)$  сдвигами на  $n/2$ :  $\varphi(2x - n) = \varphi\left(2\left(x - \frac{n}{2}\right)\right)$ . Носитель функции стал в два раза меньше:  $\text{supp}(\varphi(2x - n)) = \left[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right]$ , где  $0 \leq 2x - n < 1$ ,  $\frac{n}{2} \leq x < \frac{n+1}{2}$ . Поэтому  $\|\varphi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(2x - n) dx = \frac{1}{2}$ . Если умножить такие функции на  $\sqrt{2}$ , тогда все они будут единичной нормы.

Рассмотрим систему функций

$$\varphi_{1,n}(x) = \sqrt{2}\varphi(2x - n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

и пространство  $U_1$ , порожденное ими. Система  $\{\varphi_{1,n}(x)\}$  образует ортонормированный базис пространства  $U_1$ , причем  $U_0 \subset U_1$ . Порождающая функция  $\varphi(x)$  пространства  $U_0$  выражается в виде линейной комбинации элементов пространства  $U_1$ :  $\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x + 1) = \frac{1}{2}\varphi_{1,0}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,1}(x) = \sum_n h_n \varphi_{1,n}(x)$ , где ненулевые  $h_n$  только такие:  $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$ .

Далее рассмотрим пространство  $U_2$  порожденное функциями  $\varphi_{2,n}(x) = 2\varphi(2^2 x - n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , полученными из функции  $2\varphi(4x)$  сдвигами на  $n/4$  по оси  $Ox$ . Носитель,  $\text{supp}(\varphi_{2,n}) = [n/2^2, (n+1)/2^2]$ , есть отрезок длины  $1/4$ . Система  $\{\varphi_{2,n}(x)\}$  образует ортонормированный базис пространства  $U_2$ , причем  $U_1 \subset U_2$ . Продолжая эту процедуру, для любого  $j \in \mathbb{N}$  рассмотрим систему функций:  $\varphi_{j,n}(x) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j x - n)$ . Это ортонормированная система функций,  $\text{supp}(\varphi_{j,n}) = [n/2^j, (n+1)/2^j]$ , все функции системы получаются из  $\sqrt{2^j} \varphi(2^j x)$  сдвигами на  $n/2^j$  по оси  $Ox$ . Пусть  $U_j$  – пространство, порожденное системой функций  $\varphi_{j,n}(x) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j x - n)$ . Имеют место следующие включения:  $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_j$ .

Продолжая этот процесс до бесконечности, получим бесконечную систему вложенных подпространств  $U_j \subset L^2(\mathbf{R})$ :  $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_j$ . В каждом пространстве  $U_j$  выделен ортонормированный базис  $\{\varphi_{j,n}(x)\}$ . Линейные комбинации функций вида  $\varphi_{j,n}(x)$  ( $j, n \in \mathbb{Z}$ ) является кусочно-постоянными функциями. Поскольку последние образуют плотное множество в  $L^2(\mathbf{R})$ , то  $\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} U_j} = L^2(\mathbf{R})$ , где черта сверху обозначает замыкание.

Для каждого  $j \in \mathbb{Z}$  рассмотрим оператор ортогонального проецирования пространства  $L^2(\mathbf{R})$  на подпространство  $U_j$ :

$$P_j: L^2(\mathbf{R}) \rightarrow U_j, P_j(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (f, \varphi_{j,n}) \varphi_{j,n}(x).$$

Проекции  $P_j(f)$  являются приближениями функции  $f(x)$ , все более точными при увеличении  $j$ . Сравним два последовательных приближения. Для этого рассмотрим разность  $P_{j+1}(f) - P_j(f)$ . Эта разность лежит в  $U_{j+1}$  и ортогональна к  $U_j \subset U_{j+1}$ , т. е. она принадлежит ортогональному дополнению  $W_j$  к пространству  $U_j$  до  $U_{j+1}$ . Рассмотрим ортогональное разложение

$$U_{j+1} = U_j \oplus W_j.$$

Точное приближение  $P_{j+1}(f)$  в пространстве  $U_{j+1}$  получается как сумма приближения  $P_j(f)$  и дополнительного слагаемого  $P_j^W(f)$ , отражающего уточнения при переходе от  $P_j(f)$  к  $P_{j+1}(f)$ :

$$P_{j+1}(f) = P_j(f) + P_j^W(f).$$

Выясним, какими функциями порождается  $W_j$ . Поскольку все пространства  $U_j$  получены из  $U_0$  изменением масштаба, то естественно сначала изучить пространства  $W_0$  – ортогональное дополнение к  $U_0$  в пространстве  $U_1$  ( $U_1 = U_0 \oplus W_0$ ). Пусть функция  $\psi \in W_0$ . Тогда она раскладывается по базису  $\{\varphi_{1,n}(x)\}$  пространства  $U_1$ :  $\psi = \sum_n c_n \varphi_{1,n}$ . Поскольку  $\psi \perp U_0$ , то для любого  $n$  имеем:  $(\psi, \varphi_{0,n}) = 0$ . Пространство  $U_0$  входит в  $U_1$ , следовательно, функции  $\varphi_{0,n}(x)$  также раскладываются по базису  $\{\varphi_{1,n}(x)\}$  пространства  $U_1$ :  $\varphi_{0,n} = \sum_k h_k \varphi_{1,k}$ . Коэффициенты этого разложения  $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$  и  $\varphi_{0,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{1,2n} + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{1,2n+1}$ . Тогда условие ортогональности  $\psi$  к  $U_0$  принимают вид  $(\psi, \varphi_{0,n}) = 0$ . Так как  $\{\varphi_{1,k}\}$  – ортогональный базис, то из последнего равенства имеем  $c_{2n} + c_{2n+1} = 0$ . Уравнение имеет множество решений. Наиболее простому решению  $c_0 = 1/\sqrt{2}$ ,  $c_1 = -1/\sqrt{2}$  соответствует функция

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{10}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{11}(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 0, & x \notin [0, 1], \end{cases}$$

называемая вейвлетом Хаара. Сдвиги  $\psi(x-n)$  образуют базис пространства  $W_0$ .

Функции  $\psi_{0,n} = \psi(x-n) = \varphi_{1,2n}/\sqrt{2} - \varphi_{1,2n+1}/\sqrt{2}$  образуют ортонормированную систему в  $W_0$ . Каждая функция  $\psi_{0,n}(x) \in W_0$  ортогональна каждой функции  $\varphi_{0,k}$ . Система функций  $\{\psi_{0,n}, \varphi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  образует (новый) ортонормированный базис пространства  $U_1$ . Базис пространства  $W_0$  образует функции  $\psi_{0,n} = \psi(x-n)$ . В общем случае ли  $U_{j+1} = U_j \oplus W_j$ , то ортонормированный базис пространства  $W_j$  образуют функции вида

$$\psi_{j,n}(x) = \sqrt{2^j} \psi(2^j x - n). \quad (2.1.13)$$

Известны следующие определения:

- элементы пространства  $W_j$  называются вейвлетами Хаара;
- функции (2.1.13) называются базисными вейвлетами;

- функция  $\varphi(x)$  называется масштабирующей функцией Хаара;
- функция  $\psi(x)$  называется материнским вейвлетом.

Функции  $\varphi(x)$ , которые порождают, подобно функции Хаара, возрастающую последовательность подпространств  $\dots \subset U_{-1} \subset U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$ , обладают уникальными свойствами. Действительно, если пространство  $U_0$  образовано сдвигами функции  $\varphi(x)$ , а пространство  $U_1$  – сдвигами  $\varphi(2x-n)$ , то для включения  $U_0 \subset U_1$  необходимо, чтобы  $\varphi(x) \in U_0$ , т. е. чтобы  $\varphi(x)$  могла быть представлена в виде линейной комбинации функций  $\varphi(2x-n)$ .

Известны следующие определения:

- функция  $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  называется масштабирующей, если она может быть представлена в виде

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(2x-n), \quad (2.1.14)$$

где числа  $h_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  удовлетворяет условию

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 < \infty;$$

- равенство (2.1.14) называется масштабирующим уравнением;
- набор  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  коэффициентов разложения в уравнении (2.1.14) называется масштабирующим фильтром.

Пусть  $\varphi(x)$  – масштабирующая функция, аналогично (2.1.13), образуем следующие функции:  $\varphi_{j,n}(x) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j x - n)$ ,  $j, n \in \mathbb{Z}$ . Каждая такая функция также является масштабирующей.

Как известно [121], для любых  $j, k \in \mathbb{Z}$  имеет место разложение:

$$\varphi_{j-1,k}(x) = \sum_n h_{n-2k} \varphi_{j,n}(x) = \sum_n h_n \varphi_{j,n+2k}(x).$$

В частности,  $\varphi_{0,k}(x) = \sqrt{2} \sum_n h_{n-2k} \varphi(2x-n) = \sum_n h_{n-2k} \varphi_{j,n}(x)$ ,  $\varphi_{j-1,0}(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \varphi_{j,n}(x)$ .

Для функции Хаара фильтр коэффициентов  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  состоит из двух ненулевых элементов  $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$ , поэтому его Фурье преобразование имеем вид

$$H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega} \right) = \frac{1}{2} (1 + e^{-i\omega}) = e^{-i\omega/2} \cos \omega / 2. \quad (2.1.15)$$

Сделаем преобразование Фурье масштабирующего соотношения (2.1.14): так как  $\varphi(2x-n) = \varphi(2(x-n/2))$ , то  $F[\varphi(2x-n)] = 1/2e^{-in\omega/2} F[\varphi](\omega/2)$ . Поэтому

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in(\omega/2)} \hat{\varphi}(\omega/2). \text{ Пусть в силу (2.1.15) } H_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega},$$

$$\hat{\varphi}(\omega) = H_0(\omega/2) \hat{\varphi}(\omega/2). \quad (2.1.16)$$

Соотношение (2.1.16) также называется масштабирующим уравнением. Функцию  $H_0(\omega)$  будем называть частотной функцией отклика масштабирующей функции  $\varphi(x)$ . Если функция  $\hat{\varphi}(\omega)$  непрерывна и интеграл от функции  $\varphi(x)$  отличен от нуля, то, подставляя в (2.1.16) значение  $\omega = 0$ , получаем  $\hat{\varphi}(0) = H_0(0)\hat{\varphi}(0)$  и  $H_0(0) = 1$ .

Вейвлеты Хаара являются простейшим примером *вейвлетов Добеши* с конечным носителем первого порядка. На основе вейвлетов Хаара можно выделить *основные свойства вейвлетов Добеши* [121]:

1) фильтр коэффициентов  $\{h_n\}$  разложения  $\varphi(x) = \sum_n h_n \varphi_{1,n}(x)$  состоит из конечного числа вещественных ненулевых членов. Поэтому частотная функция

$H_0(\omega) = \sqrt{2^{-1}} \sum_n h_n e^{-in\omega}$  является тригонометрическим многочленом. Если длина носителя  $\varphi(x)$  равна  $N$ , то имеется не более  $N+1$  ненулевых коэффициентов  $h_n$ ;

2) преобразование Фурье  $\hat{\varphi}(\omega)$  является ограничением на  $\mathbf{R}$  целой аналитической функции экспоненциального типа. В частности,  $\hat{\varphi}(\omega)$  является гладкой класса  $C^\infty$ ;

3) из непрерывности  $\hat{\varphi}(\omega)$  следует, что  $\hat{\varphi}(0) = 1$ , а из масштабирующего уравнения  $\hat{\varphi}(\omega) = H_0(\omega/2)\hat{\varphi}(\omega/2)$  вытекает  $H_0(0) = 1$ .

Если требовать  $N$  нулевых моментов функции  $\psi(x)$ , то функция  $H_0(\omega)$  имеет вид  $H_0(\omega) = \left( \frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right)^T T(\omega)$ , где  $T(\omega)$  – тригонометрический полином. Кроме того, коэффициенты  $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  фильтра вейвлета  $\varphi(x)$  обладают свойствами

$$\sum_n h_n = \sqrt{2}, \quad \sum_n (-1)^n n^k h_n = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Поскольку  $\varphi(x)$  восстанавливается по функции  $H_0(\omega)$  и формуле

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H_0(\omega/2^j),$$

то построение ортонормированных вейвлетов начинается с нахождения соответствующей функции  $H_0(\omega)$ . Такая функция должна удовлетворять соотношению

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2 = 1.$$

Далее, рассмотрим наиболее простой нетривиальный случай, когда  $N=2$ , а тригонометрический полином  $T$  имеет степень 1. Поскольку тригонометрический многочлен  $H_0(\omega)$  имеет степень 3, то фильтр коэффициентов  $\{h_n\}$  будет иметь 4 ненулевых элемента, а носитель будет иметь длину 3. Учитывая возможность сдвига носителя, потребуем чтобы функция  $\varphi(x)$  имела бы носитель на промежутке  $[0,3]$ . Частотная функция  $H_0(\omega)$  является тригонометрическим полиномом степени 3:

$$H_0(\omega) = \left( \frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right)^2 T(\omega) = \frac{1}{8} (1+e^{-i\omega})^2 (1+\sqrt{3} + (1-\sqrt{3})e^{-i\omega}),$$

$$h_0(\omega) = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1(\omega) = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2(\omega) = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3(\omega) = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \quad (2.1.17)$$

Вейвлет функция  $\varphi(x)$  строится по формуле (2.1.17). Она называется вейвлетом Добеши порядка 2 и обозначается символом "db2" (рисунок 2.1.1).

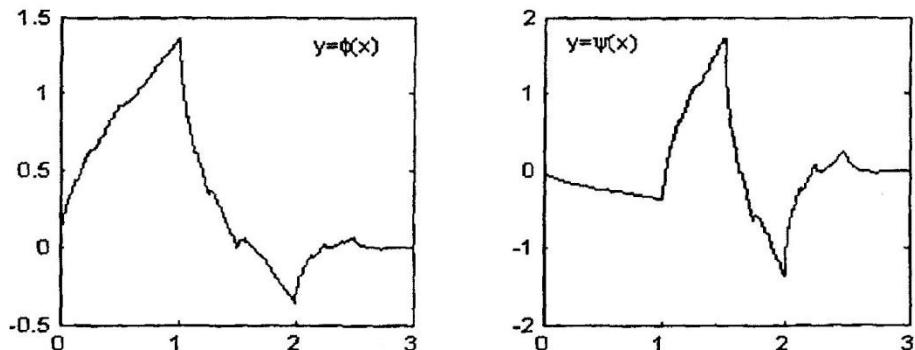


Рисунок 2.1.1 – Вейвлеты Добеши

**Кратномасштабный анализ [121,124,125].** Пусть функции  $f \in L^2(\mathbf{R})$ .

Кратномасштабный анализ (КМА) проводится с помощью набора последовательных аппроксимирующих пространств  $U_j$ , которые представляют собой отмасштабированные и инвариантные относительно смещений на целые числа разновидности одного центрального пространства  $U_0$ . В этом пространстве существует ортонормированный базис  $e_n$ , или, в общем случае, базис Рисса:

$$(e_n, e_m) = \delta_{nm}, \quad \alpha \|f\|^2 \leq \sum_n |f, e_n|^2 \leq \beta \|f\|^2 \quad (\alpha > 0, \beta < \infty).$$

Кратномасштабный анализ – это последовательность  $\{U_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  замкнутых подпространств  $L^2(\mathbf{R})$ , удовлетворяющая следующим свойствам:

- 1)  $U_j \subset U_{j+1}$ ;
- 2)  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} U_j} = L^2(\mathbf{R})$ ;
- 3)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} U_j = \{0\}$ ;
- 4)  $f \in U_j \Leftrightarrow f(2^{-j} \cdot) \in U_0$ ;
- 5)  $f \in U_0 \Leftrightarrow f(\cdot - k) \in U_0$  для любого  $k \in \mathbf{Z}$ ;
- 6) существует функция  $\varphi \in U_0$  такая, что последовательность  $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  образует базис Рисса в  $U_0$ .

Из условия 2) следует, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = f$  для любой функции  $f \in L^2(\mathbf{R})$ .

Основным свойством КМА является возможность построения ортонормированного вейвлета базиса такого, что для любой функции  $f \in L^2(\mathbf{R})$

$$P_{j+1} f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \psi_{jk}) \psi_{jk}.$$

В частности, любую функцию  $f \in L^2(\mathbf{R})$  можно аппроксимировать с точностью  $2^{-j/2}$  (т.е. с любой произвольно высокой точностью при  $j \rightarrow \infty$ ) конечной линейной комбинацией вейвлетов Хаара [121].

#### 2.1.4. Вейвлет каноническое разложение скалярной УдСФ в заданной области изменения аргумента

Вейвлет канонические разложения для СФ впервые были предложены в лекциях В.С. Пугачева и И.Н. Синицына по функциональному анализу [22]. Дадим развитие алгоритмов построения КР УдСФ в данной области изменения аргумента на

основе ортонормированных вейвлет базисов, порожденных вейвлетами с конечными носителями, например, вейвлетами Добеши [121].

Пусть СФ  $X(t)$  задана в области  $t \in [0, T]$ . В пространстве  $L^2[0, T]$  определим ортонормированный вейвлет базис вида

$$\{\varphi_{00}(t); \psi_{jk}(t)\}, \quad (2.1.18)$$

где  $\varphi_{00}(t) = \varphi(t)$  – масштабирующая функция;  $\varphi_{jk}(t) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j t - k)$ ;

$\psi_{00}(t) = \psi(t)$  – материнский вейвлет;  $\psi_{jk}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k)$ ;

$j=1, 2, \dots, J^t$ ;  $k=0, 1, \dots, 2^j - 1$ ;  $J^t$  – максимальный уровень вейвлет разрешения.

Пусть ковариационная функция  $K_X(t_1, t_2) \in L^2([0, T] \times [0, T])$ . В пространстве  $L^2([0, T] \times [0, T])$  определим двумерный ортонормированный вейвлет базис в виде тензорного произведения двух вейвлет базисов вида (2.1.18) для случая, когда масштабирование по обеим переменным происходит одинаково. В этом случае базисные функции имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{00}^A(t_1, t_2) &= \varphi_{00}(t_1) \varphi_{00}(t_2), \Psi_{jkn}^H(t_1, t_2) = \varphi_{jk}(t_1) \psi_{jn}(t_2), \\ \Psi_{jkn}^B(t_1, t_2) &= \psi_{jk}(t_1) \varphi_{jn}(t_2), \Psi_{jkn}^D(t_1, t_2) = \psi_{jk}(t_1) \psi_{jn}(t_2), \\ j &= 0, 1, \dots, J^t; k, n = 0, 1, \dots, 2^j - 1. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Тогда двумерная действительная функция  $K_X(t_1, t_2)$  раскладывается в сходящийся вейвлет ряд:

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= a^t \Phi_{00}^A(t_1, t_2) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} [h_{jkn}^t \Psi_{jkn}^H(t_1, t_2) + \\ &+ b_{jkn}^t \Psi_{jkn}^B(t_1, t_2) + d_{jkn}^t \Psi_{jkn}^D(t_1, t_2)], \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

где

$$\begin{aligned} a^t &= \int_0^T \int_0^T K_X(t_1, t_2) \Phi_{00}^A(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \\ h_{jkn}^t &= \int_0^T \int_0^T K_X(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^H(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \\ b_{jkn}^t &= \int_0^T \int_0^T K_X(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^B(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \\ d_{jkn}^t &= \int_0^T \int_0^T K_X(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^D(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Далее для удобства представим одномерный вейвлет базис (2.1.18) в виде:

$$f_1(t) = \varphi_{00}(t), f_2(t) = \psi_{00}(t),$$

$$f_\nu(t) = \psi_{jk}(t) \text{ для } \nu = 2^j + k + 1; j = 1, 2, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1; (2.1.22)$$

$$L^t = 2 * 2^{J^t}; \nu = 3, 4, \dots, L^t$$

Согласно теореме 2.1.4, задав последовательность функций  $f_\nu(t)$  в виде ортонормированного вейвлет базиса (2.1.22), построим каноническое разложение ударной случайной функции  $X(t)$  ( $t \in [0, T]$ ) в виде

$$X(t) = m_X(t) + \sum_{\nu=1}^{L^t} V_\nu x_\nu(t), \quad (2.1.23)$$

где  $m_X(t)$  – математическое ожидание СФ  $X(t)$ ,  $V_\nu$  – некоррелированные СВ с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями  $D_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, L^t$ );  $x_\nu(t)$  – координатные функции. Тогда каноническое разложение ковариационной функции  $K_X(t_1, t_2)$  в области изменения  $X(t)$  будет иметь вид

$$K_X(t_1, t_2) = \sum_{\nu=1}^{L^t} D_\nu x_\nu(t_1) x_\nu(t_2). \quad (2.1.24)$$

Для этого определим систему пар функций  $a_\nu(t)$ ,  $x_\nu(t)$ , удовлетворяющих условиям (2.1.11), (2.1.12). Пусть  $a_1(t) = f_1(t)$ , тогда по формулам (2.1.10) и (2.1.11) определяются  $D_1$  и  $x_1(t)$ . Далее положим  $a_2(t) = c_{21} a_1(t) + f_2(t)$  и определим  $c_{21}$  так, чтобы функции  $a_2(t)$  и  $x_1(t)$  удовлетворяли условию (2.1.12), т.е.

$$c_{21} = - \int_T f_2(t) x_1(t) dt.$$

Предположим, что определены функции  $a_\mu(t)$ ,  $x_\mu(t)$  ( $\mu = 1, 2, \dots, \nu-1$ ), удовлетворяющие условиям (2.1.11), (2.1.12), а также дисперсии  $D_\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, \nu-1$ ). Примем

$$a_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} a_\mu(t) + f_\nu(t)$$

и определим коэффициенты  $c_{\nu\mu}$  так, чтобы функция  $a_\nu(t)$  была ортогональна к функциям  $x_1(t), \dots, x_{\nu-1}(t)$ . Условие (2.1.12) выполняется, если

$$c_{\nu\mu} = - \int_T f_\nu(t) x_\mu(t) dt \quad (\mu = 1, 2, \dots, \nu-1).$$

Далее введем вспомогательные случайные величины:

$$A_r = \int_0^T f_r(t) X(t) dt \quad (r = 1, 2, \dots, L^t). \quad (2.1.25)$$

Определим ковариационные моменты  $A_\nu$ :

$$k_{\nu\mu} = M[A^{\circ}\bar{A}^{\circ}_{\mu}] = \int_0^T \int_0^T f_{\nu}(t_1) f_{\mu}(t_2) K_X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 (\nu, \mu = 1, 2, \dots, L^t). \quad (2.1.26)$$

На основании (2.1.20) имеем:

$$\begin{aligned} k_{11} &= a^t; \quad k_{12} = h_{000}^t; \quad k_{21} = b_{000}^t; \quad k_{22} = d_{000}^t; \\ k_{\nu\mu} &= d_{jkn}^t \text{ для } \nu = 2^j + k + 1; \quad \mu = 2^j + n + 1; \\ j &= 1, 2, \dots, J^t; \quad k, n = 0, 1, \dots, 2^j - 1. \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Остальные взаимные ковариационные моменты равны нулю:  $k_{\nu\mu} = 0$ .

На основании (2.1.11) имеем

$$A_1^{\circ} = V_1, \quad A_r^{\circ} = -\sum_{\nu=1}^{r-1} c_{r\nu} V_{\nu} + V_r \quad (r = 2, 3, \dots, L^t),$$

где

$$\begin{aligned} c_{\nu 1} &= -\frac{k_{\nu 1}}{D_1} \quad (\nu = 2, 3, \dots, L^t); \\ c_{\nu\mu} &= -\frac{1}{D_{\mu}} (k_{\nu\mu} - \sum_{\lambda=1}^{\mu-1} D_{\lambda} c_{\mu\lambda} c_{\nu\lambda}) \quad (\mu = 2, 3, \dots, \nu - 1; \nu = 3, 4, \dots, L^t); \end{aligned}$$

$$D_1 = D[V_1] = k_{11}; \quad D_{\nu} = D[V_{\nu}] = k_{\nu\nu} - \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} D_{\nu} |c_{\nu\lambda}|^2 \quad (\nu = 2, 3, \dots, L^t). \quad (2.1.28)$$

Для удобства введем функции

$$z_{\nu}(t) = \int_0^T f_{\nu}(\tau) K_X(t, \tau) d\tau \quad (\nu = 1, 2, \dots, L^t). \quad (2.1.29)$$

На основании (2.1.20) имеем:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= a^t \varphi_{00}(t) + b_{000}^t \psi_{00}(t), \\ z_{\nu}(t) &= \sum_{k=0}^{2^j-1} [h_{jkn}^t \varphi_{jk}(t) + d_{jkn}^t \psi_{jk}(t)] \quad (2.1.30) \\ (\nu &= 2, 3, \dots, L^t; \nu = 2^j + n + 1; j = 0, 1, \dots, J^t; k, n = 0, 1, \dots, 2^j - 1). \end{aligned}$$

Тогда координатные функции  $x_{\nu}(t)$  определяются последовательно формулами:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{D_1} z_1(t); \quad x_{\nu}(t) = \frac{1}{D_{\nu}} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} d_{\nu\lambda} z_{\lambda}(t) + z_{\nu}(t) \right\}; \\ d_{\nu\lambda} &= c_{\nu\lambda} + \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} d_{\mu\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \nu - 2); \quad d_{\nu, \nu-1} = c_{\nu, \nu-1} \\ (\nu &= 2, 3, \dots, L^t). \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

Также координатные функции  $x_{\nu}(t)$  можно представить в виде линейных комбинаций базисных вейвлет функций вида (2.1.18):

$$x_1(t) = \frac{1}{D_1} \{a^t \varphi_{00}(t) + b_{000}^t \psi_{00}(t)\}; \quad (2.1.32)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{D_2} \{(d_{21} a^t + h_{000}^t) \varphi_{00}(t) + (d_{21} b_{000}^t + d_{000}^t) \psi_{00}(t)\}; \quad (2.1.33)$$

$$\begin{aligned} x_3(t) = & \frac{1}{D_3} \{ (d_{31}a^t + d_{32}h_{000}^t) \varphi_{00}(t) + (d_{31}b_{000}^t + d_{32}d_{000}^t) \psi_{00}(t) + \\ & + h_{100}^t \varphi_{10}(t) + h_{110}^t \varphi_{11}(t) + d_{100}^t \psi_{10}(t) + d_{110}^t \psi_{11}(t) \}; \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

$$\begin{aligned} x_4(t) = & \frac{1}{D_4} \{ (d_{41}a^t + d_{42}h_{000}^t) \varphi_{00}(t) + (d_{41}b_{000}^t + d_{42}d_{000}^t) \psi_{00}(t) + \\ & + \sum_{k=0}^1 (d_{43}h_{1k0}^t + h_{1k1}^t) \varphi_{1k}(t) + \sum_{k=0}^1 (d_{43}d_{1k0}^t + d_{1k1}^t) \psi_{1k}(t) \}. \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

Далее для  $v=5, 6, \dots, L^t$  введем обозначения:

$$x_v(t) = x_{jn}^*(t) \quad (2.1.36)$$

$$(v = 2^j + n + 1; j = 2, 3, \dots, J^t; k, n = 0, 1, \dots, 2^j - 1).$$

Если  $n=0$ , то  $v = 2^j + 1$  для  $j = 2, 3, \dots, J^t$  и

$$\begin{aligned} x_v(t) = x_{j0}^*(t) = & \frac{1}{D_v} \{ (d_{v1}a^t + d_{v2}h_{000}^t) \varphi_{00}(t) + (d_{v1}b_{000}^t + d_{v2}d_{000}^t) \psi_{00}(t) + \\ & + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{2^i-1} \sum_{n_1=0}^{2^i-1} d_{v\lambda} (h_{ikn_1}^t \varphi_{ik}(t) + d_{ikn_1}^t \psi_{ik}(t)) + \sum_{k=0}^{2^j-1} (h_{jk0}^t \varphi_{jk}(t) + d_{jk0}^t \psi_{jk}(t)) \} \end{aligned} \quad (2.1.37)$$

для  $\lambda = 2^i + n_1 + 1$ .

Если  $n \neq 0$ , то  $v = 2^j + n + 1$  для  $j = 2, 3, \dots, J^t; n = 0, 1, \dots, 2^j - 1$  и

$$\begin{aligned} x_v(t) = x_{jn}^*(t) = & \frac{1}{D_v} \{ (d_{v1}a^t + d_{v2}h_{000}^t) \varphi_{00}(t) + (d_{v1}b_{000}^t + d_{v2}d_{000}^t) \psi_{00}(t) + \\ & + \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{2^i-1} \sum_{n_1=0}^{2^i-1} d_{v\lambda} (h_{ikn_1}^t \varphi_{ik}(t) + d_{ikn_1}^t \psi_{ik}(t)) + \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n_1=0}^{n-1} d_{v\lambda_1} (h_{ikn_1}^t \varphi_{ik}(t) + d_{ikn_1}^t \psi_{ik}(t)) + \\ & + \sum_{k=0}^{2^j-1} (h_{jk0}^t \varphi_{jk}(t) + d_{jk0}^t \psi_{jk}(t)) \} \text{ для } \lambda = 2^i + n_1 + 1, \lambda_1 = 2^j + n_1 + 1. \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

Выражения (2.1.32)–(2.1.38) можно записать в общем виде:

$$x_v(t) = \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} \left[ a_{vjk}^x \varphi_{jk}(t) + d_{vjk}^x \psi_{jk}(t) \right] (v = 1, 2, \dots, L^t). \quad (2.1.39)$$

В этих обозначениях

$$\begin{aligned} a_{100}^x &= \frac{a^t}{D_1}; \quad d_{100}^x = \frac{b_{000}^t}{D_1}; \\ a_{200}^x &= \frac{d_{21}a^t + h_{000}^t}{D_2}; \quad d_{200}^x = \frac{d_{21}b_{000}^t + d_{000}^t}{D_2}; \\ a_{300}^x &= \frac{d_{31}a^t + d_{32}h_{000}^t}{D_3}; \quad d_{300}^x = \frac{d_{31}b_{000}^t + d_{32}d_{000}^t}{D_3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{310}^x &= \frac{h_{100}^t}{D_3}; \quad a_{311}^x = \frac{h_{110}^t}{D_3}; \quad d_{310}^x = \frac{d_{100}^t}{D_3}; \quad d_{311}^x = \frac{d_{110}^t}{D_3}; \\
a_{400}^x &= \frac{d_{41}a^t + d_{42}h_{000}^t}{D_4}; \quad d_{400}^x = \frac{d_{41}b_{000}^t + d_{42}d_{000}^t}{D_4}; \\
a_{410}^x &= \frac{d_{43}h_{100}^t + h_{101}^t}{D_4}; \quad a_{411}^x = \frac{d_{43}h_{110}^t + h_{111}^t}{D_4}; \\
d_{410}^x &= \frac{d_{43}d_{100}^t + d_{101}^t}{D_4}; \quad d_{411}^x = \frac{d_{43}d_{110}^t + d_{111}^t}{D_4}; \\
a_{500}^x &= \frac{d_{51}a^t + d_{52}h_{000}^t}{D_5}; \quad d_{500}^x = \frac{d_{51}b_{000}^t + d_{52}d_{000}^t}{D_5}; \\
a_{510}^x &= \frac{d_{53}h_{100}^t + d_{54}h_{101}^t}{D_5}; \quad a_{411}^x = \frac{d_{53}h_{110}^t + d_{54}h_{111}^t}{D_5}; \\
d_{510}^x &= \frac{d_{53}d_{100}^t + d_{54}d_{101}^t}{D_5}; \quad d_{511}^x = \frac{d_{53}d_{110}^t + d_{54}d_{111}^t}{D_4}; \\
a_{520}^x &= \frac{h_{200}^t}{D_5}; \quad a_{521}^x = \frac{h_{210}^t}{D_5}; \quad d_{520}^x = \frac{d_{200}^t}{D_5}; \quad d_{521}^x = \frac{d_{210}^t}{D_5}; \\
a_{522}^x &= \frac{h_{220}^t}{D_5}; \quad a_{523}^x = \frac{h_{230}^t}{D_5}; \quad d_{522}^x = \frac{d_{220}^t}{D_5}; \quad d_{523}^x = \frac{d_{230}^t}{D_5} \text{ и т.д.}
\end{aligned}$$

Таким образом, получен следующий новый результат.

**Теорема 2.1.5.** Пусть выполнены условия:

- 1) действительная УдСФ имеет конечные первый и вторые моменты в области  $[0, T]$ ;
- 2) действительная ковариационная функция удовлетворяет условию:  $K_X(t_1, t_2) \in L^2([0, T] \times [0, T])$ ;
- 3) в пространстве  $L^2[0, T]$  определен ортонормированный вейвлет базис, порожденный вейвлетами с конечным носителем, вида (2.1.18)

Тогда вейвлет каноническое разложение УдСФ  $X(t)$  на  $[0, T]$  имеет вид

$$X(t) = m_X(t) + \sum_{v=1}^{L^t} V_v x_v(t),$$

где  $V_1, \dots, V_{L^t}$  – некоррелированные СВ с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями  $D_v$ , вычисляемыми по формулам (2.1.28);  $x_1(t), \dots, x_{L^t}(t)$  – координат-

ные функции, определяемые рекуррентными формулами (2.1.30), (2.1.31) или линейными комбинациями базисных вейвлет функций (2.1.32)-(2.1.39).

На основе теоремы 2.1.5 получен вейвлет алгоритм построения КР скалярной нестационарной СФ и ее ковариационной функции на основе ортонормированного вейвлет базиса, порожденного вейвлетами с конечными носителями.

### **Алгоритм 2.1.5.**

1. Определение в пространстве  $L^2[0, T]$  ортонормированного вейвлет базиса, порожденного вейвлетами с конечными носителями, вида (2.1.18).
2. Представление ковариационной функции  $K_X(t_1, t_2)$  в виде ВЛР (2.1.20), и определение коэффициентов  $k_{\nu\mu}(\nu, \mu = 1, 2, \dots, L^t)$  по формулам (2.1.27).
3. Вычисление дисперсий  $D_\nu(\nu = 1, 2, \dots, L^t)$  некоррелированных СВ  $V_1, \dots, V_{L^t}$  по формулам (2.1.28).
4. Определение вида координатных функций  $x_1(t), \dots, x_{L^t}(t)$  по рекуррентным формулам (2.1.30), (2.1.31) или линейными комбинациями базисных вейвлет функций (2.1.32)–(2.1.39).

*В приложении П.1* проведен сравнительный анализ построения КР на основе тригонометрического базиса и вейвлет КР на примере типовой скалярной случайной функции. *В приложении П.2* дано описание ИПО "СтИТ-КРВЛ.1", разработанного на основе алгоритма 2.1.5. *В приложении П.3* приведены примеры аналитического построения ВЛКР скалярных случайных функций.

## **2.2. Построение канонического разложения векторной ударной случайной функции**

### **2.2.1. Каноническое разложение векторной УдСФ**

Применим к составляющей векторной УдСФ (ВУдСФ)  $X_h(t)$ , рассматриваемой как УдСФ аргумента  $t$  и номера  $h$  теорию КР, изложенную в подразделе 2.1. Для этого достаточно во всех формулах заменить аргумент  $t$  совокупностью аргумента  $t$  и номера  $h$  составляющей ВУдСФ  $X(t)$ . Тогда формула (2.1.1) даст следующее КР ВУдСФ  $X(t) = [X_1(t) \dots X_l(t)]^T$ :

$$X(t) = m^x(t) + \sum_v V_\nu x_\nu(t), \quad X_h(t) = m_h^x + \sum_v V_\nu x_{vh}(t) \quad (h = \overline{1, l}), \quad (2.2.1)$$

где  $m^x(t) = [m_1^x(t) \dots m_l^x(t)]^T$ . При этом формула (2.1.5), определяющая координатные функции, примет вид

$$x_v(t) = [x_{v1}(t) \dots x_{vn}(t)]^T, \quad x_{vh}(t) = \frac{1}{D_v} M[X_h^0(t) \bar{V}_v] \quad (h=1, l). \quad (2.2.2)$$

Таким образом, каноническое разложение ВУдСФ представляет собой совместное КР всех ее составляющих с одними и теми же случайными коэффициентами  $V_v$ . При этом координатные функции получаются естественно различными для различных составляющих.

Заменяя в формуле (2.1.2) аргумент  $t$  совокупностью аргумента  $t_1$  и номера  $h_1$  составляющей ВУдСФ  $X(t)$  и аргумент  $t'$  совокупностью аргумента  $t_2$  и номера  $h_2$ , найдем КР элементов матрицы ковариационных функций

$$K^x(t_1, t_2) = \|K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2)\|_{h_1, h_2=1}^l \text{ в виде:}$$

$$K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2) = \sum_v D_v x_{vh_1}(t_1) \overline{x_{vh_2}(t_2)} \quad (h_1, h_2 = 1, \dots, l). \quad (2.2.3)$$

Применяя формулу (2.1.7) ко всем составляющим ВУдСФ  $X(t)$ , получим формулу для оценки точности представления ее составляющих отрезком канонического разложения:

$$\Delta_h^N = M[|R_{Nh}(t)|^2] = K_{hh}^x(t, t) - \sum_{v=1}^N D_v |x_{vh}(t)|^2 \quad (h=1, l). \quad (2.2.4)$$

Справедливо следующее утверждение [21].

**Теорема 2.2.1.** *Если векторная УдСФ  $X(t)$  обладает конечными моментами первого и второго порядков, то из канонического разложения ВУдСФ  $X(t)$  вытекает КР матрицы ее ковариационных функций, и наоборот, если ковариационная матрица представлена КР с линейно-независимыми координатными функциями, то ВУдСФ может быть представлена КР с теми же координатными функциями.*

## 2.2.2. Вейвлет каноническое разложение векторной УдСФ в заданной области изменения аргумента

Пусть каждый элемент ковариационной функции  $K^X(t_1, t_2)$  действительной ВУдСФ  $X(t) = [X_1(t), \dots, X_l(t)]^T$ , заданной на интервале  $[0, T]$ , принадлежит пространству  $L^2([0, T] \times [0, T])$ . В пространстве  $L^2[0, T]$  определим ортонормированный вейвлет базис вида (2.1.18). В пространстве  $L^2([0, T] \times [0, T])$  определим двумерный ортонормированный вейвлет базис в виде тензорного произведения двух вейвлет базисов вида (2.1.18) для случая, когда масштабирование по обеим переменным происходит одинаково, вида (2.1.19). Тогда действительная функция  $K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2)$  имеет сходящееся вейвлет разложение:

$$K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2) = a^{t h_1 h_2} \Phi_{00}^A(t_1, t_2) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} [h_{jkn}^{t h_1 h_2} \Psi_{jkn}^H(t_1, t_2) + \\ + b_{jkn}^{t h_1 h_2} \Psi_{jkn}^B(t_1, t_2) + d_{jkn}^{t h_1 h_2} \Psi_{jkn}^D(t_1, t_2)], \quad (2.2.5)$$

где

$$a^{t h_1 h_2} = \int_0^T \int_0^T K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2) \Phi_{00}^A(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

$$h_{jkn}^{t h_1 h_2} = \int_0^T \int_0^T K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^H(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

$$b_{jkn}^{t h_1 h_2} = \int_0^T \int_0^T K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^B(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

$$d_{jkn}^{t h_1 h_2} = \int_0^T \int_0^T K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^D(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Пусть СВ  $V_\nu$  в (2.2.1) имеют вид:

$$V_\nu = \sum_{h=1}^l \int_0^T a_{\nu h}(t) X_h^\circ(t) dt, \quad \nu = 1, 2, \dots, L^t. \quad (2.2.6)$$

Из условия некоррелированности СВ  $V_\nu$  и  $V_\mu$  ( $\nu \neq \mu$ ) следует, что

$$M[V_\nu V_\mu] = \sum_{h_1}^l \sum_{h_2}^l \int_0^T \int_0^T a_{\nu h_1}(t_1) a_{\mu h_2}(t_2) K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0. \quad (2.2.7)$$

При этом дисперсии СВ  $V_\nu$  равны

$$D_\nu = D[V_\nu] = \sum_{h_1}^l \sum_{h_2}^l \int_0^T \int_0^T a_{\nu h_1}(t_1) a_{\nu h_2}(t_2) K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Координатные функции  $x_{\nu h}(t)$  в (2.2.1) вычисляются по формулам

$$x_{\nu h}(t) = \frac{1}{D_\nu} M[X_h^\circ(t) V_\nu] = \frac{1}{D_\nu} \sum_{g=1}^l \int_0^T a_{\nu g}(s) K_{hg}^x(t, s) ds \quad (h = 1, \dots, l). \quad (2.2.8)$$

Тогда из (2.2.7) следует условие биортогональности

$$\sum_{h=1}^l \int_0^T a_{vh}(t) x_{\mu h}(t) dt = \delta_{v\mu}. \quad (2.2.9)$$

Следуя подразделу 2.1.1, одномерный вейвлет базис (2.1.18) представим в виде (2.1.22). Положим  $a_{1h}(t) = f_1(t)$  ( $h = 1, \dots, l$ ), тогда получим

$$D_1 = \sum_{h_1}^l \sum_{h_2}^l \int_0^T f_1(t_1) f_1(t_2) K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (2.2.10)$$

$$x_{1h}(t) = \frac{1}{D_1} \sum_{g=1}^l \int_0^T f_1(s) K_{hg}^x(t, s) ds. \quad (2.2.11)$$

Примем  $a_{2h}(t) = c_{21} a_{1h}(t) + f_2(t)$  ( $h = 1, \dots, l$ ). Из (2.2.9) следует, что

$$\sum_{g=1}^l \int_0^T a_{2h}(t) x_{1g}(t) dt = 0. \quad (2.2.11)$$

Отсюда находим  $c_{21} = - \sum_{g=1}^l \int_0^T f_2(t) x_{1g}(t) dt$ .

Предположим, что определены функции  $a_{vh}(t)$  и  $x_{vh}(t)$  для  $v=1, \dots, \mu-1$ , удовлетворяющие условиям (2.2.8) и (2.2.9), а также дисперсии  $D_v$  для  $v=1, \dots, \mu-1$ , тогда

$$\begin{aligned} a_{\mu h}(t) &= \sum_{v=1}^{\mu-1} c_{vh} a_{vh}(t) + f_\mu(t), \\ c_{\mu v} &= - \sum_{h=1}^l \int_0^T f_\mu(t) x_{vh}(t) dt \quad (v = 1, \dots, \mu-1). \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Так же, как и в подразделе 2.1.1, введем вспомогательные CB

$A_r = \sum_{h=1}^l \int_0^T f_r(t) X_h(t) dt$  ( $r = 1, 2, \dots, L^t$ ) с ковариационными моментами

$$k_{v\mu} = M[A_v^\circ A_\mu^\circ] = \sum_{h_1}^l \sum_{h_2}^l \int_0^T f_v(t_1) f_\mu(t_2) K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (v, \mu = 1, 2, \dots, L^t).$$

На основании (2.2.5) имеем:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \sum_{h_1}^l \sum_{h_2}^l a^{th_1 h_2}; \quad k_{12} = \sum_{h_1}^l \sum_{h_2}^l h_{000}^{th_1 h_2}; \\ k_{21} &= \sum_{h_1}^l \sum_{h_2}^l b_{000}^{th_1 h_2}; \quad k_{22} = \sum_{h_1}^l \sum_{h_2}^l d_{000}^{th_1 h_2}; \\ k_{v\mu} &= \sum_{h_1}^l \sum_{h_2}^l d_{jkn}^{th_1 h_2} \text{ для } v = 2^j + k + 1; \mu = 2^j + n + 1; \\ j &= 1, 2, \dots, J^t; k, n = 0, 1, \dots, 2^j - 1. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Остальные взаимные ковариационные моменты равны нулю:  $k_{v\mu} = 0$ .

На основании (2.2.6), (2.2.10), (2.2.12) имеем

$$A_1^\circ = V_1, \quad A_r^\circ = - \sum_{v=1}^{r-1} c_{rv} V_v + V_r \quad (r = 2, 3, \dots, L^t),$$

где

$$\begin{aligned} c_{\nu 1} &= -\frac{k_{\nu 1}}{D_1} \quad (\nu = 2, 3, \dots, L^t); \\ c_{\nu \mu} &= -\frac{1}{D_\mu} \left( k_{\nu \mu} - \sum_{\lambda=1}^{\mu-1} D_\lambda c_{\mu \lambda} c_{\nu \lambda} \right) \quad (\mu = 2, 3, \dots, \nu-1; \nu = 3, 4, \dots, L^t); \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

$$D_1 = D[V_1] = k_{11}; \quad D_\nu = D[V_\nu] = k_{\nu \nu} - \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} D_\nu |c_{\nu \lambda}|^2 \quad (\nu = 2, 3, \dots, L^t). \quad (2.2.15)$$

Для упрощения вида координатных функций  $x_\nu(t) = [x_{\nu 1}(t), \dots, x_{\nu l}(t)]^T$  ( $\nu = 1, 2, \dots, L^t$ ) введем вспомогательные функции:

$$z_{\nu h}(t) = \sum_{g=1}^l \int_0^T f_\nu(s) K_{hg}^x(t, s) ds \quad (\nu = 1, 2, \dots, L^t). \quad (2.2.16)$$

На основании (2.2.5) имеем:

$$\begin{aligned} z_{1h}(t) &= \sum_{g=1}^l [a^{thg} \varphi_{00}(t) + b_{000}^{thg} \psi_{00}(t)], \\ z_{\nu h}(t) &= \sum_{g=1}^l \sum_{k=0}^{2^j-1} [h_{jkn}^{thg} \varphi_{jk}(t) + d_{jkn}^{thg} \psi_{jk}(t)] \\ &\quad (\nu = 2, 3, \dots, L^t; \nu = 2^j + n + 1; j = 0, 1, \dots, J^t; k, n = 0, 1, \dots, 2^j - 1). \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Тогда координатные функции  $x_{\nu h}(t)$  определяются рекуррентными формулами:

$$\begin{aligned} x_{1h}(t) &= \frac{1}{D_1} z_{1h}(t); \quad x_{\nu h}(t) = \frac{1}{D_\nu} \{ \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} d_{\nu \lambda} z_{\lambda h}(t) + z_{\nu h}(t) \} \quad (\nu = 2, 3, \dots, L^t); \\ d_{\nu \lambda} &= c_{\nu \lambda} + \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-1} c_{\nu \mu} d_{\mu \lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \nu-2); \quad d_{\nu, \nu-1} = c_{\nu, \nu-1}. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Также представим координатные функции  $x_{\nu h}(t)$  в виде линейных комбинаций базисных вейвлет функций вида (2.1.18):

$$x_{1h}(t) = \frac{1}{D_1} \sum_{g=1}^l \{ a^{thg} \varphi_{00}(t) + b_{000}^{thg} \psi_{00}(t) \}; \quad (2.2.19)$$

$$x_{2h}(t) = \frac{1}{D_2} \sum_{g=1}^l \{ (d_{21} a^{thg} + h_{000}^{thg}) \varphi_{00}(t) + (d_{21} b_{000}^{thg} + d_{000}^{thg}) \psi_{00}(t) \}; \quad (2.2.20)$$

$$\begin{aligned} x_{3h}(t) &= \frac{1}{D_3} \sum_{g=1}^l \{ (d_{31} a^{thg} + d_{32} h_{000}^{thg}) \varphi_{00}(t) + (d_{31} b_{000}^{thg} + d_{32} d_{000}^{thg}) \psi_{00}(t) + \\ &\quad + h_{100}^{thg} \varphi_{10}(t) + h_{110}^{thg} \varphi_{11}(t) + d_{100}^{thg} \psi_{10}(t) + d_{110}^{thg} \psi_{11}(t) \}; \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

$$\begin{aligned} x_{4h}(t) &= \frac{1}{D_4} \sum_{g=1}^l \{ (d_{41} a^{thg} + d_{42} h_{000}^{thg}) \varphi_{00}(t) + (d_{41} b_{000}^{thg} + d_{42} d_{000}^{thg}) \psi_{00}(t) + \\ &\quad + \sum_{k=0}^1 (d_{43} h_{1k0}^{thg} + h_{1k1}^{thg}) \varphi_{1k}(t) + \sum_{k=0}^1 (d_{43} d_{1k0}^{thg} + d_{1k1}^t) \psi_{1k}(t) \}. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Далее  $\nu = 5, 6, \dots, L^t$  введем обозначения:

$$x_{\nu h}(t) = x_{jnh}^*(t) \quad (2.2.23)$$

$$; \nu = 2^j + n + 1; j = 2, 3, \dots, J^t; k, n = 0, 1, \dots, 2^j - 1).$$

Если  $n=0$ , то  $\nu = 2^j + 1$  для  $j = 2, 3, \dots, J^t$  и

$$\begin{aligned} x_{vh}(t) = x_{j0h}^*(t) &= \frac{1}{D_\nu} \sum_{g=1}^l \{(d_{\nu 1} a^{thg} + d_{\nu 2} h_{000}^{thg}) \varphi_{00}(t) + (d_{\nu 1} b_{000}^{thg} + d_{\nu 2} d_{000}^{thg}) \psi_{00}(t) + \\ &+ \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{2^i-1} \sum_{n_1=0}^{2^i-1} d_{\nu \lambda} (h_{ikn_1}^{thg} \varphi_{ik}(t) + d_{ikn_1}^{thg} \psi_{ik}(t)) + \sum_{k=0}^{2^j-1} (h_{jk0}^{thg} \varphi_{jk}(t) + d_{jk0}^{thg} \psi_{jk}(t))\} \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

для  $\lambda = 2^i + n_1 + 1$ .

Если  $n \neq 0$ , то  $\nu = 2^j + n + 1$  для  $j = 2, 3, \dots, J^t; n = 0, 1, \dots, 2^j - 1$  и

$$\begin{aligned} x_{vh}(t) = x_{jnh}^*(t) &= \frac{1}{D_\nu} \sum_{g=1}^l \{(d_{\nu 1} a^{thg} + d_{\nu 2} h_{000}^{thg}) \varphi_{00}(t) + (d_{\nu 1} b_{000}^{thg} + d_{\nu 2} d_{000}^{thg}) \psi_{00}(t) + \\ &+ \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{2^i-1} \sum_{n_1=0}^{2^i-1} d_{\nu \lambda} (h_{ikn_1}^{thg} \varphi_{ik}(t) + d_{ikn_1}^{thg} \psi_{ik}(t)) + \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n_1=0}^{n-1} d_{\nu \lambda_1} (h_{ikn_1}^{thg} \varphi_{ik}(t) + d_{ikn_1}^{thg} \psi_{ik}(t)) + \\ &+ \sum_{k=0}^{2^j-1} (h_{jk0}^{thg} \varphi_{jk}(t) + d_{jk0}^{thg} \psi_{jk}(t))\} \text{ для } \lambda = 2^i + n_1 + 1, \lambda_1 = 2^j + n_1 + 1. \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Выражения (2.2.19) – (2.2.25) можно записать в общем виде:

$$x_{vh}(t) = \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} [a_{\nu jk}^{th} \varphi_{jk}(t) + d_{\nu jk}^{th} \psi_{jk}(t)] \quad (\nu = 1, 2, \dots, L^t). \quad (2.2.26)$$

В итоге имеем искомое КР элементов векторной ударной случайной функции  $X(t) = [X_1(t), \dots, X_l(t)]^T$  на  $[0, T]$ :

$$X_h(t) = m_h^x(t) + \sum_{\nu=1}^{L^t} V_\nu x_{\nu h}(t) \quad (h = 1, \dots, l). \quad (2.2.27)$$

Тогда КР элементов ковариационной функции  $K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2)$  имеет вид:

$$K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2) = \sum_{\nu=1}^{L^t} D_\nu x_{\nu h_1}(t_1) x_{\nu h_2}(t_2). \quad (2.2.28)$$

Таким образом, получен следующий новый результат.

**Теорема 2.2.2.** Пусть выполнены следующие условия:

1) векторная УДСФ  $X(t) = [X_1(t), \dots, X_l(t)]^T$  на  $[0, T]$  обладает конечными моментами первого и второго порядка;

2) элементы ковариационной функции  $K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2)$  принадлежат пространству  $L^2([0, T] \times [0, T])$ ;

3) в пространстве  $L^2[0, T]$  определен ортонормированный вейвлет-базис, порожденный вейвлетами с конечным носителем, вида (2.1.18).

Тогда ВЛКР составляющих ВУДСФ  $X(t) = [X_1(t), \dots, X_l(t)]^T$  на  $[0, T]$  имеет вид (2.2.27), где  $V_1, \dots, V_{L^t}$  – некоррелированные СВ с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями  $D_\nu$ , вычисляемыми по формулам (2.2.13)–(2.2.15);  $x_1(t), \dots, x_{L^t}(t)$  – координатные функции, определяемые рекуррентными формулами

(2.2.16), (2.2.17) или линейными комбинациями базисных вейвлет функций (2.2.19)–(2.2.26).

На основе теоремы 2.2.2 получен вейвлет алгоритм построения КР векторной УдСФ и ее ковариационной функции на основе ортонормированного вейвлет базиса, порожденного вейвлетами с конечным носителем.

### **Алгоритм 2.2.2.**

1. Определение в пространстве  $L^2[0, T]$  ортонормированного вейвлет-базиса, порожденного вейвлетами с конечными носителями, вида (2.1.18).
2. Представление элементов ковариационной функции  $K_{h_1 h_2}^x(t_1, t_2)$  в виде ВЛР (2.2.5), и определение параметров  $k_{\nu\mu}(\nu, \mu = 1, 2, \dots, L^t)$  по формулам (2.2.13).
3. Вычисление дисперсий  $D_\nu (\nu = 1, 2, \dots, L^t)$  некоррелированных СВ  $V_1, \dots, V_{L^t}$  по формулам (2.2.14), (2.2.15).
4. Определение вида координатных функций  $x_1(t), \dots, x_{L^t}(t)$  по рекуррентным формулам (2.2.16)–(2.2.18) или линейными комбинациями базисных вейвлет функций (2.2.19)–(2.2.26).

В *приложении П.4* изложен рекуррентный алгоритм аналитического построения ВЛКР двумерной векторной случайной функции в заданной области изменения аргумента.

## **2.3. Канонические разложения линейных и квазилинейных преобразований УдСФ**

Предположим, что известны математическое ожидание и ковариационная функция скалярной УдСФ  $X(t)$ . Поставим задачу найти математическое ожидание и ковариационную функцию УдСФ вида

$$Y(s) = AX(t), \quad (2.3.1)$$

где  $A$  – произвольный линейный оператор. В [21] доказана следующая теорема:

**Теорема 2.3.1.** *Пусть заданы математическое ожидание  $m_x(t)$  и ковариационная функция  $K_x(t, t')$  скалярной СФ  $X = X(t)$ . Тогда математическое ожидание и ковариационная функция скалярного линейного преобразования (2.3.1) при условии переместительности оператора  $A$  и операции математического ожидания определяются формулами*

$$m_y(s) = Am_x(t), \quad (2.3.2)$$

$$K_y(s, s') = A_t \overline{A_t} K_x(t, t') = \overline{A_t} A_t K_x(t, t'), \quad (2.3.3)$$

Выразив скалярную УдСФ  $X(t)$  в виде канонического разложения

$$X(t) = m_x(t) + \sum_v V_v x_v(t), \quad (2.3.4)$$

получим КР скалярной СФ  $Y(t)$ :

$$Y(s) = m_y(s) + \sum_v V_v y_v(s), \quad (2.3.5)$$

где  $m_y(s)$  определяется формулой (2.3.2), а координатные функции  $y_v(s)$  формулой

$$y_v(s) = Ax_v(t). \quad (2.3.6)$$

На основании (2.1.2) и (2.1.3) ковариационная функция и дисперсия скалярной СФ  $Y(t)$  выражаются формулами

$$K_y(s, s') = \sum_v D_v y_v(s) \overline{y_v(s')}, \quad (2.3.7)$$

$$D_y(s) = \sum_v D_v |y_v(s)|^2. \quad (2.3.8)$$

Имеет место следующее утверждение [21].

**Теорема 2.3.2.** В условиях теоремы 2.3.1, если известно КР скалярной УдСФ  $X(t)$  (2.3.4), то математическое ожидание и ковариационная функция линейного преобразования (2.3.1) допускают КР (2.3.5) и (2.3.7), в которых  $m_y(s)$  и  $y_v(s)$  определяются (2.3.2) и (2.3.6).

Общее линейное преобразование векторной УдСФ  $X(t) = [X_1(t) \dots X_n(t)]^T$  для каждой компоненты  $Y_p(s)$  вектора  $Y(s) = [Y_1(s) \dots Y_m(s)]^T$  выражается формулой

$$Y(s) = AX(t), \quad Y_p(s) = \sum_{h=1}^n A_{ph} X_h(t) \quad (p = \overline{1, m}), \quad (2.3.9)$$

где  $A_{ph}$  ( $p = \overline{1, m}; h = \overline{1, n}$ ) – произвольные линейные операторы. Предполагая, что операция математического ожидания переместительна со всеми линейными операторами  $A_{ph}$ , известна формула для математического ожидания векторной СФ  $Y(t)$  [21]:

$$m^y(s) = \|m_p^y(s)\|, \quad m_p^y(s) = \sum_{h=1}^n A_{ph} m_h^x(t) \quad (p = \overline{1, m}). \quad (2.3.10)$$

Матрица ковариационных функций векторной СФ  $Y(t)$  (т.е. совокупность ковариационных функций и взаимных ковариационных функций всех ее составляющих) определяется формулами:

$$K_y(s, s') = \|K_{pq}^y(s, s')\|, \quad K_{pq}^y(s, s') = \sum_{h,l=1}^n A_{ph}^t \overline{A_{ql}^{t'}(t')} K_{hl}^x(t, t') \quad (p, q = \overline{1, m}). \quad (2.3.11)$$

Справедливо следующее утверждение [21].

**Теорема 2.3.3.** Пусть задан вектор математических ожиданий  $m^x(t) = [m_1^x(t) \dots m_n^x(t)]^T$  и матрица ковариационных функций  $K^x(t, t') = \|K_{hl}^x(t, t')\|$  ( $h = \overline{1, n}; \quad l = \overline{1, m}$ ) векторной УдСФ  $X(t)$ . Тогда вектор математических ожиданий  $m^y(s) = [m_1^y(s) \dots m_m^y(s)]^T$  и матрица ковариационных функций  $K_y(s, s') = \|K_{pq}^y(s, s')\|$  линейного преобразования вида (2.3.9) при условии переместительности оператора  $A$  и операции математического ожидания  $M$  определяются формулами (2.3.10) и (2.3.11).

Выразив элементы векторной УдСФ  $X(t) = [X_1(t) \dots X_n(t)]^T$  каноническим разложением

$$X_p(t) = m_p^x(t) + \sum_v V_v x_{vp}(t) \quad (p = \overline{1, n}), \quad (2.3.12)$$

получим КР элементов векторной СФ  $Y(s) = [Y_1(s) \dots Y_m(s)]^T$ :

$$Y_p(s) = m_p^x(s) + \sum_{h=1}^n V_h y_{hp}(s) \quad (p = \overline{1, m}), \quad (2.3.13)$$

где координатные функции определяются формулой

$$y_{vp}(s) = \sum_{h=1}^n A_{ph} x_{vh}(t) \quad (p = \overline{1, m}). \quad (2.3.14)$$

В силу (2.3.3) элементы матрицы ковариационных функций векторной СФ  $Y(t)$  выражаются через координатные функции формулой

$$K_y(s, s') = \|K_{pq}^y(s, s')\|, \quad K_{pq}^y(s, s') = \sum_v D_v y_{vp}(s) \overline{y_{vq}(s')}, \quad p, q = \overline{1, m}. \quad (2.3.15)$$

Справедливо следующее утверждение [21].

**Теорема 2.3.4.** В условиях теоремы 2.3.3, если известно КР векторной УдСФ  $X(t)$  (2.3.12), то векторная функция  $Y(s)$  и матрица ее ковариационных функций допускают КР (2.3.13) и (2.3.15), в которых вектор математических

ожиданий  $m_y(s)$  и координатные функции  $y_{vp}(s)$  определяются согласно (2.3.10) и (2.3.14).

Теперь рассмотрим канонические разложения квазилинейных преобразований УдСФ. Линеаризация нелинейных преобразований может быть применена в двух различных вариантах. Во-первых, можно непосредственно линеаризовать заданную зависимость между УдСФ и заменить таким образом нелинейные уравнения, связывающие УдСФ, линейными. Во-вторых, можно применить методы КР, которые приводят к замене операций над УдСФ операциями над обычными СВ, после чего можно применить обычный в теории вероятностей метод линеаризации функциональных зависимостей между СВ.

Метод непосредственной линеаризации преобразования УдСФ состоит в замене всех заданных уравнений, связывающих УдСФ, приближенными линейными уравнениями, достаточно хорошо отражающими истинную зависимость между УдСФ в области практически возможных реализаций УдСФ. Так как математические ожидания УдСФ являются средними значениями, около которых рассеиваются их возможные реализации, то практически удобнее всего производить линеаризацию соотношений между УдСФ относительно их отклонений от математических ожиданий, т.е. центрированных УдСФ. При этом все функции, входящие в заданные уравнения, следует разложить в ряды Тейлора по центрированным УдСФ и отбросить члены этих рядов выше первой степени. Степень точности получаемого таким образом приближения может быть оценена по максимальной возможной величине отброшенных членов в области практически возможных реализаций УдСФ. Заменив данные уравнения, связывающие УдСФ, приближенными линейными уравнениями, можем применить теорию линейных преобразований УдСФ для приближенного определения математических ожиданий и ковариационных функций УдСФ, полученных в результате рассматриваемого нелинейного преобразования.

## 2.4. О моделировании ударной случайной функции

Как известно, непосредственное экспериментальное изучение сложных случайных ударных явлений часто требует чрезмерно больших затрат, а иногда и принципиально невозможно. В таких случаях прибегают к статистическому моделированию изучаемых ударных явлений. Средства компьютерной техники дают возможность имитировать практически без ограничений сложнейшие ударные явления и процессы. В этом случае используется *метод статистического моделирования* [21], как научный метод исследования, позволяющий сочетать теоретические расчеты с имитацией различных экспериментов, а частично и с натурными экспериментами над отдельными элементами, исследуемых стохастических систем. Метод статистического моделирования основан на компьютерном моделировании (имитации) ударного явления с помощью теоретических зависимостей с непосредственным моделированием влияющих на его течение случайных факторов и на статистической обработке получаемых результатов. Его основой являются *модели УдСФ* в виде ее *канонического разложения*, в том числе *вейвлет KP*, и событий с заданными вероятностями.

Этот метод для решения задачи анализа точности сводится к многократному непосредственному компьютерному моделированию ударного явления, включая моделирование тех УдСФ, вероятностные характеристики которых известны и последующему статистическому оцениванию вероятностных характеристик полученных.

Его достоинством является возможность включения в процесс моделирования некоторых реальных элементов, в том числе не поддающихся математическому описанию. Недостатком этого метода является необходимость многократного моделирования УдСФ, чтобы получить выборку, по которой необходимые статистические характеристики могли быть оценены с достаточной точностью.

## 2.5. Выводы к разделу 2

1. Для анализа и моделирования существенно нестационарной скалярной ударной случайной функции и ее ковариационной функции на основе ортогональных вейвлетов с компактным носителем разработан алгоритм построения вейвлет канонического разложения (Теорема 2.1.5 и алгоритм 2.1.5).
2. В приложении П1 приведены результаты сравнительного анализа построения КР на основе тригонометрического базиса и вейвлет КР на основе базиса вейвлетов Хаара для типовой скалярной СФ, который показал что точность ВЛКР значительно выше аналогичного КР на основе тригонометрического базиса.
3. В приложении П2 дано описание инструментального программного обеспечения построения ВЛКР случайной функции "СтИТ-КРВЛ.1", реализующего алгоритм 2.1.5.
4. Для иллюстрации теоремы 2.1.5 в приложении П.3 приведены примеры аналитического построения ВЛКР скалярных СФ.
5. Для анализа и моделирования существенно нестационарной векторной ударной случайной функции и ее матрицы ковариационных функций на основе ортогональных вейвлетов с компактным носителем разработан алгоритм построения вейвлет канонического разложения (Теорема 2.2.2 и алгоритм 2.2.2).
6. Для иллюстрации теоремы 2.2.2 применительно к двумерной векторной СФ детально разработан рекуррентный алгоритм построения ВЛКР, представленный в приложении П4.

### 3. ВЕЙВЛЕТ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА ТОЧНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ УДАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

#### 3.1 Корреляционные методы и алгоритмы анализа точности линейных УдСтС

##### 3.1.1 Линейные УдСтС

Следуя [19, 20], рассмотрим линейную УдСтС следующего вида:

$$\dot{Y} = aY + a_0 + bV, \quad Y(t_0) = Y_0, \quad (3.1.1)$$

где  $Y = Y(t)$  – вектор состояния УдСтС размерности  $p$ ;  $V = V(t)$  – белый шум (в широком смысле) размерности  $n_v$  с интенсивностью  $\nu = \nu(t)$ ;  $a = a^{\text{уд}}(t)$ ,  $a_0 = a_0^{\text{уд}}(t)$ ,  $b = b^{\text{уд}}(t)$  – известные коэффициенты размерности  $(p \times p)$ ,  $(p \times 1)$ ,  $(p \times n_v)$  соответственно.

В основе корреляционной теории УдСФ лежат известные обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\dot{m}_y = am_y + a_0, \quad m_y(t_0) = m_0; \quad (3.1.2)$$

$$\dot{K}_y = aK_y + K_y a^T + b\nu b^T, \quad K_y(t_0) = K_0; \quad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial K_y(t_1, t_2)}{\partial t_2} = K_y(t_1, t_2)a(t_2)^T, \quad K_y(t_1, t_1) = K_y(t_1) \text{ при } t_1 < t_2;$$

$$K_y(t_1, t_2) = K_y(t_2, t_1)^T \quad \text{при } t_1 > t_2; \quad (3.1.5)$$

где  $m_y$  – вектор математического ожидания,  $K_y$  – ковариационная матрица,  $K_y(t_1, t_2)$  – матрица ковариационных функций СтП  $Y(t)$ .

Рассмотрим систему (3.1.1) на интервале времени  $[t_0, T]$ . С помощью замены переменных

$$\bar{t} = \frac{(t-t_0)}{(T-t_0)} \quad (3.1.6)$$

сведем (3.1.1) к соответствующему векторному линейному стохастическому уравнению

$$\bar{Y}' = \bar{a}(\bar{t})\bar{Y} + \bar{a}_0(\bar{t}) + \bar{b}(\bar{t})\bar{V}(\bar{t}) \quad (3.1.7)$$

при  $\bar{t} \in [0, 1]$  с начальным условием

$$\bar{Y}(0)=Y_0 \quad (3.1.8)$$

и белым шумом  $\bar{V}(\bar{t})$  с интенсивностью

$$\bar{v}(\bar{t})=v((T-t_0)\bar{t}+t_0). \quad (3.1.9)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{Y}(\bar{t}) &= Y((T-t_0)\bar{t}+t_0), \bar{V}(\bar{t}) = V((T-t_0)\bar{t}+t_0), \\ \bar{a}(\bar{t}) &= (T-t_0)a((T-t_0)\bar{t}+t_0), \bar{a}_0(\bar{t}) = (T-t_0)a_0((T-t_0)\bar{t}+t_0), \\ \bar{b}(\bar{t}) &= (T-t_0)b((T-t_0)\bar{t}+t_0). \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Штрихом отмечена операция дифференцирования по безразмерному времени  $\bar{t}$ . В дальнейшем для простоты записи положим  $\bar{t} = t$ .

### 3.1.2 Вейвлет метод вычисления математического ожидания

Для решения уравнения

$$\bar{m}' = \bar{a}\bar{m} + \bar{a}_0, \quad \bar{m}(0) = m_0, \quad (3.1.11)$$

определяющего математическое ожидание  $\bar{m}=M\bar{Y}$ , применим вейвлет версию метода Галеркина [23] и метод вейвлетов Хаара [24]. Будем считать, что элементы матричных функций  $\bar{m}', \bar{m}, \bar{a}, \bar{a}_0$  принадлежат пространству  $L^2[0,1]$ . Как показано в [121], они могут быть разложены в сходящиеся вейвлет ряды по ортогональным вейвлетам Хаара. Следуя [24], определим ортонормированный базис вейвлетов Хаара в следующем виде:

$$w_1(t) = \varphi(t) = \varphi_{00}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0,1], \\ 0 & \text{при } t \notin [0,1], \end{cases} \quad (3.1.12)$$

$$w_2(t) = \psi(t) = \psi_{00}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -1 & \text{при } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \\ 0 & \text{при } t \notin [0,1], \end{cases} \quad (3.1.13)$$

$$w_l(t) = \psi_{jk}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^j} & \text{при } t \in \left[\frac{k}{l}, \frac{k+0.5}{l}\right), \\ -\sqrt{2^j} & \text{при } t \in \left[\frac{k+0.5}{l}, \frac{k+1}{l}\right), \\ 0 & \text{при } t \notin \left[\frac{k}{l}, \frac{k+1}{l}\right). \end{cases} \quad (3.1.14)$$

Здесь  $\varphi = \varphi(t)$  – масштабирующая функция,  $\psi = \psi(t)$  – материнский вейвлет,

$$\psi_{jk} = \psi_{jk}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k), \quad (3.1.15)$$

$k=0,1,\dots,l-1$ ;  $l=2^j$ ;  $j=1,2,\dots,J$ ;  $L=2 * 2^J$ ;  $i=l+k+1$ ;  $i=3,4,\dots,L$ ;  $J$  – максимальный уровень вейвлет разрешения.

Кроме этого, определим интегралы от вейвлетов Хаара

$$p_i(t) = \int_0^t w_i(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2, \dots, L), \quad (3.1.16)$$

где  $p_1(t) = \begin{cases} t & \text{при } t \in [0,1], \\ 0 & \text{при } t \notin [0,1], \end{cases}$ ,  $p_i(t) = \begin{cases} \sqrt{2^j} \left( t - \frac{k}{l} \right) & \text{при } t \in \left[ \frac{k}{l}, \frac{k+0.5}{l} \right), \\ \sqrt{2^j} \left( \frac{k+1}{l} - t \right) & \text{при } t \in \left[ \frac{k+0.5}{l}, \frac{k+1}{l} \right), \\ 0 & \text{при } t \notin \left[ \frac{k}{l}, \frac{k+1}{l} \right), \end{cases} \quad (i=2,3,\dots,L).$

Для каждой составляющей  $\bar{m}_h = \bar{m}_h(t)$ ,  $h=1,\dots,p$ , вектора  $\bar{m} = \bar{m}(t)$  уравнение (3.1.11) дает выражения:

$$\bar{m}'_h = \sum_{k=1}^p \bar{a}_{hk}(t) \bar{m}_k(t) + \bar{a}_{0h}(t), \quad \bar{m}_h(0) = m_{0h}. \quad (3.1.17)$$

Представим  $\bar{m}'_h$  в виде ВЛР по ортонормированному базису вейвлетов Хаара:

$$\bar{m}'_h = \sum_{i=1}^L c_{hi} w_i(t), \quad \text{где } c_{hi} = \int_0^1 \bar{m}'_h(\tau) w_i(\tau) d\tau. \quad (3.1.18)$$

Тогда решение (3.1.17) относительно  $\bar{m}_h$  можно записать в виде

$$\bar{m}_h(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^L c_{hi} w_i(\tau) d\tau + m_{0h} = \sum_{i=1}^L c_{hi} p_i(t) + m_{0h} \quad (h = 1, \dots, p). \quad (3.1.19)$$

После подстановки (3.1.18), (3.1.19) в (3.1.17) получим соотношение

$$\sum_{i=1}^L c_{hi} w_i(t) = \sum_{k=1}^p \bar{a}_{hk}(t) \left[ \sum_{i=1}^L c_{hi} p_i(t) + m_{0h} \right] + \bar{a}_{0h}(t). \quad (3.1.20)$$

Проецируя (3.1.20) на базис  $w_i(t)$ , приходим к системе  $(L \times p)$  линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^L c_{hi} (w_i(t), w_s(t)) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^L c_{hi} (\bar{a}_{hk}(t) p_i(t), w_s(t)) + m_{0h} \sum_{i=1}^L (\bar{a}_{hk}(t), w_s(t)) + (\bar{a}_{0h}(t), w_s(t)) \quad (s=1,2,\dots,L; h=1,2,\dots,p). \quad (3.1.21)$$

В силу ортонормированности системы вейвлетов  $w_i(t)$  из (3.1.21) получаем

$$c_{hs} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^L c_{hi} (\bar{a}_{hk}(t) p_i(t), w_s(t)) + m_{0h} \sum_{i=1}^L (\bar{a}_{hk}(t), w_s(t)) + (\bar{a}_{0h}(t), w_s(t)) \quad (s=1,2,\dots,L; h=1,2,\dots,p). \quad (3.1.22)$$

Представим функции  $\bar{a}_{hk}(t) p_i(t)$ ,  $\bar{a}_{hk}(t)$ ,  $\bar{a}_{0h}(t)$  в виде ВЛР по ортонормированному базису вейвлетов Хаара:

$$\bar{a}_{hk}(t) p_i(t) = \sum_{j=1}^L g_j^{hki} w_j(t) \quad (i=1,2,\dots,L; h,k=1,2,\dots,p), \quad (3.1.23)$$

$$\bar{a}_{hk}(t) = \sum_{j=1}^L q_j^{hk} w_j(t) \quad (h,k=1,2,\dots,p), \quad (3.1.24)$$

$$\bar{a}_{0h}(t) = \sum_{j=1}^L \rho_j^h w_j(t) \quad (h,k=1,2,\dots,p), \quad (3.1.25)$$

где

$$g_j^{hki} = (\bar{a}_{hk}(t)p_i(t), w_j(t)) = \int_0^1 \bar{a}_{hk}(\tau)p_i(\tau)w_j(\tau)d\tau, \quad (3.1.26)$$

$$q_j^{hk} = (\bar{a}_{hk}(t), w_j(t)) = \int_0^1 \bar{a}_{hk}(\tau)w_j(\tau)d\tau, \quad (3.1.27)$$

$$\rho_j^h = (\bar{a}_{0h}(t), w_j(t)) = \int_0^1 \bar{a}_{0h}(\tau)w_j(\tau)d\tau. \quad (3.1.28)$$

Уравнения (3.1.22) можно записать в следующем окончательном виде:

$$c_{hs} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^L c_{hi} g_s^{hki} + m_{0h} \sum_{i=1}^L q_s^{hk} + \rho_s^h \quad (s=1,2,\dots,L; h=1,2,\dots,p). \quad (3.1.29)$$

В итоге имеем новый результат.

### Теорема 3.1.1.

*Пусть выполнены условия:*

- 1) вектор состояния  $Y=Y(t)$  размерности  $p$  определяется линейной дифференциальной СтС (3.1.1);
- 2) допускается возможность приведения системы (3.1.1) к виду (3.1.7) и как следствие возможность приведения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для математического ожидания  $m(t)=MY(t)$  (3.1.2) к виду (3.1.11);
- 3) скалярные функции  $\bar{m}_h'$ ,  $\bar{m}_h$ ,  $\bar{a}_{hk}$ ,  $\bar{a}_{0h}$  ( $h,k=1,2,\dots,p$ ) принадлежат пространству  $L^2[0,1]$ ;
- 4) в пространстве  $L^2[0,1]$  определен ортонормированный базис вейвлетов Хаара вида (3.1.12)- (3.1.15).

Тогда решение системы дифференциальных уравнений (3.1.17) для составляющих  $\bar{m}_h$  вектора математического ожидания стохастического процесса  $\bar{Y}(t)$  имеет вид

$$\bar{m}_h(t) = \sum_{i=1}^L c_{hi} p_i(t) + m_{0h} \quad (h = 1, \dots, p), \quad (3.1.30)$$

где  $p_i(t)$  – известные функции вида (3.1.16), коэффициенты  $c_{hi}$  определяются системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (3.1.29).

На основании теоремы 3.1.1 получен алгоритм решения системы дифференциальных уравнений для математических ожиданий элементов стохастического

векторного процесса, описываемого линейным стохастическим дифференциальным уравнением (3.1.1). В основе алгоритма лежит технология представления квадратично интегрируемых функций в виде сходящихся ВЛР.

### **Алгоритм 3.1.1.**

1. Определение в пространстве  $L^2[0,1]$  ортонормированной системы вейвлетов Хаара вида (3.1.12)–(3.1.15).
2. Вычисление интегралов от вейвлетов Хаара по формулам (3.1.16).
3. Приведение СтС (3.1.1) к виду (3.1.7), и как следствие приведение системы обыкновенных дифференциальных уравнений для математического ожидания  $m(t)=MY(t)$  (3.1.2) к виду (3.1.11).
4. Определение коэффициентов вейвлет разложения функций  $\bar{a}_{hk}(t)p_i(t)$ ,  $\bar{a}_{hk}(t)$ ,  $\bar{a}_{0h}(t)$  по ортонормированному базису вейвлетов Хаара по формулам (3.1.23) – (3.1.28).
5. Составление и решение СЛАУ (3.1.29) для определения коэффициентов  $c_{hi}$ .
6. Вычисление составляющих  $\bar{m}_h$  вектора математического ожидания  $\bar{Y}(t)$  по формуле (3.1.30).
7. Переход к математическому ожиданию  $Y(t)$  по формуле

$$\bar{m}_h(\bar{t}) = m_h((T - t_0)\bar{t} + t_0).$$

### **3.1.3 Вейвлет метод вычисления ковариационной матрицы**

Из (3.1.3) для каждого элемента  $\bar{K}_{r_1 r_2} = \bar{K}_{r_1 r_2}(t)$  ( $r_1, r_2 = 1, 2, \dots, p$ ) ковариационной матрицы  $\bar{K} = M[(\bar{Y} - \bar{m})(\bar{Y} - \bar{m})^T]$  имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\bar{K}'_{r_1 r_2}(t) = \sum_{h=1}^p \bar{a}_{r_1 h}(t) \bar{K}_{h r_2}(t) + \sum_{h=1}^p \bar{K}_{h r_1}(t) \bar{a}_{r_2 h}(t) + \sum_{h=1}^p \sum_{s=1}^n \bar{b}_{r_1 h}(t) \bar{v}_{hs}(t) \bar{b}_{r_2 s}(t), \quad \bar{K}_{r_1 r_2}(0) = K_{0 r_1 r_2}. \quad (3.1.31)$$

В силу симметричности ковариационной матрицы  $\bar{K}$  достаточно составить уравнения только для  $r_1 = \overline{1, p}$ ,  $r_2 = \overline{r_1, p}$ . При этом элементы  $\bar{K}_{h r_2}$  для  $h > r_2$  заменяются

равными  $\bar{K}_{r_2 h}$ , а  $\bar{K}_{\eta h}$  при  $r_1 > h$  заменяются на  $\bar{K}_{h r_1}$ . В результате количество уравнений сокращается и будет равно  $\frac{p(p+1)}{2}$ . Введем обозначение

$$B_{r_1 r_2}(t) = \sum_{h=1}^n \sum_{s=1}^n \bar{b}_{r_1 h}(t) \bar{v}_{hs}(t) \bar{b}_{r_2 s}(t), \quad (3.1.32)$$

тогда повторяя рассуждение п. 3.1.2, получим следующие формулы:

$$\bar{K}'_{r_1 r_2} = \sum_{i=1}^L c_i^{r_1 r_2} w_i(t), \quad (3.1.33)$$

$$c_i^{r_1 r_2} = \int_0^1 \bar{K}'_{r_1 r_2}(\tau) w_i(\tau) d\tau, \quad (3.1.34)$$

$$\bar{K}_{r_1 r_2} = \sum_{i=1}^L c_i^{r_1 r_2} p_i(t) + K_{0 r_1 r_2}. \quad (3.1.35)$$

После подстановки (3.1.32)–(3.1.35) в (3.1.31) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L c_i^{r_1 r_2} w_i(t) &= \sum_{i=1}^L \sum_{h=1}^p c_i^{hr_2} \bar{a}_{r_1 h}(t) p_i(t) + \sum_{h=1}^p K_{0 r_2 h} \bar{a}_{r_1 h}(t) + \sum_{i=1}^L \sum_{h=1}^p c_i^{hr_1} \bar{a}_{r_2 h}(t) p_i(t) + \\ &+ \sum_{h=1}^p K_{0 \eta h} \bar{a}_{r_2 h}(t) + B_{r_1 r_2}(t) \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

Проецируя (3.1.36) на базис  $w_s(t)$ , получим систему из  $\frac{p(p+1)}{2} L$  обыкновенных линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $c_i^{r_1 r_2}$ :

$$c_s^{r_1 r_2} = \sum_{i=1}^L \sum_{h=1}^p c_i^{hr_2} g_s^{r_1 h} + \sum_{i=1}^L \sum_{h=1}^p c_i^{r_1 h} g_s^{r_2 h} + \sum_{h=1}^p K_{0 r_2 h} q_s^{r_1 h} + \sum_{h=1}^p K_{0 r_1 h} q_s^{r_2 h} + \rho_s^{r_1 r_2}, \quad (3.1.37)$$

где дополнительно к (3.1.26), (3.1.27) введены обозначения:

$$\rho_s^{r_1 r_2} = \int_0^1 B_{r_1 r_2}(\tau) w_s(\tau) d\tau. \quad (3.1.38)$$

В итоге имеем следующее новое утверждение.

### Теорема 3.1.2.

*Пусть выполнены условия теоремы 3.1.1, а также:*

- 1) допускается возможность приведения обыкновенных дифференциальных уравнений для элементов ковариационной матрицы, удовлетворяющих системе уравнений (3.1.3), к виду (3.1.31);
- 2) скалярные функции  $\bar{K}'_{r_1 r_2}$ ,  $\bar{K}_{r_1 r_2}$ ,  $B_{r_1 r_2}(t)$  ( $r_1, r_2 = 1, 2, \dots, p$ ) принадлежат пространству  $L^2[0, 1]$ ;

*Тогда решение системы дифференциальных уравнений (3.1.31) для элементов  $\bar{K}_{r_1 r_2}$  ковариационной матрицы стохастического процесса  $\bar{Y}(t)$  имеет вид*

(3.1.35), где  $p_i(t)$  – известные функции вида (3.1.16), коэффициенты  $c_i^{r_1 r_2}$  определяются системой линейной алгебраических уравнений (3.1.37).

На основе теоремы 3.1.2 получен алгоритм решения системы дифференциальных уравнений для элементов ковариационной матрицы СтП, описываемого линейным стохастическим дифференциальным уравнением (3.1.1). В основе алгоритма лежит вейвлет технология разложения квадратично интегрируемых функций.

### **Алгоритм 3.1.2.**

1. Определение в пространстве  $L^2[0,1]$  ортонормированной системы вейвлетов Хаара вида (3.1.12)- (3.1.15).
2. Вычисление интегралов от вейвлетов Хаара по формулам (3.1.16).
3. Приведение УдСтС (3.1.1) к виду (3.1.7), и как следствие приведение обыкновенных дифференциальных уравнений для элементов ковариационной матрицы, удовлетворяющих системе уравнений (3.1.3), к виду (3.1.31).
4. Определение коэффициентов ВЛР функций  $\bar{a}_{hk}(t)p_i(t)$ ,  $\bar{a}_{hk}(t)$ ,  $B_{r_1 r_2}(t)$  по ортонормированному базису вейвлетов Хаара по формулам (3.1.26), (3.1.27), (3.1.38).
5. Составление и решение СЛАУ (3.1.37) для определения коэффициентов  $c_i^{r_1 r_2}$ .
6. Вычисление элементов  $\bar{K}_{r_1 r_2}$  ковариационной матрицы  $\bar{Y}(t)$  по формуле (3.1.35).
7. Переход к ковариационной матрице  $Y(t)$  по формуле

$$\bar{K}_{r_1 r_2}(\bar{t}) = K_{r_1 r_2}((T - t_0)\bar{t} + t_0).$$

### **3.1.4 Вейвлет метод вычисления ковариационных функций**

Из (3.1.5) для каждого элемента  $\bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_2)$  ковариационной функции  $\bar{K}(t_1, t_2) = M[(\bar{Y}(t_1) - \bar{m}(t_1))(\bar{Y}(t_2) - \bar{m}(t_2))^T]$  в момент  $t_1$  имеем обыкновенное дифференциальное уравнение с соответствующим начальным условием:

$$\frac{\partial \bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \sum_{h=1}^p \bar{K}_{rh}(t_1, t_2) \bar{a}_{r_2 h}(t_2), \quad (3.1.39)$$

$$\bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_1) = \bar{K}_{r_1 r_2}(t_1), \quad (r_1, r_2 = \overline{1, p}, \quad t_1, t_2 \in [0, 1], \quad t_1 < t_2). \quad (3.1.40)$$

Повторяя рассуждения п. 3.1.2 и 3.1.3, придем к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial \bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \sum_{i=1}^L d_i^{r_1 r_2} w_i(t_2), \quad (3.1.41)$$

$$d_i^{r_1 r_2} = \int_0^1 \frac{\partial \bar{K}_{r_1 r_2}(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} w_i(\tau_2) d\tau_2, \quad (3.1.42)$$

$$\bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^L d_i^{r_1 r_2} p_i(t_2) + \bar{K}_{r_1 r_2}(t_1), \quad (3.1.43)$$

$$\sum_{i=1}^L d_i^{r_1 r_2} w_i(t_2) = \sum_{h=1}^p \bar{a}_{r_2 h}(t_2) \left[ \sum_{i=1}^{2L} d_i^{r_1 h} p_i(t_2) + \bar{K}_{r_1 h}(t_1) \right]. \quad (3.1.44)$$

Проецируя (3.1.44) на базис  $w_s(t_2)$  и учитывая (3.1.26), (3.1.27), получим систему  $p^2 \times L$  линейных уравнений для определения коэффициентов  $d_i^{r_1 r_2}$ :

$$d_s^{r_1 r_2} = \sum_{i=1}^L \sum_{h=1}^p d_i^{r_1 h} g_s^{r_2 h i} + \sum_{h=1}^p \bar{K}_{r_1 h}(t_1) q_s^{r_2 h} \quad (r_1, r_2 = \overline{1, p}, \quad s = \overline{1, L}) \quad (3.1.45)$$

Полученные результаты можно сформулировать в виде нового утверждения.

### Теорема 3.1.3.

*Пусть выполнены условия теорем 3.1.1 и 3.1.2, а также:*

1) *допускается возможность приведения обыкновенных дифференциальных уравнений для элементов матрицы ковариационных функций, удовлетворяющих системе уравнений (3.1.5), к виду (3.1.39), (3.1.40);*

2) *функции  $\frac{\partial \bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_2)}{\partial t_2}$ ,  $\bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_2)$  ( $r_1, r_2 = 1, 2, \dots, p$ ) относительно переменной  $t_2$  принадлежат пространству  $L^2[0, 1]$  при фиксированном значении  $t_1$  ( $t_1 \in [0, 1]$ ) .*

*Тогда решение системы дифференциальных уравнений (3.1.39), (3.1.40) для элементов  $\bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_2)$  ( $r_1, r_2 = 1, 2, \dots, p$ ) матрицы ковариационных функций стохастического процесса  $\bar{Y}(t)$  для  $t_1 < t_2$  имеет вид (3.1.43), где  $p_i(t)$  – известные функции вида (3.1.16), коэффициенты  $d_i^{r_1 r_2}$  определяются СЛАУ (3.1.45), значения функций  $\bar{K}_{r_1 r_2}(t_1)$  определяются теоремой 3.1.2.*

На основе теоремы 3.1.3 получен алгоритм решения системы дифференциальных уравнений для элементов матрицы ковариационных функций векторных СтП, описываемых линейным стохастическим дифференциальным уравнением (3.1.1). В основе алгоритма лежит технология представления квадратично интегрируемых функций в виде ВЛР.

### **Алгоритм 3.1.3.**

1. Определение в пространстве  $L^2[0,1]$  ортонормированной системы вейвлетов Хаара вида (3.1.12)- (3.1.15).
2. Вычисление интегралов от вейвлетов Хаара по формулам (3.1.16).
3. Приведение СтС (3.1.1) к виду (3.1.7), и как следствие приведение обыкновенных дифференциальных уравнений для элементов матрицы ковариационных функций, удовлетворяющих системе уравнений (3.1.5), к виду (3.1.39), (3.1.40);
4. Определение ковариационной матрицы  $\bar{K}_{r_1 r_2}(t_1)$  согласно алгоритму 3.1.2;
5. Составление и решение СЛАУ (3.1.45) для определения коэффициентов  $d_i^{r_1 r_2}$ .
6. Вычисление элементов  $\bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_2)$  матрицы ковариационных функций стохастического процесса  $\bar{Y}(t)$  по формуле (3.1.43).
7. Переход к элементам матрицы ковариационных функций СтП  $Y(t)$  по формуле

$$\bar{K}_{r_1 r_2}(\bar{t}_1, \bar{t}_2) = K_{r_1 r_2}((T - t_0)\bar{t}_1 + t_0, (T - t_0)\bar{t}_2 + t_0).$$

8. Нахождение  $K_{r_1 r_2}(t_1, t_2) = K_{r_2 r_1}(t_2, t_1)$  при  $t_2 < t_1$ .

## **3.2 Корреляционные методы и алгоритмы вейвлет анализа точности линейных УдСтС с параметрическими шумами**

### **3.2.1 Линейные УдСтС с параметрическими шумами**

Рассмотрим линейную УдСтС с параметрическими шумами вида

$$\dot{Y} = aY + a_0 + (b_0 + \sum_{n=1}^p b_n Y_n)V, Y(t_0) = Y_0. \quad (3.2.1)$$

Здесь  $Y$  – вектор состояния размерности  $p$ ,  $V$  –векторный белый шум в строгом смысле размерности  $n$  с интенсивностью  $\nu = \nu(t)$ ;  $a = a^{\text{уд}}(t)$ ,  $a_0 = a_0^{\text{уд}}(t)$ ,  $b = b^{\text{уд}}(t)$ ,  $b_n = b_n^{\text{уд}}(t)$  – известные матричные функции размерностей  $p \times p$ ,  $p \times 1$ ,  $p \times n$ ,  $p \times n$  соответственно;  $t \in [t_0, T]$ .

В [19, 20] для (3.2.1) получены точные корреляционные уравнения:

$$\dot{m} = am + a_0, m(t_0) = m_0, \quad (3.2.2)$$

$$\dot{K} = aK + Ka^T + b_0\nu b_0^T + \sum_{h=1}^p (b_h\nu b_0^T + b_0\nu b_h^T)m_h + \sum_{h=1}^p \sum_{l=1}^p b_h\nu b_l^T(m_h m_l + K_{hl}), K(t_0) = K_0, \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2} = K(t_1, t_2)a(t_2)^T, K(t_1, t_1) = K(t_1). \quad . \quad (3.2.4)$$

Здесь  $m = MY = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_p]^T$  – вектор математических ожиданий;  $K = K(t) = \|K_{ij}(t)\|_{i,j=1}^p$  – ковариационная матрица;  $K(t_1, t_2) = \|K_{ij}(t_1, t_2)\|_{i,j=1}^p$  – матрица ковариационных функций.

С помощью замены переменных  $\bar{t} = \frac{(t-t_0)}{(T-t_0)}$  ( $\bar{t} \in [0,1]$ ) сведем уравнение (3.2.1) к соответствующему векторному линейному стохастическому уравнению

$$\bar{Y}' = \bar{a}(\bar{t})\bar{Y} + \bar{a}_0(\bar{t}) + (\bar{b}_0(\bar{t}) + \sum_{n=1}^p \bar{b}_n(\bar{t})\bar{Y}_n) \bar{V}(\bar{t}) \quad (3.2.5)$$

с начальным условием  $\bar{Y}(0)=Y_0$  и белым шумом  $\bar{V}(\bar{t})$  с интенсивностью

$$\bar{\nu}(\bar{t})=\nu((T-t_0)\bar{t}+t_0),$$

где приняты следующие обозначения:

$$\bar{Y}(\bar{t})=Y((T-t_0)\bar{t}+t_0), \bar{V}(\bar{t})=V((T-t_0)\bar{t}+t_0),$$

$$\bar{a}(\bar{t})=(T-t_0)a((T-t_0)\bar{t}+t_0), \bar{a}_0(\bar{t})=(T-t_0)a_0((T-t_0)\bar{t}+t_0),$$

$$\bar{b}_0(\bar{t})=(T-t_0)b_0((T-t_0)\bar{t}+t_0), \bar{b}_n(\bar{t})=(T-t_0)b_n((T-t_0)\bar{t}+t_0).$$

Штрихом отмечена операция дифференцирования по безразмерному времени  $\bar{t}$ . В дальнейшем для простоты записи положим  $\bar{t}=t$ .

### 3.2.2 Вейвлет метод вычисления математического ожидания

Уравнение для математического ожидания  $\bar{m}=M\bar{Y}$  отделяется от уравнений для корреляционных характеристик и имеет вид

$$\bar{m}' = \bar{a}\bar{m} + \bar{a}_0, \bar{m}(0) = m_0, \quad (3.2.6)$$

который совпадает с видом уравнения (3.1.11) для линейных УдСтС. Повторяя рассуждения п. 3.1.2, получим следующее новое утверждение.

### **Теорема 3.2.1.**

*Пусть выполнены условия:*

- 1) вектор состояния  $Y=Y(t)$  размерности  $p$  определяется линейной дифференциальной СтС с параметрическими шумами (3.2.1);
- 2) допускается возможность приведения системы (3.2.1) к виду (3.2.5) и как следствие возможность приведения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для математического ожидания  $m(t)=MY(t)$  (3.2.2) к виду (3.2.6);
- 3) скалярные функции  $\bar{m}_h'$ ,  $\bar{m}_h$ ,  $\bar{a}_{hk}$ ,  $\bar{a}_{0h}$  ( $h,k=1,2,\dots,p$ ) принадлежат пространству  $L^2[0,1]$ ;
- 4) в пространстве  $L^2[0,1]$  определен ортонормированный базис вейвлетов Хаара вида (3.1.12)- (3.1.15).

*Тогда решение системы дифференциальных уравнений (3.2.6) для элементов  $\bar{m}_h$  вектора математического ожидания стохастического процесса  $\bar{Y}(t)$  имеет вид*

$$\bar{m}_h(t) = \sum_{i=1}^{2L} c_{hi} p_i(t) + m_{0h} \quad (h = 1, \dots, p), \quad (3.2.7)$$

где  $p_i(t)$  – известные функции вида (3.1.16), коэффициенты  $c_{hi}$  определяются СЛАУ (3.1.29).

**Алгоритм 3.2.1.** Алгоритм решения системы дифференциальных уравнений для математических ожиданий элементов стохастического векторного процесса, описываемого линейным стохастическим дифференциальным уравнением Ито с параметрическими шумами (3.2.1), в основе которого лежит теорема 3.2.1, полностью совпадает с алгоритмом 3.1.1.

### **3.2.3 Вейвлет метод вычисления ковариационной матрицы**

Уравнения для элементов  $\bar{K}_{r_1 r_2} = \bar{K}_{r_1 r_2}(t)$  ковариационной матрицы  $\bar{K} = M[(\bar{Y} - \bar{m})(\bar{Y} - \bar{m})^T]$  в силу ее симметричности составляются, как и в п. 3.1.3 для  $r_1 = 1,2, \dots, p; r_2 = 1,2, \dots, r_1$  и имеют вид:

$$\begin{aligned}
\bar{K}'_{r_1, r_2}(t) = & \sum_{l=1}^p \bar{a}_{r_1, l}(t) \bar{K}_{l, r_2}(t) + \sum_{l=1}^p \bar{K}_{r_1, l}(t) \bar{a}_{r_2, l}(t) + \sum_{s_1=1}^n \sum_{s_2=1}^n \bar{b}_{r_1, s_1}^0(t) \bar{v}_{s_1, s_2}(t) \bar{b}_{r_2, s_2}^0(t) + \\
& + \sum_{\kappa=1}^p \bar{m}_\kappa(t) \left[ \sum_{s_1=1}^n \sum_{s_2=1}^n \bar{b}_{r_1, s_1}^\kappa(t) \bar{v}_{s_1, s_2}(t) \bar{b}_{r_2, s_2}^0(t) + \sum_{s_1=1}^n \sum_{s_2=1}^n \bar{b}_{r_1, s_1}^0(t) \bar{v}_{s_1, s_2}(t) \bar{b}_{r_2, s_2}^\kappa(t) \right] + \\
& + \sum_{\kappa=1}^p \sum_{l=1}^p (\bar{m}_\kappa(t) \bar{m}_l(t) + \bar{K}_{\kappa l}(t)) \sum_{s_1=1}^n \sum_{s_2=1}^n \bar{b}_{r_1, s_1}^\kappa(t) \bar{v}_{s_1, s_2}(t) \bar{b}_{r_2, s_2}^l(t), \quad \bar{K}_{r_1, r_2}(0) = K_{r_1 r_2}^0, \quad t \in [0; 1]
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Введем в (3.2.8) следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
B_{r_1, r_2}^{00}(t) &= \sum_{s_1=1}^n \sum_{s_2=1}^n \bar{b}_{r_1, s_1}^0(t) \bar{v}_{s_1, s_2}(t) \bar{b}_{r_2, s_2}^0(t) \quad (k, l = \overline{1, p}), \\
B_{r_1, r_2}^{\kappa 0}(t) &= \sum_{s_1=1}^n \sum_{s_2=1}^n \bar{b}_{r_1, s_1}^\kappa(t) \bar{v}_{s_1, s_2}(t) \bar{b}_{r_2, s_2}^0(t) \quad (k = \overline{1, p}), \\
B_{r_1, r_2}^{0\kappa}(t) &= \sum_{s_1=1}^n \sum_{s_2=1}^n \bar{b}_{r_1, s_1}^0(t) \bar{v}_{s_1, s_2}(t) \bar{b}_{r_2, s_2}^\kappa(t) \quad (k = \overline{1, p}), \\
B_{r_1, r_2}^{\kappa l}(t) &= \sum_{s_1=1}^n \sum_{s_2=1}^n \bar{b}_{r_1, s_1}^\kappa(t) \bar{v}_{s_1, s_2}(t) \bar{b}_{r_2, s_2}^l(t) \quad (k, l = \overline{1, p}),
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

тогда уравнения (3.2.8) примут вид

$$\begin{aligned}
\bar{K}'_{r_1, r_2}(t) = & \sum_{l=1}^p \bar{a}_{r_1, l}(t) \bar{K}_{l, r_2}(t) + \sum_{l=1}^p \bar{K}_{r_1, l}(t) \bar{a}_{r_2, l}(t) + \\
& + B_{r_1, r_2}^{00}(t) + \sum_{\kappa=1}^p \bar{m}_\kappa(t) [B_{r_1, r_2}^{\kappa 0}(t) + B_{r_1, r_2}^{0\kappa}(t)] + \\
& + \sum_{\kappa=1}^p \sum_{l=1}^p (\bar{m}_\kappa(t) \bar{m}_l(t) + \bar{K}_{\kappa l}(t)) B_{r_1, r_2}^{\kappa l}(t).
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Будем считать, что элементы матричных функций  $\bar{K}'_{r_1 r_2}(t), \bar{K}_{r_1 r_2}(t)$  принадлежат пространству  $L^2[0, 1]$ . Как показано в [121], они могут быть разложены в сходящиеся вейвлеты по ортогональным вейвлетам Хаара.

Разложим левую часть уравнения (3.2.10) по ортонормированному базису вейвлетов Хаара (3.1.12) – (3.1.15):

$$\bar{K}'_{r_1, r_2}(t) = \sum_{i=1}^L c_i^{r_1 r_2} w_i(t), \tag{3.2.11}$$

$$c_i^{r_1, r_2} = \int_0^1 \bar{K}'_{r_1, r_2}(\tau) w_i(\tau) d\tau. \tag{3.2.12}$$

Тогда решение уравнения (3.2.10) примет вид

$$\bar{K}_{r_1, r_2}(t) = \sum_{i=1}^L c_i^{r_1 r_2} p_i(t) + K_{r_1, r_2}^0, \tag{3.2.13}$$

где  $p_i(t)$  – известные функции вида (3.1.16). Подставляя соотношения (3.2.13) в уравнение (3.2.10) и учитывая (3.2.7), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{r_1, r_2}^l(t) &= \sum_{i=1}^L \sum_{l=1}^p c_i^{l_2} \bar{a}_{r_1, l}(t) p_i(t) + \sum_{l=1}^p \bar{a}_{r_1, l}(t) K_{l, r_2}^0 + \sum_{i=1}^L \sum_{l=1}^p c_i^{r_1 l} \bar{a}_{r_2, l}(t) p_i(t) + \\
&+ \sum_{l=1}^p \bar{a}_{r_2, l}(t) K_{r_1, l}^0 + B_{r_1, r_2}^{00}(t) + \sum_{\kappa=1}^p \left[ B_{r_1, r_2}^{\kappa 0}(t) + B_{r_1, r_2}^{0 \kappa}(t) \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^L c_{\kappa, i} p_i(t) + m_{\kappa}^0 \right] + \\
&+ \sum_{\kappa=1}^p \sum_{l=1}^p B_{r_1, r_2}^{\kappa l}(t) \left\{ \left[ \sum_{i_1=1}^L c_{\kappa, i_1} p_{i_1}(t) + m_{\kappa}^0 \right] \cdot \left[ \sum_{i_2=1}^L c_{l, i_2} p_{i_2}(t) + m_l^0 \right] + \sum_{i=1}^L c_i^{\kappa l} p_i(t) + K_{\kappa l}^0 \right\} = \\
&= \sum_{i=1}^L \sum_{l=1}^p c_i^{l_2} \bar{a}_{r_1, l}(t) p_i(t) + \sum_{l=1}^p \bar{a}_{r_1, l}(t) K_{l, r_2}^0 + \sum_{i=1}^L \sum_{l=1}^p c_i^{r_1 l} \bar{a}_{r_2, l}(t) p_i(t) + \sum_{l=1}^p \bar{a}_{r_2, l}(t) K_{r_1, l}^0 + \\
&+ B_{r_1, r_2}^{00}(t) + \sum_{\kappa=1}^p \sum_{i=1}^L c_{\kappa, i} \left[ B_{r_1, r_2}^{\kappa 0}(t) + B_{r_1, r_2}^{0 \kappa}(t) \right] p_i(t) + \sum_{\kappa=1}^p m_{\kappa}^0 \left[ B_{r_1, r_2}^{\kappa 0}(t) + B_{r_1, r_2}^{0 \kappa}(t) \right] + \\
&+ \sum_{\kappa=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{i_1=1}^L \sum_{i_2=1}^L c_{\kappa, i_1} c_{l, i_2} B_{r_1, r_2}^{\kappa l}(t) p_{i_1}(t) p_{i_2}(t) + \sum_{\kappa=1}^p m_{\kappa}^0 \sum_{l=1}^p \sum_{i_2=1}^L c_{l, i_2} B_{r_1, r_2}^{\kappa l}(t) p_{i_2}(t) + \\
&+ \sum_{l=1}^p m_l^0 \sum_{\kappa=1}^p \sum_{i_1=1}^L c_{\kappa, i_1} B_{r_1, r_2}^{\kappa l}(t) p_{i_1}(t) + \sum_{\kappa=1}^p \sum_{l=1}^p B_{r_1, r_2}^{\kappa l}(t) \left( m_{\kappa}^0 m_l^0 + K_{\kappa l}^0 \right) + \sum_{\kappa=1}^p \sum_{l=1}^p c_i^{\kappa l} B_{r_1, r_2}^{\kappa l}(t) p_i(t).
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Далее будем считать, что ниже перечисленные функции принадлежат пространству  $L^2[0,1]$  и, следовательно, могут быть представлены в виде ВЛР по ортогональным вейвлетам Хаара (3.1.12) – (3.1.15):

$$\bar{a}_{l_k}(t) p_i(t) = \sum_{j=1}^L g_j^{lk} w_j(t), \tag{3.2.15}$$

$$\bar{a}_{l_k}(t) = \sum_{j=1}^L q_j^{lk} w_j(t), \tag{3.2.16}$$

$$B_{r_1, r_2}^{00}(t) = \sum_{j=1}^L h_{r_1, r_2, j}^{00} w_j(t), \tag{3.2.17}$$

$$B_{r_1, r_2}^{\kappa 0}(t) + B_{r_1, r_2}^{0 \kappa}(t) = \sum_{j=1}^L h_{r_1, r_2, j}^{0 \kappa} w_j(t), \tag{3.2.18}$$

$$B_{r_1, r_2}^{\kappa l}(t) = \sum_{j=1}^L h_{r_1, r_2, j}^{\kappa l} w_j(t), \tag{3.2.19}$$

$$\left[ B_{r_1, r_2}^{\kappa 0}(t) + B_{r_1, r_2}^{0 \kappa}(t) \right] p_i(t) = \sum_{j=1}^L u_{r_1, r_2, j}^{0 \kappa i} w_j(t), \tag{3.2.20}$$

$$B_{r_1, r_2}^{\kappa l}(t) p_i(t) = \sum_{j=1}^L u_{r_1, r_2, j}^{\kappa l i} w_j(t), \tag{3.2.21}$$

$$B_{r_1, r_2}^{\kappa l}(t) p_{i_1}(t) p_{i_2}(t) = \sum_{j=1}^L u_{r_1, r_2, j}^{\kappa l i_1 i_2} w_j(t) \quad (l, \kappa, r_1, r_2 = \overline{1, p}; i_1, i_2 = \overline{1, L}). \tag{3.2.22}$$

Проектируя уравнения (3.2.14) на вейвлет базис  $w_s(t)$ , получим систему  $Q = \frac{p(p+1)L}{2}$  линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $c_s^{r_1 r_2}$  ( $r_1 = \overline{1, p}; r_2 = \overline{1, r_1}; s = \overline{1, L}$ ):

$$\begin{aligned} c_s^{r_1 r_2} = & \sum_{i=1}^L \sum_{l=1}^p c_i^{lr_2} g_s^{rl} + \sum_{l=1}^p q_s^{rl} K_{l,r_2}^0 + \sum_{i=1}^L \sum_{l=1}^p c_i^{rl} g_s^{r_2 l} + \sum_{l=1}^p q_s^{rl} K_{r_1,l}^0 + h_{r_1,r_2,s}^{00} + \\ & + \sum_{\kappa=1}^p \sum_{i=1}^L c_{\kappa i} u_{r_1,r_2,s}^{0\kappa i} + \sum_{\kappa=1}^p m_{\kappa}^0 h_{r_1,r_2,s}^{0\kappa} + \sum_{\kappa=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{i_1=1}^L \sum_{i_2=1}^L c_{\kappa i_1} c_{\kappa i_2} u_{r_1,r_2,s}^{\kappa i_1 i_2} + \sum_{\kappa=1}^p m_{\kappa}^0 \sum_{l=1}^p \sum_{i_2=1}^L c_{l i_2} u_{r_1,r_2,s}^{\kappa l i_2} + \\ & + \sum_{l=1}^p m_l^0 \sum_{\kappa=1}^p \sum_{i_1=1}^L c_{\kappa i_1} u_{r_1,r_2,s}^{\kappa l i_1} + \sum_{\kappa=1}^p \sum_{l=1}^p c_{\kappa l} u_{r_1,r_2,s}^{\kappa l i_1} + \sum_{\kappa=1}^p \sum_{l=1}^p h_{r_1,r_2,s}^{\kappa l} (m_{\kappa}^0 m_l^0 + K_{\kappa,l}^0). \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Таким образом, имеем следующий новый результат.

### Теорема 3.2.2.

*Пусть выполнены условия теоремы 3.2.1, а также:*

- 1) допускается приведения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.2.3) к виду (3.2.8) для  $t \in [0,1]$ ;
- 2) скалярные функции  $\bar{a}_{r_1,l}(t)p_i(t)$ ,  $\bar{a}_{r_1,l}(t)$ ,  $B_{r_1,r_2}^{00}(t)$ ,  $[B_{r_1,r_2}^{00}(t) + B_{r_1,r_2}^{0\kappa}(t)]p_i(t)$ ,  $(B_{r_1,r_2}^{00}(t) + B_{r_1,r_2}^{0\kappa}(t))$ ,  $B_{r_1,r_2}^{\kappa l}(t)p_{i_1}(t)p_{i_2}(t)$ ,  $B_{r_1,r_2}^{\kappa l}(t)p_{i_2}(t)$ ,  $B_{r_1,r_2}^{\kappa l}(t)$  ( $i, k, l, r_1, r_2, i_1, i_2 = 1, 2, \dots, p$ ) при-  
наадлежат пространству  $L^2[0,1]$ ;

Тогда решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений для элементов ковариационной матрицы (3.2.8) стохастического процесса  $\bar{Y}(t)$  имеет вид (3.2.13), где  $p_i(t)$  – известные функции вида (3.1.16), коэффициенты  $c_s^{r_1 r_2}$  ( $r_1 = \overline{1, p}; r_2 = \overline{1, r_1}; s = \overline{1, L}$ ) определяются СЛАУ (3.2.23).

На основании теоремы 3.2.2 получен алгоритм решения системы дифференциальных уравнений для ковариационной матрицы стохастического векторного процесса, описываемого линейным стохастическим дифференциальным уравнением. Ито с параметрическими шумами (3.2.1). В основе алгоритма лежит технология разложения квадратично интегрируемых функций в сходящиеся вейвлет ряды.

### Алгоритм 3.2.2.

1. Определение в пространстве  $L^2[0,1]$  ортонормированной системы вейвлетов Хаара вида (3.1.12)- (3.1.15).
2. Вычисление интегралов от вейвлетов Хаара по формулам (3.1.16).

3. Приведение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.2.3) для элементов ковариационной матрицы  $K = K(t)$  к виду (3.2.8) для  $t \in [0,1]$ .

4. Определение коэффициентов ВЛР функций  $\bar{a}_{r_1,l}(t)p_i(t)$ ,  $\bar{a}_{r_1,l}(t)$ ,  $B_{r_1,r_2}^{00}(t)$ ,  $[B_{r_1,r_2}^{\kappa 0}(t) + B_{r_1,r_2}^{0\kappa}(t)]p_i(t)$ ,  $(B_{r_1,r_2}^{\kappa 0}(t) + B_{r_1,r_2}^{0\kappa}(t))$ ,  $B_{r_1,r_2}^{kd}(t)p_{i_1}(t)p_{i_2}(t)$ ,  $B_{r_1,r_2}^{kd}(t)p_{i_2}(t)$ ,  $B_{r_1,r_2}^{kd}(t)$  ( $i,k,l,r_1,r_2,i_1,i_2=1,2,\dots,p$ ) по ортонормированному базису вейвлетов Хаара по формулам (3.2.15)-(3.2.22).

5. Составление и решение СЛАУ (3.2.23) для определения коэффициентов  $c_s^{r_1 r_2}$  ( $r_1 = \overline{1, p}; r_2 = \overline{1, r_1}; s = \overline{1, L}$ ).

6. Вычисление элементов ковариационной матрицы стохастического процесса  $\bar{Y}(t)$  по формуле (3.2.13).

7. Переход к ковариационной матрице  $Y(t)$  по формуле

$$\bar{K}_{r_1 r_2}(\bar{t}) = K_{r_1 r_2}((T - t_0)\bar{t} + t_0).$$

### 3.2.4. Вейвлет метод вычисления матрицы ковариационных функций

Уравнения для элементов матрицы ковариационных функций (3.2.4) совпадают с соответствующими уравнениями для линейной СтС. Повторяя рассуждения п. 3.1.4, будем искать решение системы дифференциальных уравнений (3.2.4), выписанных для приведенного стохастического уравнения (3.2.5). Для каждого элемента  $\bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_2)$  ковариационной функции  $\bar{K}(t_1, t_2) = M(\bar{Y}(t_1) - \bar{m}(t_1))(\bar{Y}(t_2) - \bar{m}(t_2))^T$  в момент  $t_1$  имеем обыкновенное дифференциальное уравнение с соответствующим начальным условием

$$\frac{\partial \bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \sum_{h=1}^p \bar{K}_{r_1 h}(t_1, t_2) \bar{a}_{r_2 h}(t_2), \quad (3.2.24)$$

$$\bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_1) = \bar{K}_{r_1 r_2}(t_1), \quad (r_1, r_2 = \overline{1, p}, \quad t_1, t_2 \in [0,1], \quad t_1 < t_2). \quad (3.2.25)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (3.2.24) с начальными условиями (3.2.25) будем искать в виде:

$$\bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^L d_{r_1 r_2}^{i i} p_i(t_2) + \bar{K}_{r_1 r_2}(t_1). \quad (3.2.26)$$

Согласно п. 3.1.4 коэффициенты  $d_i^{r_1 r_2}$  удовлетворяют СЛАУ вида (3.1.45):

$$d_s^{r_1 r_2} = \sum_{i=1}^L \sum_{h=1}^p d_i^{r_1 h} g_s^{r_2 h i} + \sum_{h=1}^p \bar{K}_{r_1 h}(t_1) q_s^{r_2 h} \quad (r_1, r_2 = \overline{1, p}, \quad s = \overline{1, L}). \quad (3.2.27)$$

Имеет место следующее новое утверждение.

### Теорема 3.2.3.

*Пусть выполнены условия теорем 3.2.1 и 3.2.2; а также:*

- 1) допускается возможность приведения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.2.4) для элементов матрицы ковариационных функций  $K_{r_1 r_2}(t_1, t_2)$  ( $r_1, r_2 = 1, 2, \dots, p$ ) к виду (3.2.24), (3.2.25) для  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ ;
- 2) функции  $\frac{\partial \bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_2)}{\partial t_2}$ ,  $\bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_2)$  ( $r_1, r_2 = 1, 2, \dots, p$ ) относительно переменной  $t_2$  при фиксированном значении  $t_1$  ( $t_1 \in [0, 1]$ ) принадлежат пространству  $L^2[0, 1]$ .

*Тогда решение системы дифференциальных уравнений (3.2.24) с начальными условиями (3.2.25) для элементов  $\bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_2)$  ( $r_1, r_2 = 1, 2, \dots, p$ ) матрицы ковариационных функций стохастического процесса  $\bar{Y}(t)$  имеет вид (3.2.26) при  $t_1 < t_2$ , где  $p_i(t)$  – известные функции вида (3.1.16), коэффициенты  $d_i^{r_1 r_2}$  определяются СЛАУ (3.2.27), значения функций  $\bar{K}_{r_1 r_2}(t_1)$  определяются теоремой 3.2.2.*

На основании теоремы 3.2.3 получен алгоритм решения системы дифференциальных уравнений для матрицы ковариационных функций стохастического векторного процесса, описываемого линейным стохастическим дифференциальным уравнением Ито с параметрическими шумами (3.2.1). В его основе лежит технология разложения квадратично интегрируемых функций в сходящиеся вейвлет ряды.

### Алгоритм 3.2.3.

1. Определение в пространстве  $L^2[0, 1]$  ортонормированной системы вейвлетов Хаара вида (3.1.12)- (3.1.15).
2. Вычисление интегралов от вейвлетов Хаара по формулам (3.1.16).
3. Решение системы дифференциальных уравнений для ковариационной матрицы стохастического векторного процесса, описываемого линейным стохасти-

ческим дифференциальным уравнением Ито с параметрическими шумами (3.2.1) с применением алгоритма, полученного на основе теоремы 3.2.2.

4. Приведение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.2.4) для элементов матрицы ковариационных функций  $K^Y(t_1, t_2)$  к виду (3.2.24), (3.2.25) для  $t_1, t_2 \in [0, 1]$ .

5. Составление и решение системы линейных алгебраических уравнений (3.2.27) для определения коэффициентов  $d_i^{r_1 r_2}$ .

6. Вычисление элементов матрицы ковариационных функций стохастического процесса  $\bar{Y}(t)$  по формуле (3.2.26).

7. Переход к матрице ковариационных функций для  $Y(t)$  по формуле

$$\bar{K}_{r_1 r_2}(t_1, t_2) = K_{r_1 r_2}((T - t_0)\bar{t}_1 + t_0, (T - t_0)\bar{t}_2 + t_0).$$

9. Нахождение  $K_{r_1 r_2}(t_1, t_2) = K_{r_2 r_1}(t_2, t_1)$  при  $t_2 < t_1$ .

### **3.3. Модифицированный моментно-семиинвариантный метод и алгоритм анализа динамической точности нелинейной УдСтС**

Пусть вектор состояния  $Y$  нелинейной УдСтС описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито вида

$$dY = a(Y, t) + b(Y, t)dW, t \geq t_0, Y(t_0) = Y_0, \quad (3.3.1)$$

где  $Y = Y(t) \in R^p$  – стохастический процесс,  $Y_0$  – случайный вектор с известным распределением;  $W(t) \in R^n$ ;  $W_1(t), \dots, W_n$  – независимые между собой процессы с независимыми приращениями;  $a(y, t)$ ,  $b(y, t)$  – непрерывные или имеющие точки разрыва первого рода известные функции  $y$  и  $t$  размерности  $p \times 1$  и  $p \times n$  соответственно.  $Y_0$  не зависит от приращений  $W(t_2) - W(t_1)$  при  $t_0 \leq t_1 < t_2$ . Известна одномерная характеристическая функция  $h_1(\mu; t)$  процесса  $W(t)$ .

Для нелинейной УдСтС, описываемой многомерным стохастическим дифференциальным уравнением Ито, рассматривается задача анализа точности путем определения вероятностных моментов первого и второго порядков СтП с учетом определенного набора старших начальных моментов. Для решения этой задачи по-

сле предлагается использовать модифицированный моментно-семиинвариантный метод.

Как известно [20], приближенные методы параметризации неизвестных распределений вектора состояния СтС (3.3.1) основаны на аппроксимации неизвестных характеристической функции или плотности вероятности известными функциями, зависящими от конечного числа неизвестных параметров (моментов, семиинвариантов, квазимоментов и т.д.), что позволяет свести решение задачи анализа к нахождению этих параметров, удовлетворяющих системе обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений. Эти методы дают высокую точность решения задачи, но требуют составления и решения большого количества уравнений для параметров, особенно в случае большой размерности вектора состояния стохастической системы. Зависимость числа уравнений  $Q_1(p, N)$  для параметров распределений от размерности  $p$  вектора состояния и наивысшего порядка учитываемых параметров  $N$  вычисляется по формуле  $Q_1(p, N) = C_{N+p}^p - 1$ . Так, например, при анализе 10-мерной стохастической системы количество уравнений для моментов вектора состояния системы  $Q_1(10, 4) = 1000$ , если учитываются моменты до 4-го порядка.

Модифицированный моментно-семиинвариантный метод требует значительно меньшего объема вычислений. Идея метода была впервые изложена в [129] и состоит в составлении уравнений для математического ожидания, ковариационной матрицы и определенного набора старших моментов вектора состояния системы. При этом семиинварианты, не соответствующие этому набору старших моментов, полагаются равными нулю. Этот подход к замыканию системы для моментов дает лучшие результаты по сравнению с другими приближенными методами, например, с методом моментов, в котором обнуляются старшие моменты, порядок которых больше некоторого заданного натурального числа. Семиинварианты убывают с увеличением порядка в отличие от моментов, которые растут. Проверка работоспособности ММСМ на конкретных примерах СтС с полиномиальными нелинейностями показала его высокую эффективность [20, 129, 130]: метод незначительно уступает в точности полным методам стохастического анализа, например, мо-

ментно-семиинвариантному методу, и при этом количество уравнений для параметров распределений равно  $Q_2(p, N) = p + \frac{1}{2}p(p+1) + p(N-2)$ . Так, при  $p=10$  и  $N=4$  имеем  $Q_2(10,4)=85$ .

Основываясь на [20], для получения уравнений для начальных моментов

$$\alpha_r = \alpha_{r_1, r_2, \dots, r_p} = M[Y_1^{r_1} Y_2^{r_2} \dots Y_p^{r_p}]$$

( $r = [r_1, r_2, \dots, r_p]^T$  | $r$ | =  $r_1 + r_2 + \dots + r_p$ ;  $r_1, r_2, \dots, r_p = 0, 1, \dots$ ) стохастического процесса  $Y(t)$  воспользуемся формулой связи момента  $\alpha_r$  и характеристической функции (х.ф.)  $g_1(\lambda; t)$ :

$$\alpha_r = \alpha_{r_1, r_2, \dots, r_p} = [\frac{\partial^{|r|} g_1(\lambda; t)}{\partial(i\lambda_1)^{r_1} \dots \partial(i\lambda_p)^{r_p}}]_{\lambda=0}. \quad (3.3.2)$$

Уравнение для одномерной х.ф.  $g_1(\lambda; t)$  СтП  $Y(t)$ , заданного уравнением (3.3.1), имеет вид [20]:

$$\frac{\partial g_1(\lambda, t)}{\partial t} = M\{[i\lambda^T a(Y, t) + \chi(\lambda; Y, t)]e^{i\lambda^T Y}\}, \quad g_1(\lambda, t_0) = g_0(\lambda), \quad t \geq t_0, \quad (3.3.3)$$

где  $g_0(\lambda)$  – известная х.ф.  $Y_0$ ,  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_p]^T$ . Функция  $\chi$  определяется формулой  $\chi(\mu; t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln h_1(\mu; t)$ , после подстановки вместо  $\mu$  выражения  $b(Y, t)^T \lambda$  имеем

$$\chi(\lambda; Y, t) = \chi(b(Y, t)^T \lambda; t). \quad (3.3.4)$$

Применим формулу (3.3.2) к уравнению (3.3.3):

$$\dot{\alpha}_r = M \left\{ \frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1} \dots \partial(i\lambda_p)^{r_p}} [i\lambda^T a(Y, t) + \chi(\lambda; Y, t)] e^{i\lambda^T Y} \right\}_{\lambda=0},$$

$$\lambda_r(t_0) = M[Y_1(t_0)^{r_1} \dots Y_p(t_0)^{r_p}], \quad t > t_0. \quad (3.3.5)$$

Дифференцируя уравнения (3.3.5)  $r_1$  раз по  $i\lambda_1$ ,  $r_2$  раз по  $i\lambda_2$ ,  $\dots$ ,  $r_p$  раз по  $i\lambda_p$  и положив после этого  $\lambda=0$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_r = & M \left\{ \sum_{k=1}^p r_k a_k(Y, t) Y_1^{r_1} \dots Y_k^{r_{k-1}} \dots Y_p^{r_p} + \right. \\ & \left. + \sum_{h_1=0}^{r_1} \dots \sum_{h_p=0}^{r_p} C_{r_1}^{h_1} \dots C_{r_p}^{h_p} \left[ \frac{\partial^{h_1+\dots+h_p}}{\partial(i\lambda_1)^{h_1} \dots \partial(i\lambda_p)^{h_p}} \chi(\lambda; Y, t) \right]_{\lambda=0} Y_1^{r_1-h_1} \dots Y_p^{r_p-h_p} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Введем обозначение

$$Z_r(Y, t) = \sum_{k=1}^p r_k a_k(Y, t) Y_1^{r_1} \dots Y_k^{r_{k-1}} \dots Y_p^{r_p} + \\ + \sum_{h_1=0}^{r_1} \dots \sum_{h_p=0}^{r_p} C_{r_1}^{h_1} \dots C_{r_p}^{h_p} \frac{\partial^{h_1+\dots+h_p}}{\partial(i\lambda_1)^{h_1} \dots \partial(i\lambda_p)^{h_p}} [\chi(\lambda; Y, t)]_{\lambda=0} Y_1^{r_1-h_1} \dots Y_p^{r_p-h_p}.$$

Тогда уравнения (3.3.6) примут вид:

$$\dot{a}_r = M Z_r(Y, t)$$

или

$$\dot{a}_r = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_r(y, t) f_1(y, t) dy, \quad (3.3.7)$$

где  $f_1(y, t)$  – плотность вероятности  $Y(t)$ .

Для приближенного вычисления интегралов в уравнениях (3.3.7) аппрокси- мириуем плотность вероятности  $f_1(y, t)$  конечным отрезком ее ортогонального раз- ложения по биортогональной системе полиномов  $\{p_\nu(y), q_\nu(y)\}$  с весом  $\omega_1(y)$  [20]:

$$f_1(y, t) \approx \omega_1(y) [1 + \sum_{\beta=3}^N \sum_{|\nu|=\beta} c_\nu(t) p_\nu(y)], \quad (3.3.8)$$

где  $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_p$  для векторного индекса  $\nu = [\nu_1, \dots, \nu_p]^T$ ,  $\nu_1, \dots, \nu_p = 0, 1, \dots, N$ ;  $\omega_1(y)$  – некоторая известная плотность, для которой существуют все моменты, а первый и второй моменты совпадают с соответствующими моментами плотности вероятности  $f_1(y, t)$ ;  $c_\nu = c_\nu(t)$ ;  $c_\nu = M q_\nu(y) = q_\nu(\alpha)$  - линейная комбинация мо- ментов случайного процесса  $Y(t)$ , полученная из  $q_\nu(y)$  заменой всех одночленов  $y_1^{k_1} \dots y_p^{k_p}$  соответствующими моментами  $a_{k_1, \dots, k_p}$ .

После подстановки (3.3.8) в (3.3.7) имеем

$$\dot{a}_r = \varphi_{r,0}(m, K, t) + \sum_{\beta=3}^N \sum_{|\nu|=\beta} c_\nu \varphi_{r,\nu}(m, K, t),$$

где  $m = m(t)$ ,  $K = K(t)$  – математическое ожидание и ковариационная матрица соот- ветственно СтП  $Y(t)$ ,

$$\varphi_{r,0}(m, K, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_r(y, t) \omega_1(y) dy, \quad \varphi_{r,\nu}(m, K, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z_r(y, t) p_\nu(y) \omega_1(y) dy.$$

Требуется определить  $m(t)$ ,  $K(t)$  и некоторые старшие моменты вида

$$M(Y_{j_1}^{l_1} \dots Y_{j_k}^{l_k}) \quad (3.3.9)$$

где  $j_1, \dots, j_k$  – выборка k различных чисел из  $J = \{1, 2, \dots, p\}$ ;  $l_1, \dots, l_k$  – выборка k чисел из  $L = \{1, 2, \dots, N\}$ , удовлетворяющих условию  $3 \leq l_1 + \dots + l_k \leq N$ .

Дифференциальное уравнение для математического ожидания  $m(t)$  СтП  $Y(t)$ , заданного уравнением (3.3.1), имеет вид

$$\dot{m}(t) = \varphi_{1,0}(m, K, t) + \sum_{\beta=3}^N \sum_{|\nu|=\beta} c_\nu \varphi_{1,\nu}(m, K, t), \quad (3.3.10)$$

где

$$\varphi_{1,0}(m, K, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(y, t) \omega_1(y) dy, \quad \varphi_{1,\nu}(m, K, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(y, t) p_\nu(y) \omega_1(y) dy.$$

Дифференциальное уравнение ковариационной матрицы  $K(t)$  СтП  $Y(t)$ , заданного уравнением (3.3.1), имеет вид

$$\dot{K}(t) = \varphi_{2,0}^1(m, K, t) + \sum_{\beta=3}^N \sum_{|\nu|=\beta} c_\nu \varphi_{2,\nu}^1(m, K, t), \quad (3.3.11)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{2,0}^1(m, K, t) &= \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \{a(y, t)(y^T - m^T) + (y - m)a(y, t)^T + \chi_1 y^T + y\chi_1^T + yy^T \chi(\lambda; y, t) + \\ &\chi_2\}_{\lambda=0} \omega_1(y) dy, \\ \varphi_{2,\nu}^1(m, K, t) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{a(y, t)(y^T - m^T) + (y - m)a(y, t)^T + \chi_1 y^T + y\chi_1^T + yy^T \chi(\lambda; y, t) + \\ &\chi_2\}_{\lambda=0} p_\nu(y) \omega_1(y) dy, \end{aligned}$$

функция  $\chi(\lambda; y, t)$  имеет вид (3.3.4),  $\chi_1 = [\frac{\partial \chi(\lambda; y, t)}{\partial(i\lambda_1)}; \dots; \frac{\partial \chi(\lambda; y, t)}{\partial(i\lambda_p)}]^T$ ,

$$\chi_2 = [\frac{\partial^2 \chi(\lambda; y, t)}{\partial(i\lambda_k) \partial(i\lambda_j)}]_{k,j=1}^p.$$

Дифференциальные уравнения для набора старших моментов (3.3.9) СтП  $Y(t)$ , заданного уравнением (3.3.1), имеют вид

$$\frac{d}{dt} M(Y_{j_1}^{l_1} \dots Y_{j_k}^{l_k}) = \varphi_{l_1, \dots, l_k}^0(m, K, t) + \sum_{\beta=3}^N \sum_{|\nu|=\beta} c_\nu \varphi_{l_1, \dots, l_k}^\nu(m, K, t), \quad (3.3.12)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{l_1, \dots, l_k}^0(m, K, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{l_1, \dots, l_k}(y, t) \omega_1(y) dy, \\ \varphi_{l_1, \dots, l_k}^\nu(m, K, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Z_{l_1, \dots, l_k}(y, t) p_\nu(y) \omega_1(y) dy, \\ Z_{l_1, \dots, l_k}(y, t) &= \sum_{h=1}^k l_h a_{j_h}(y, t) y_{j_1}^{l_1} \dots y_{j_h}^{l_{h-1}} \dots y_{j_k}^{l_k} + \\ &+ \sum_{h_1=0}^{l_1} \dots \sum_{h_k=0}^{l_k} C_{h_1}^{l_1} \dots C_{h_k}^{l_k} \left[ \frac{\partial^{h_1+...+h_k}}{\partial(i\lambda_{j_1})^{h_1} \dots \partial(i\lambda_{j_k})^{h_k}} \chi(\lambda; y, t) \right]_{\lambda=0} y_{j_1}^{l_1-h_1} \dots y_{j_k}^{l_k-h_k}. \end{aligned}$$

Начальными условиями для уравнений (3.3.10) – (3.3.12) для СтП  $Y(t)$ , заданного уравнением (3.3.1), являются

$$m(t_0) = m_0 = MY(t_0), \quad K(t_0) = K_0 = M(Y(t_0) - m_0)(Y(t_0) - m_0)^T, \quad (3.3.13)$$

а также значения начальных моментов  $M(Y_{j_1}^{l_1}(t_0) \dots Y_{j_k}^{l_k}(t_0))$ .

Правые части уравнений (3.3.10) – (3.3.12) содержат параметры  $c_\nu$ , зависящие от старших моментов  $M(Y_{j_1}^{d_1} \dots Y_{j_m}^{d_m})$ , отличных от набора (3.3.9). Для замыкания системы уравнений надо выразить моменты  $M(Y_{j_1}^{d_1} \dots Y_{j_m}^{d_m})$  через моменты первого и второго порядков и старшие моменты вида (3.3.9), используя рекуррентные формулы связи моментов и семиинвариантов [20,129]:

$$\begin{aligned} M(Y_{j_1}^{d_1} \dots Y_{j_m}^{d_m}) &= \\ \sum_{h_{1-1}}^{d_1} C_{h_{1-1}}^{h_{1-1}} \sum_{h_2=0}^{d_2} C_{h_2}^{h_2} \dots \sum_{h_m=0}^{d_m} C_{h_m}^{h_m} s_{j_1, \dots, j_k}^{h_1, \dots, h_k} M(Y_{j_1}^{d_1-h_1} Y_{j_2}^{d_2-h_2} \dots Y_{j_m}^{d_m-h_m}), & \quad (3.3.14) \end{aligned}$$

$$s_{j_1, \dots, j_k}^{h_1, \dots, h_k} = M(Y_{j_1}^{h_1} \dots Y_{j_m}^{h_m}) -$$

$$[\sum_{l_{1-1}}^{h_1} C_{h_{1-1}}^{l_{1-1}} \sum_{l_2=0}^{h_2} C_{h_2}^{l_2} \dots \sum_{l_m=0}^{h_m} C_{h_m}^{l_m} s_{j_1, \dots, j_k}^{l_1, \dots, l_k} M(Y_{j_1}^{h_1-l_1} Y_{j_2}^{h_2-l_2} \dots Y_{j_m}^{h_m-l_m})], \quad (3.3.15)$$

где в (3.3.15) из выражения стоящего в квадратных скобках следует исключить  $s_{j_1, \dots, j_m}^{h_1, \dots, h_m}$ ,  $s_{j_1, \dots, j_k}^{h_1, \dots, h_k}$  – семиинвариант порядка  $h_1 + \dots + h_k$  случайного вектора  $[Y_{j_1}, \dots, Y_{j_k}]^T$ . При этом все семиинварианты в (3.3.14), (3.3.15), не соответствующие моментам (3.3.9), выражаются через моменты первого и второго порядков и старшие моменты вида (3.3.9) по формулам (3.3.14), (3.3.15). Процесс замыкания систем (3.3.10) - (3.3.12) достигается рекуррентным использованием формул связи (3.3.14), (3.3.15).

Доказано следующее утверждение [86].

### Теорема 3.3.1.

*Пусть выполнены следующие условия:*

- 1) вектор состояния  $Y$  нелинейной СтС описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито вида (3.3.1);
- 2) неизвестная плотность вероятности  $f_1(y, t)$  задана конечным отрезком ее ортогонального разложения вида (3.3.8) по заданной биортогональной системе полиномов  $\{p_\nu(y), q_\nu(y)\}$  с весом  $\omega_1(y)$ .

*Тогда верны следующие утверждения:*

- 1) математическое ожидание  $m(t)$ , ковариационная матрица  $K(t)$ , старшие начальных моменты вида (3.3.9) СтП  $Y(t)$  удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3.10)-(3.3.12), в которых вид функции  $\chi(\lambda; y, t)$  задается формулой (3.3.4), с начальными условиями (3.3.13);
- 2) для замыкания системы (3.3.10)-(3.3.12) старшие моменты, содержащиеся в правых частях уравнений и отличные от моментов вида (3.3.9), приближенно выражаются через моменты первого и второго порядков и старшие моменты вида (3.3.9) по формулам связи моментов и семиинвариантов (3.3.14), (3.3.15), при этом все старшие семиинварианты, не соответствующие моментам (3.3.9), полагаются равными нулю.

Таким образом, на основании теоремы 3.3.1 получен алгоритм анализа точности нестационарных нелинейных СтС [86].

### **Алгоритм 3.3.1.**

1. Составление обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3.10), (3.3.11), (3.3.12) (где функция  $\chi(\lambda; y, t)$  задается формулой (3.3.4)) соответственно для математического ожидания  $m(t)$ , ковариационной матрицы  $K(t)$  и набора старших начальных моментов вида (3.3.9) случайного процесса  $Y(t)$ , описываемого стохастическим дифференциальным уравнением Ито (3.3.1).
2. Замыкание системы уравнений (3.3.10), (3.3.11), (3.3.12) путем выражения старших начальных моментов, содержащихся в правых частях уравнений (3.3.10), (3.3.11), (3.3.12) и отличных от старших моментов вида (3.3.9), через моменты первого и второго порядков и старшие моменты вида (3.3.9) по формулам связи моментов и семиинвариантов (3.3.14), (3.3.15), при этом все старшие семиинварианты, не соответствующие моментам вида (3.3.9), полагаются равными нулю.
3. Решение замкнутой системы дифференциальных уравнений (3.3.10), (3.3.11), (3.3.12) с начальными условиями (3.3.13).

В *приложении П.7* на примере двумерной нелинейной СтС, для которой имеется точное решение, проведен сравнительный анализ ММСМ с МНА и МЭА. В

*приложении П.8* дано описание ИПО "СтС-Анализ-ММСМ", которое реализует алгоритм 3.3.1.

Вычислительные эксперименты показали, что ММСМ дает высокую точность (менее 2%) определения математического ожидания и ковариационной матрицы вектора состояния СтС, удовлетворяющих замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений для математического ожидания и ковариационной матрицы и определенного набора вероятностных старших моментов.

### **3.4. Метод аналитического моделирования круговых нелинейных УдСФ, основанный на эквивалентной статистической линеаризации**

Пусть  $X$  – круговая случайная величина. Круговой случайной величиной называется случайный угол, принимающий значения в пределах  $0 \leq X < 2\pi$ . Характеристической функцией случайного угла  $X$  называется последовательность  $\tau_p = Me^{ipx}$ ,  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . В случае распределения вероятностей на окружности характеристическая функция  $\tau_p$  представляет собой последовательность тригонометрических моментов. Круговым средним направлением случайного угла  $X$  называется угол  $\mu = Arg \tau_1$ .

Задана нелинейная зависимость  $Y$  от  $X$  в виде ударной случайной функции  $Y = \varphi(X)$ . Метод статистической линеаризации основан на замене нелинейной зависимости  $\varphi(X)$  приближенной линейной зависимостью вида [20,70]:

$$\varphi(X) \approx U = k_0\mu + k_1(X - \mu). \quad (3.4.1)$$

Здесь  $\mu$  – круговое среднее направление круговой случайной величины  $X$ . Неизвестные параметры  $k_0$  и  $k_1$  находятся из принципа минимума среднего квадрата ошибки  $(e^{iY} - e^{iU})^2$  от замены нелинейной зависимости приближенной линейной зависимостью:

$$\eta = M |(e^{iY} - e^{iU})^2| = \min. \quad (3.4.2)$$

Подставляя в (3.4.2) выражение для  $U$  и  $Y$ , получим функцию относительно неизвестных параметров  $k_0$  и  $k_1$ . Приравнивая к нулю частные производные этой функции по  $k_0$  и  $k_1$ , получим уравнение для определения неизвестных параметров:

$$Me^{i\varphi(X)} = Me^{i(k_0\mu+k_1(X-\mu))}. \quad (3.4.3)$$

Для вычисления величин  $k_0$  и  $k_1$  необходимо знать одномерную плотность вероятностей круговой случайной величины  $X$ . Будем считать, что  $X$  имеет намотанное нормальное распределение, которое наряду с распределением Мизеса считается аналогом "нормального" распределения на окружности. Эти два распределения хорошо аппроксимируют друг друга. Но тригонометрические моменты для намотанного нормального распределения вычисляются проще, в отличие от распределения Мизеса.

По определению нормальным намотанным на единичную окружность распределением называется распределение  $F$  круговой случайной величины  $X$ , связанной с линейной нормально распределенной случайной величиной  $X_N$  соотношением [131]:

$$X = X_N (\text{mod}2\pi). \quad (3.4.4)$$

Если  $F_N$  – функция распределения сл. в.  $X_N$ , то

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (F_N(x + 2\pi k) - F_N(2\pi k)). \quad (3.4.5)$$

Аналогично, если  $f_N$  – плотность вероятностей нормально распределенной линейной случайной величины  $X_N$ , то плотность вероятностей круговой случайной величины  $X$ , имеющей намотанное нормальное распределение, выражается формулой

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f_N(x + 2\pi k). \quad (3.4.6)$$

Пусть  $g_N(\lambda)$  – характеристическая функция нормально распределенной линейной случайной величиной  $X_N$ , тогда характеристическая функция или последовательность тригонометрических моментов круговой случайной величины  $X$ , имеющей намотанное нормальное распределение, определяются формулой [131]:

$$\tau_p = \int_0^{2\pi} e^{ipx} f(x) dx = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} e^{ipx} f_N(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} f_N(x) dx = g(p). \quad (3.4.7)$$

Для линейной нормально распределенной случайной величины

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad g_N(\lambda) = \exp(i\lambda a - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2),$$

где  $a$  – математическое ожидание  $X_N$ ,  $\sigma$  – среднее квадратическое отклонение  $X_N$ .

Тогда для круговой случайной величины  $X$ , имеющей намотанное нормальное распределение, первый тригонометрический момент равен [131]:

$$\tau_1 = \exp(ia) \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2). \quad (3.4.8)$$

Как известно, основными характеристиками круговой СВ  $X$  являются [131]:

- 1) круговое среднее направление  $\mu = a$ ;
- 2) результирующая длина  $\rho_1 = \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2)$ ;
- 3) круговая дисперсия  $D = 1 - \rho_1 = 1 - \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2)$ .

Согласно (3.4.3):

$$Me^{i(k_0\mu+k_1(X-\mu))} = Me^{ik_0\mu} Me^{ik_1(X-\mu)} = e^{ik_0\mu} Me^{ik_1(X-\mu)}.$$

Далее вычислим  $Me^{ik_1(X-\mu)}$  при  $a=\mu$ :

$$Me^{ik_1(X-\mu)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_1(x-\mu)} f_N(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_1(x-\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Применим преобразование Фурье при  $\omega=x-\mu$ ,  $t=k_1$ ,  $p=\sigma^2/2$ :

$$\frac{\sqrt{2p}}{\sigma} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat} e^{-\frac{\omega^2}{4p}} \frac{1}{\sqrt{2p}} d\omega \right] = \frac{\sqrt{2p}}{\sigma} e^{-pt^2} = e^{-pt^2} = e^{-\frac{\sigma^2 k_1^2}{2}}.$$

Окончательно имеем:

$$Me^{i(k_0\mu+k_1(X-\mu))} = e^{ik_0\mu} e^{-\frac{\sigma^2 k_1^2}{2}} \quad (3.4.9)$$

Учитывая, что

$$Me^{i\phi(X)} = r(\mu, \sigma) e^{i\psi(\mu, \sigma)}, \quad (3.4.10)$$

где  $r(\mu, \sigma)$  – модуль,  $\psi(\mu, \sigma)$  – аргумент комплексного числа  $Me^{i\phi(X)}$ , получим уравнения для определения статистических коэффициентов  $k_0$  и  $k_1$ :

$$k_0(\mu, \sigma)\mu = \psi(\mu, \sigma); \exp\left\{-\frac{\sigma^2 k_1^2(\mu, \sigma)}{2}\right\} = r(\mu, \sigma). \quad (3.4.11)$$

Согласно основным формулам разработанного метода (3.4.9) – (3.4.11) были определены точные значения коэффициентов  $k_0$  и  $k_1$  для некоторых типовых нелинейных функций или получены точные уравнения для их определения. Результаты приведены в таблице 3.4.1.

Таблица 3.4.1 – Статистические коэффициенты для типовых нелинейных круговых функций

$Y=\varphi(X)$	$k_0, \quad k_1$
$\phi(x) = l \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -l, & x < 0, \\ l, & x \geq 0. \end{cases}$	$k_0 = \frac{1}{\mu} \arctan\left(2tg l * \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right),$ $k_1 = \frac{1}{\sigma} \sqrt{-2 \ln \sqrt{\cos^2 l + 4 \sin^2 l \left(\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right)^2}}.$
$\varphi(x) = l * 1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ l, & x \geq 0. \end{cases}$	$k_0 = \frac{1}{\mu} \arctan\left(\frac{\sin l * \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right)}{\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \cos l * \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right)}\right),$ $k_1 = \frac{1}{\sigma} \sqrt{-2 \ln \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \cos l) + 2(1 - \cos l) \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2}}.$

## Продолжение таблицы 3.4.1

$Y = \varphi(X)$	$k_0, k_1$
$\varphi(x) = x * 1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ lx, & x \geq 0. \end{cases}$	<p><math>k_1</math> находится из уравнения:</p> $e^{-\frac{\sigma^2 k_1^2}{2}} = \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right) + \frac{1}{2} e^{-\frac{l^2 \sigma^2}{2}} P_1\right)^2 + \frac{1}{4} e^{-l \sigma^2} (P_2)^2},$ $P_1 = \cos l\mu + \frac{2}{\sqrt{\pi}} IE(l\sigma) \sin l\mu,$ $P_2 = \sin l\mu - \frac{2}{\sqrt{\pi}} IE(l\sigma) \cos l\mu.$ <p><math>k_0</math> находится из уравнения:</p> $k_0 \mu = \arctan \left( \frac{\frac{1}{2} e^{-\frac{l^2 \sigma^2}{2}} \left( \sin l\mu - \frac{2}{\sqrt{\pi}} IE(l\sigma) \cos l\mu \right)}{\left( \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right) + \frac{1}{2} e^{-\frac{l^2 \sigma^2}{2}} \left( \cos l\mu + \frac{2}{\sqrt{\pi}} IE(l\sigma) \sin l\mu \right)} \right).$
$\varphi(x) = lx^2 \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -lx^2, & x < 0, \\ lx^2, & x \geq 0. \end{cases}$	<p>При <math>\mu = a = 0</math></p> $k_1 = \frac{1}{\sigma} \sqrt{-2 \ln \left( \frac{1}{\sigma} \cos \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2l\sigma^2) \right) \right)}.$
$\varphi(x) = \begin{cases} -l, & x < -d, \\ 0, &  x  \leq d, \\ l, & x \geq d. \end{cases}$	$k_0 = \frac{1}{\mu} \psi, \quad k_1 = \frac{1}{\sigma} \sqrt{-2 \ln r},$ $r = \sqrt{\left( \cos l + (1 - \cos l)(\Phi_1 + \Phi_2) \right)^2 + \left( \sin^2 l + \Phi_1 - \Phi_2 \right)^2},$ $\psi = \arctan \left( \frac{\sin l (\Phi_1 - \Phi_2)}{\cos l + (1 - \cos l)(\Phi_1 + \Phi_2)} \right),$ $\Phi_1 = \Phi \left( \frac{d + \mu}{\sigma} \right), \quad \Phi_2 = \Phi \left( \frac{d - \mu}{\sigma} \right).$

При выписывании уравнений для  $k_0$  и  $k_1$  были использованы специальные функции:

1) функция Лапласа  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{z}{\sqrt{2}} \right);$

$$2) \operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt;$$

$$3) \operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf} z .$$

Здесь введены обозначения:  $IE(l\sigma) = \int_{-l\sigma/\sqrt{2}}^0 e^{y^2} dy;$

$$\arctan(\bar{S}, \bar{C}) = \begin{cases} \arg \operatorname{tg}(\bar{S}/\bar{C}), & \text{если } \bar{C} > 0, \bar{S} > 0, \\ \pi/2, & \text{если } \bar{C} = 0, \bar{S} > 0, \\ \arg \operatorname{tg}(\bar{S}/\bar{C}) + \pi, & \text{если } \bar{C} < 0, \\ \arg \operatorname{tg}(\bar{S}/\bar{C}) + 2\pi, & \text{если } \bar{C} \geq 0, \bar{S} < 0, \\ \text{не определено}, & \text{если } \bar{C} = 0, \bar{S} = 0. \end{cases}$$

### 3.5. Методы анализа динамической точности УдСтС

#### 3.5.1. Уравнение ошибок УдСтС

Как правило, большинство непрерывных линейных систем, встречающихся в практических приложениях, составляют системы, поведение которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши, т.е. решенных относительно производных. Если добавить к этим уравнениям нелинейные зависимости между входными и выходными сигналами, то получим, в общем случае, систему нелинейных дифференциальных уравнений в форме Коши, описывающих нелинейную систему.

Стохастические модели систем учитывают действие различных случайных факторов. При применении математических моделей в форме системы нелинейных дифференциальных уравнений, учет случайных факторов приводит к стохастическим дифференциальным уравнениям.

В качестве математической модели УдСтС рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее ошибки функционирования УдСтС как следствие стохастических факторов и детерминированных и стохастических ударных воздействий, следующего вида:

$$\dot{Z} = F^{\text{уд}}(Z, X, N_1(t), t), \quad Y = G^{\text{уд}}(Z, N_2(t), t), \quad (3.5.1)$$

где  $X(t)$  – входной сигнал,  $Y(t)$  – выходной сигнал,  $Z(t)$  – вектор состояния,  $N_1(t)$  и  $N_2(t)$  – известные случайные функции, описывающие случайные возмущения, действующие на систему,  $F^{\text{уд}}(Z, X, N_1(t), t)$  и  $G^{\text{уд}}(Z, N_2(t), t)$  – известные функции, описывающие детерминированные и стохастические ударные воздействия. Начальный вектор состояния системы  $Z_0$  в практических задачах всегда является случайной величиной, независимой от случайных функций  $N_1(t)$  и  $N_2(t)$ .

В том случае, когда важен учет дополнительных случайных факторов в виде  $m_1$ - и  $m_2$ -мерных векторов  $\Theta_1(t)$  и  $\Theta_2(t)$  случайных параметров, уравнения (3.5.1) принимают вид

$$\dot{Z} = F^{\text{уд}}(Z, X, N_1(t), \Theta_1(t), t), \quad Y = G^{\text{уд}}(Z, N_2(t), \Theta_2(t), t), \quad (3.5.2)$$

Эти уравнения приводятся к виду (3.5.1), если принять  $\bar{N}_1(t) = [N_1^T \Theta_1^T]^T$  и  $\bar{N}_2(t) = [N_2^T \Theta_2^T]^T$ .

Так как значение выходного сигнала системы  $Y(t)$  в каждый момент времени зависит только от значений вектора состояния системы  $Z(t)$  и заданной случайной функции  $N_2(t)$  и момента времени  $t$ , то все вероятностные характеристики СтП  $Y(t)$  выражаются через соответствующие вероятностные характеристики  $Z(t)$  и  $N_2(t)$  известными формулами теории вероятности.

Если составляющие СтП  $Z(t)$  являются круговыми случайными величинами и заданы нелинейные зависимости между составляющими СтП  $Y(t)$  и составляющими СтП  $Z(t)$ , то для определения вероятностных характеристик СтП  $Y(t)$  можно применить метод эквивалентной статистической линеаризации, описанный в подразделе 3.4. В результате нелинейные зависимости приближенно заменяются линейными зависимостями. Этот метод можно применить и для линеаризации заданной нелинейной стохастической системы (3.5.1) для случая круговых случайных величин.

Далее рассмотрим только вопрос нахождения вероятностных характеристик вектора состояния системы  $Z(t)$ . Если ограничиться теорией марковских стохастических процессов [20], то удобной для практики моделью является модель векторного стохастического дифференциального уравнения Ито. Для приведения уравнения,

определяющего вектора состояния системы  $Z(t)$ , к стохастическому дифференциальному уравнению Ито вначале включим в расширенный вектор состояния системы входной сигнал  $X(t)$ . Стохастическое дифференциальное уравнение формирования требуемого входного сигнала можно составить, например, в виде:

$$\dot{X} = Q(X, t), X(t_0) = X_0.$$

Для приведения уравнения, определяющего вектора состояния системы  $Z(t)$ , к форме Ито можно применить метод формирующих фильтров [19,20]. Тогда уравнение ошибок УдСтС можно записать в виде:

$$\dot{Z} = a^{\text{уд}}(Z, t) + b^{\text{уд}}(Z, t)V, Z(t_0) = Z_0, \quad (3.5.3)$$

где  $a^{\text{уд}}(Z, t)$  и  $b^{\text{уд}}(Z, t)$  – известные функции,  $V=V(t)$  – белый шум.

Задача анализа точности УдСтС, описываемой уравнением (3.5.3), заключается в определении математического ожидания  $m_Z(t)$ , ковариационной матрицы  $K_Z(t)$  и матрицы ковариационных функций  $K_Z(t, t')$  векторного стохастического процесса  $Z(t)$ . При этом систематические ошибки определяются вектором математических ожиданий, а случайные ошибки – ковариационной матрицей и матрицей ковариационных функций.

### 3.5.2. Точность линейной УдСтС

Пусть математической моделью УдСтС является линейная СтС вида:

$$\dot{Z} = a^{\text{уд}}(t)Z + a_0^{\text{уд}}(t) + b^{\text{уд}}(t)V, \quad Z(t_0) = Z_0, \quad (3.5.4)$$

где  $Z = Z(t)$  – вектор состояния УдСтС размерности  $p$ ;  $V = V(t)$  – белый шум (в широком смысле) размерности  $n_v$  с интенсивностью  $v=v(t)$ ;  $a^{\text{уд}}(t)$ ,  $a_0^{\text{уд}}(t)$ ,  $b = b^{\text{уд}}(t)$  – известные функции размерности  $(p \times p)$ ,  $(p \times 1)$ ,  $(p \times n_v)$  соответственно. Тогда математическое ожидание  $m_Z(t)$ , ковариационная матрица  $K_Z(t)$  и матрица ковариационных функций  $K_Z(t, t')$  векторного стохастического процесса  $Z(t)$  удовлетворяют уравнениям (3.1.2)–(3.1.5) и вычисляются в соответствии с вейвлет алгоритмами 3.1.1 – 3.1.3.

### 3.5.3. Точность линейной параметрической УдСтС

Рассмотрим подробнее УдСтС, математической моделью которой является СтС с параметрическими шумами вида

$$\dot{Z} = a^{y\partial} Z + a_0^{y\partial} + (b_0^{y\partial} + \sum_{n=1}^p b_n^{y\partial} Z_n) N, \quad Z(t_0) = Z_0. \quad (3.5.5)$$

Здесь  $Z$  – вектор состояния размерности  $p$ ,  $N$  – вектор параметрических шумов размерности  $n^N$  с известными корреляционными характеристиками ( $m^N$ ,  $K^N$  и др.);  $a^{y\partial}(t)$ ,  $a_0^{y\partial}(t)$ ,  $b^{y\partial}(t)$ ,  $b_n^{y\partial}(t)$  – известные матричные функции размерностей  $p \times p$ ,  $p \times 1$ ,  $p \times n^N$ ,  $p \times n^N$  соответственно.

*Первым важным таким классом* являются системы (3.5.5) при  $N = V = V(t)$ , где  $V$  – нормально распределенный векторный белый шум с интенсивностью  $\nu = \nu(t)$ , а соответствующее стохастическое дифференциальное уравнение понимается в смысле Ито. Тогда математическое ожидание  $m_Z(t)$ , ковариационная матрица  $K_Z(t)$  и матрица ковариационных функций  $K_Z(t, t')$  векторного стохастического процесса  $Z(t)$  удовлетворяют уравнениям (3.2.2)–(3.2.4) и вычисляются в соответствии с вейвлет алгоритмами 3.2.1 – 3.2.3.

*Вторым важным классом* являются системы (3.5.5), когда  $N$  является окрашенным белым шумом и связан с нормально распределенным белым шумом  $V$  линейным уравнением формирующего фильтра следующего вида [20]:

$$\dot{N} = cN + c_0 + V, \quad N(t_0) = N_0. \quad (3.5.6)$$

Здесь  $c = c(t)$ ,  $c_0 = c_0(t)$  известные матричные функции размерностей  $n^N \times n^N$ ,  $n^N \times 1$  соответственно. Вводя составной вектор  $\tilde{Z} = [Z^T \quad N^T]^T$ , приведём (3.5.5), (3.5.6) к виду:

$$\dot{\tilde{Z}} = \tilde{a}(\tilde{Z}, t) + \tilde{b}(t)V. \quad (3.5.7)$$

Здесь

$$\tilde{a} = \tilde{a}(\tilde{Z}, t) = \begin{bmatrix} a^{y\partial} Z + a_0^{y\partial} + \left( b_0^{y\partial} + \sum_{n=1}^p b_n^{y\partial} Z_n \right) N \\ cN + c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^{y\partial} \\ c_0 \\ O_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^{y\partial} & b_0^{y\partial} + \sum_{n=1}^p b_n^{y\partial} Z_n \\ c & O_{n^N} \end{bmatrix} \tilde{Z}, \quad b = b(t) = \begin{bmatrix} O_p \\ I_{n^N} \end{bmatrix},$$

$O_n$  и  $I_n^N$  – квадратные нулевые и единичные матрицы. Стохастические системы вида (3.5.7) называются билинейными СтС [20]. При небольшом уровне шумов уравнение (3.5.7) допускает тейлоровскую линеаризацию относительно математических ожиданий  $m_n^Z$  и  $m^N$  следующего вида:

$$Z_n N \approx m_n^Z m^N + Z_n^0 m^N + m_n^Z N^0 = Z_n m^N + m_n^Z N - m_n^Z m^N. \quad (3.5.8)$$

В этом случае соотношения (3.5.8), (3.5.9) принимают вид линейной нестационарной системы с аддитивным белым шумом:

$$\dot{\tilde{Z}} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \tilde{Z} + \tilde{b} V, \quad \tilde{Z}(t_0) = \tilde{Z}_0, \quad (3.5.9)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= [Z^T N^T]^T, \quad Z = [Z_1 \dots Z_p]^T, \quad N = [N_1 \dots N_{n^N}]^T, \quad V = [V_1 \dots V_{n^N}]^T, \\ \tilde{a}_0 &= \tilde{a}_0(t, m^Z, m^N) = \begin{bmatrix} a_0 + \sum_{n=1}^p b_n m_n^Z m^N \\ c_0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_1 = \tilde{a}_1(t, m^Z, m^N) = \begin{bmatrix} aZ + \sum_{n=1}^p b_n (Z_n m^N + m_n^Z N) \\ cN + c_0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{b} &= b(t) = \begin{bmatrix} O_p \\ I_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда математическое ожидание  $m_{\tilde{Z}}(t)$ , ковариационная матрица  $K_{\tilde{Z}}(t)$  и матрица ковариационных функций  $K_{\tilde{Z}}(t, t')$  векторного стохастического процесса  $\tilde{Z}(t)$  удовлетворяют уравнениям (3.1.2)–(3.1.5) и вычисляются в соответствии с вейвлет алгоритмами 3.1.1 – 3.1.3.

### 3.5.4. Точность квазилинейной УдСтС

Рассмотрим УдСтС, математической моделью которой является квазилинейная СтС вида:

$$\dot{Z} = a^{уд}(Z, t) + b^{уд}(Z, t)V, \quad Z(t_0) = Z_0, \quad (3.5.11)$$

где  $a^{уд}(Z, t) = a_0^{уд}(t) + a_1^{уд}(t)Z + \mu \bar{F}_{0t}$ ,

$b^{уд}(Z, t) = b_0^{уд}(t) + \sum_{h=1}^p b_h^{уд}(t)Z_h + \sqrt{\mu} \bar{F}_{1t}$ ,  $\mu$  – малый параметр.

Функции  $\mu \bar{F}_{0t}$  и  $\sqrt{\mu} \bar{F}_{1t}$  зависят от времени, параметров УВ и инструментальных ошибок, т.е. от  $t$  и  $Z$ .

В простейшем случае для анализа точности УдСтС можно использовать метод нормальной аппроксимации [19, 20]. Более точные результаты получаются при

применении модифицированного моментно-семиинвариантного метода, описанного в подразделе 3.3. В этом случае в соответствии с алгоритмом 3.3.1 составляются и решаются уравнения для математического ожидания  $m_Z(t)$ , ковариационной матрицы  $K_Z(t)$ , матрицы ковариационных функций  $K_Z(t, t')$ , а также уравнения для старших моментов, например, для тех, которые присутствуют в правых частях точных уравнений для  $m_Z(t)$ ,  $K_Z(t)$  и  $K_Z(t, t')$ .

Функции  $\mu\bar{F}_{0t}$  и  $\sqrt{\mu}\bar{F}_{1t}$ , вследствие их малости, можно аппроксимировать функциями времени. Тогда уравнение (3.5.11) примет вид (3.5.5), где

$$a_0 = a_0^{\text{уд}}(t) + \mu\bar{F}_{0t}, \quad b_0 = b_0^{\text{уд}}(t) + \sqrt{\mu}\bar{F}_{1t}.$$

В этом случае математическое ожидание  $m_Z(t)$ , ковариационная матрица  $K_Z(t)$  и матрица ковариационных функций  $K_Z(t, t')$  векторного стохастического процесса  $Z(t)$  удовлетворяют уравнениям (3.2.2)–(3.2.4) и вычисляются в соответствии с вейвлет алгоритмами 3.2.1 – 3.2.3

### 3.6. Выводы к разделу 3

1. Для линейной УдСтС и линейной УдСтС с параметрическими шумами известны замкнутые системы обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения неизвестных математического ожидания, ковариационной матрицы, матрицы ковариационных функций, содержащие функции, описывающие ударные воздействия.

Ударные воздействия описываются с помощью ударной силы или ударного импульса. Ударная сила в начале удара быстро возрастает до наибольшего значения, а затем падает до нуля. Максимальное ее значение может быть очень большим. Часто для описания ударной силы применяют дельта-функцию. Ударные импульсы бывают различной формы: прямоугольными, пилообразными, полугармоническими и др., и описываются непрерывными и кусочно-непрерывными функциями.

Применение приближенных итерационных методов решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных функций, содержащих функции сложной формы (дельта-функцию или кусочно-непрерывные функции), часто тре-

буют разработки специальных приближенных методов для каждого вида функции. Разработанные вейвлет алгоритмы являются универсальными и позволяют заменить вычислительные процедуры с функциями сложной формы арифметическими действиями с постоянными коэффициентами вейвлет разложений соответствующих функций по ортонормированному вейвлет базису.

На основе применения модификации известных метода вейвлетов Хаара и метода Галеркина (метода вейвлетов Хаара–Галеркина) для линейной УдСтС и для линейной УдСтС с параметрическими шумами разработаны алгоритмы нахождения неизвестных математического ожидания, ковариационной матрицы, матрицы ковариационных функций, позволяющие заменить решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений решением СЛАУ с постоянными коэффициентами (теоремы 3.1.1 – 3.1.3, алгоритмы 3.1.1 – 3.1.3 и теоремы 3.2.1 – 3.2.3, алгоритмы 3.2.1 – 3.2.3 соответственно).

2. В приложении П.5 на примере информационно-управляющей системы, описываемой двумерной линейной УдСтС, приведены результаты сравнения вейвлет анализа точности ИУС с точным решением. При решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных функций, содержащих дельта-функцию, применение ВЛР позволяет получить приближенное решение с точностью менее 10% при  $J=3$ , менее 1% при  $J=5$ .

3. В приложении П.6 приведено описание ИПО "СтС-ВЛ-Анализ", реализующее вейвлет алгоритмы 3.1.1, 3.1.2 и 3.2.1, 3.2.2.

4. Для анализа точности многомерных нелинейных УдСтС в общем случае невозможно выписать замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения неизвестных математического ожидания, ковариационной матрицы, матрицы ковариационных функций. Для нахождения неизвестных параметров предлагается применять модифицированный моментно-семиинвариантный метод. Идея метода состоит в составлении и решении замкнутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных математического ожидания, ковариационной матрицы, матрицы ковариационных функций и определенного набора старших моментов (теорема 3.3.1 и алгоритм 3.3.1). В эти уравнения неиз-

вестные составляющие математического ожидания, ковариационной матрицы, матрицы ковариационных функций входят нелинейно, поэтому применение метода вейвлетов Хаара–Галеркина приводит к усложнению вычислительных процедур и его применение нецелесообразно.

5. В приложении П.7 на примере двумерной нелинейной СтС, для которой имеется точное решение, проведен сравнительный анализ ММСМ с МНА и МЭА. Вычислительные эксперименты показали, что ММСМ дает более высокую точность по сравнению с МНА и МЭА (менее 2%) определения математического ожидания и ковариационной матрицы вектора состояния СтС, удовлетворяющих замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений для математического ожидания и ковариационной матрицы и определенного набора вероятностных старших моментов.

6. В приложении П.8 дано описание ИПО "СтС-Анализ-ММСМ", которое реализует алгоритм 3.3.1.

7. Для нелинейных круговых УдСФ разработан метод эквивалентной статистической круговой намотанной нормальной линеаризации. Рассчитаны статистические коэффициенты для некоторых типовых нелинейностей (таблица 3.4.1). Совместное использование этого метода и МНА позволяет выписать замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных математического ожидания, ковариационной матрицы, матрицы ковариационных функций стохастического процесса, удовлетворяющего заданному нелинейному стохастическому дифференциальному уравнению Ито. Если неизвестные составляющие математического ожидания, ковариационной матрицы, матрицы ковариационных функций входят в уравнения линейно, то целесообразно для их нахождения применять вейвлет алгоритмы 3.1.1 – 3.1.3 или 3.2.1 – 3.2.3.

8. Разработана методика анализа динамической точности УдСтС.

9. В приложении П.9 приведены результаты анализа динамической точности информационно-управляющей системы при продольно-поперечном ударе с применением ИПО "СтС-ВЛ-Анализ".

## 4. ВЕЙВЛЕТ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПРИ УДАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### **4.1. Теорема о вейвлете с.к. оптимальном линейном операторе**

На практике часто возникает задача: спроектировать систему обработки информации в режиме реального времени таким образом, чтобы она обладала наибольшей возможной точностью при данных условиях. Для решения задачи необходимо задать *критерий оптимальности* для определения величины, характеризующей качество системы.

Пусть одномерная входная функция системы  $Z(t)$  представляет собой сумму полезного сигнала  $P(t)$  и случайной помехи  $X(t)$ . Случайная функция  $Z(t)$  наблюдается в некоторой области  $T$  ( $t \in T$ ). Требуемый одномерный выходной сигнал системы  $W(s)$  должен воспроизводиться в области  $S$  ( $s \in S$ ) и представляет собой заданное преобразование полезного сигнала  $P(t)$ . Область  $T$  представляет собой, как правило, отрезок времени, в течение которого наблюдается СФ  $Z(t)$ . Область  $S$  – отрезок времени или отдельный момент времени, в течение которого система должна воспроизводить выходной сигнал  $W(s)$ . Значение  $t \in T$  зависит от значения  $s \in S$ . Действительным выходным сигналом системы является случайная функция  $W^*(s)$ , которая представляет собой результат преобразования данной системой входной СФ  $Z(t)$ :

$$W^*(s) = A_t Z(t), \quad (4.1.1)$$

где  $A_t$  – оператор системы. В отличие от требуемого выходного сигнала, действительная выходная СФ системы всегда содержит помеху, от которой принципиально невозможно полностью избавиться. Заданная система является стохастической: каждому входному сигналу ставит в соответствие определенное распределение выходного сигнала. Случайная функция  $W^*(s)$  представляет собой *оценку* требуемого выходного сигнала.

Задача сводится к нахождению оптимального линейного оператора системы  $A_t$ , обеспечивающего наилучшую точность СтС, т.е. наилучшее воспроизведение требуемого выходного сигнала  $W(s)$ . Ошибка системы является случайной функцией и равна

$$E(s) = W^*(s) - W(s).$$

Как известно [87], среди критериев качества СтС простейшим является критерий минимума средней квадратической (с.к.) ошибки:

$$\sqrt{\eta} = \sqrt{M[E^2(s)]}.$$

Система, обладающая наибольшей возможной точностью в соответствии с критерием минимума с.к. ошибки, называется *с.к. оптимальной*.

Согласно [21], с.к. оптимальный линейный оператор  $A_t$  удовлетворяет уравнению:

$$A_t \Gamma_Z(t, \tau) - \Gamma_{WZ}(s, \tau) = 0 \quad (\tau \in T) \quad (4.1.2)$$

или

$$A_t K_Z(t, \tau) = K_{WZ}(s, \tau) + [m_W(s) - A_t m_Z(t)] \overline{m_Z(\tau)} \quad (\tau \in T), \quad (4.1.3)$$

где  $\Gamma_Z(t, \tau) = M[Z(t) \overline{Z(\tau)}]$ ,  $K_Z(t, \tau) = M[Z^\circ(t) \overline{Z^\circ(\tau)}]$ ,  $\Gamma_{WZ}(s, \tau) = M[W(s) \overline{Z(\tau)}]$ ,

$$K_{WZ}(s, \tau) = M[W^\circ(s) \overline{Z^\circ(\tau)}], \quad m_Z(t) = M[Z(t)], \quad m_W(s) = M[W(s)].$$

Оценка  $W^*(s)$ , удовлетворяющая уравнению (4.1.1), где  $A_t$  – с.к. оптимальный линейный оператор, называется *с.к. оптимальной*.

Как известно [21], для определения с.к. оптимального линейного оператора пригодны только такие решения уравнения (4.1.3), которые преобразуют СФ  $Z(t)$  в случайные функции, обладающие конечными дисперсиями, т.е. уравнение (4.1.3) можно записать в общем виде

$$A_t [K_Z(t, \tau)] = f(s, \tau) \quad (t, \tau \in T, s \in S), \quad (4.1.4)$$

где  $f(s, \tau)$  – известная функция.

Любую квадратично интегрируемую функцию можно представить в виде суперпозиции вейвлетов, и существует устойчивый численный алгоритм вычисления коэффициентов при таком разложении [121, 124, 125]. Также эти коэффициенты полностью характеризуют функцию, и ее можно восстановить численно устой-

чивым способом непосредственно по этим коэффициентам. Благодаря этим свойствам вейвлеты нашли применение в функциональном анализе и при решении уравнений различных типов. Исследование многих операторов, действующих в пространстве обычных или обобщенных функций, заметно упрощается, если используется подходящий вейвлет базис, т.к. соответствующие матрицы становятся почти диагональными по отношению к разложению по этому базису. Действие оператора на вейвлет разложения, представляющие данную функцию, не приводят к каким-либо неконтролируемым последствиям, т.е. ВЛР устойчиво. В определенном смысле вейвлеты устойчивы относительно операций интегрирования и дифференцирования. Поэтому вейвлеты, используемые в качестве базисных функций, помогают решать различные уравнения и появляются в виде собственных функций некоторых операторов. Применим вейвлет технологии для решения уравнения (4.1.4).

Сигналы  $Z(t)$  и  $W(s)$  определены на отрезках  $T$  и  $S$ , поэтому в качестве ортонормированных вейвлет базисов возьмем базисы, порожденные вейвлетами с конечным носителем. Пусть  $T=[t_0, t_1]$ ,  $S=[s_0, s_1]$ . В  $L^2(T)$  определим ортонормированный вейвлет базис вида

$$\{\varphi_{00}^t(t), \psi_{jk}^t(t)\} \quad (4.1.5)$$

где  $\varphi_{00}^t(t) = \varphi^t(t)$  – масштабирующая функция,  $\varphi_{jk}^t(t) = \sqrt{2^j} \varphi^t(2^j t - k)$ ,  
 $\psi_{00}^t(t) = \psi^t(t)$  – материнский вейвлет,  $\psi_{jk}^t(t) = \sqrt{2^j} \psi^t(2^j t - k)$ ;  
 $j=1,2,\dots,J^t$ ;  $k=0,1,\dots,2^j - 1$ ;  $J^t$  – максимальный уровень разрешения, который выбирается с учетом того, что точность аппроксимации любой функции  $f(t) \in L^2(T)$  соответствующим ВЛР пропорциональна  $\frac{1}{\sqrt{2^{J^t}}}$  и постоянному шагу  $h^t = \frac{t_1 - t_0}{2 * 2^{J^t}}$  разбиения области  $T$  на  $L^t = 2 * 2^{J^t}$  равных интервалов [121].

Аналогично, в области  $L^2(S)$  определим ортонормированный вейвлет-базис вида

$$\{\varphi_{00}^s(s), \psi_{jk}^s(s)\} \quad (4.1.6)$$

где  $\varphi_{00}^s(s) = \varphi^s(s)$  – масштабирующая функция,  $\varphi_{jk}^s(s) = \sqrt{2^j} \varphi^s(2^j s - k)$ ,  
 $\psi_{00}^s(s) = \psi^s(s)$  – материнский вейвлет,  $\psi_{jk}^s(s) = \sqrt{2^j} \psi^s(2^j s - k)$ ;

$j=1,2,\dots,J^s$ ;  $k=0,1,\dots,2^j - 1$ ;  $J^s$  – максимальный уровень разрешения, который выбирается с учетом того, что точность аппроксимации любой функции  $f(s) \in L^2(S)$  соответствующим ВЛР пропорциональна  $\frac{1}{\sqrt{2^{J^s}}}$  и постоянному шагу  $h^s = \frac{s_1-s_0}{2*2^{J^s}}$  разбиения области  $S$  на  $L^s = 2 * 2^{J^s}$  равных интервалов [121].

Пусть  $K_Z(t, \tau) \in L^2(T \times T)$  и  $f(s, \tau) \in L^2(S \times T)$ . Чтобы представить функцию  $K_Z(t, \tau)$  в виде сходящегося вейвлет ряда, определим двумерный ортонормированный базис путем тензорного произведения двух одномерных вейвлет базисов (4.1.5) в случае, когда масштабирование по обеим переменным происходит одинаково:

$$\Phi_{00}^{tA}(t_1, t_2) = \varphi_{00}^t(t_1)\varphi_{00}^t(t_2), \quad (4.1.7)$$

$$\Psi_{jkn}^{tH}(t_1, t_2) = \varphi_{jk}^t(t_1)\psi_{jn}^t(t_2), \quad (4.1.8)$$

$$\Psi_{jkn}^{tB}(t_1, t_2) = \psi_{jk}^t(t_1)\varphi_{jn}^t(t_2), \quad (4.1.9)$$

$$\Psi_{jkn}^{tD}(t_1, t_2) = \psi_{jk}^t(t_1)\psi_{jn}^t(t_2), \quad (4.1.10)$$

где  $j=1,\dots,J^t$ ;  $k,n=0,1,\dots,2^j - 1$ . Тогда двумерное вейвлет разложение  $K_Z(t, \tau)$  имеет вид:

$$K_Z(t, \tau) = a^t \Phi_{00}^{tA}(t, \tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} [h_{jkn}^t \Psi_{jkn}^{tH}(t, \tau) + b_{jkn}^t \Psi_{jkn}^{tB}(t, \tau) + d_{jkn}^t \Psi_{jkn}^{tD}(t, \tau)], \quad (4.1.11)$$

где

$$a^t = \int_T \int_T K_Z(t_1, t_2) \Phi_{00}^{tA}(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (4.1.12)$$

$$h_{jkn}^t = \int_T \int_T K_Z(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^{tH}(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (4.1.13)$$

$$b_{jkn}^t = \int_T \int_T K_Z(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^{tB}(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (4.1.14)$$

$$d_{jkn}^t = \int_T \int_T K_Z(t_1, t_2) \Psi_{jkn}^{tD}(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (4.1.15)$$

Чтобы представить функцию  $f(s, \tau)$  в виде сходящегося вейвлет ряда, определим двумерный ортонормированный базис путем тензорного произведения двух одномерных вейвлет базисов (4.1.6) и (4.1.5) в случае, когда масштабирование по обеим переменным происходит по-разному:

$$\Phi_{00}^{sA}(s, t) = \varphi_{00}^s(s)\varphi_{00}^t(t), \quad (4.1.16)$$

$$\Psi_{j_2 n}^{sH}(s, t) = \varphi_{00}^s(s)\psi_{j_2 n}^t(t), \quad (4.1.17)$$

$$\Psi_{j_1 k}^{sB}(s, t) = \psi_{j_1 k}^s(s) \varphi_{00}^t(t), \quad (4.1.18)$$

$$\Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, t) = \psi_{j_1 k}^s(s) \psi_{j_2 n}^t(t), \quad (4.1.19)$$

где  $j_1=0,1,\dots,J^s$ ;  $k=0,1,\dots,2^{j_1}-1$ ;  $j_2=0,1,\dots,J^t$ ;  $n=0,1,\dots,2^{j_2}-1$ . Тогда двумерное вейвлет разложение  $f(s, \tau)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} f(s, \tau) = & a^f \Phi_{00}^{sA}(s, \tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} h_{jk}^f \Psi_{jk}^{sH}(s, \tau) + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_2}-1} b_{jk}^f \Psi_{jk}^{sB}(s, \tau) + \\ & + \sum_{j_1=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} \sum_{j_2=0}^{J^t} \sum_{n=0}^{2^{j_2}-1} d_{j_1 k j_2 n}^f \Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, \tau), \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

где

$$a^f = \int_S \int_T f(s, \tau) \Phi_{00}^{sA}(s, t) dt ds, \quad (4.1.21)$$

$$h_{jk}^f = \int_T \int_T f(s, \tau) \Psi_{jk}^{sH}(s, t) dt ds, \quad (4.1.22)$$

$$b_{jk}^f = \int_T \int_T f(s, \tau) \Psi_{jk}^{sB}(s, t) dt ds, \quad (4.1.23)$$

$$d_{j_1 k j_2 n}^f = \int_T \int_T f(s, \tau) \Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, t) dt ds. \quad (4.1.24)$$

Подставим выражения (4.1.11) и (4.1.20) в уравнение (4.1.4), с учетом (4.1.7)-(4.1.10) и (4.1.16)-(4.1.19) имеем:

$$\begin{aligned} & a^t A_t[\varphi_{00}^t(t)] \varphi_{00}^t(\tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} \sum_{n=0}^{2^{j_2}-1} \{ h_{jkn}^t A_t[\varphi_{jk}^t(t)] \psi_{jn}^t(\tau) + \\ & + b_{jkn}^t A_t[\psi_{jk}^t(t)] \varphi_{jn}^t(\tau) + d_{jkn}^t A_t[\psi_{jk}^t(t)] \psi_{jn}^t(\tau) \} = \\ & = a^f \varphi_{00}^s(s) \varphi_{00}^t(\tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} h_{jk}^f \varphi_{00}^s(s) \varphi_{jk}^t(\tau) + \\ & + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} b_{jk}^f \psi_{jk}^s(s) \varphi_{00}^t(\tau) + \sum_{j_1=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} \sum_{j_2=0}^{J^t} \sum_{n=0}^{2^{j_2}-1} d_{j_1 k j_2 n}^f \psi_{j_1 k}^s(s) \psi_{j_2 n}^t(\tau). \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Пусть  $A_t[\varphi_{jk}^t(t)]$  и  $A_t[\psi_{jk}^t(t)]$  ( $j=0,1,\dots,J^t$ ;  $k=0,1,\dots,2^j-1$ ) – некоторые функции, зависящие от переменной  $s$  и принадлежащие пространству  $L^2(S)$ . Тогда эти функции имеют сходящиеся ВЛР:

$$A_t[\varphi_{jk}^t(t)] = u_{jk}(s) = a_{jk}^u \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{jkin}^u \psi_{in}^s(s), \quad (4.1.26)$$

$$A_t[\psi_{jk}^t(t)] = v_{jk}(s) = a_{jk}^v \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{jkin}^v \psi_{in}^s(s), \quad (4.1.27)$$

где

$$a_{jk}^u = \int_S u_{jk}(s) \varphi_{00}^s(s) ds, \quad (4.1.28)$$

$$d_{jkin}^u = \int_S u_{jk}(s) \psi_{in}^s(s) ds, \quad (4.1.29)$$

$$a_{jk}^v = \int_S v_{jk}(s) \varphi_{00}^s(s) ds, \quad (4.1.30)$$

$$d_{jkin}^v = \int_S v_{jk}(s) \psi_{in}^s(s) ds. \quad (4.1.31)$$

С учетом (4.1.26) и (4.1.27) уравнение (4.1.25) примет вид:

$$\begin{aligned} & a^t u_{00}(s) \varphi_{00}^t(\tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^{j-1}} \sum_{n=0}^{2^{j-1}} \{ h_{jkn}^t u_{jk}(s) \psi_{jn}^t(\tau) + \\ & + b_{jkn}^t v_{jk}(s) \varphi_{jn}^t(\tau) + d_{jkn}^t v_{jk}(s) \psi_{jn}^t(\tau) \} = \\ & = a^f \varphi_{00}^s(s) \varphi_{00}^t(\tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^{j-1}} h_{jk}^f \varphi_{00}^s(s) \psi_{jk}^t(\tau) + \\ & + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j-1}} b_{jk}^f \psi_{jk}^s(s) \varphi_{00}^t(\tau) + \sum_{j_1=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_1-1}} \sum_{j_2=0}^{J^t} \sum_{n=0}^{2^{j_2-1}} d_{j_1 k j_2 n}^f \psi_{j_1 k}^s(s) \psi_{j_2 n}^t(\tau). \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

Проецируя (4.1.32) на базисные функции  $\varphi_{jn}^t(\tau)$  ( $j=0, 1, \dots, J^t; n=0, 1, \dots, 2^j - 1$ ) имеем:

$$a^t u_{00}(s) + b_{000}^t v_{00}(s) = a^f \varphi_{00}^s(s) + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j-1}} b_{jk}^f \psi_{jk}^s(s), \quad (4.1.33)$$

$$\sum_{k=0}^{2^{j-1}} b_{jkn}^t v_{jk}(s) = 0 \text{ (для } j = 1, \dots, J^t; n = 0, 1, \dots, 2^j - 1\text{)} \quad (4.1.34).$$

Из (4.1.34) следует, что

$$v_{jk}(s) = 0 \text{ для } j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1. \quad (4.1.35)$$

Действительно, если  $j=1$ , то имеем замкнутую систему из двух линейных уравнений для определения  $v_{10}(s)$  и  $v_{11}(s)$ :

$$\begin{cases} b_{100}^t v_{10}(s) + b_{110}^t v_{11}(s) = 0, \\ b_{101}^t v_{10}(s) + b_{111}^t v_{11}(s) = 0. \end{cases}$$

Отсюда  $v_{11}(s) = 0, v_{10}(s) = 0$ .

Аналогично,  $v_{jk}(s) = 0$  для каждого уровня разрешения  $j$  и  $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ .

Далее проецируем (4.1.32) на базисные функции  $\psi_{jn}^t(\tau)$  для  $j=0, 1, \dots, J^t; n=0, 1, \dots, 2^j - 1$ :

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} \{h_{jkn}^t u_{jk}(s) + d_{jkn}^t v_{jk}(s)\} = h_{jn}^f \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^i-1} d_{ikjn}^f \psi_{ik}^s(s). \quad (4.1.36)$$

В итоге имеем систему линейных алгебраических уравнений (4.1.33), (4.1.35), (4.1.36), состоящую из  $(L^t + 1)$  уравнений. Найдем проекции этих уравнений на вейвлет базис (4.1.6). Проекция (4.1.33) на  $\varphi_{00}^s(s)$  имеет вид:

$$a^t a_{00}^u + b_{000}^t a_{00}^v = a^f. \quad (4.1.37)$$

Проекция (4.1.35) на  $\varphi_{00}^s(s)$  имеет вид:

$$a_{jk}^v = 0 \quad (j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1). \quad (4.1.38)$$

Проекция (4.1.36) на  $\varphi_{00}^s(s)$  имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} \{h_{jkn}^t a_{jk}^u + d_{jkn}^t a_{jk}^v\} = h_{jn}^f \quad (j = 0, \dots, J^t; n = 0, 1, \dots, 2^j - 1). \quad (4.1.39)$$

Проекция (4.1.33) на  $\psi_{il}^s(s)$  для  $i = 0, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1$  имеет вид:

$$a^t d_{00il}^u + b_{000}^t d_{00il}^v = b_{il}^f. \quad (4.1.40)$$

Проекция (4.1.35) на  $\psi_{il}^s(s)$  для  $i = 0, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1$  имеет вид:

$$d_{jkil}^v = 0 \quad (j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1). \quad (4.1.41)$$

Проекция (4.1.36) на  $\psi_{il}^s(s)$  для  $i = 0, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1$  имеет вид:

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} \{h_{jkn}^t d_{jkil}^u + d_{jkn}^t d_{jkil}^v\} = d_{iljn}^f \quad (j = 0, \dots, J^t; n = 0, 1, \dots, 2^j - 1). \quad (4.1.42)$$

Учитывая (4.1.38) и (4.1.41), имеем следующую СЛАУ, состоящую из  $(L^t + 1)L^s$  уравнений для определения неизвестных коэффициентов (4.1.28) – (4.1.31) ВЛР искомых функций (4.1.26) и (4.1.27):

$$\left\{ \begin{array}{l} a^t a_{00}^u + b_{000}^t a_{00}^v = a^f, \\ h_{000}^t a_{00}^u + d_{000}^t a_{00}^v = h_{00}^f, \\ \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t a_{jk}^u = h_{jn}^f \quad (j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1), \\ a^t d_{00il}^u + b_{000}^t d_{00il}^v = b_{il}^f \quad (i = 0, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1), \\ h_{000}^t d_{00il}^u + d_{000}^t d_{00il}^v = d_{il00}^f \quad (i = 0, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1), \\ \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t d_{jkil}^u = d_{iljn}^f \quad (i = 1, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1; j = 1, \dots, J^t; n = 0, 1, \dots, 2^j - 1) \end{array} \right. \quad (4.1.43)$$

Из СЛАУ (4.1.43) можно выделить несколько замкнутых подсистем. Решая систему из двух линейных уравнений относительно  $a_{00}^u$  и  $a_{00}^v$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^t a_{00}^u + b_{000}^t a_{00}^v = a^f, \\ h_{000}^t a_{00}^u + d_{000}^t a_{00}^v = h_{00}^f, \end{array} \right.$$

имеем

$$a_{00}^v = \frac{h_{00}^f a^t - h_{000}^t a^f}{d_{000}^t a^t - b_{000}^t h_{000}^t}, \quad (4.1.44)$$

$$a_{00}^u = \frac{a^f - b_{000}^t a_{00}^v}{a^t} = \frac{a^f (d_{000}^t a^t - b_{000}^t) - b_{000}^t (h_{00}^f a^t - h_{000}^t a^f)}{a^t (d_{000}^t a^t - b_{000}^t h_{000}^t)}. \quad (4.1.45)$$

Решая систему из двух линейных уравнений относительно  $d_{00il}^u$  и  $d_{00il}^v$  ( $i = 0, 1, \dots, J^s$ ;  $l = 0, 1, \dots, 2^i - 1$ )

$$\begin{cases} a^t d_{00il}^u + b_{000}^t d_{00il}^v = b_{il}^f \\ h_{000}^t d_{00il}^u + d_{000}^t d_{00il}^v = d_{il00}^f \end{cases}$$

имеем

$$d_{00il}^v = \frac{h_{000}^t b_{il}^f - a^t d_{il00}^f}{h_{000}^t b_{000}^t - a^t d_{000}^t}, \quad (4.1.46)$$

$$d_{00il}^u = \frac{d_{il00}^f - d_{000}^t d_{00il}^v}{h_{000}^t} = \frac{d_{il00}^f (h_{000}^t b_{000}^t - d_{000}^t) - d_{000}^t (h_{000}^t b_{il}^f - a^t d_{il00}^f)}{h_{000}^t (h_{000}^t b_{000}^t - a^t d_{000}^t)}. \quad (4.1.47)$$

Для определения  $a_{jk}^u$  ( $j = 1, \dots, J^t$ ;  $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ ) необходимо решить СЛАУ

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t a_{jk}^u = h_{jn}^f \quad (j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1). \quad (4.1.48)$$

Для определения  $d_{jkil}^u$  ( $i = 1, \dots, J^s$ ;  $l = 0, 1, \dots, 2^i - 1$ ;  $j = 1, \dots, J^t$ ;  $n = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ ) необходимо решить СЛАУ

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t d_{jkil}^u = d_{iljn}^f \quad (i = 1, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1; j = 1, \dots, J^t; n = 0, 1, \dots, 2^j - 1) \quad (4.1.49)$$

Таким образом, получено следующее утверждение.

### Теорема 4.1.1.

Пусть выполняются следующие условия:

- 1) в пространстве  $L^2(T)$ ,  $T = [t_0, t_1]$ , задан ортонормированный вейвлет базис вида (4.1.5), порожденный вейвлетами с конечными носителями;
- 2) в пространстве  $L^2(S)$ ,  $S = [s_0, s_1]$ , задан ортонормированный вейвлет базис вида (4.1.6), порожденный вейвлетами с конечными носителями;
- 3) в пространстве  $L^2(T \times T)$  определен двумерный ортонормированный базис вида (4.1.7) – (4.1.10);
- 4) в пространстве  $L^2(S \times T)$  определен двумерный ортонормированный базис вида (4.1.16) – (4.1.19);
- 5) функция  $f(s, t) \in L^2(S \times T)$  и имеет ВЛР (4.1.20);

- 6) функция  $K_Z(t, \tau) \in L^2(T \times T)$  и имеет ВЛР (4.1.11);  
 7) результат действия неизвестного линейного оператора  $A_t$  на базисные вейвлет функции вида (4.1.5) представляет собой функции, принадлежащие пространству  $L^2(S)$ .

Тогда с.к. оптимальный линейный оператор  $A_t$ , который является решением уравнения (4.1.4), определяется посредством набора формальных правил:

$$\begin{aligned} A_t[\varphi_{jk}^t(t)] &= u_{jk}(s) \quad (j = 0, 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1), \\ A_t[\psi_{00}^t(t)] &= v_{00}(s), \\ A_t[\psi_{jk}^t(t)] &= 0 \quad (j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1), \end{aligned} \quad (4.1.50)$$

где

- 1)  $u_{00}(s) = a_{00}^u \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{00in}^u \psi_{in}^s(s)$ , параметры  $a_{00}^u$  и  $d_{00in}^u$  вычисляются по формулам (4.1.45) и (4.1.47) соответственно;
- 2)  $v_{00}(s) = a_{00}^v \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{00in}^v \psi_{in}^s(s)$ , параметры  $a_{00}^v$  и  $d_{00in}^v$  вычисляются по формулам (4.1.44) и (4.1.46) соответственно;
- 3)  $u_{jk}(s) = a_{jk}^u \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{jkin}^u \psi_{in}^s(s)$   
 $(j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1)$ , параметры  $a_{jk}^u$  являются решением СЛАУ (4.1.48),  $d_{jkin}^u$  ( $i = 1, \dots, J^s; n = 0, 1, \dots, 2^i - 1; j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ ) – решением СЛАУ (4.1.49).

**Замечание.** Чтобы представить результат действия линейного оператора  $A_t$ , определенного теоремой 4.1.1, на детерминированную функцию, необходимо выполнить следующие действия. Пусть  $\xi(t) \in L^2(R)$ . Тогда  $\xi(t)$  раскладывается в сходящийся вейвлет ряд:

$$\xi(t) = a^\xi \varphi_{00}^t(t) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{jk}^\xi \psi_{jk}^t(t).$$

Согласно теореме 4.1.1,

$$A_t[\xi(t)] = A_t \left[ a^\xi \varphi_{00}^t(t) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{jk}^\xi \psi_{jk}^t(t) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= a^\xi A_t [\varphi_{00}^t(t)] + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^{j-1}} d_{jk}^\xi A_t [\psi_{jk}^t(t)] = a^\xi u_{00}(t) + d_{00}^\xi v_{00}(t) = \\
&= a^\xi (a_{00}^u \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^{i-1}} d_{00in}^u \psi_{in}^s(s)) + d_{00}^\xi \left( a_{00}^v \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^{i-1}} d_{00in}^v \psi_{in}^s(s) \right) = \\
&= (a^\xi a_{00}^u + d_{00}^\xi a_{00}^v) \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^{i-1}} (a^\xi d_{00in}^u + d_{00}^\xi d_{00in}^v) \psi_{in}^s(s)
\end{aligned}$$

где параметры  $a_{00}^u$  и  $d_{00in}^u$  вычисляются по формулам (4.1.45) и (4.1.47) соответственно, параметры  $a_{00}^v$  и  $d_{00in}^v$  – по формулам (4.1.46) и (4.1.48) соответственно.

## 4.2. Построение вейвлет с.к. оптимального линейного оператора в случае линейной зависимости сигнала от параметров и аддитивной помехи

Пусть наблюдаемый сигнал  $Z(t)$  и сигнал  $W(s)$ , подлежащий воспроизведению, можно представить в виде суммы линейной комбинации известных функций со случайными коэффициентами и помехи в виде некоторой случайной функции:

$$Z(t) = \sum_{r=1}^N U_r \xi_r(t) + X(t), \quad t \in T, \quad (4.2.1)$$

$$W(s) = \sum_{r=1}^N U_r \zeta_r(s) + Y(s), \quad s \in S. \quad (4.2.2)$$

Здесь  $X(t)$ ,  $Y(s)$  – случайные функции с нулевыми математическими ожиданиями, описывающие случайные помехи и случайные ударные воздействия;  $\xi_1, \dots, \xi_N, \zeta_1, \dots, \zeta_N$  – заданные структурные функции, описывающие также и детерминированные ударные воздействия;  $U_1, \dots, U_N$  – случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и не коррелированные со случайными функциями  $X(t)$  и  $Y(s)$ .

Требуется найти такой оператор  $A_t$ , чтобы СФ

$$W^*(s) = A_t Z(t)$$

была с.к. оптимальной оценкой сигнала  $W(s)$ . Согласно [21], чтобы линейный оператор  $A_t$  был с.к. оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял уравнению (4.1.2) или (4.1.3). На основании (4.2.1) и (4.2.2)

$$\Gamma_Z(t, \tau) = M[Z(t)\overline{Z(\tau)}] = \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \xi_p(t) \xi_q(\tau) + K_X(t, \tau) \quad (t, \tau \in T), \quad (4.2.3)$$

$$\Gamma_{WZ}(s, \tau) = M[W(s)\overline{Z(\tau)}] = \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \xi_q(\tau) + K_{YX}(s, \tau) \quad (s \in S, \tau \in T), \quad (4.2.4)$$

где  $K_X(t, \tau) = M[X(t)\overline{X(\tau)}]$ ,  $K_{YX}(s, \tau) = M[Y(s)\overline{X(\tau)}]$ ,  $\gamma_{pq} = M[U_p\overline{U_q}]$ .

После подстановки (4.2.3), (4.2.4) в уравнение (4.1.2) получим

$$A_t[K_X(t, \tau)] = K_{YX}(s, \tau) + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \{\zeta_p(s) - A_t[\xi_p(t)]\} \xi_q(\tau). \quad (4.2.5)$$

Для решения операторного уравнения (4.2.5) применим теорему 4.1.1. Будем считать, что

- 1) функции  $\xi_1, \dots, \xi_N \in L^2(T)$  и имеют ВЛР:

$$\xi_p(t) = a_p^\xi \varphi_{00}^t(t) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{pj k}^\xi \psi_{jk}^t(t) \quad (p = 1, \dots, N), \quad (4.2.6)$$

где

$$a_p^\xi = \int_T \xi_p(t) \varphi_{00}^t(t) dt, \quad (4.2.7)$$

$$d_{pj k}^\xi = \int_T \xi_p(t) \psi_{jk}^t(t) dt; \quad (4.2.8)$$

- 2) функции  $\zeta_1, \dots, \zeta_N(s) \in L^2(S)$  и имеют ВЛР:

$$\zeta_p(t) = a_p^\zeta \varphi_{00}^s(s) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{pj k}^\zeta \psi_{jk}^s(s) \quad (p = 1, \dots, N), \quad (4.2.9)$$

где

$$a_p^\zeta = \int_S \zeta_p(s) \varphi_{00}^s(s) ds, \quad (4.2.10)$$

$$d_{pj k}^\zeta = \int_S \zeta_p(s) \psi_{jk}^s(s) ds; \quad (4.2.11)$$

- 3) двумерная функция  $K_X(t, \tau) \in L^2(T \times T)$  и имеет ВЛР вида (4.1.11) с коэффициентами (4.1.12)-(4.1.15);

- 4) двумерная функция  $K_{YX}(s, \tau) \in L^2(S \times T)$  и имеет ВЛР:

$$K_{YX}(s, \tau) = a^s \Phi_{00}^{SA}(s, \tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jk}^s \Psi_{jk}^{SH}(s, \tau) + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^s \Psi_{jk}^{SB}(s, \tau) + \\ + \sum_{j_1=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} \sum_{j_2=0}^{J^t} \sum_{n=0}^{2^{j_2}-1} d_{j_1 k j_2 n}^s \Psi_{j_1 k j_2 n}^{SD}(s, \tau), \quad (4.2.12)$$

где

$$a^s = \int_S \int_T K_{YX}(s, \tau) \Phi_{00}^{SA}(s, t) dt ds, \quad (4.2.13)$$

$$h_{jk}^s = \int_T \int_T K_{YX}(s, \tau) \Psi_{jk}^{SH}(s, t) dt ds, \quad (4.2.14)$$

$$b_{jk}^s = \int_T \int_T K_{YX}(s, \tau) \Psi_{jk}^{SB}(s, t) dt ds, \quad (4.2.15)$$

$$d_{j_1 k j_2 n}^s = \int_T \int_T K_{YX}(s, \tau) \Psi_{j_1 k j_2 n}^{sD}(s, t) dt ds; \quad (4.2.16)$$

5) с.к. оптимальный линейный оператор  $A_t$  задается набором формальных правил (4.1.50).

Неизвестные коэффициенты ВЛР функций  $u_{00}(s), v_{00}(s), u_{jk}(s)$  ( $j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ ) удовлетворяют СЛАУ вида (4.1.43):

$$a^t a_{00}^u + b_{000}^t a_{00}^v = a^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \left\{ a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v \right\} a_q^\xi, \quad (4.2.17)$$

$$d_{000}^t a_{00}^v + h_{000}^t a_{00}^u = h_{00}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \left\{ a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v \right\} d_{q00}^\xi, \quad (4.2.18)$$

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t a_{jk}^u = h_{jn}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \left\{ a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v \right\} d_{qjn}^\xi \\ (j = 1, \dots, J^t; n = 0, 1, \dots, 2^j - 1), \quad (4.2.19)$$

$$a^t d_{00il}^u + b_{000}^t d_{00il}^v = b_{il}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \left\{ d_{pil}^\zeta - a_p^\xi d_{00il}^u - d_{p00}^\xi d_{00il}^v \right\} a_q^\xi \\ (i = 0, 1, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1), \quad (4.2.20)$$

$$d_{000}^t d_{00il}^v + h_{000}^t d_{00il}^u = d_{il00}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \left\{ d_{pil}^\zeta - a_p^\xi d_{00il}^u - d_{p00}^\xi d_{00il}^v \right\} d_{q00}^\xi \\ (i = 0, 1, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1), \quad (4.2.21)$$

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t d_{jkil}^u = d_{iljn}^s + \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \left\{ d_{pil}^\zeta - a_p^\xi d_{00il}^u - d_{p00}^\xi d_{00il}^v \right\} d_{qjn}^\xi \\ (j = 1, \dots, J^t; n = 0, 1, \dots, 2^j - 1; i = 0, 1, \dots, J^s; l = 0, 1, \dots, 2^i - 1). \quad (4.2.22)$$

Качество оптимального с.к. оператора определяется с.к. оценкой [21]:

$$\eta = M[|\delta W|^2] = M[|W(s) - W^*(s)|^2] = M[|W(s) - A_t Z(t)|^2] = \\ = \Gamma_W(s, s) - A_t \Gamma_{WZ}(s, t). \quad (4.2.23)$$

Согласно (4.2.1), (4.2.2):

$$\Gamma_W(s, s) = \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \zeta_q(s) + K_Y(s, s),$$

$$\Gamma_{WZ}(s, t) = \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \xi_q(t) + K_{YX}(s, t).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\eta &= \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \zeta_q(s) + K_Y(s, s) - A_t \left[ \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \xi_q(t) + K_{YX}(s, t) \right] = \\
&= \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \zeta_q(s) + K_Y(s, s) - \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) A_t [\xi_q(t)] - A_t [K_{YX}(s, t)] = \\
&= \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \left( \zeta_q(s) - A_t [\xi_q(t)] \right) + K_Y(s, s) - A_t [K_{YX}(s, t)] = \\
&= \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \left( \zeta_q(s) - A_t \left[ a_q^\xi \varphi_{00}^t(t) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{qjk}^\xi \psi_{jk}^t(t) \right] \right) + \\
&\quad + K_Y(s, s) - A_t \left[ a^s \varphi_{00}^s(s) \varphi_{00}^t(t) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jk}^s \varphi_{00}^s(s) \psi_{jk}^t(t) + \sum_{j=0}^s \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^s \psi_{jk}^s(s) \varphi_{00}^t(t) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j_1=0}^s \sum_{k=0}^{2^{j_1}-1} \sum_{j_2=0}^{J^t} \sum_{n=0}^{2^{j_2}-1} d_{j_1 k j_2 n}^s \psi_{j_1 k}^s(s) \psi_{j_2 n}^t(t) \right] = \\
&= \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \left( \zeta_q(s) - a_q^\xi u_{00}(s) - d_{q00}^\xi v_{00}(s) \right) + \\
&\quad + K_Y(s, s) - \left( a^s \varphi_{00}^s(s) u_{00}(s) + h_{00}^s \varphi_{00}^s(s) v_{00}(s) + \sum_{j=0}^s \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^s \psi_{jk}^s(s) u_{00}(s) \right) = \\
&= \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \left( \zeta_q(s) - a_q^\xi u_{00}(s) - d_{q00}^\xi v_{00}(s) \right) + \\
&\quad + K_Y(s, s) - \left( (a^s \varphi_{00}^s(s) + \sum_{j=0}^s \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^s \psi_{jk}^s(s)) u_{00}(s) + h_{00}^s \varphi_{00}^s(s) v_{00}(s) \right)
\end{aligned}$$

В итоге получено следующее утверждение.

### Теорема 4.2.1.

Пусть выполняются условия теоремы 4.1.1, а также:

- 1) наблюдаемый сигнал  $Z(t)$  имеет вид (4.2.1), сигнал, подлежащий воспроизведению,  $W(s)$  имеет вид (4.2.2);
- 2)  $\xi_1, \dots, \xi_N \in L^2(T)$  и имеют ВЛР (4.2.6);
- 3)  $\zeta_1, \dots, \zeta_N(s) \in L^2(S)$  и имеют ВЛР (4.2.9);
- 4)  $K_X(t_1, t_2) \in L^2(T \times T)$  и имеет ВЛР вида (4.1.11);
- 5)  $K_{YX}(s, t) \in L^2(S \times T)$  и имеет ВЛР (4.2.12).

Тогда с.к. оптимальный линейный оператор  $A_t$ , который определяется уравнением (4.2.5), задается набором формальных правил:

$$\begin{aligned}
A_t[\varphi_{jk}^t(t)] &= u_{jk}(s) \quad (j = 0, 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1), \\
A_t[\psi_{00}^t(t)] &= v_{00}(s), \\
A_t[\psi_{jk}^t(t)] &= 0 \quad (j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1),
\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

где

$$u_{00}(s) = a_{00}^u \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{00in}^u \psi_{in}^s(s);$$

$$v_{00}(s) = a_{00}^v \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{00in}^v \psi_{in}^s(s);$$

$$u_{jk}(s) = a_{jk}^u \varphi_{00}^s(s) + \sum_{i=0}^{J^s} \sum_{n=0}^{2^i-1} d_{jkin}^u \psi_{in}^s(s) (j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1);$$

а параметры  $a_{jk}^u, d_{jkin}^u, a_{00}^u, d_{00in}^u, a_{00}^v, d_{00in}^v$  ( $i = 0, \dots, J^s; n = 0, 1, \dots, 2^i - 1; j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ ) определяются СЛАУ (4.2.17) – (4.2.22).

Качество с.к. оптимального линейного оператора  $A_t$  определяется с.к. оценкой:

$$\begin{aligned} \eta = & \sum_{p,q=1}^N \gamma_{pq} \zeta_p(s) \left( \zeta_q(s) - a_q^\xi u_{00}(s) - d_{q00}^\xi v_{00}(s) \right) + \\ & + K_Y(s, s) - \left( (a^s \varphi_{00}^s(s) + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^s \psi_{jk}^s(s)) u_{00}(s) + h_{00}^s \varphi_{00}^s(s) v_{00}(s) \right) \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

**Следствие.** Пусть выполнены условия теоремы 4.2.1 и СФ  $X(t)$  представлена в виде ВЛКР в соответствие с теоремой 2.1.5. Тогда с.к. оптимальная оценка  $W^*(s)$  сигнала  $W(s)$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} W^*(s) = A_t Z(t) = & \sum_{r=1}^N U_r \left( a_r^\xi u_{00}(s) + d_{r00}^\xi v_{00}(s) \right) + \\ & + \sum_{v=1}^{L^t} V_v (d_{v00}^x v_{00}(s) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{vjk}^x u_{jk}(s)). \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

**Доказательство.** Действительно,

$$\begin{aligned} W^*(s) = A_t Z(t) = & A_t \left[ \sum_{r=1}^N U_r \xi_r(t) + X(t) \right] = \\ = & A_t \left[ \sum_{r=1}^N U_r \left( a_r^\xi \varphi_{00}^t(t) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{rjk}^\xi \psi_{jk}^t(t) \right) + \sum_{v=1}^{L^t} V_v x_v(t) \right] = \\ = & \sum_{r=1}^N U_r \left( a_r^\xi A_t[\varphi_{00}^t(t)] + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{rjk}^\xi A_t[\psi_{jk}^t(t)] \right) + \sum_{v=1}^{L^t} V_v A_t[x_v(t)] = \\ = & \sum_{r=1}^N U_r (a_r^\xi u_{00}(s) + d_{r00}^\xi v_{00}(s)) + \sum_{v=1}^{L^t} V_v A_t \left[ \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} (a_{vjk}^x \varphi_{jk}^t(t) + d_{vjk}^x \psi_{jk}^t(t)) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=1}^N U_r \left( a_r^\xi u_{00}(s) + d_{r00}^\xi v_{00}(s) \right) + + \sum_{v=1}^{L^t} V_v \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} (a_{vjk}^x A_t[\varphi_{jk}^t(t)] + \\
&+ d_{vjk}^x A_t[\psi_{jk}^t(t)]) = \sum_{r=1}^N U_r \left( a_r^\xi u_{00}(s) + d_{r00}^\xi v_{00}(s) \right) + \\
&+ \sum_{v=1}^{L^t} V_v (d_{v00}^x v_{00}(s) + + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{vjk}^x u_{jk}(s)).
\end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Следствием теоремы 4.2.1 являются два алгоритма.

**Алгоритм 4.2.1.1.** Построение с.к. оптимального линейного оператора  $A_t$  и вычисление с.к. оценки  $\eta$  качества оператора  $A_t$ .

1. Задание вейвлет базисов (4.1.5), (4.1.6), (4.1.7)-(4.1.10), (4.1.16)-(4.1.19).
2. Вейвлет разложение функций  $\xi_1, \dots, \xi_N \in L^2(T)$  по базису (4.1.5) в виде (4.2.6), функций  $\zeta_1, \dots, \zeta_N(s) \in L^2(S)$  по базису (4.1.6) в виде (4.2.9), функции  $K_X(t, \tau) \in L^2(T \times T)$  по базису (4.1.7)-(4.1.10) в виде (4.1.11), функции  $K_{YX}(s, \tau) \in L^2(S \times T)$  по базису (4.1.16)-(4.1.19) в виде (4.2.12).
3. Составление и решение СЛАУ (4.2.17)–(4.2.22) относительно  $a_{jk}^u, d_{jkin}^u, a_{00}^u, d_{00in}^u, a_{00}^v, d_{00in}^v$  ( $i = 0, \dots, J^s; n = 0, 1, \dots, 2^i - 1; j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ ).
4. Задание набора формальных правил (4.2.24), которыми определяется с.к. оптимальный линейный оператор  $A_t$ .
5. Вычисление с.к. оценки  $\eta$  по формуле (4.2.25) для определения качества с.к. оптимального линейного оператора  $A_t$ .

**Алгоритм 4.2.1.2.** Построение с.к. оптимальной оценки  $W^*(s)$  сигнала  $W(s)$ .

1. Вейвлет разложение функций  $\xi_1, \dots, \xi_N \in L^2(T)$  в виде (4.2.6).
2. Выполнение алгоритма 2.1.5 для вейвлет канонического разложения СФ  $X(t)$  в виде (2.1.39).
3. Вычисление с.к. оптимальной оценки  $W^*(s)$  сигнала  $W(s)$  по формуле (4.2.26).

### 4.3. Вейвлет модификация фильтра Калмана – Бьюси

На практике часто возникают задачи оценивания состояния системы по результатам измерений, которые всегда сопровождаются ошибками. Рассмотрим задачу оценивания вектора состояния УдСтС, описываемой линейными нестационарными стохастическими дифференциальными уравнениями Ито, в любой момент времени  $t > t_0$  по результатам непрерывного наблюдения стохастического процесса, который также определяется линейными нестационарными стохастическими дифференциальными уравнениями Ито, на отрезке времени  $[t_0, t]$ . Задача в такой постановке называется *задачей фильтрации*. Критерием оптимальности служит критерий минимума среднего квадрата ошибки.

Для линейной с.к. оптимальной обработки информации в линейных нестационарных дифференциальных СтС широкое распространение получил дифференциальный фильтр Калмана – Бьюси (ФКБ). В его основе применительно к УдСтС лежит следующая теорема [87].

#### Теорема 4.3.1.

*Пусть нестационарная дифференциальная СтС описывается уравнениями на отрезке  $[t_0, T]$ :*

$$\dot{X}_t = a_{0t}^{\text{уд}} + a_1^{\text{уд}} X_t + V_1^{\text{уд}}, \quad (4.3.1)$$

$$Z_t = \dot{Y}_t = b_1 X_t + V_2. \quad (4.3.2)$$

Здесь  $X_t$ ,  $Y_t$  – векторы состояния и наблюдения системы, а  $V_1^{\text{уд}} = V_1$  и  $V_2$  – независимые белые шумы (в общем случае негауссовские) с матрицами интенсивностей  $V_{1t}^{\text{уд}}$  и  $V_2$ .

*Тогда в случае невырожденности шумов в наблюдениях ( $|\det V_2| \neq 0$ ) уравнения с.к. оптимального несмещенного дифференциального фильтра имеют вид:*

$$\dot{\hat{X}}_t = a_{0t}^{\text{уд}} + a_1^{\text{уд}} \hat{X}_t + \beta_t (Z_t - b_1 \hat{X}_t), \quad \hat{X}(t_0) = \hat{X}_0, \quad (4.3.3)$$

$$\beta_t = R_t b_1^T V_2^{-1}, \quad (4.3.4)$$

$$\dot{R}_t = a_1 R_t + R_t a_1^T + V_{1t}^{\text{уд}} - \beta_t V_2 \beta_t^T, \quad R(t_0) = R_0. \quad (4.3.5)$$

Здесь  $\hat{X}_t$  – с.к. оценка  $X_t$ ,  $R_t$  – ковариационная матрица ошибки фильтрации,  $\beta_t$  – матричный коэффициент усиления. Для вычисления  $R_t$  и  $\beta_t$  не требуются результа-

ты измерений, и они вычисляются заранее. В этих условиях уравнение (4.3.3) является линейным.

Применяя метод вейвлетов Хаара–Галеркина для решения уравнения (4.3.3), получим уравнения для вейвлет фильтра Калмана – Бьюси (ВЛФКБ). Выполним в (4.3.3) для  $t \in [t_0, T]$  замену переменных:

$$\bar{t} = \frac{t-t_0}{T-t_0}, \quad \bar{t} \in [0,1], \quad (4.3.6)$$

В результате получим:

$$\hat{\bar{X}}'(\bar{t}) = \bar{A}_{0\bar{t}} + \bar{A}_{\bar{t}}\hat{\bar{X}}(\bar{t}), \quad \hat{\bar{X}}(0) = \hat{\bar{X}}_0, \quad (4.3.7)$$

$$\hat{\bar{X}}(\bar{t}) = \hat{\bar{X}}((T-t_0)\bar{t}+t_0), \quad \hat{\bar{X}}(0) = \hat{\bar{X}}_0, \quad (4.3.8)$$

$$\bar{A}_0(\bar{t}) = (T-t_0)[a_{0t}^{y_d}((T-t_0)\bar{t}+t_0) + \beta_t((T-t_0)\bar{t}+t_0)Z_t((T-t_0)\bar{t}+t_0)], \quad (4.3.9)$$

$$\bar{A}(\bar{t}) = (T-t_0)[a_1 - \beta_t((T-t_0)\bar{t}+t_0)b_1]. \quad (4.3.10)$$

Здесь штрих – дифференцирование по безразмерному времени. В дальнейшем в индексах зависимость от безразмерного времени опускается.

Для каждой составляющей  $\hat{\bar{X}}_h (h = 1, 2, \dots, p)$  вектора  $\hat{\bar{X}}(\bar{t})$  уравнение (4.3.7) дает

$$\hat{\bar{X}}'_h = \bar{A}_{h0} + \sum_{k=1}^p \bar{A}_{hk} \hat{\bar{X}}_k. \quad (4.3.11)$$

Будем считать, что  $\hat{\bar{X}}'_h, \hat{\bar{X}}_h, \bar{A}_{hk}, \bar{A}_{h0}$  ( $h, k = 1, 2, \dots, p$ ) принадлежат пространству  $L^2[0,1]$ . Следуя разделу 3.1, введем базис вейвлетов Хаара  $w_i$  и интегралов  $p_i$  от вейвлетов Хаара. Разложим производную  $\hat{\bar{X}}'_h$  в вейвлет ряд Хаара:

$$\hat{\bar{X}}'_h = \sum_{i=1}^L c_{hi} w_i, \quad (4.3.12)$$

$$c_{hi} = \int_0^1 \hat{\bar{X}}'_h w_i d\tau. \quad (4.3.13)$$

Тогда решение (4.3.11) относительно  $\hat{\bar{X}}_h$  можно представить в виде

$$\hat{\bar{X}}_h = \sum_{i=1}^L c_{hi} p_i + \hat{\bar{X}}_{0h}. \quad (4.3.14)$$

После подстановки (4.3.12), (4.3.14) в (4.3.11) получим соотношения для определения  $c_{hi}$ :

$$\sum_{i=1}^L c_{hi} w_i = \bar{A}_{h0} + \sum_{k=1}^p \bar{A}_{hk} (\sum_{i=1}^L c_{hi} p_i + \hat{\bar{X}}_{0h}). \quad (4.3.15)$$

Проектируя (4.3.15) на базис  $w_i$  и учитывая ортонормированность  $w_i$ , приходим к  $(L \times p)$  – мерной СЛАУ:

$$c_{hs} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^L c_{hi} (\bar{A}_{hk} p_i, w_s) + \hat{X}_{0h} \sum_{i=1}^L (\bar{A}_{hk}, w_s) + (A_{h0}, w_s) \\ (s = 1, 2, \dots, L; h = 1, 2, \dots, p). \quad (4.3.16)$$

Далее представим  $\bar{A}_{hk} p_i, \bar{A}_{hk}, A_{h0}$  в виде сходящихся рядов по базису Хаара:

$$\bar{A}_{hk} p_i = \sum_{j=1}^L g_j^{hki} w_j, \quad \bar{A}_{hk} = \sum_{j=1}^L q_j^{hk} w_j, \quad \bar{A}_{h0} = \sum_{j=1}^L \rho_j^h w_j, \quad (4.3.17)$$

где  $g_j^{hki} = (\bar{A}_{hk} p_i, w_j) = \int_0^1 \bar{A}_{hk} p_i w_j d\tau, q_j^{hk} = (\bar{A}_{hk}, w_j) = \int_0^1 \bar{A}_{hk} w_j d\tau,$

$$\rho_j^h = (A_{h0}, w_j) = \int_0^1 \bar{A}_{h0} w_j d\tau.$$

В результате СЛАУ (4.4.16) примет следующий окончательный вид:

$$c_{hs} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^L c_{hi} g_s^{hki} + \hat{X}_{0h} \sum_{i=1}^L q_s^{hk} + \rho_s^h \quad (s = 1, 2, \dots, L; h = 1, 2, \dots, p). \quad (4.3.18)$$

Таким образом, получен следующий результат.

### Теорема 4.3.2.

*Пусть выполнены условия теоремы 4.3.1, а также:*

- 1) скалярные функции  $\hat{X}'_h, \hat{X}_h, \bar{A}_{hk}, \bar{A}_{h0}$  ( $h, k = 1, 2, \dots, p$ ) принадлежат пространству  $L^2[0,1]$ ;
- 2) в пространстве  $L^2[0,1]$  определен ортонормированный базис вейвлетов Хаара  $w_i$  вида (3.1.12)–(3.1.14).

Тогда вейвлет фильтр Калмана–Бьюси определяется соотношениями (4.3.14), где  $p_i(t)$  – известные функции вида (3.1.16), коэффициенты  $c_{hi}$  определяются системой линейных алгебраических уравнений (4.3.18).

Из теоремы 4.3.2 вытекает алгоритм 4.3.2 определения с.к. оценки вектора состояния  $X_t$  нестационарной дифференциальной СтС, описываемой уравнениями (4.3.1), (4.3.2).

### Алгоритм 4.3.2.

1. Вычисления  $R_t$  и  $\beta_t$  согласно (4.3.5), (4.3.4).
2. Определение в пространстве  $L^2[0,1]$  ортонормированной системы вейвлетов Хаара с максимальным уровнем вейвлет разрешения  $J$ .
3. Вычисление интегралов от вейвлетов Хаара по формулам (3.1.16).
4. Задание значений наблюдаемого процесса  $Z(t)$  ( $t \in [t_0, T]$ ) в точках  $t_j = t_0 + (j - 1)\Delta t$  для  $j = 1, 2, \dots, L; L = 2 \cdot 2^J; \Delta t = \frac{T - t_0}{L - 1}$ .

5. Составление и решение системы линейных алгебраических уравнений (4.3.18) для определения коэффициентов  $c_{hs}$ .

6. Вычисление с.к. оценки  $\hat{\bar{X}}_h$  для каждой составляющей вектора состояния  $\bar{X}_t$  по формуле (4.3.14).

7. Переход от безразмерного времени  $\bar{t} \in [0,1]$  к  $t \in [t_0, T]$  и определение с.к. оценки  $\hat{X}(t)$  по формуле:

$$\hat{X}(\bar{t}) = \hat{X}((T - t_0)\bar{t} + t_0).$$

#### 4.4. Вейвлет модификация линейного фильтра Пугачева

Рассмотрим задачу фильтрации для линейной дифференциальной стохастической системы Ито с параметрическими шумами при УВ:

$$\begin{aligned} \dot{X}_t &= a_{0t} + a_{1t}X_t + a_t Y_t + (c_{10t} + \sum_{r=1}^{n_Y} c_{1rt}Y_r + \sum_{r=1}^{n_X} c_{1,n_Y+r,t}X_r)V, \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_t &= b_{0t} + b_t Y_t + b_{1t}X_t + (c_{20t} + \sum_{r=1}^{n_Y} c_{2rt}Y_r + \sum_{r=1}^{n_X} c_{2,n_Y+r,t}X_r)V. \\ Y(t_0) &= Y_0 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Здесь  $t \in [t_0, T]$ ,  $X_t$  –  $n_X$ -мерный ненаблюдаемый СтП,  $Y_t$  –  $n_Y$ -мерный наблюдаемый СтП,  $V$  – белый шум в строгом смысле, в общем случае негауссовский,  $a_{0t} = a_{0t}^{\text{уд}}$ ,  $a_{1t} = a_{1t}^{\text{уд}}$ ,  $a_t = a_t^{\text{уд}}$ ,  $c_{10t} = c_{10t}^{\text{уд}}$ ,  $c_{1rt} = c_{1rt}^{\text{уд}}$ ,  $c_{1,n_Y+r,t} = c_{1,n_Y+r,t}^{\text{уд}}$  ( $r=1, \dots, n_Y$ ),  $b_{0t}, b_t, b_{1t}, c_{20t}, c_{2kt}, c_{2,n_Y+k,t}$  ( $k=1, \dots, n_X$ ) – известные матричные функции.

Решение задачи оптимальной фильтрации, когда критерием оптимальности является минимум среднего квадрата ошибки, в этом случае приводит к необходимости интегрирования системы уравнений высокого порядка. Поэтому единственный способ получения практически реализуемого фильтра является понижение его порядка. Согласно теории условной оптимальной фильтрации В.С. Пугачева [87], условно оптимальный фильтр находится в классе допустимых фильтров, поведение которых описывается уравнением того же порядка, что и уравнение для  $X_t$ , в данном случае линейным.

При решении задачи условно оптимальной фильтрации для уравнений (4.4.1) и (4.4.2) линейный фильтр Пугачева (ЛФП) определяются следующей теоремой [87].

### Теорема 4.4.1.

*Пусть нестационарная линейная дифференциальная система описывается уравнениями (4.4.1), (4.4.2). Тогда уравнения линейного условно-оптимального (по Пугачеву) фильтра, в общем случае с негауссовским векторным белым шумом интенсивности  $\nu_t$  имеют вид:*

$$\dot{\hat{X}}_t = a_{0t} + a_t Y_t + a_{1t} \hat{X}_t + \beta_t (Z_t - (b_{0t} + b_t Y_t + b_{1t} \hat{X}_t)), \quad \hat{X}(t_0) = \hat{X}_0. \quad (4.4.3)$$

После нахождения вероятностных моментов первого и второго порядков случайного вектора  $[Y_1 \dots Y_{n_Y} \quad X_1 \dots X_{n_X}]^T$  согласно уравнениям

$$\dot{m}_t = a_{0t} + a_{1t} m_t, \quad m_{t_0} = m_0, \quad (4.4.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_t &= \bar{a}_t K_t + K_t \bar{a}_t^T + \bar{c}_{0t} \nu_t \bar{c}_{0t}^T + \sum_{r=1}^{n_Y+n_X} (\bar{c}_{0t} \nu_t \bar{c}_{rt}^T + \bar{c}_{rt} \nu_t \bar{c}_{0t}^T) m_{rt} + \\ &+ \sum_{r,s=1}^{n_Y+n_X} \bar{c}_{rt} \nu_t \bar{c}_{st}^T (m_{rt} m_{st} + K_{rs}), \quad K_{t_0} = K_0, \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

$$\bar{a}_t = \begin{bmatrix} b_t & b_{1t} \\ a_t & a_{1t} \end{bmatrix}, \quad \bar{a}_{0t} = \begin{bmatrix} b_{0t} \\ a_{0t} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_{rt} = \begin{bmatrix} c_{2rt} \\ c_{1rt} \end{bmatrix}, \quad (4.4.6)$$

и ковариационной матрицы ошибки  $R_t$  согласно уравнению:

$$\begin{aligned} \dot{R}_t &= a_{1t} R_t + R_t a_{1t}^T - \left[ R_t b_{1t}^T + \left( c_{10t} + \sum_{r=1}^{n_Y+n_X} c_{1rt} m_{rt} \right) \nu_t \left( c_{20t}^T + \sum_{r=1}^{n_Y+n_X} c_{2rt}^T m_{rt} \right) + \right. \\ &+ \left. \sum_{r,s=1}^{n_Y+n_X} c_{1rt} \nu_t c_{2st}^T K_{rs} \right] \mathfrak{A}_{11t}^{-1} \left[ b_{1t} R_t + \left( c_{20t} + \sum_{r=1}^{n_Y+n_X} c_{2rt} m_{rt} \right) \nu_t \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left( c_{10t}^T + \sum_{r=1}^{n_Y+n_X} c_{1rt}^T m_{rt} \right) + \sum_{r=1}^{n_Y+n_X} c_{2rt} \nu_t K_{rs} \right] + \\ &+ (c_{10t} + \sum_{r=1}^{n_Y+n_X} c_{1rt} m_{rt}) \nu_t (c_{10t}^T + \sum_{r=1}^{n_Y+n_X} c_{1rt}^T m_{rt}) + \sum_{r=1}^{n_Y+n_X} c_{1rt} \nu_t c_{1st}^T K_{rs}, \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

параметр  $\mathfrak{A}_{11t}$  и оптимальный коэффициент  $\beta_t$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{11t} = & \left( c_{20t} + \sum_{r=1}^{n_Y+n_X} c_{2rt} m_{rt} \right) v_t \left( c_{20t}^T + \sum_{r=1}^{n_Y+n_X} c_{2rt}^T m_{rt} \right) + \\ & + \sum_{r,s=1}^{n_Y+n_X} c_{2rt} v_t c_{2st}^T K_{rs}, \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

$$\begin{aligned} \beta_t = & \left[ R_t b_{1t}^T + \left( c_{10t} + \sum_{r=1}^{n_Y+n_X} c_{1rt} m_{rt} \right) v_t \left( c_{20t}^T + \sum_{r=1}^{n_Y+n_X} c_{2rt}^T m_{rt} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{r,s=1}^{n_Y+n_X} c_{1rt} v_t c_{2st}^T K_{rs} \right] \mathfrak{A}_{11t}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Для вычисления вероятностных моментов первого порядка  $m_t$  и второго порядка  $K_t$  случайного вектора  $[Y_1 \dots Y_{n_Y} \ X_1 \dots X_{n_X}]^T$ , ковариационной матрицы ошибки  $R_t$ , параметра  $\mathfrak{A}_{11t}$  и оптимального коэффициента  $\beta_t$  не используются результаты измерений. Эти параметры вычисляются заранее.

Рассмотрим частный случай:  $a_t = 0$ ,  $b_t = 0$ ,  $b_{0t} = 0$ . Применяя метод вейвлетов Хаара–Галеркина для решения уравнения (4.4.3), получим уравнения для вейвлет ЛФП (ВЛЛФП). Для этого выполним в (4.4.3) для  $t \in [t_0, T]$  замену переменных:

$$\bar{t} = \frac{t-t_0}{T-t_0}, \quad \bar{t} \in [0,1], \quad (4.4.10)$$

В результате получим:

$$\hat{\tilde{X}}'(\bar{t}) = \tilde{A}_{0\bar{t}} + \tilde{A}_{\bar{t}} \hat{\tilde{X}}(\bar{t}), \quad \hat{\tilde{X}}(0) = \hat{X}_0, \quad (4.4.11)$$

где

$$\hat{\tilde{X}}(\bar{t}) = \hat{X}((T-t_0)\bar{t}+t_0),$$

$$\tilde{A}_{0\bar{t}} = (T-t_0)[a_{0t}((T-t_0)\bar{t}+t_0) + \beta_t((T-t_0)\bar{t}+t_0)Z_t((T-t_0)\bar{t}+t_0)],$$

$$\tilde{A}_{\bar{t}} = (T-t_0)[a_{1t}((T-t_0)\bar{t}+t_0) - \beta_t((T-t_0)\bar{t}+t_0)b_{1t}((T-t_0)\bar{t}+t_0)],$$

волной отмечены функции, зависящие от безразмерного времени  $\bar{t}$ . Или для каждой составляющей  $\hat{\tilde{X}}_h$  ( $h = 1, 2, \dots, n_X$ ) СтП  $\hat{\tilde{X}}(\bar{t})$  имеем:

$$\hat{\tilde{X}}'_h = \tilde{A}_{h0} + \sum_{k=1}^{n_X} \tilde{A}_{hk} \hat{\tilde{X}}_k \quad (h = 1, 2, \dots, n_X), \quad \hat{\tilde{X}}_k = \hat{X}_{0k}, \quad (4.4.12)$$

$$\tilde{A}_{0\bar{t}} = \|\tilde{A}_{h0}\|_{h=1}^{n_X}, \quad \tilde{A}_{\bar{t}} = \|\tilde{A}_{hk}\|_{h,k=1}^{n_X}.$$

Будем считать, что скалярные функции  $\hat{X}_h, \hat{X}'_h, \tilde{A}_{hk}p_i, \tilde{A}_{hk}, \tilde{A}_{h0}$  ( $h, k = 1, 2, \dots, n_X$ ) принадлежат пространству  $L^2[0,1]$ . Следуя разделу 3.1, введем базис вейвлетов Хаара  $w_i$  и интегралов  $p_i$  от вейвлетов Хаара. Повторяя действия, описанные в подразделе 4.3, получим соотношения:

$$\hat{X}_h = \sum_{i=1}^L \xi_{hi} p_i + \hat{X}_{0h} \quad (h = 1, 2, \dots, n_X), \quad (4.4.13)$$

$$\begin{aligned} \xi_{hs} &= \sum_{k=1}^{n_X} \sum_{i=1}^L \xi_{hi} g_s^{hki} + \hat{X}_{0h} \sum_{i=1}^L q_s^{hk} + \rho_s^h \\ &\quad (h = 1, 2, \dots, n_X; s = 1, 2, \dots, L); \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

где  $g_s^{hki} = \int_0^1 \tilde{A}_{hk} p_i w_j d\tau$ ,  $q_s^{hk} = \int_0^1 \tilde{A}_{hk} w_j d\tau$ ,  $\rho_s^h = \int_0^1 \tilde{A}_{h0} w_j d\tau$ .

Таким образом, имеем следующий результат.

#### Теорема 4.4.2.

*Пусть выполнены условия теоремы 4.4.1, а также*

- 1) *скалярные функции  $\hat{X}_h, \hat{X}'_h, \tilde{A}_{hk}p_i, \tilde{A}_{hk}, \tilde{A}_{h0}$  ( $h, k = 1, 2, \dots, n_X$ ) принадлежат пространству  $L^2[0,1]$ ;*
- 2) *в пространстве  $L^2[0,1]$  определен ортонормированный базис вейвлетов Хаара  $w_i$  вида (3.1.12)–(3.1.14).*

*Тогда вейвлет линейный фильтр Пугачева определяется соотношениями (4.4.13), где  $p_i(t)$  – известные функции вида (3.1.16), коэффициенты  $\xi_{hi}$  определяются системой линейных алгебраических уравнений (4.4.14).*

Из теоремы 4.3.4 вытекает алгоритм построения вейвлет линейного фильтра Пугачева для непрерывных линейных УдСтС с параметрическими шумами, описываемой уравнениями (4.4.1), (4.4.2) при  $a_t = 0, b_t = 0, b_{0t} = 0$ .

#### Алгоритм 4.4.2.

1. Нахождение вероятностных моментов первого и второго порядков случайного вектора  $[Y_1 \dots Y_{n_Y} \quad X_1 \dots X_{n_X}]^T$  путем интегрирования уравнений (4.4.4), (4.4.5).
2. Нахождение ковариационной матрицы ошибки  $R_t$  путем интегрирования уравнения (4.4.7).
3. Вычисление параметра  $\alpha_{11t}$  и оптимального коэффициента  $\beta_t$  по формулам (4.4.8), (4.4.9).

4. Определение в пространстве  $L^2[0,1]$  ортонормированной системы вейвлетов Хаара вида (3.1.12)–(3.1.14) с максимальным уровнем вейвлет разрешения  $J$ .

5. Вычисление интегралов от вейвлетов Хаара по формулам (3.1.16).

6. Задание значений наблюдаемого процесса  $Z_t$  ( $t \in [t_0, T]$ ) в точках  $t_j = t_0 + (j - 1)\Delta t$  для  $j = 1, 2, \dots, L; L = 2 \cdot 2^J; \Delta t = \frac{T-t_0}{L-1}$ .

7. Составление и решение системы линейных алгебраических уравнений (4.4.14) для определения коэффициентов  $\xi_{hs}$ .

8. Вычисление оптимальной оценки  $\hat{X}_h$  для каждой составляющей вектора состояния  $\bar{X}_t$  в классе линейных фильтров Пугачева по формуле (4.4.13).

9. Переход от безразмерного времени  $\bar{t} \in [0,1]$  к  $t \in [t_0, T]$  и определение оценки  $\hat{X}(t)$  по формуле:  $\hat{X}(\bar{t}) = \hat{X}((T - t_0)\bar{t} + t_0)$ .

## 4.5. Выводы к разделу 4

1. Для оценки требуемого скалярного выходного сигнала построен вейвлет с.к. оптимальный линейный оператор в виде набора формальных правил, описывающих реакцию системы на базисные вейвлет функции (теорема 4.1.1).

2. Для случая линейной зависимости сигнала от параметров и аддитивной помехи построен вейвлет с.к. оптимальный линейный оператор, получены формулы для вычисления с.к. оценки качества этого оператора и с.к. оценки требуемого выходного сигнала (теорема 4.2.1 и алгоритмы 4.2.1.1 и 4.2.1.2).

3. В приложении П.10 построен вейвлет с.к. оптимальный линейный оператор для СтС при ударном воздействии, описываемом дельта-функцией. Вычислительные эксперименты показали, что уже при уровне вейвлет разрешения, равном 2, оценка  $\eta$  качества с.к. оптимального линейного оператора  $A_t$  равна 0,7973 при значениях сигнала  $W(s) \in [-12; 10]$ .

4. В приложении П.11 дано описание ИПО "Синтез-ВЛ", реализующего алгоритмы 4.2.1.1 и 4.2.1.2.

5. Получены вейвлет модификации фильтра Калмана-Бьюси и линейного фильтра Пугачева для обработки информации в режиме реального времени в УдСтС на основе применения метода вейвлетов Хаара и метода Галеркина (метода вейвлетов Хаара–Галеркина). Вейвлет ФКБ и вейвлет ЛФП должны решать в режиме реального времени систему линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами в отличие от ФКБ и ЛФП, которые должны интегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих функции сложной формы (дельта-функцию или кусочно-непрерывные функции). Разработанные вейвлет алгоритмы позволяют заменить вычислительные процедуры с функциями сложной формы арифметическими действиями с постоянными коэффициентами вейвлет разложений известных функций по ортонормированному вейвлет базису (теорема 4.3.2 и алгоритм 4.3.2 для ВЛФКБ, теорема 4.4.2 и алгоритм 4.4.2 для ВЛЛФП).

6. В приложении П.12 построен вейвлет ФКБ для информационно-управляющей системы в условиях ударного воздействия и дано описание ИПО "СтС-ВЛ-Фильтр", реализующее алгоритм 4.3.2.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена разработке методов и алгоритмов для инструментального программного обеспечения анализа точности и обработки информации в стохастических системах при ударных воздействиях с применением вейвлет технологий.

Для скалярной и векторной ударных СФ разработаны алгоритмы построения вейвлет канонических разложений (теорема 2.1.5 и алгоритм 2.1.5, теорема 2.2.2 и алгоритм 2.2.2).

В случае линейной УдСтС и линейной УдСтС с параметрическими шумами при решении известных замкнутых систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных математического ожидания, ковариационной матрицы, матрицы ковариационных функций разработаны алгоритмы на основе ВЛР, позволяющие заменить решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих ударные функции (дельта-функцию или кусочно-непрерывную функцию) решением системы линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами (теоремы 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 и алгоритмы 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3; теоремы 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 и алгоритмы 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3).

Для нелинейной УдСтС, когда невозможно выписать замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных математического ожидания, ковариационной матрицы, матрицы ковариационных функций, предлагается использовать модифицированный моментно-семиинвариантный метод (теорема 3.3.1 и алгоритм 3.3.1), который позволяет определять вероятностные моменты первого и второго порядков с учетом некоторого набора старших начальных моментов. Для типовых круговых УдСФ аналитически рассчитаны коэффициенты статистической круговой намотанной нормальной линеаризации (таблица 3.4.1).

Разработан метод синтеза вейвлет с.к. оптимального линейного оператора (теорема 4.1.1) и метод построения вейвлет с.к. оптимального линейного оператора

в случае линейной зависимости сигнала от параметров и аддитивной помехи (теорема 4.2.1 и алгоритмы 4.2.1.1 и 4.2.1.2).

Разработана вейвлет модификация фильтра Калмана-Бьюси для обработки информации в режиме реального времени в линейных УдСтС (теорема 4.3.2 и алгоритм 4.3.2) и вейвлет модификация линейного фильтра Пугачева для обработки информации в режиме реального времени в линейных УдСтС с параметрическими шумами (теорема 4.4.2 и алгоритм 4.4.2).

Разработаны основные положения методики анализа точности УдСтС.

Приложение содержит обширный материал с описанием ИПО и тестовых примеров. Работа выполнялась с использованием инфраструктуры ЦКП "Информатика" ФИЦ ИУ РАН [132].

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ВЛКР –	вейвлет каноническое разложение
ВЛЛФП –	вейвлет линейный фильтр Пугачева
ВЛР –	вейвлет разложение
ВЛФКБ –	вейвлет фильтр Калмана – Бьюси
ВСФ –	векторная случайная функция
ВУдСФ –	векторная ударная случайная функция
ИПО –	инструментальное программное обеспечение
ИУС –	информационно-управляющая система
КР –	каноническое разложение
ЛФП –	линейный фильтр Пугачева
МВЛХГ –	метод вейвлетов Хаара–Галеркина
МНА –	метод нормальной аппроксимации
ММ –	метод моментов
МС –	метод семиинвариантов
МСЛ –	метод статистической линеаризации
МСМ –	моментно-семиинвариантный метод
ММСМ –	модифицированный моментно-семиинвариантный метод
МОР –	метод ортогональных разложений
СВ –	случайная величина
СДС –	стохастическая дифференциальная система
с.к.	средний квадратический
СЛАУ –	система линейных алгебраических уравнений
СтС –	стохастическая система
СтП –	стохастический процесс
СФ –	случайная функция
ТИ –	техническое изделие
УВ –	ударное воздействие
УдСтС –	ударная стохастическая система

УдСФ –	ударная случайная функция
ФКБ –	фильтр Калмана – Бьюси
х.ф. –	характеристическая функция

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.) – М.: Машиностроение, 1981. – Т.1. Колебания линейных систем. С. 101-116.
2. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.) – М.: Машиностроение, 1981. – Т.5. Измерения и испытания. – С. 475-487.
3. ГОСТ 28213-89 (МЭК 68-2-27-87) Основные методы испытаний на воздействие внешних факторов. Часть 2. Испытания. Испытание Еа и руководство: Одиночный удар.
4. Батуев Г.А., Голубков Ю.В., Ефремов А.К., Федосов А.А. Инженерные методы исследования ударных процессов. М.: Машиностроение, 1977. 240 с.
5. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509с.
6. Иванов А.П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с
7. Нагаев Р.Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985. 160 с.
8. Горбиков С.П. Дифференциальные уравнения, определяемые динамическими системами с ударными взаимодействиями на гиперповерхности удара // Труды 13 Всероссийского совещания по проблемам управления. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 172-175.
9. Бойков В. Г. Ударные взаимодействия / В. Г. Бойков. - ЗАО Автомеханика, 2005. - Режим доступа :  
<http://www.euler.ru/distr/euler/simulation/impacts.pdf>.
10. Rossikhin Yu. A. Transient response of thin bodies subjected to impact: Wave approach / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // The Shock and Vibration Digest. - 2007. - Vol. 39, Issue 4. - P. 273-309.
11. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations / K. Diethelm. - Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2010.
12. Drăgănescu G. E. Application of a variational iteration method to linear and nonlinear viscoelastic models with fractional derivatives / G. E. Drăgănescu // Journal of Mathematical Physics. - 2006. - Vol. 47, Issue 8. - P. 082902.
13. Frech M. A survey of fractional calculus for structural dynamics applications / M.Frech, J. Rogers // IMAC-IX: A Conference on Structural Dynamics. - Kissimmee: [s. n.], 2001. - Vol. 4359. - P. 305-309.
14. Kaminsky A. A. Mechanics of the delayed fracture of viscoelastic bodies with cracks: Theory and experiment (Review) / A. A. Kaminsky // International Applied Mechanics. - 2014. - Vol. 50, Issue 5. - P. 485–548.
15. Kilbas A. A. Theory and Applications of Fractional Differential Equations /A. A.Kilbas, H. M. Srivastava, J. J.Trujillo . - Amsterdam : Elsevier Science, 2006. - 523 p.

16. Li G.G. Application of Galerkin method to dynamical behavior of viscoelastic-Timoshenko beam with finite deformation / G. G. Li, Z. Y. Zhu, C. J. Cheng //Mechanics of Time-Dependent Materials. - 2003. - Vol. 7, Issue 2. - P. 175-188.
17. Rossikhin Yu. A. Features of fractional operators involving fractional derivatives and their applications to the problems of mechanics of solids / Yu. A. Rossikhin, M. V. Shitikova // Chapter 8 in: Fractional Calculus: Applications (Roy Abi Zeid Daou and Xavier Moreau, Eds.), New York: NOVA Publishers, USA, 2015. - P.165-226.
18. Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений / Под ред. В.П. Радченко. – М: Машиностроение, 2009. – 344 с.: ил.
19. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990 (2-е изд. доп.). 632 с.
20. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. – М.: Логос, 2000, 2004. 1000 с. [Англ. пер. Stochastic Systems Theory and Applications. Singapore. World Scientific, 2001. 908 p.].
21. Синицын И.Н. Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. М.: ТОРУС-ПРЕСС. 2009.
22. Pugachev V.S., I.N.Sinitsyn. Lectures on Functional Analysis and Applications. – Word Scientific, Singapore, 1999.
23. Xu J. and Shann W. Galerkin-wavelet methods for two point value problems. Numer. Math. 63, pp. 123-144, 1992.
24. U. Lepik. Numerical solution of differential equations using Haar wavelets. Mathematics and Computers in Simulation, 68 (2005), pp. 127-143.
25. Dimentberg M.F. Statistical Dynamics of Nonlinear and Time-Varying Systems. N.Y. etc., Wiley; Taunton: Research Studies Press, 1988. 609 p
26. Диментберг М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
27. Ковалева А.С. Применение асимптотических методов к некоторым стохастическим задачам динамики виброударных систем // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 733-737.
28. Мошук Н.К. Приближенный метод определения конечномерных распределений вектора состояния в стохастических дифференциальных системах //АиТ. 1994. № 1. С. 72-87.
29. Конашенкова Т.Д., Мошук Н.К. О стохастических механических системах с неудерживающей связью // ПММ. 1994. Том 58. Вып. 3. стр. 32-40.
30. Журавлев В.Ф., Клинов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
31. Dimentberg M.F., Iourtchenko D.V. Towards incorporating impact losses into random vibration analyses: a model problem // Probabilistic Eng. Mech. 1999. V. 14. № 4. P. 323-328.

32. Iourtchenko D.V., Dimentberg M.F. Energy balance for random vibration of piecewise-conservative systems // J. Sound and Vibrat. 2001. V. 248. № 5. P. 913-923.
33. Сонг Л.Л., Юрченко Д.В. Анализ стохастических виброударных систем с неупругим ударом // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 2. С. 180-190.
34. A.M. Samoilenko, O. Stanzhtskyi. Qualitative and Asymptotic Analysis of Differential Equations with Random Perturbations. World Scientific. 2011. Co. Pte. Ltd. Singapore.
35. A.M. Samoilenko and N.A. Perestyuk. Impulsive Differential Equations. World Scientific, Singapore, 1995.
36. Синицын И.Н., Шаламов А. С. Лекции по теории систем интегрированной логистической поддержки. – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2012. – 624 с.: ил.
37. Guo, L., Cao, S.: Anti-disturbance Control theory for Systems with multiple disturbances: a survey. ISA Trans. 53(4), 846-849 (2014)
38. Moon, W., Wetlaufer, J.S.: A stochastic perturbation theory for non-autonomous systems. J. Math. Phys. 54(12), 1-31 (2013)
39. Sergei Silvestrov, Anatoliy Malyarenko, Milica Rancic. Stochastic Processes and Applications. SPAS2017, Västerås and Stockholm, Sweden, October 4-6, 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-02825-1>.
40. Yuriy Kozachenko, Oleksandr Pogorilyak, Iryna Rozora, Antonina Tegza. Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability. ISTE Press – Elsevier. 24th November 2016. 346 p.
41. Zhenxin Liu, Wenhe Wang. Favard separation method for almost periodic stochastic differential equations. // Journal of Differential Equations. Volume 260, Issue 11, 5 June 2016, Pages 8109-8136. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.02.019>.
42. S.Riedel, M.Scheutzow. Rough differential equations with unbounded drift term. // Journal of Differential Equations. Volume 262, Issue 1, 5 January 2017, Pages 283-312. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.02.021>.
43. Jun Shena, Junyilang Zhaob, Kening Lu, Bixiang Wang. The Wong–Zakai approximations of invariant manifolds and foliations for stochastic evolution equations. // Journal of Differential Equations. Volume 266, Issue 8, 5 April 2019, Pages 4568-4623. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.10.008>.
44. Cristina Anton. Error Expansion for a Symplectic Scheme for Stochastic Hamiltonian Systems. // Recent Advances in Mathematical and Statistical Methods, Springer proceedings in Mathematics & Statistics 259, [http://doi.org/10.1007/978-3-319-99719-3\\_51](http://doi.org/10.1007/978-3-319-99719-3_51)
45. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей. // Дифференциальные уравнения и процессы управления, 2013. № 3. <http://www.math.spbu.ru/diffjurnal>.
46. Рыбаков К.А. Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. // Дифференциальные уравнения и процессы управления, 2017. № 4. С. 1001-1005.

47. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Шоргин В.С., Макаренкова И.В., Конашенкова Т.Д., Агафонов Е.С., Семеняев Н.Н Развитие компьютерной поддержки статистических исследований систем высокой точности и доступности // Системы и средства информатики, 2011. Вып. 21. №1. С.7-37.
48. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Агафонов Е.С. Стохастические информационные технологии в среде Matlab в задачах компьютерной поддержки научных исследований (к 100-летию со дня рождения академика В.С.Пугачева) // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XII международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2011. Вып. 12. С.57-58 .
49. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Сергеев И.В., Басилашвили Д.А. Опыт моделирования эредитарных стохастических систем // Сборник докладов XIII международной научно-технической конференции "Кибернетика и высокие технологии XXI века". г. Воронеж. НПФ "Саквоее", 2012. Т.2. С.346-357.
50. Синицын И.Н., Синицын В.И., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В. Математическое обеспечение параметрического моделирования распределений в интегродифференциальных системах // Системы и средства информатики, 2014. Т. 24. № 1. С.4-45.
51. Синицын И.Н. Анализ и моделирование распределений в эредитарных стохастических системах // Информатика и ее применения, 2014. Т. 8. Вып. 1. С.2-11.
52. Синицын И.Н. Аналитическое моделирование распределений с инвариантной мерой в негауссовых дифференциальных и приводимых к ним эредитарных стохастических систем // Информатика и ее применения, 2014. Т. 8. Вып. 2. С.2-14.
53. Синицын И.Н., Синицын В.И. Нормальные и эллипсоидальные распределения в интегродифференциальных системах // Системы компьютерной математики и их приложения. Материалы XV Международной конференции. - Смоленск: СмолГУ ,2014. Вып. 15. С.196-197.
54. Синицын И.Н., Синицын В.И., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В. Аналитическое компьютерное моделирование в эредитарных стохастических системах с автокоррелированными шумами // Сборник докладов конференции XV Международной научно-технической конференции "Кибернетика и высокие технологии XXI века" (С&Т\*2014). Г. Воронеж. НПФ "САКВОЕЕ" ООО, 2014. CD-R. С.543-551.
55. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В. Развитие математического обеспечения аналитического и статистического моделирования эредитарных стохастических систем // В сборнике: "Идентификация систем и задачи управления". Труды X международной конференции Proceedings of the X International Conference. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова. 2015. С. 1275-1297.

56. Синицын И.Н. Стохастические информационные технологии для исследования нелинейных круговых стохастических систем // Информатика и ее применения, 2011. Т.5 Вып.4. С.78-89 .
57. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д.. Развитие математического обеспечения для анализа нелинейных многоканальных круговых стохастических систем // Системы и средства информатики. -М.: ИПИ РАН, 2012. Вып.22 . №1. С. 29-40.
58. Синицын И.Н. Математическое обеспечение для анализа нелинейных многоканальных круговых стохастических систем, основанное на параметризации распределений // Информатика и ее применения. - М.: ТОРУС ПРЕСС, 2012, Т.6. Вып.1. С.12-18.
59. Синицын И.Н., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д. Software tools for spherical stochastic systems analysis and filtering // Международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей (ISSPSM-2012) и VI международный рабочий семинар "Прикладные задачи теории вероятности и математической статистики, связанные с моделированием информационных систем" (АРТР+МС'2012). Сборник тезисов. - М.: ИПИ РАН, 2012. С.91-93.
60. Синицын И.Н. Параметрическое статистическое и аналитическое моделирование распределений в нелинейных стохастических системах на многообразиях // Информатика и ее применения, 2013. Т. 7. Вып. 2. С.4-16.
61. Синицын И.Н. Аналитическое моделирование распределений с инвариантной мерой в стохастических системах с разрывными характеристиками // Информатика и ее применения, 2013. Т.7. Вып.1. С.3-12.
62. Синицын И.Н., Шаламов А.С., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В. Методическое и инструментальное программное обеспечение статистического и аналитического моделирования распределений в нелинейных стохастических системах на многообразиях // Сборник докладов конференции XIV Международная научно-техническая конференция "Кибернетика и высокие технологии XXI века" (С&Т\*2013), 14-15 мая 2013 года, г. Воронеж. НПФ "САКВОЕЕ" ООО, 2013. CD-R. С. 385-394.
63. Синицын И.Н., Синицын В.И., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В. Математическое обеспечение аналитического моделирования стохастических систем со сложными нелинейностями // Системы и средства информатики, 2014. Т. 24. № 3. С. 4-29.
64. Синицын И.Н., Синицын В.И. Аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными нелинейностями // Информатика и ее применения, 2014. Т. 8. Вып. 3. С.2-4.
65. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р. Аналитическое моделирование эредитарных стохастических систем со сложными нелинейностями // Материалы 4-го международного научно- технического семинара, г. Севастополь. - М.: ИПИ РАН, 2014. CD-R. С.29-34.
66. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р. Моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными иррациональными

- нелинейностями // Информатика и ее применения, 2015. Т. 9. Вып. 1. С. 2-8.
67. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р. Моделирование нормальных - процессов в стохастических системах со сложными трансцендентными нелинейностями // Информатика и ее применения, 2015. Т. 9. Вып. 2. С. 23-29.
  68. Синицын И.Н. Аналитическое моделирование распределений в динамических системах с бесселевыми нелинейностями // и ее применения, 2015. Т. 9. Вып. 4. С. 37-47.
  69. Синицын И.Н., Синицын В.И., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Шоргин В.С. Математическое обеспечение моделирования нормальных процессов в стохастических системах со сложными иррациональными нелинейностями // Системы и средства информатики, 2015. Т. 25. № 2. С. 45-61.
  70. Синицын И.Н. Применение ортогональных разложений для аналитического моделирования многомерных распределений в нелинейных стохастических системах на многообразиях // Системы и средства информатики, 2015. Т. 25. 3. С. 3-22.
  71. Синицын И.Н. Методы моментов в задачах аналитического моделирования распределений в нелинейных стохастических системах на многообразиях // Системы и средства информатики, 2015. Т. 25. №3. С. 24-43.
  72. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р. Аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными дробно-рациональными нелинейностями // Системы и средства информатики, 2015. Т. 25. №4. С. 3-17.
  73. Синицын И.Н., Синицын В.И. Аналитическое моделирование распределений в нелинейных стохастических системах на многообразиях методом эллипсоидальной аппроксимации // Информатика и ее применения, 2016. Т. 10. Вып. 1. С. 45-55.
  74. Синицын И.Н., Синицын В.И., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Шоргиным В.С. Математическое обеспечение аналитического моделирования нормальных процессов в стохастических системах со сложными дробнорациональными нелинейностями // Системы и средства информатики, 2016. Т.26. №1. С. 227-247.
  75. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В. Символьное аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными бесселевыми нелинейностями дробного порядка // Системы и средства информатики, 2016. Т. 26 .№3. С. 184-205.
  76. Синицын И.Н. Аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными бесселевыми нелинейностями дробного порядка // Информатика и ее применения, 2016. Вып.3. С. 25-35.
  77. Синицын И.Н. Аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах с эллиптическими нелинейностями // Системы и средства информатики, 2017. Т. 27 . № 1. С. 4-20.

78. Синицын И.Н. Аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах с интегральными нелинейностями (I) // Системы и средства информатики, 2017. Т. 27 . № 2. С. 3-15.
79. Синицын И.Н. Аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах с интегральными нелинейностями (II) // Системы и средства информатики, 2017. Т. 27 . № 3. С. 23-36.
80. Синицын И.Н. Аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах с интегральными нелинейностями (III) // Системы и средства информатики, 2017. Т. 27 . № 4. С. 16-36.
81. Синицын И.Н. Развитие методического и инструментального программного обеспечения аналитического моделирования стохастических систем с эллиптическими нелинейностями // Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2017. Т. 13 (№1). С. 30-34.
82. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р. Аналитическое моделирование стохастических систем с эллиптическими нелинейностями Якоби и Вейерштрасса // Материалы XVIII международной конференции "Системы компьютерной математики и их приложения", посвященной 70-летию В.И. Мунерману. - Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2017. Вып. 18. С. 122-12.
83. Синицын И.Н., Синицын В.И. Лекции по нормальной и эллипсоидальной аппроксимации распределений в стохастических системах. - М.: ТОРУС ПРЕСС, 2013.
84. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В. Symbolic software tools for distributions parametrization in nonlinear stochastic systems // XXXI Международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей (ISSPSM'2013), VII Международный рабочий семинар "Прикладные задачи теории вероятностей и математической статистики, связанные с моделированием информационных систем (APIP+MS'2013)" и Международный рабочий семинар "Прикладная теория вероятностей и теоретическая информатика". Сборник тезисов. - М.: ИПИ РАН, 2013. С.88-89.
85. Синицын И.Н. Аналитическое моделирование распределений методом ортогональных разложений в нелинейных стохастических системах на многообразиях // Информатика и ее применения, 2015. Т. 9. Вып. 3. С. 17-24.
86. Konashenkova, Tatyana Dmitrievna. Развитие моментно-семиинвариантного программного обеспечения стохастического анализа. Международный журнал "Современные информационные технологии и ИТ-образование" [S. I.], v. 15, n. 1, p. 232-241, apr. 2019. ISSN 2411-1473. <http://sitico.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/490>
87. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева: Монография. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. Логос, 2007.
88. Академик Пугачев Владимир Семенович: к столетию со дня рождения / Предисл. Академика С.В. Емельянова; под ред. И.Н. Синицына. – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2011. – 376 с.
89. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.

90. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р. Устойчивые линейные условно оптимальные фильтры и экстраполяторы для стохастических систем с мультипликативными шумами // Информатика и ее применение, 2015. Т. 9. Вып. 1. С. 70–75.
91. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р. Нормальные фильтры Пугачева для дифференциальных стохастических систем, линейных относительно состояния // Информатика и ее применение, 2015. Т. 9. Вып. 2. С. 31–39.
92. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р. Синтез устойчивых линейных фильтров и экстраполяторов Пугачева для стохастических систем с мультипликативными широкополосными шумами // Системы и средства информатики, 2015. Т. 25. № 1. С. 110–128.
93. Синицын И.Н., Синицын В.И., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В. Условно оптимальная фильтрация нормальных процессов в эредитарных стохастических системах // Современные проблемы прикладной математики, информатики, автоматизации и управления: Труды 5-го юбилейного семинара / Под ред. И.А. Соколова и В.И. Кошкина. – Севастополь: Изд. СевГУ, 2015. С. 23–33. ISBN 978-5-9906915-0-6.
94. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р. Синтез алгоритмов нормальной субоптимальной фильтрации для автокоррелированных стохастических систем, линейных относительно состояния // Системы компьютерной математики и их приложения: Материалы XVII международной научной конференции. – Смоленск: СмолГУ, 2016. Вып. 17. С. 82–83.
95. Синицын И.Н. Ортогональные субоптимальные фильтры для нелинейных стохастических систем на многообразиях // Информатика и ее применение, 2016. Т. 10. Вып. 1. С. 34–44.
96. Синицын И.Н. Нормальные и ортогональные субоптимальные фильтры для нелинейных стохастических систем на многообразиях // Системы и средства информатики, 2016. Т.26. №1. С. 199–226.
97. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р. Эллипсоидальные субоптимальные фильтры для нелинейных стохастических систем на многообразиях // Информатика и ее применения, 2016. № 2. С. 24–35.
98. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р. Модифицированные эллипсоидальные фильтры для нелинейных стохастических систем на многообразиях // Системы и средства информатики, 2016. № 2. С. 79–97.
99. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р. Нормальные условно-оптимальные фильтры и экстраполяторы Пугачева для стохастических систем линейных относительно состояния // Информатика и ее применение, 2016. Т. 10. Вып. 2. С.14–23.
100. Синицын И.Н., Синицын В.И., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Шоргин В.С., Агафонов Е.С. Математическое обеспечение субоптимальной нормальной фильтрации в стохастических системах со сложными дробно-рациональными нелинейностями // Системы и средства информатики, 2016. Т. 26. №1. С. 137–157.

101. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р. Нормальные фильтры Пугачёва для автокоррелированных стохастических систем, линейных относительно состояния // Системы и средства информатики, 2016. Т. 26. № 1. С. 63–78.
102. Синицын И.Н., Синицын В.И., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р. Методы эллипсоидальной фильтрации процессов в нелинейных стохастических системах на многообразиях // Автоматика и телемеханика, 2018. № 1. С. 147–161.
103. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р. Аналитический синтез субоптимальных фильтров методами моментов // Системы и средства информатики, 2018. Т. 28. № 1. С. 4–19.
104. Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Sergeev I.V., Korepanov E.R. Methods of Ellipsoidal Filtration in Nonlinear Stochastic Systems on Manifolds // Automation and Remote Control. 2018. Т. 79. № 1. С. 117-127.
105. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р. Развитие теории фильтров Липцера–Ширяева. // Автоматика и телемеханика, 2020. №4. С. 37–51.
106. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д., Семендейев Н.Н., Басилашвили Д.А. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (I). // Системы высокой доступности. 2009. Т. 5. №3. С. 4-52.
107. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д., Семендейев Н.Н., Сергеев И.В., Басилашвили Д.А. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (II). // Системы высокой доступности. 2010. Т.6. №2. С. 4-45.
108. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д., Семендейев Н.Н., Сергеев И.В., Басилашвили Д.А. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (III). // Системы высокой доступности. 2010. Т.6. №4. С. 23-47.
109. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Шоргин В.С., Макаренкова И.В., Конашенкова Т.Д., Агафонов Е.С., Семендейев Н.Н. Развитие компьютерной поддержки статистических научных исследований систем высокой точности и доступности // Системы и средства информатики, 2011. Вып.21. №1. С. 3-33.
110. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В. Развитие алгоритмического обеспечения анализа стохастических систем, основанного на канонических разложениях случайных функций // Автоматика и телемеханика. 2011 . №2. С. 195-206 54.
111. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д. Развитие математического обеспечения для анализа нелинейных многоканальных круговых стохастических систем. // Системы и средства информатики. – М.: ИПИ РАН, 2012. Т. 22. № 1. С.3-21.
112. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических

- систем высокой доступности (IV). // Системы высокой доступности, 2017. Т 13. №3. С. 55–69
113. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Стохастические канонические вейвлет разложения в задачах моделирования виброударонадежности компьютерного оборудования // Материалы XVIII международной конференции "Системы компьютерной математики и их приложения", посвященной 70-летию В.И. Мунерману. - Смоленск: Издво СмолГУ, 2017. Вып. 18. С. 123-124.
114. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (V). // Системы высокой доступности, 2018. Т.14. №1. С. 59-70.
115. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (VI). // Системы высокой доступности, 2018. Т. 14. №2. С. 40-56.
116. Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (VII). // Системы высокой доступности, 2019. Т. 15. №1. С. 47-61.
117. Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (VIII). // Системы высокой доступности, 2019. Т. 15. №1. С. 62-69.
118. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Экспресс моделирование стохастических систем высокой доступности на основе вейвлет канонических разложений // 9-я научная конференция "Системы компьютерной математики и их приложения". 2018 . №19. С. 213- 220.
119. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Экспресс моделирование стохастических систем высокой доступности на основе вейвлет канонических разложений // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIX международной научной конференции, посвященной 100-летию физико-математического факультета. Смл.ГУ. - Смоленск: СмолГУ, 2018. Вып. 19. С. 213-220.
120. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Экспресс моделирование стохастических систем высокой доступности на основе вейвлет канонических разложений. // Системы компьютерной математики и их приложения. 2018. № 19. С.213-220.
121. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004, 464 стр.
122. Meyer Y. Wavelets and Operators (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992)
123. Meyer Y. Wavelets: Algorithms and Applications (Philadelphia: SIAM, 1993)
124. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // УФН, 2001. Т. 171, № 5. С. 465-501.

125. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основы теории всплесков // Успехи математических наук. 1998. Т. 53. № 6(324) С. 53-126.
126. Grossman A, Morlet J. Decomposition of functions into wavelets of constant share, and related tranforms. // Mathematics+Physics, Lectures on Recent Results. Vol. 1 (Ed. L Streit) (Singapore: World Scientific, 1985).
127. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.:ДМК Пресс, 2005.
128. Синицын И.Н. Параметрическое аналитическое моделирование процессов в стохастических системах, не разрешенных относительно производных. // Системы и средства информатики, 2017. Т. 27, № 1. С. 21-46.
129. Конашенкова Т.Д., Шин В.И. Приближенный метод определения моментов фазовых координат многомерных стохастических систем. // Автоматика и телемеханика, 1990. №1. С. 43-52.
130. Андреева Е.В., Конашенкова Т.Д., Маишева Е.Ю., Огнева О.С., Петрова М.В., Шин В.И. Модифицированные квазимоментные и моментно-семиинвариантные методы анализа многомерных стохастических систем и их программная реализация. // Системы и средства информатики, М.:Наука, 1992, Вып. 2, с. 160-171.
131. S.R. Jammalamadaka, A. SenGupta. Topics in circular statistics. - World Scientific, Singapore, 2001.
132. Положение о ЦКП «Информатика» // [MATLAB R2019a] – Режим доступа <http://www.frccsc.ru/ckp> (дата обращения 14.01.2020).

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### П.1. Сравнительный анализ построения КР и ВЛКР типовой скалярной СФ

Проведем сравнительный анализ построения КР и ВЛКР на примере типовой скалярной СФ  $X(t)$  ( $0 < t < T$ ) с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией, заданной формулой

$$K_x(t, t') = D e^{-\alpha|t-t'|} \quad (\text{П.1.1})$$

для  $D=1$ ,  $\alpha=1$ ,  $T=15$ ,  $t \in [0, 15]$ .

Точность методов оценивалась по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (D_a(t_i) - D_T(t_i))^2}, \quad (\text{П.1.2})$$

где  $D_a(t_i)$  – аппроксимирующее значение дисперсии в точке  $t_i$ ,  $D_T(t_i)$  – истинное значение дисперсии, в данном примере равное единице.

Каноническое разложение СФ  $X(t)$  ( $0 < t < T$ ) было построено на основе тригонометрического базиса

$$f_{2\nu+1}(t) = \cos \frac{2\pi\nu t}{T} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots), \quad f_{2\nu}(t) = \sin \frac{2\pi\nu t}{T} \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Результаты построения КР для различных значений параметра  $\nu$  приведены на рисунках П.1.1, П.1.2. В таблице П.1.1 даны значения среднеквадратической ошибки  $\sigma$  аппроксимации дисперсии в зависимости от значения параметра  $\nu$ .

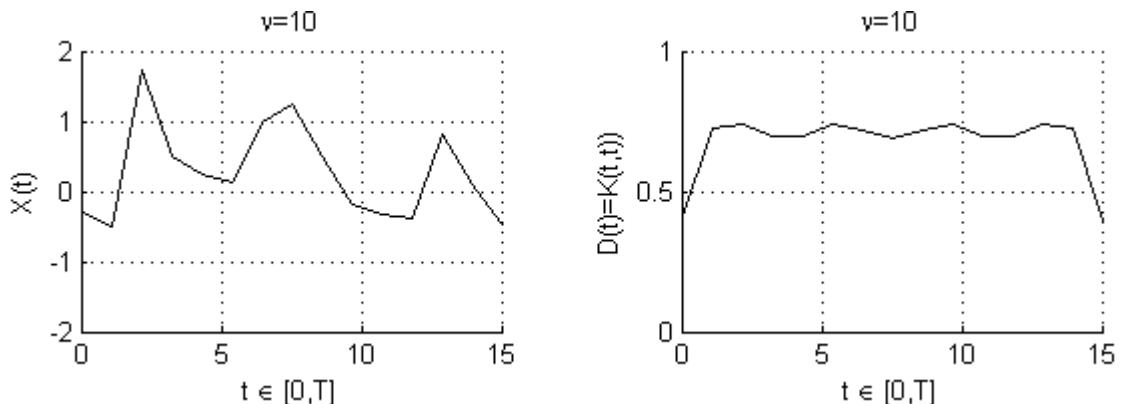


Рисунок П.1.1

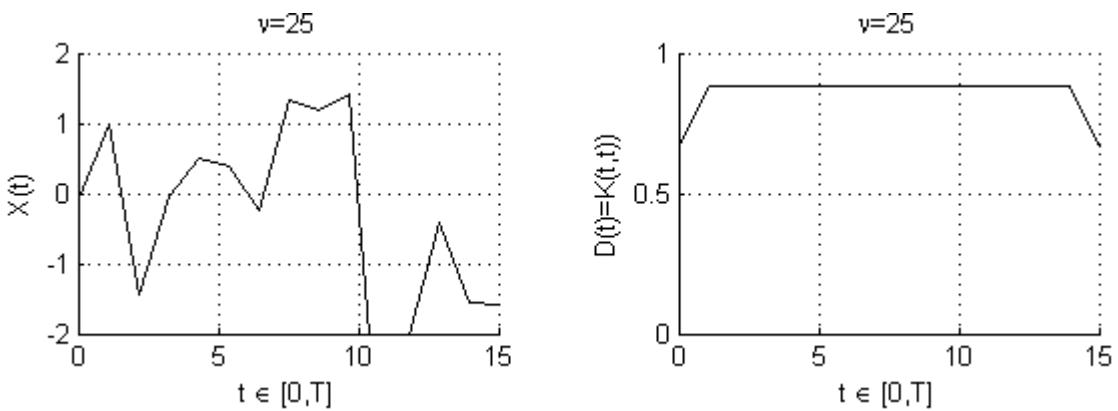


Рисунок П.1.2

Таблица П.1.3.

$v$	5	10	15	20	25
$\sigma$	0.5355	0.3435	0.2533	0.1986	0.1649

Результаты построения вейвлет КР СФ  $X(t)$  основе ортонормированного вейвлет базиса Хаара при наименьшем уровне вейвлет разрешения  $J^t=2$  показаны на рисунке П.1.3. Уже при 8 членах КР значение среднеквадратической ошибки аппроксимации дисперсии  $\sigma = 0,0057$ .

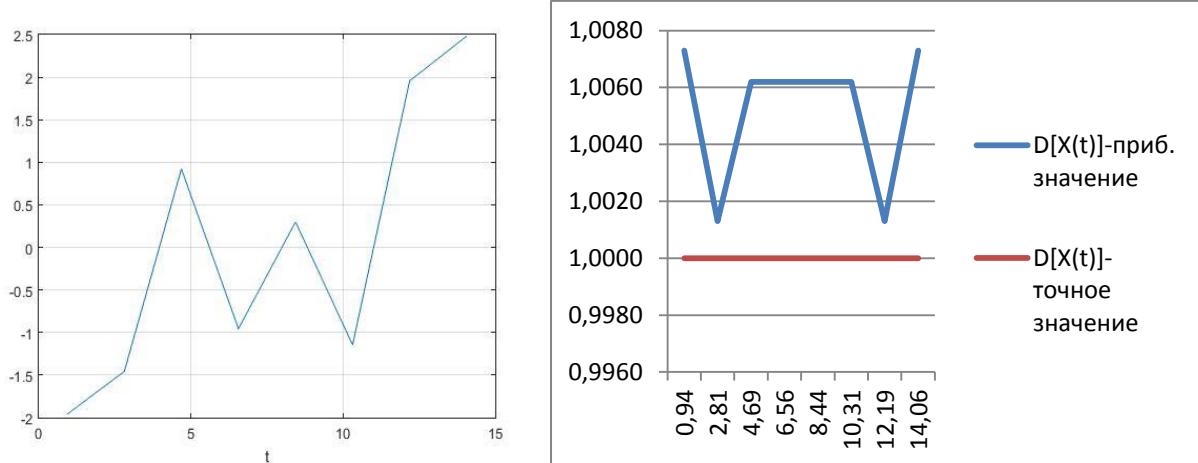


Рисунок П.1.3

**Вывод.** Вычислительные эксперименты показали, что уже при наименьшем уровне вейвлет разрешения  $J^t=2$  точность ВЛКР значительно выше аналогичного метода КР, построенного на основе тригонометрического базиса.

## П.2. Описание ИПО построения ВЛКР СФ "СтИТ-КРВЛ.1"

На основе методических результатов подраздела 2.1.4 разработано ИПО "СтИТ-КРВЛ.1" в среде MATLAB, которое реализует алгоритм 2.1.5 и осуществляет:

- 1) ввод исходных данных: ковариационной функции одномерного СтП  $X(t)$ , область определения СтП  $X(t)$  в виде отрезка  $[0, T]$ , максимальный уровень вейвлет разложения;
- 2) вейвлет разложение ковариационной функции по вейвлет базису Хаара с применением стандартной функции wavedec2;
- 3) определение коэффициентов  $k_{v\mu}(v, \mu = 1, 2, \dots, L^t)$  по формулам (2.5.34);
- 4) вычисление дисперсий  $D_v(v = 1, 2, \dots, L^t)$  некоррелированных СВ  $V_1, \dots, V_{L^t}$  по формулам (2.5.38);
- 5) определение вида координатных функций  $x_1(t), \dots, x_{L^t}(t)$  по формулам (2.5.42)-(2.5.49);
- 6) вывод результатов в числовом виде.

В состав ИПО входят две подпрограммы-функции fcov и KRWL1.

Подпрограмма-функция fcov задает в аналитическом виде ковариационной функции одномерного СтП  $X(t)$  и имеет синтаксис вызова: cov=fcov(t1,t2). Подпрограмма-функция fcov вызывается из основной подпрограммы-функции KRWL1.

Все вычисления осуществляются в подпрограмме-функции KRWL1, которая имеет синтаксис вызова:

$$[Xnu, Dnu, DispX, XKRW] = KRWL1(J, N, T).$$

где  $J$  - максимальный уровень вейвлет разложения;  $N = 2 * 2^J$ ;  $T$  – правый конец области определения СтП  $X(t)$ , заданной в виде отрезка  $[0, T]$ . При вычислениях используется стандартная функция wavedec2 для получения коэффициентов двумерного вейвлет разложения ковариационной функции одномерного СтП  $X(t)$ , заданной с помощью подпрограммы-функции fcov. Выходные данные выдаются в матричном виде:

- 1) Xnu(N,N) – матрица значений координатных функций ВЛКР:  
 $Xnu(i,j) = x_i \left( T * \frac{j-0,5}{N} \right)$  для  $i,j = 1,2,\dots,N$ ;
- 2) Dnu(N) – вектор значений дисперсий  $D_v (v = 1,2,\dots,N)$  некоррелированных СВ  $V_1, \dots, V_N$ ;
- 3) DispX(N) – вектор значений дисперсии СтП  $X(t)$  в точках  $t_j = T * \frac{j-0,5}{N}$  для  $j = 1,2,\dots,N$ ;
- 4) XKRW(N) – вектор значений реализации СтП  $X(t)$  в точках  $t_j = T * \frac{j-0,5}{N}$  для  $j = 1,2,\dots,N$ .

### П.3. Примеры построения ВЛКР скалярных СФ

**Пример 1.** Рассмотрим случай типовой ковариационной функции вида

$$K_x(t_1, t_2) = \begin{cases} q_1(t_2)q_2(t_1) & \text{при } t_2 \leq t_1, \\ q_1(t_1)q_2(t_2) & \text{при } t_2 > t_1. \end{cases} \quad (\text{П.3.1})$$

Пусть СФ  $X(t)$  задана на интервале  $[0, T]$  в дискретных точках  $0, 1, \dots, 7$ , где  $T=7$ . Ковариационная функция  $K_x(t_1, t_2)$  принадлежит пространству  $L^2([0, T] \times [0, T])$ . Определим ортонормированную систему функций  $\{f_r(t)\}$  ( $r = 1, \dots, 8$ ) на основе вейвлетов Добеши "db1" (или вейвлетов Хаара) в виде:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \varphi_{00}(t) = \varphi(t), & f_2(t) &= \psi_{00}(t) = \psi(t), \\ f_3(t) &= \psi_{10}(t) = \sqrt{2}\psi(2t), & f_4(t) &= \psi_{11}(t) = \sqrt{2}\psi(2t-1), \\ f_5(t) &= \psi_{20}(t) = 2\psi(4t), & f_6(t) &= \psi_{21}(t) = 2\psi(4t-1), \\ f_7(t) &= \psi_{22}(t) = 2\psi(4t-2), & f_8(t) &= \psi_{23}(t) = 2\psi(4t-3), \end{aligned} \quad (\text{П.3.2})$$

где  $\varphi(t)$  – масштабирующая функция Добеши "db1",  $\psi(t)$  – материнский вейвлет Добеши "db1",  $J_t = 2$ ,  $L_t = 8$ .

Далее введем вспомогательные случайные величины:

$$A_r = \int_0^T f_r(t) X(t) dt \quad (r = 1, 2, \dots, L^t).$$

Определим ковариационные моменты СВ  $A_v$ :

$$k_{\nu\mu} = M[A_\nu^\circ \overline{A_\mu^\circ}] = \int_0^T \int_0^T f_\nu(t_1) f_\mu(t_2) K_x(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (\nu, \mu = 1, 2, \dots, L^t);$$

$$\begin{aligned}
k_{11} &= a^t; \quad k_{12} = h_{000}^t; \quad k_{21} = b_{000}^t; \quad k_{22} = d_{000}^t; \\
k_{33} &= d_{100}^t, \quad k_{34} = d_{101}^t, \quad k_{43} = d_{110}^t, \quad k_{44} = d_{111}^t, \\
k_{55} &= d_{200}^t, \quad k_{56} = d_{201}^t, \quad k_{57} = d_{202}^t, \quad k_{58} = d_{203}^t, \\
k_{65} &= d_{210}^t, \quad k_{66} = d_{211}^t, \quad k_{67} = d_{212}^t, \quad k_{68} = d_{213}^t, \\
k_{75} &= d_{220}^t, \quad k_{76} = d_{221}^t, \quad k_{77} = d_{222}^t, \quad k_{78} = d_{223}^t, \\
k_{85} &= d_{230}^t, \quad k_{86} = d_{231}^t, \quad k_{87} = d_{232}^t, \quad k_{88} = d_{233}^t.
\end{aligned}$$

Остальные взаимные ковариационные моменты равны нулю:  $k_{v\mu} = 0$ .

Или

$$k_{v\mu} = \begin{bmatrix} a^t & h_{000}^t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{000}^t & d_{000}^t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{100}^t & d_{101}^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{110}^t & d_{111}^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{200}^t & d_{201}^t & d_{202}^t & d_{203}^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{210}^t & d_{211}^t & d_{212}^t & d_{213}^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{220}^t & d_{221}^t & d_{222}^t & d_{223}^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{230}^t & d_{231}^t & d_{232}^t & d_{233}^t \end{bmatrix}$$

Далее введем функции  $z_v(t) = \int_0^T f_v(\tau) K_X(t, \tau) d\tau$  ( $v = 1, 2, \dots, L^t$ ):

$$\begin{aligned}
z_1(t) &= a^t \varphi_{00}(t) + b_{000}^t \psi_{00}(t), \quad z_2(t) = h_{000}^t \varphi_{00}(t) + d_{000}^t \psi_{00}(t), \\
z_3(t) &= \sum_{k=0}^1 [h_{1k0}^t \varphi_{1k}(t) + d_{1k0}^t \psi_{1k}(t)], \quad z_4(t) = \sum_{k=0}^1 [h_{1k1}^t \varphi_{1k}(t) + d_{1k1}^t \psi_{1k}(t)] \\
z_5(t) &= \sum_{k=0}^3 [h_{2k0}^t \varphi_{2k}(t) + d_{2k0}^t \psi_{2k}(t)], \quad z_6(t) = \sum_{k=0}^3 [h_{2k1}^t \varphi_{2k}(t) + d_{2k1}^t \psi_{2k}(t)], \\
z_7(t) &= \sum_{k=0}^3 [h_{2k2}^t \varphi_{2k}(t) + d_{2k2}^t \psi_{2k}(t)], \quad z_8(t) = \sum_{k=0}^3 [h_{2k3}^t \varphi_{2k}(t) + d_{2k3}^t \psi_{2k}(t)].
\end{aligned}$$

Некоррелированные СВ  $V_1, \dots, V_8$  имеют нулевые математические ожидания и дисперсии  $D_v$  ( $v=1, \dots, 8$ ), равные

$$D_1 = k_{11} = a^t, \quad c_{21} = -\frac{k_{21}}{D_1} = -\frac{b_{000}^t}{a^t}, \quad D_2 = k_{22} - D_1 |c_{21}|^2 = d_{000}^t - \frac{(b_{000}^t)^2}{a^t}.$$

Далее вычисляем параметры  $c_{v\mu}$  и дисперсии  $D_v$  по рекуррентным формулам для  $v=3, \dots, 8$  и  $\mu=2, \dots, 7$ :

$$c_{v\mu} = -\frac{1}{D_\mu} (k_{v\mu} - \sum_{\lambda=1}^{\mu-1} D_\lambda \overline{c_{v\lambda}} c_{\mu\lambda}), \quad D_v = k_{vv} - \sum_{\lambda=1}^{v-1} D_\lambda |c_{v\lambda}|^2.$$

Координатные функции  $x_v(t)$  определяются последовательно формулами:

$$x_1(t) = \frac{1}{D_1} z_1(t), \quad x_\nu(t) = \frac{1}{D_\nu} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} d_{\nu\lambda} z_\lambda(t) + z_\nu(t) \right\},$$

$$d_{\nu\lambda} = c_{\nu\lambda} + \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} d_{\mu\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \nu-2), \quad d_{\nu,\nu-1} = c_{\nu,\nu-1} \quad (\nu = 2, 3, \dots, 8).$$

**Пример 2.** Пусть ковариационная функция СП  $X(t)$  имеет вид

$$K_x(t_1, t_2) = g(t_1)g(t_2)\delta(t_1 - t_2), \quad (\text{П.3.3})$$

где  $t_1, t_2 \in [0, T]$ .

Коэффициенты разложения  $\delta(t_1 - t_2)$  по двумерной ортонормированной системе вейвлетов, построенной на основе вейвлет базиса (П.3.2), равны:

$$a^t = \iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(t_1 - t_2) \varphi_{00}(t_1) \varphi_{00}(t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{00}(t_1) \varphi_{00}(t_1) dt_1 = 1;$$

$$h_{000}^t = \iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(t_1 - t_2) \varphi_{00}(t_1) \psi_{00}(t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{00}(t_1) \psi_{00}(t_1) dt_1 = 0;$$

$$b_{000}^t = \iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(t_1 - t_2) \psi_{00}(t_1) \varphi_{00}(t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{00}(t_1) \psi_{00}(t_1) dt_1 = 0;$$

$$d_{jkn}^t = \iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(t_1 - t_2) \psi_{jk}(t_1) \psi_{jn}(t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{jk}(t_1) \psi_{jn}(t_1) dt_1 = \delta_{kn},$$

где  $\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = n, \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases}$

Разложение дельта-функции по двумерной ортонормированной системе вейвлетов, построенной на основе системы (П.3.2), имеет вид:

$$\delta(t_1 - t_2) = \varphi_{00}(t_1) \varphi_{00}(t_2) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} \psi_{jk}(t_1) \psi_{jk}(t_2) = \sum_{\nu=1}^{L^t} f_\nu(t_1) f_\nu(t_2). \quad (\text{П.3.4})$$

В этом случае для СФ  $X(t)$  и ковариационной функции  $K_x(t_1, t_2)$  получим КРВЛ:

$$X(t) = \sum_{\nu=1}^{L^t} V_\nu g(t) f_\nu(t), \quad K_x(t_1, t_2) = g(t_1) g(t_2) \sum_{\nu=1}^{L^t} f_\nu(t_1) f_\nu(t_2).$$

Здесь  $V_\nu$  – независимые СВ с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, равными 1.

#### П.4. Пример построения ВЛКР двумерной векторной СФ

Пусть ковариационная функция  $K^X(t_1, t_2)$  действительной ВСФ  $X(t) = [X_1(t), X_2(t)]^T$ , заданной на интервале  $[0, T]$  в дискретных точках  $0, 1, \dots, 7$  для  $T=7$ , принадлежит пространству  $L^2([0, T] \times [0, T])$ . Определим ортонормированную систему функций  $\{f_r(t)\}$  ( $r = 1, \dots, 8$ ) на основе вейвлетов Добеши "db1" (или вейвлетов Хаара) в виде (П.3.2).

Введем СВ  $A_r = \sum_{h=1}^2 \int_0^T f_r(t) X_h(t) dt$  ( $r = 1, 2, \dots, 8$ ). Ковариационные моменты СВ  $A_r$  вычисляются по формулам

$$k_{\nu\mu} = M[A_\nu \overline{A_\mu}] = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 \int_0^T \int_0^T f_\nu(t_1) f_\mu(t_2) K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 (\nu, \mu = 1, 2, \dots, 8).$$

В пространстве  $L^2([0, T] \times [0, T])$  определим двумерный ортонормированный вейвлет-базис в виде тензорного произведения двух вейвлет-базиса вида (П.3.2) для случая, когда масштабирование по обеим переменным происходит одинаково. Тогда двумерная действительная функция  $K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2)$  раскладывается в вейвлет-ряд:

$$\begin{aligned} K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2) = & a^{t h_1 h_2} \varphi_{00}(t_1) \varphi_{00}(t_2) + \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} [h_{jkn}^{t h_1 h_2} \varphi_{jk}(t_1) \psi_{jn}(t_2) + \\ & + b_{jkn}^{t h_1 h_2} \psi_{jk}(t_1) \varphi_{jn}(t_2) + d_{jkn}^{t h_1 h_2} \psi_{jk}(t_1) \psi_{jn}(t_2)], \end{aligned}$$

где  $\varphi_{jk}(t) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j t - k)$ ;  $\psi_{jk}(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - k)$ .

Определим параметры  $k_{\nu\mu}$  ( $\nu, \mu = 1, 2, \dots, 8$ ):

$$\begin{aligned} k_{11} &= \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 a^{t h_1 h_2}; \quad k_{12} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 h_{000}^{t h_1 h_2}; \quad k_{21} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 b_{000}^{t h_1 h_2}; \\ k_{22} &= \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{000}^{t h_1 h_2}; \quad k_{33} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{100}^{t h_1 h_2}; \quad k_{34} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{101}^{t h_1 h_2}; \\ k_{43} &= \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{110}^{t h_1 h_2}; \quad k_{44} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{111}^{t h_1 h_2}; \quad k_{55} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{200}^{t h_1 h_2}; \quad k_{56} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{201}^{t h_1 h_2}; \\ k_{57} &= \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{202}^{t h_1 h_2}; \quad k_{58} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{203}^{t h_1 h_2}; \quad k_{65} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{210}^{t h_1 h_2}; \quad k_{66} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{211}^{t h_1 h_2}; \\ k_{67} &= \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{212}^{t h_1 h_2}; \quad k_{68} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{213}^{t h_1 h_2}; \quad k_{75} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{220}^{t h_1 h_2}; \quad k_{76} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{221}^{t h_1 h_2}; \\ k_{77} &= \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{222}^{t h_1 h_2}; \quad k_{78} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{223}^{t h_1 h_2}; \quad k_{85} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{230}^{t h_1 h_2}; \quad k_{86} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{231}^{t h_1 h_2}; \end{aligned}$$

$k_{87} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{232}^{th_1 h_2}$ ;  $k_{88} = \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 d_{233}^{th_1 h_2}$ . Остальные взаимные ковариационные моменты равны нулю:  $k_{\nu\mu} = 0$ .

Определим функции  $z_{\nu h}$ ,  $\nu=1,\dots,8$ ;  $h=1,2$ :

$$\begin{aligned} z_{1h}(t) &= \sum_{g=1}^2 [a^{thg} \varphi_{00}(t) + b_{000}^{thg} \psi_{00}(t)], \\ z_{2h}(t) &= \sum_{g=1}^2 [h_{000}^{thg} \varphi_{00}(t) + d_{000}^{thg} \psi_{00}(t)], \\ z_{3h}(t) &= \sum_{g=1}^2 \sum_{k=0}^1 [h_{1k0}^{thg} \varphi_{1k}(t) + d_{1k0}^{thg} \psi_{1k}(t)], \\ z_{4h}(t) &= \sum_{g=1}^2 \sum_{k=0}^1 [h_{1k1}^{thg} \varphi_{1k}(t) + d_{1k1}^{thg} \psi_{1k}(t)], \\ z_{5h}(t) &= \sum_{g=1}^2 \sum_{k=0}^3 [h_{2k0}^{thg} \varphi_{2k}(t) + d_{2k0}^{thg} \psi_{2k}(t)], \\ z_{6h}(t) &= \sum_{g=1}^2 \sum_{k=0}^3 [h_{2k1}^{thg} \varphi_{2k}(t) + d_{2k1}^{thg} \psi_{2k}(t)], \\ z_{7h}(t) &= \sum_{g=1}^2 \sum_{k=0}^3 [h_{2k2}^{thg} \varphi_{2k}(t) + d_{2k2}^{thg} \psi_{2k}(t)], \\ z_{8h}(t) &= \sum_{g=1}^2 \sum_{k=0}^3 [h_{2k3}^{thg} \varphi_{2k}(t) + d_{2k3}^{thg} \psi_{2k}(t)]. \end{aligned}$$

Вейвлет КР элементов  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  векторной СФ  $X(t)$  с матрицей ковариационных функций  $K^X(t_1, t_2)$  и математическим ожиданием  $m^X(t) = [m_1(t), m_2(t)]^T$  имеет вид

$$X_h(t) = m_h(t) + \sum_{\nu=1}^8 V_\nu x_{\nu h}(t) \quad (h = 1, 2),$$

где  $V_\nu$  – независимые СВ с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями  $D_\nu$ ,  $x_{\nu h}(t)$  – координатные функции.

Дисперсии  $D_1$  и  $D_2$  вычисляются по формулам:

$$D_1 = k_{11} = a^t, \quad c_{21} = -\frac{k_{21}}{D_1} = -\frac{b_{000}^t}{a^t}, \quad D_2 = k_{22} - D_1 |c_{21}|^2 = d_{000}^t - \frac{(b_{000}^t)^2}{a^t}.$$

Далее вычисляем параметры  $c_{\nu\mu}$  и дисперсии  $D_\nu$  по рекуррентным формулам для  $\nu=3,\dots,8$  и  $\mu=2,\dots,7$ :

$$c_{\nu\mu} = -\frac{1}{D_\mu} (k_{\nu\mu} - \sum_{\lambda=1}^{\mu-1} D_\lambda \overline{c_{\nu\lambda}} c_{\mu\lambda}), \quad D_\nu = k_{\nu\nu} - \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} D_\lambda |c_{\nu\lambda}|^2.$$

Координатные функции  $x_\nu(t)$  определяются последовательно по формулам:

$$x_{1h}(t) = \frac{1}{D_1} z_{1h}(t); \quad x_{\nu h}(t) = \frac{1}{D_\nu} \{ \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} d_{\nu\lambda} z_{\lambda h}(t) + z_{\nu h}(t) \} \quad (\nu = 2, 3, \dots, 8);$$

$$d_{\nu\lambda} = c_{\nu\lambda} + \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} d_{\mu\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \nu-2); \quad d_{\nu, \nu-1} = c_{\nu, \nu-1}.$$

Рассмотрим два частных случая:

- 1)  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  не зависимы;
- 2)  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  поляризованы, т.е.  $X_1(t) = \alpha Y(t)$ ,  $X_2(t) = \beta Y(t)$ .

Если  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  не зависимы, т.е.  $K_{12}^X(t_1, t_2) = K_{21}^X(t_1, t_2) = 0$ , то параметры  $k_{\nu\mu}$  ( $\nu, \mu = 1, 2, \dots, 8$ ) равны:

$$\begin{aligned} k_{11} &= a^{t11} + a^{t22}; \quad k_{12} = h_{000}^{t11} + h_{000}^{t22}; \quad k_{21} = b_{000}^{t11} + b_{000}^{t22}; \quad k_{22} = d_{000}^{t11} + d_{000}^{t22}; \\ k_{33} &= d_{100}^{t11} + d_{100}^{t22}; \quad k_{34} = d_{101}^{t11} + d_{101}^{t22}; \quad k_{43} = d_{110}^{t11} + d_{110}^{t22}; \quad k_{44} = d_{111}^{t11} + d_{111}^{t22}; \\ k_{55} &= d_{200}^{t11} + d_{200}^{t22}; \quad k_{56} = d_{201}^{t11} + d_{201}^{t22}; \quad k_{57} = d_{202}^{t11} + d_{202}^{t22}; \quad k_{58} = d_{203}^{t11} + d_{203}^{t22}; \\ k_{65} &= d_{210}^{t11} + d_{210}^{t22}; \quad k_{66} = d_{211}^{t11} + d_{211}^{t22}; \quad k_{67} = d_{212}^{t11} + d_{212}^{t22}; \quad k_{68} = d_{213}^{t11} + d_{213}^{t22}; \\ k_{75} &= d_{220}^{t11} + d_{220}^{t22}; \quad k_{76} = d_{221}^{t11} + d_{221}^{t22}; \quad k_{77} = d_{222}^{t11} + d_{222}^{t22}; \quad k_{78} = d_{223}^{t11} + d_{223}^{t22}; \\ k_{85} &= d_{230}^{t11} + d_{230}^{t22}; \quad k_{86} = d_{231}^{t11} + d_{231}^{t22}; \quad k_{87} = d_{232}^{t11} + d_{232}^{t22}; \quad k_{88} = d_{233}^{t11} + d_{233}^{t22}. \end{aligned}$$

Остальные  $k_{\nu\mu} = 0$ .

Функции  $z_{\nu h}$ ,  $\nu=1,\dots,8$ ;  $h=1,2$  в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} z_{1h}(t) &= a^{thh}\varphi_{00}(t) + b_{000}^{thh}\psi_{00}(t), \quad z_{2h}(t) = h_{000}^{thh}\varphi_{00}(t) + d_{000}^{thh}\psi_{00}(t), \\ z_{3h}(t) &= \sum_{k=0}^1 [h_{1k0}^{thh}\varphi_{1k}(t) + d_{1k0}^{thh}\psi_{1k}(t)], \quad z_{4h}(t) = \sum_{k=0}^1 [h_{1k1}^{thh}\varphi_{1k}(t) + d_{1k1}^{thh}\psi_{1k}(t)], \\ z_{5h}(t) &= \sum_{k=0}^3 [h_{2k0}^{thh}\varphi_{2k}(t) + d_{2k0}^{thh}\psi_{2k}(t)], \quad z_{6h}(t) = \sum_{k=0}^3 [h_{2k1}^{thh}\varphi_{2k}(t) + d_{2k1}^{thh}\psi_{2k}(t)], \\ z_{7h}(t) &= \sum_{k=0}^3 [h_{2k2}^{thh}\varphi_{2k}(t) + d_{2k2}^{thh}\psi_{2k}(t)], \quad z_{8h}(t) = \sum_{k=0}^3 [h_{2k3}^{thh}\varphi_{2k}(t) + d_{2k3}^{thh}\psi_{2k}(t)]. \end{aligned}$$

Если  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  поляризованы, то сначала построим КРВЛ СФ  $Y(t)$ :

$$Y(t) = m^Y(t) + \sum_{\nu=1}^8 V_{\nu}^Y x_{\nu}^Y(t),$$

где  $V_{\nu}^Y$  – независимые гауссовские СВ с дисперсиями  $D_{\nu}^Y$ ;  $x_{\nu}^Y(t)$  – координатные функции. Имеем

$$\begin{aligned} k_{\nu\mu} &= \sum_{h_1}^2 \sum_{h_2}^2 \int_0^T \int_0^T f_{\nu}(t_1) f_{\mu}(t_2) K_{h_1 h_2}^X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \int_0^T \int_0^T f_{\nu}(t_1) f_{\mu}(t_2) [\alpha^2 K^Y(t_1, t_2) + 2\alpha\beta K^Y(t_1, t_2) + \beta^2 K^Y(t_1, t_2)] dt_1 dt_2 = \\ &= (\alpha + \beta)^2 \int_0^T \int_0^T f_{\nu}(t_1) f_{\mu}(t_2) K^Y(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = (\alpha + \beta)^2 k_{\nu\mu}^Y \quad (\nu, \mu = 1, 2, \dots, 8), \\ K^X(t_1, t_2) &= \begin{bmatrix} \alpha^2 K^Y(t_1, t_2) & \alpha\beta K^Y(t_1, t_2) \\ \alpha\beta K^Y(t_1, t_2) & \beta^2 K^Y(t_1, t_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда

$$z_{\nu 1}^X(t) = \alpha(\alpha + \beta) \int_0^T \int_0^T f_{\nu}(s) K^Y(t, s) ds = \alpha(\alpha + \beta) z_{\nu}^Y(t),$$

$$\begin{aligned}
z_{\nu 2}^X(t) &= \beta(\alpha + \beta) \int_0^T \int_0^T f_\nu(s) K^Y(t, s) ds = \beta(\alpha + \beta) z_\nu^Y(t), \\
X_1(t) &= \alpha m^Y(t) + \sum_{\nu=1}^8 V_\nu^X x_{\nu 1}^X(t), \quad X_2(t) = \beta m^Y(t) + \sum_{\nu=1}^8 V_\nu^X x_{\nu 2}^X(t) \\
D[V_\nu^X] &= (\alpha + \beta)^2 D[V_\nu^Y], \quad x_{\nu 1}^X(t) = \frac{\alpha(\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)^2} x_\nu^Y(t), \quad x_{\nu 2}^X(t) = \frac{\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)^2} x_\nu^Y(t).
\end{aligned}$$

## П.5. Сравнение вейвлет методов анализа динамической точности ИУС с точным решением

Сравним решение задачи анализа динамической точности ИУС, полученное с применением приближенных вейвлет методов, с точным решением. Пусть информационно-измерительная система на  $[t_0, T]$  описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\omega\dot{x} + \omega^2 x = S + n_t^{\text{уд}} + N_t^{\text{уд}}$$

с начальными условиями  $x(t_0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t_0) = x_{10}$ .

Здесь  $\varepsilon, \omega$  – постоянные параметры,  $S$  – полезное постоянное ускорение,  $n_t^{\text{уд}}$  – регулярная часть ударного ускорения,  $N_t^{\text{уд}}$  – стохастическая часть ударного ускорения, представляющая собой скалярный белый шум  $V_t$  интенсивности  $v_t^{\text{уд}}$ :

$$v_t^{\text{уд}} = \rho \sqrt{n_t^{\text{уд}}},$$

где  $\rho$  – коэффициент, учитывающий соотношение между регулярным и стохастическим ускорениями. Функция  $n_t^{\text{уд}}$  имеет вид:

$$n_t^{\text{уд}} = n_m \delta(t - t_{\text{уд}}).$$

Пусть  $Y_1 = x$ ,  $Y_2 = \dot{x}$  и  $t \in [0, T]$ . Тогда ИУС описывается двумерной линейной СтС:

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = Y_2, \\ \dot{Y}_2 = -\omega^2 Y_1 - 2\varepsilon\omega Y_2 + S + n_t^{\text{уд}} + V_t. \end{cases}$$

Здесь СтП  $Y(t) = [Y_1, Y_2]^T$ , начальные условия:  $Y_1(0) = x(0) = Y_{01}$ ,  $Y_2(0) = \dot{x}(0) = Y_{02}$ . Введем обозначения:

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\varepsilon\omega \end{bmatrix}, \quad a_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ S + n_t^{y_d} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В этих обозначениях уравнения для составляющих математического ожидания  $M[Y(t)] = [m_1, m_2]^T$  имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{m}_1 = m_2, \\ \dot{m}_2 = a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + a_{02}(t). \end{cases}$$

Начальные условия:  $m_1(0) = M[x(0)] = m_{01}$ ,  $m_2(0) = M[\dot{x}(0)] = m_{02}$ .

Точное решение для  $m_1(t)$  имеет вид [20]:

$$\begin{aligned} m_1(t) &= \frac{\omega^2}{\omega_0} \int_{t_0}^t e^{-\varepsilon\omega(t-\tau)} \sin \omega_0(t-\tau) (S + n_t^{y_d}) d\tau = \\ &= \frac{S\omega^2}{\omega_0} \int_{t_0}^t e^{-\varepsilon\omega(t-\tau)} \sin \omega_0(t-\tau) d\tau + \frac{\omega^2}{\omega_0} \int_{t_0}^t e^{-\varepsilon\omega(t-\tau)} \sin \omega_0(t-\tau) n_t^{y_d} d\tau, \\ \omega_0 &= \omega \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$I_1^1 = \frac{S\omega^2}{\omega_0} \int_{t_0}^t e^{-\varepsilon\omega(t-\tau)} \sin \omega_0(t-\tau) d\tau, \quad I_2^1 = \frac{\omega^2}{\omega_0} \int_{t_0}^t e^{-\varepsilon\omega(t-\tau)} \sin \omega_0(t-\tau) n_t^{y_d} d\tau.$$

Если  $n_t^{y_d} = n_m \delta(t - t_{y_d})$ , то

$$I_2^1 = \begin{cases} 0, & \text{если } t < t_{y_d}, \\ \frac{n_m \omega^2}{\omega_0} e^{-\varepsilon\omega(t-t_{y_d})} \sin \omega_0(t-t_{y_d}), & \text{если } t \geq t_{y_d}. \end{cases}$$

Для проведения сравнительного анализа вычислим параметр  $m_1(t)$  методом вейвлетов Хаара–Галеркина с применением ИПО "СтС-ВЛ-Анализ" для разных значений  $J$ . Точность методов будем оценивалась двумя ошибками приближения для параметра  $m_1(t)$ :

$$1) \Delta = \max_i \left| \frac{m_i^1 - m_i^{1\text{ап}}}{m_i^1} \right|,$$

$$2) \sigma = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (m_i^1 - m_i^{1\text{ап}})^2},$$

где  $m_i^1$  – точное значение,  $m_i^{1\text{ап}}$  – приближенной значение.

При вычислениях использовались исходные данные:  $n_m = 8$ ;  $t_{y_d} = 2,1875$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,7$ ;  $t_0 = 0$ ;  $T = 10$ ;  $S = 1, 10, 20$ . Результаты вычислительных экспери-

ментов приведены на графиках П.5.1 – П.5.3. На графиках значения функций выводились с интервалом 0,2.

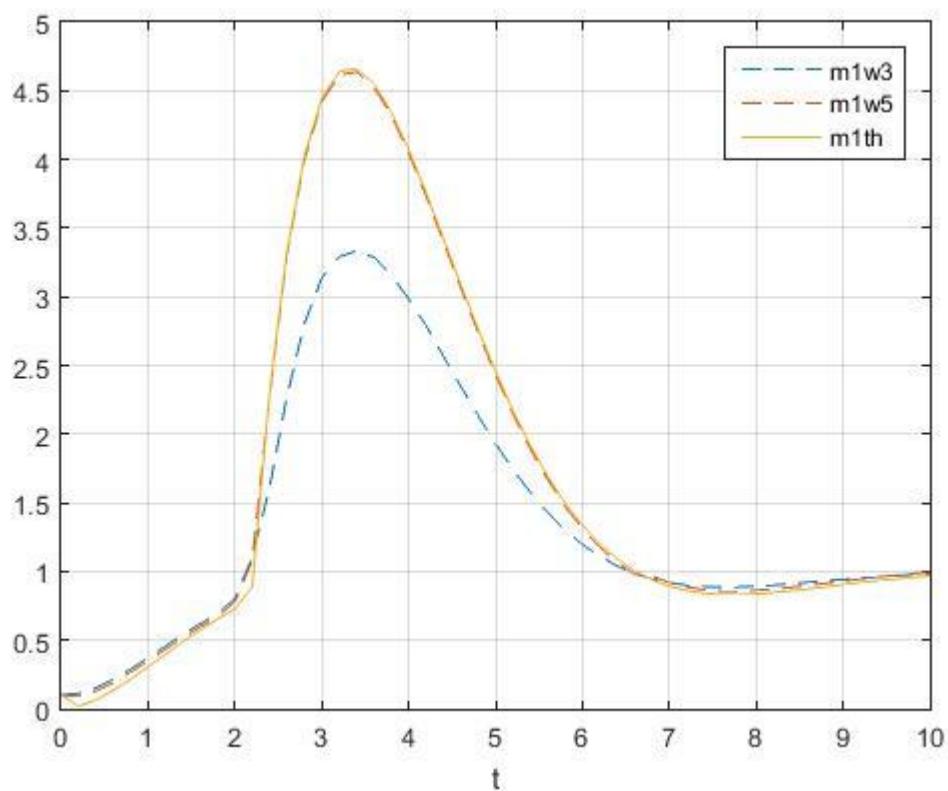
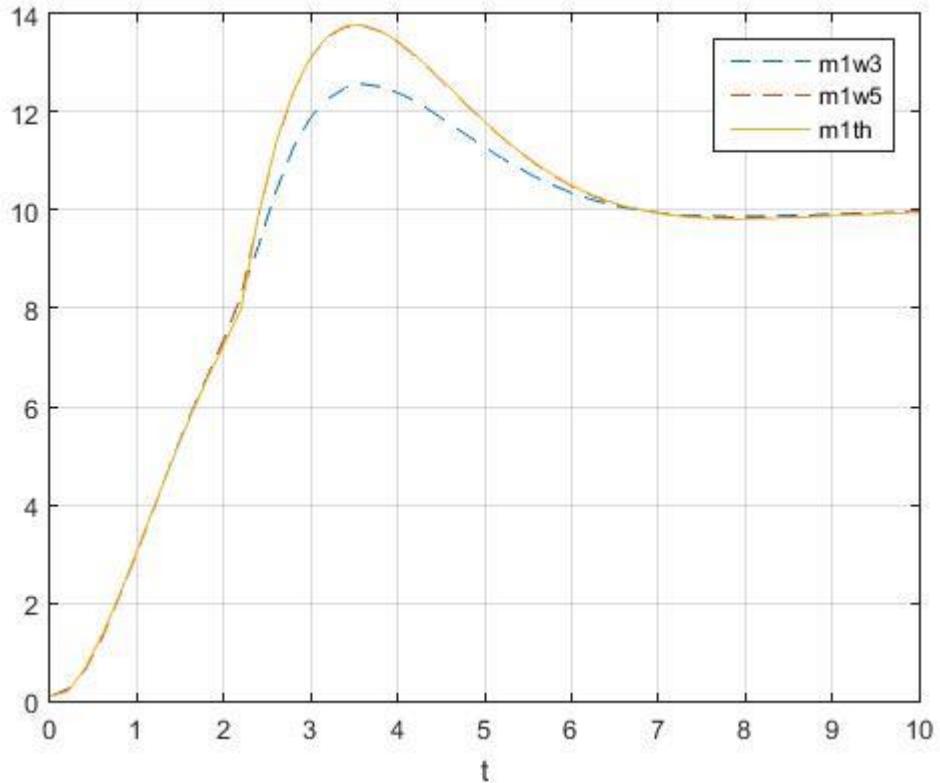
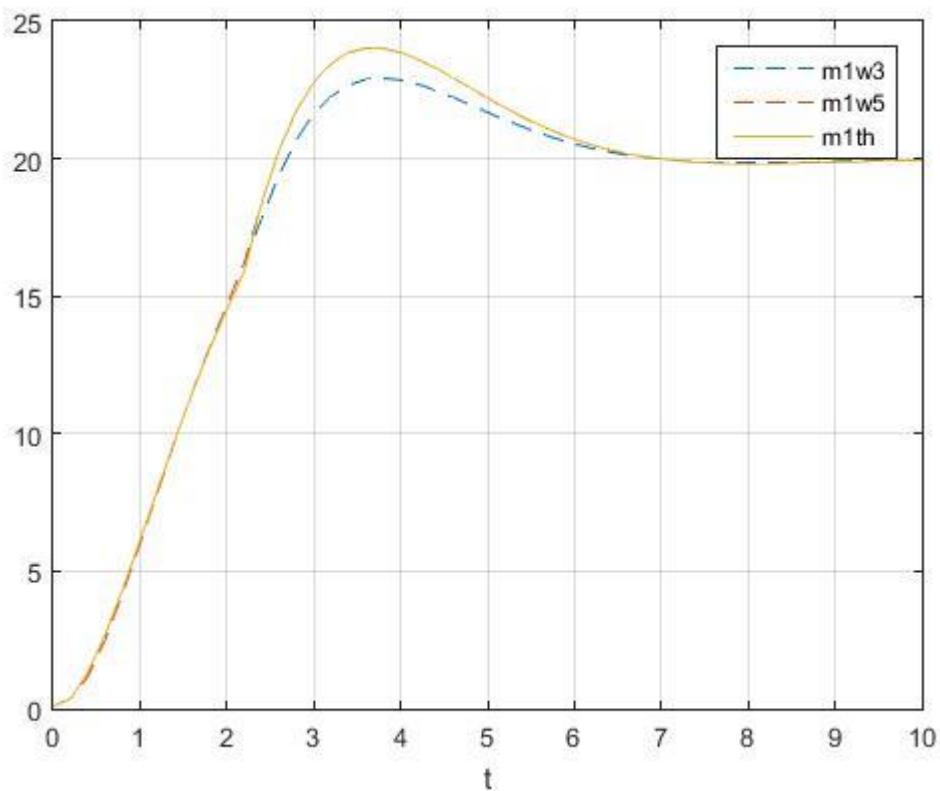


Рисунок П.5.1 – График  $m_1(t)$  для  $S = 1$

Рисунок П.5.2 – График  $m_1(t)$  для  $S = 10$ Рисунок П.5.3 – График  $m_1(t)$  для  $S = 20$

В таблице П.5.1 приведены значения погрешностей  $\varepsilon$  и  $\sigma$  вычисления  $m_1(t)$  с применением метода вейвлетов Хаара для  $J=3$  и  $J=5$ .

Таблица П.5.1

Метод	S	$\Delta$	$\sigma$
MBX ( $J=3$ )	1	0,58	0,0785
MBX ( $J=5$ )		0,0276	0,0086
MBX ( $J=3$ )	10	0,0945	0,0751
MBX ( $J=5$ )		0,0187	0,0083
MBX ( $J=3$ )	20	0,0673	0,0717
MBX ( $J=5$ )		0,0088	0,0081

**Вывод.** При решении задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных функций, содержащих  $\delta$ -функцию, метод вейвлетов Хаара–Галеркина позволяет получить приближенное решение с точностью, оцениваемой в норме  $\sigma$ , менее 10% при  $J=3$ , менее 1% при  $J=5$ .

## П.6. Описание ИПО "СтС-ВЛ-Анализ"

На основе методических результатов п. 3.1 и 3.2 разработано ИПО "СтС-ВЛ-Анализ" в среде MATLAB, которое реализует алгоритмы нахождения математического ожидания, ковариационной матрицы линейной нестационарной СтС и линейной СтС с параметрическими шумами на основе метода вейвлетов Хаара. ИПО "СтС-ВЛ-Анализ" реализовано в виде подпрограмм-функций:

- 1) MWHLMSY для вычисления математического ожидания линейной нестационарной СтС и линейной СтС с параметрическими шумами;
- 2) MWHL SKY для вычисления ковариационной матрицы линейной нестационарной СтС;

- 3) MWHLSSHKY для вычисления ковариационной матрицы линейной СтС с параметрическими шумами.

Подпрограмма-функция **MWHLMSMY** имеет синтаксис вызова:

$$[mw, tris] = \text{MWHLMSMY} (T0, T, py, m0, J, NJ, Nris).$$

Исходные данные, задаваемые в числовом виде:

- 1)  $T0$  – начальный момент времени  $t_0$ ;
- 2)  $T$  – конечный момент времени;
- 3)  $py$  – размерность  $p$  вектора состояния системы  $Y(t)$ ;
- 4)  $m0(py)$  – вектор размерности  $p$  с начальными значениями  $m_0$  вектора математического ожидания  $m_Y$ ;
- 5)  $J$  – максимальный уровень вейвлет разложения;
- 6)  $NJ = 2 \cdot 2^J$  – количество базисных вейвлет функций;
- 7)  $Nris$  – количество значений математических ожиданий  $m_h(t)$  элементов вектора состояния системы  $Y(t)$ , выводимых на печать.

Выходные данные выдаются в матричном виде:

- 1)  $mw(py, Nris)$  – матрица значений математических ожиданий составляющих вектора состояния системы  $Y(t)$  в точках  $t_j$  для  $j = 1, 2, \dots, Nris$ ;
- 2)  $tris(Nris)$  – вектор значений моментов времени  $t_j = t_0 + (j - 1)\Delta t$  для  $j = 1, 2, \dots, Nris$ ;  $\Delta t = \frac{T - t_0}{(Nris - 1)}$ .

Исходные данные в аналитическом виде задаются в виде пользовательских функций-подпрограмм:

- 1) набор функций-подпрограмм  $fahk$  для задания  $a_{hk}(t)$  ( $h, k = 1, 2, \dots, p$ );
- 2) набор функций-подпрограмм  $fa0h$  для задания  $a_{0h}(t)$  ( $h = 1, 2, \dots, p$ ).

Подпрограмма-функции **MWHLMSMY** осуществляет:

- 1) ввод исходных данных в числовом и аналитическом виде;
- 2) вычисление интегралов от вейвлетов Хаара;

- 3) определение коэффициентов вейвлет-разложения функций  $\overline{a_{hk}}(t)p_i(t)$ ,  $\overline{a_{hk}}(t), \overline{a_{0h}}(t)$  по ортонормированному базису вейвлетов Хаара с применением стандартной функции wavedec; .
- 4) составление и решение с применением стандартной функции MATLAB системы линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $c_{hi}$ ;
- 5) вычисление составляющих  $\bar{m}_h$  вектора математического ожидания стохастического процесса  $\bar{Y}(t)$ ;
- 6) вывод результатов в числовом виде.

Подпрограмма-функция **MWHL SKY** для вычисления ковариационной матрицы линейной нестационарной СтС имеет синтаксис вызова:

[Kw,tris]= MWLSMKY (T0,T,py,nv,K0,J,NJ,Nris).

Исходные данные, задаваемые в числовом виде:

- 1)  $T0$  – начальный момент времени  $t_0$ ;
- 2)  $T$  – конечный момент времени;
- 3)  $py$  – размерность  $p$  вектора состояния системы  $Y(t)$ ;
- 4)  $nv$  – размерность  $n_v$  белого шума;
- 5)  $K0(py,py)$  – квадратная матрица размерности  $p \times p$  с начальными значениями  $K_0$  ковариационной матрицы вектора состояния системы  $Y(t)$ ;
- 6)  $J$  – максимальный уровень вейвлет разложения;
- 7)  $NJ = 2 \cdot 2^J$  – количество базисных вейвлет функций;
- 8)  $Nris$  – количество значений элементов ковариационной матрицы вектора состояния системы  $Y(t)$ , выводимых на печать.

Выходные данные выдаются в матричном виде:

- 1)  $Kw(py,py,Nris)$  – матрица значений элементов ковариационной матрицы вектора состояния системы  $Y(t)$  в точках  $t_j$  для  $j = 1, 2, \dots, Nris$ ;
- 2)  $tris(Nris)$  – вектор значений моментов времени  $t_j = t_0 + (j - 1)\Delta t$  для  $j = 1, 2, \dots, Nris$ ;  $\Delta t = \frac{T-t_0}{(Nris-1)}$ .

Исходные данные в аналитическом виде задаются в виде пользовательских функций-подпрограмм:

- 1) набор функций-подпрограмм  $fahk$  для задания  $a_{hk}(t)$  ( $h, k = 1, 2, \dots, p$ );
- 2) набор функций-подпрограмм  $fbhr$  для задания  $b_{hk}(t)$  ( $h = 1, 2, \dots, p; r = 1, 2, \dots, n_v$ );
- 3) набор функций-подпрограмм  $fnurs$  для задания  $v_{rs}(t)$  ( $r, s = 1, 2, \dots, n_v$ ).

Подпрограмма-функции MWHL SKY осуществляет:

- 1) ввод исходных данных в числовом и аналитическом виде;
- 2) вычисление интегралов от вейвлетов Хаара;
- 3) определение коэффициентов вейвлет-разложения функций  $\bar{a}_{hk}(t)p_i(t)$ ,  $\bar{a}_{hk}(t)$ ,  $B_{r_1 r_2}(t)$  по ортонормированному базису вейвлетов Хаара с применением стандартной функции wavedec;
- 4) составление системы линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $c_i^{r_1 r_2}$  и ее решение с применением стандартной функции MATLAB;
- 5) вычисление элементов  $\bar{K}_{r_1 r_2}$  ковариационной матрицы стохастического процесса  $\bar{Y}(t)$ ;
- 6) вывод результатов в числовом виде.

Подпрограмма-функция MWHL SSHKY для вычисления ковариационной матрицы линейной СтС с параметрическими шумами имеет синтаксис вызова:

$$[Kw, tris] = MWHL SSHKY(T0, T, py, nv, K0, J, NJ, Nris).$$

Исходные данные, задаваемые в числовом виде:

- 1)  $T0$  – начальный момент времени  $t_0$ ;
- 2)  $T$  – конечный момент времени;
- 3)  $py$  – размерность  $p$  вектора состояния системы  $Y(t)$ ;
- 4)  $nv$  – размерность  $n_v$  белого шума;
- 5)  $K0(py, py)$  – квадратная матрица размерности  $p \times p$  с начальными значениями  $K_0$  ковариационной матрицы вектора состояния системы  $Y(t)$ ;
- 6)  $J$  – максимальный уровень вейвлет разложения;

- 7)  $NJ = 2 \cdot 2^J$  – количество базисных вейвлет функций;
- 8)  $Nris$  – количество значений элементов ковариационной матрицы вектора состояния системы  $Y(t)$ , выводимых на печать.

Выходные данные выдаются в матричном виде:

- 1)  $Kw(py, py, Nris)$  – матрица значений элементов ковариационной матрицы вектора состояния системы  $Y(t)$  в точках  $t_j$  для  $j = 1, 2, \dots, Nris$ ;
- 2)  $tris(Nris)$  – вектор значений моментов времени  $t_j = t_0 + (j - 1)\Delta t$  для  $j = 1, 2, \dots, Nris$ ;  $\Delta t = \frac{T - t_0}{(Nris - 1)}$ .

Исходные данные в аналитическом виде задаются в виде пользовательских функций-подпрограмм:

- 1) набор функций-подпрограмм  $fahk$  для задания  $a_{hk}(t)$  ( $h, k = 1, 2, \dots, p$ );
- 2) набор функций-подпрограмм  $fbihk$  для задания  $b_{ihk}(t)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, p; h = 1, 2, \dots, p; r = 1, 2, \dots, n_v$ );
- 3) набор функций-подпрограмм  $fnurs$  для задания  $v_{rs}(t)$  ( $r, s = 1, 2, \dots, n_v$ ).

Подпрограмма-функции MWHLSSHKY осуществляет:

- 1) ввод исходных данных в числовом и аналитическом виде;
- 2) вычисление интегралов от вейвлетов Хаара;
- 3) вызов подпрограммы MWHLSMY для вычисления математического ожидания вектора состояния системы  $Y(t)$ ;
- 4) определение коэффициентов вейвлет-разложения функций  $a_{r_i,l}(t)p_i(t)$ ,  $a_{r_1,l}(t)$ ,  $a_{r_2,l}(t)p_i(t)$ ,  $a_{r_2,l}(t)$ ,  $B_{r_1,r_2}^{00}(t)$ ,  $[B_{r_1,r_2}^{\kappa 0}(t) + B_{r_1,r_2}^{0\kappa}(t)]p_i(t)$ ,  $(B_{r_1,r_2}^{\kappa 0}(t) + B_{r_1,r_2}^{0\kappa}(t))$ ,  $B_{r_1,r_2}^{\kappa l}(t)p_{i_1}(t)p_{i_2}(t)$ ,  $B_{r_1,r_2}^{\kappa l}(t)p_{i_2}(t)$ ,  $B_{r_1,r_2}^{\kappa l}(t)p_{i_1}(t)$ ,  $B_{r_1,r_2}^{\kappa l}(t)$ ,  $B_{r_1,r_2}^{\kappa l}(t)p_i(t)$  ( $i, k, r_1, r_2, i_1, i_2 = 1, 2, \dots, p$ ) по ортонормированному базису вейвлетов Хаара с применением стандартной функции wavedec;
- 5) составление системы линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $c_s^{r_1 r_2}$  и ее решение с применением стандартной функции MATLAB;
- 6) вычисление элементов ковариационной матрицы стохастического процесса  $\bar{Y}(t)$ ;

7) вывод результатов в числовом виде.

## П.7. Сравнительный анализ ММСМ с МНА и МЭА

На примере двумерной нелинейной СтС, для которой имеется точное решение, проведем сравнительный анализ ММСМ с МНА и МЭА [20].

Пусть двумерный стохастический процесс  $Y(t)$  описывается системой стохастических дифференциальных уравнений Ито вида (3.3.1)

$$dY_1 = -Y_1 Y_2 dt, \quad dY_2 = -\gamma Y_2 dt + dW_0, \quad t \geq 0, \quad Y(0) = Y_0,$$

где  $Y_0$  – гауссовский случайный вектор с параметрами

$$m_0 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad K_0 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix},$$

$W_0$  – одномерный стандартный винеровский процесс,  $\gamma = 5$ .

Точное выражение для моментов  $\alpha_{k0}(t) = M Y_1^k(t)$  имеет вид [20]

$$\alpha_{k0}(t) = \alpha_{k0}(0) \exp\left(\frac{k^2 D_\theta(t)}{2} - km_\theta(t)\right).$$

Здесь  $m_\theta(t)$  и  $D_\theta(t)$  – математическое ожидание и дисперсия случайного процесса  $\theta(t) = \int_0^t Y_2(\tau) d\tau$ , определяемые по формулам

$$m_\theta(t) = \frac{\alpha_{02}(0)(1 - \exp(-\gamma t))}{\gamma},$$

$$D_\theta(t) = \frac{K_0(2,2)}{\gamma^2} - \frac{1,5}{\gamma^3} + \frac{t}{\gamma^2} - \frac{K_0(2,2) \exp(-\gamma t) (2 - \exp(-\gamma t))}{\gamma^2}$$

$$+ \frac{\exp(-\gamma t) (4 - \exp(-\gamma t))}{2\gamma^3},$$

где  $\alpha_{02}(0)=1,25$ .

Плотность вероятности  $f_1(y, t)$  СтП  $Y(t)$  аппроксимируется конечным отрезком ее ортогонального разложения по полиномам Эрмита с учетом моментов до четвертого порядка с весом  $\omega_1(y)$  – нормальной плотностью с математическим ожиданием  $m$  и ковариационной матрицей  $K$  СтП  $Y(t)$ . С помощью ММСМ были рассчитаны математическое ожидание  $m$ , ковариационная функция  $K$  и старшие

моменты  $\alpha_{21}, \alpha_{22}$  для уточнения  $m, K$ . Для проведения сравнительного анализа параметры  $m, K$  были вычислены также с применением МНА и МЭА.

Результаты вычислительных экспериментов приведены в таблице П.7.1 и на рисунке П.7.1.

Таблица П.7.1

Момент	Метод	t				
		0	0,1	0,2	0,4	0,6
$\alpha_{10} = m_1$	TP	0,5	0,482	0,473	0,467	0,466
	МНА	0,5	0,482	0,473	0,467	0,465
	МЭА	0,5	0,482	0,473	0,467	0,465
	ММСМ	0,5	0,482	0,473	0,467	0,466
$D_1 = K_{11}$	TP	0,1	0,096	0,095	0,098	0,102
	МНА	0,1	0,096	0,092	0,091	0,093
	МЭА	0,1	0,096	0,092	0,091	0,093
	ММСМ	0,1	0,096	0,095	0,098	0,102

*Примечание.* ТР – точное решение, МНА – метод нормальной аппроксимации, МЭА – метод эллипсоидальной аппроксимации, ММСМ – модифицированный моментно-семиинвариантный метод.

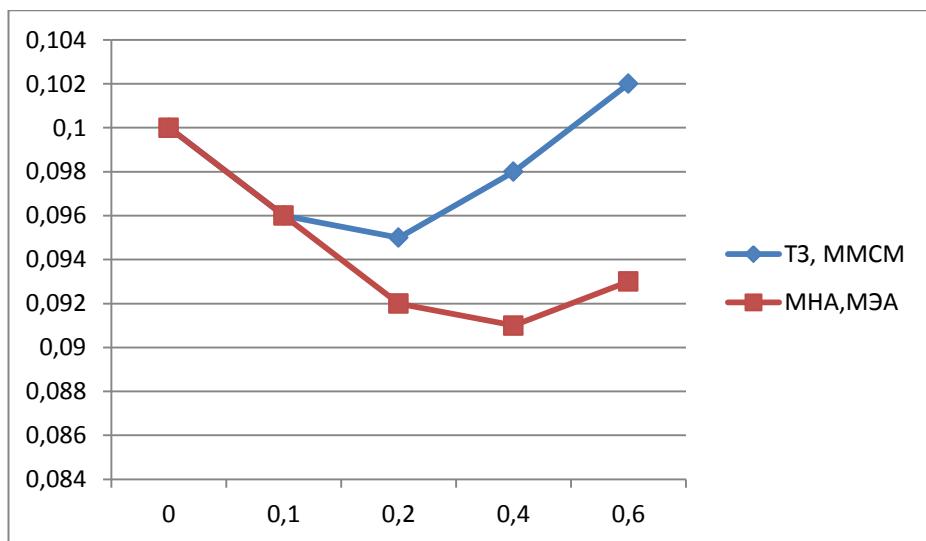


Рисунок П.7.1 – График  $D_1 = K_{11}$

Результаты сравнительного анализа, приведенные в таблице П.7.1 и на рисунке П.7.1, показывают:

- высокую точность вычисления математического ожидания  $m_1$ , полученную с применением ММСМ, МНА, МЭА;
- высокую точность вычисления дисперсии  $D_1$ , полученную с помощью ММСМ с учетом старших начальных моментов, присутствующих в правых частях уравнений для  $m$  и  $K$  (около 0,1%).

## **П.8. Описание ИПО "СтС-Анализ-ММСМ"**

Автором разработано инструментально-программное обеспечение "СтС-Анализ-ММСМ", которое реализует алгоритм 3.3.1 и осуществляет:

- ввод исходных данных в матричном и аналитическом виде,
- автоматическое составление замкнутой системы дифференциальных уравнений для искомых параметров;
- численные вычисления с использованием стандартных программ MATLAB,
- получение результатов в числовом виде.

Исходные данные для ПО "СтС-Анализ-ММСМ", задаваемые в числовом или матричном виде:

- начальный момент времени  $t_0$ ;
- конечный момент времени  $T$ ;
- размерность  $p$  случайного процесса  $Y$ ;
- параметры набора старших моменты вида  $M(Y_{j_1}^{l_1} \dots Y_{j_k}^{l_k})$  в виде двух векторов  $[j_1, \dots, j_k]^T$  и  $[l_1, \dots, l_k]^T$ ;
- начальные значения  $m(t_0) = m_0 = MY(t_0)$  в виде вектора;
- начальные значения  $K(t_0) = K_0 = M(Y(t_0) - m_0)(Y(t_0) - m_0)^T$  в виде матрицы;
- начальные значения старших моментов  $M(Y_{j_1}^{l_1}(t_0) \dots Y_{j_k}^{l_k}(t_0))$  в виде матрицы.

Исходные данные в аналитическом виде для ПО "СтС-Анализ-ММСМ", задаваемые в виде пользовательских функций-подпрограмм:

- функция  $a(y, t)$ ;
- полиномы  $p_\nu(y)$ ;
- линейные комбинации  $c_\nu = Mq_\nu(y) = q_\nu(\alpha)$  моментов СтП  $Y(t)$ , полученные из  $q_\nu(y)$  заменой всех одночленов  $y_1^{k_1} \dots y_p^{k_p}$  соответствующими моментами  $\alpha_{k_1, \dots, k_p}$ ;
- плотность  $\omega_1(y)$ ;
- функция  $\chi(\lambda; y, t)$  при  $\lambda = 0$ ;
- вектор функций  $\chi_1 = [\frac{\partial \chi(\lambda; y, t)}{\partial(i\lambda_1)}; \dots; \frac{\partial \chi(\lambda; y, t)}{\partial(i\lambda_p)}]^T$  при  $\lambda = 0$ ;
- матрица функций  $\chi_2 = [\frac{\partial^2 \chi(\lambda; y, t)}{\partial(i\lambda_k) \partial(i\lambda_j)}]_{k,j=1}^p$  при  $\lambda = 0$ ;
- набор функций  $\frac{\partial^{h_1 + \dots + h_k}}{\partial(i\lambda_{j_1})^{h_1} \dots \partial(i\lambda_{j_k})^{h_k}} \chi(\lambda; y, t)$  при  $\lambda = 0$  ( $h_1 = 0, \dots, l_1; \dots; h_k = 0, \dots, l_k$ ) для вычисления набора старших начальных моментов  $M(Y_{j_1}^{l_1} \dots Y_{j_k}^{l_k})$ .

В состав ПО "СтС-Анализ-ММСМ" входят программные модули, реализующие алгоритм 3.3.1. Результаты выдаются в табличном виде.

## **П.9. Анализ точности информационно-управляющей системы при продольно-поперечном УВ**

Рассмотрим прецизионную информационно-управляющую систему (ИУС) третьего порядка в условиях УВ, описываемую следующими уравнениями Ито [19,20]:

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = Y_2, \\ \dot{Y}_2 = -\omega_c^2 Y_1 - 2\varepsilon\omega_c Y_2 + (S + n_t^{y\Delta} + V_t^{y\Delta})(\cos\alpha + Y_1 \sin\alpha), \\ \dot{Y}_3 = Y_1, \\ Y_i(t_0) = Y_{i0} (i = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Здесь  $Y_i$  – составляющие СтП  $Y(t) = [Y_1, Y_2, Y_3]^T$ ;  $\varepsilon, \omega_c, S$  – параметры ИУС;  $n_t^{\text{уд}}$  – детерминированная функция в виде прямоугольного ударного импульса в момент времени  $t_{\text{уд}}$ ; где  $\alpha$  – угол, образованный ускорением  $(S + n_t^{\text{уд}} + V_t^{\text{уд}})$  с продольной осью ИУС;  $V_t^{\text{уд}}$  – белый шум с интенсивностью  $V_t^{\text{уд}}$ , определяющий стохастический прямоугольный ударный импульс. Система является линейной системой с параметрическими шумами:

$$\dot{Y} = a_0^{\text{уд}} + a^{\text{уд}}Y + (b_0^{\text{уд}} + b_1^{\text{уд}}Y)V_t^{\text{уд}},$$

$$\text{где } Y = [Y_1 \quad Y_2 \quad Y_3]^T, \quad a_0^{\text{уд}} = \begin{bmatrix} 0 \\ (S + n_t^{\text{уд}})\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a^{\text{уд}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\Omega_t^{\text{уд}} & -2\varepsilon\omega_c & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_0^{\text{уд}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_1^{\text{уд}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_t^{\text{уд}} = \omega_c^2 - (S + n_t^{\text{уд}})\sin\alpha.$$

Уравнения для математических ожиданий  $m_i = M[Y_i]$  и элементов ковариационной матрицы  $k_{ij} = M[(Y_i - m_i)(Y_j - m_j)]$  имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_1 = m_2, \\ \dot{m}_2 = a_{21}^{\text{уд}}m_1 + a_{22}^{\text{уд}}m_2 + a_{02}^{\text{уд}}(t) \\ \quad \dot{m}_3 = m_1 \\ \quad m_i(t_0) = m_{i0} (i = 1,2,3); \\ \\ \dot{k}_{11} = 2k_{12}, \\ \dot{k}_{12} = a_{21}^{\text{уд}}k_{11} + a_{22}^{\text{уд}}k_{12} + k_{22}, \\ \quad \dot{k}_{13} = k_{11} + k_{23}, \\ \dot{k}_{22} = 2a_{21}^{\text{уд}}k_{12} + 2a_{22}^{\text{уд}}k_{22} + V_t^{\text{уд}}\cos^2\alpha + V_t^{\text{уд}}m_1\sin 2\alpha + V_t^{\text{уд}}(m_1 + k_{11})\sin^2\alpha, \\ \quad \dot{k}_{23} = k_{12} + a_{21}^{\text{уд}}k_{13} + a_{22}^{\text{уд}}k_{23}, \\ \quad \dot{k}_{33} = 2k_{13}, \\ \quad k_{ij}(t_0) = k_{ij0} (i,j = 1,2,3); \end{array} \right.$$

На рис. П.9.1 – П.9.4 приведены типовые графики для продольно-поперечных УВ. Для вычислительных экспериментов задавались  $\alpha = 45^\circ, 225^\circ$ ;  $\varepsilon = 0,7$ ;  $\omega_c = 1$ ;  $S = 1$ ; детерминированный удар с  $n_t^{\text{уд}}$  и стохастический удар  $V_t^{\text{уд}}$  в  $t_{\text{уд}} = 0,135$ :

$$n_t^{\text{уд}} = \begin{cases} 10, & \text{если } t \in [t_{\text{уд}}, t_{\text{уд}} + 1], \\ 0, & \text{если } t \notin [t_{\text{уд}}, t_{\text{уд}} + 1]. \end{cases}, \quad V_t^{\text{уд}} = \begin{cases} 6, & \text{если } t \in [t_{\text{уд}}, t_{\text{уд}} + 1], \\ 0, & \text{если } t \notin [t_{\text{уд}}, t_{\text{уд}} + 1]. \end{cases}$$

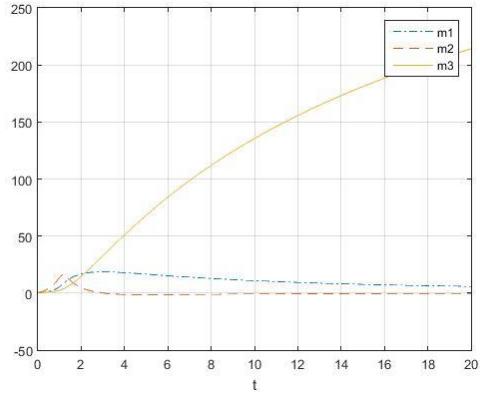


Рисунок. П.9.1 – Графики  $m_1, m_2, m_3$   
при  $\alpha = 45^\circ$

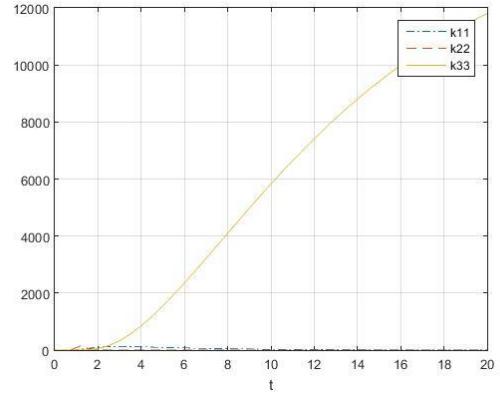


Рисунок П.9.2 – Графики  $k_{11}, k_{22}, k_{33}$   
при  $\alpha = 45^\circ$

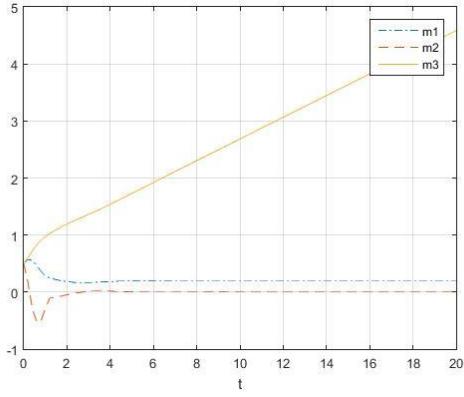


Рисунок. П.9.3 – Графики  $m_1, m_2, m_3$   
при  $\alpha = 225^\circ$

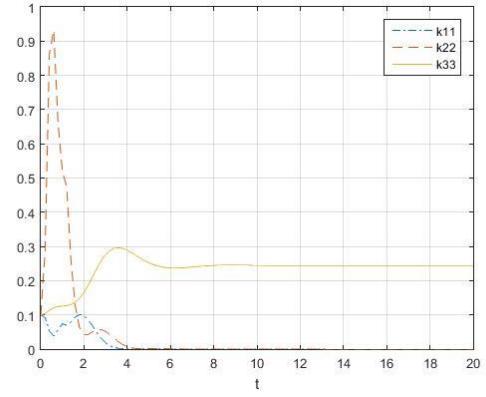


Рисунок. П.9.4 – Графики  $k_{11}, k_{22}, k_{33}$   
при  $\alpha = 225^\circ$

**Вывод.** Имеет место эффект накопления систематических и случайных ошибок по переменной  $Y_3$ .

## П.10. Вейвлет с.к. линейная оптимизация при ударных воздействиях

Найти с.к. оптимальный линейный фильтр, предназначенный для воспроизведения сигнала

$$W(s) = U_1 + U_2 \delta(s - s^*) \quad (\text{П.10.1})$$

по результатам наблюдения суммы этого сигнала и некоррелированной помехи, т.е.

$$Z(t) = U_1 + U_2 \delta(t - t^*) + X(t). \quad (\text{П.10.2})$$

Наблюдения производятся в течение интервала времени длительностью  $T$ , предшествующему данному моменту  $s$  ( $s \geq T$ ). Период наблюдения сигнала  $W(s)$  равен  $S$ ,  $s, s^* \in S$ . Параметры  $t, t^* \in [s - T, s]$ . Случайная функция  $X(t)$  задана математическим ожиданием, равным 0, и ковариационной функцией

$$K_X(t, \tau) = D \exp(-\alpha|t - \tau|).$$

$U_1, U_2$  – случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями, не коррелированные со случайной функцией  $X(t)$ ,  $M[U_p \bar{U}_q] = \gamma_{pq} \cdot (p, q = 1, 2)$ .

Построим с.к. оптимальный линейный оператор  $A_t$  для воспроизведения сигнала  $W(s)$ , заданного формулой (П.10.1), по результатам наблюдения сигнала  $Z(t)$ , заданного формулой (П.10.2), определим с.к. оценку  $\eta$  качества оператора  $A_t$  и с.к. оценку сигнала  $W^*(s)$ . Для этого выполним алгоритмы 4.2.1.1 и 4.2.1.2. При вычислениях будем использовать ортонормированный базис Хаара. Поэтому перейдем от переменной  $t \in [s - T, s]$  к переменной  $\bar{t} \in [0, 1]$  с помощью замены переменной  $\bar{t} = \frac{t-(s-T)}{s-(s-T)} = \frac{t-(s-T)}{T}$ . Далее в примере для простоты записи будем считать, что  $\bar{t} = t$ ,  $\bar{\tau} = \tau$ . Уравнение для с.к. оптимального линейного оператора  $A_t$  имеет вид

$$A_t[K_X(t, \tau)] = \sum_{p,q=1}^2 \gamma_{pq} \{ \zeta_p(s) - A_t[\xi_p(t)] \} \xi_q(\tau),$$

т.к.  $Y(s)=0$  и, как следствие,  $K_{YX}(s, \tau) = 0$ . Отсюда

$$\begin{aligned} a^t u_{00}(s) \varphi_{00}^t(\tau) + b_{000}^t v_{00}(s) \varphi_{00}^t(\tau) + d_{000}^t v_{00}(s) \psi_{00}^t(\tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t u_{jk}(s) \psi_{jn}^t(\tau) = \\ = \sum_{p,q=1}^2 \gamma_{pq} \left\{ \zeta_p(s) - a_p^\xi u_{00}(s) - d_{p00}^\xi v_{00}(s) \right\} \times \\ \times \left( a_q^\xi \varphi_{00}^t(\tau) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{qjk}^\xi \psi_{jk}^t(\tau) \right) \end{aligned}$$

Тогда СЛАУ для определения неизвестных функций  $u_{00}(s), v_{00}(s), u_{jk}(s)$  ( $j = 1, 2, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ ) для заданного значения переменной  $s$  имеет вид:

$$\begin{cases} a^t u_{00}(s) + b_{000}^t v_{00}(s) = \sum_{p,q=1}^2 \gamma_{pq} \lambda_p a_q^\xi, \\ d_{000}^t v_{00}(s) + h_{000}^t u_{00}(s) = \sum_{p,q=1}^2 \gamma_{pq} \lambda_p d_{q00}^\xi, \\ \sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t u_{jk}(s) = \sum_{p,q=1}^2 \gamma_{pq} \lambda_p d_{qjn}^\xi \quad (j = 1, 2, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1), \\ \lambda_1 = \zeta_1(s) - a_1^\xi u_{00}(s) - d_{100}^\xi v_{00}(s), \\ \lambda_2 = \zeta_2(s) - a_2^\xi u_{00}(s) - d_{200}^\xi v_{00}(s). \end{cases}$$

Здесь для удобства введены переменные

$$\lambda_p = \zeta_p(s) - a_p^\xi u_{00}(s) - d_{p00}^\xi v_{00}(s) \quad (p = 1, 2).$$

С.к. оценка  $\eta$  качества с.к. оптимального линейного оператора  $A_t$  вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \eta = & \left( \gamma_{11} \zeta_1(s) + \gamma_{21} \zeta_2(s) \right) \left( \zeta_1(s) - a_1^\xi u_{00}(s) - d_{100}^\xi v_{00}(s) \right) + \\ & + \left( \gamma_{12} \zeta_1(s) + \gamma_{22} \zeta_2(s) \right) \left( \zeta_2(s) - a_2^\xi u_{00}(s) - d_{200}^\xi v_{00}(s) \right), \end{aligned}$$

где  $\zeta_1(s) = 1$ ,  $\zeta_2(s) = \delta(s - s^*) \approx \varphi_{00}(s)\varphi_{00}(s^*) + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} \psi_{jk}(s)\psi_{jk}(s^*)$ .

С.к. оптимальная оценка  $W^*(s)$  сигнала  $W(s)$  вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} W^*(s) = A_t Z(t) = & \sum_{r=1}^2 U_r \left( a_r^\xi u_{00}(s) + d_{r00}^\xi v_{00}(s) \right) + \\ & + \sum_{v=1}^{L^t} V_v \left( d_{v00}^x v_{00}(s) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{vk}^x u_{jk}(s) \right). \end{aligned}$$

Вычисления выполнялись с применением ИПО "Синтез-ВЛ" для вейвлет базиса Хаара с максимальным уровнем разрешения  $J^t = 2$  при  $t \in [s - T, s]$  и для вейвлет базиса Хаара с максимальным уровнем разрешения  $J^s = 2$  при  $s \in S$ . При вычислениях использовались

1) исходные данные:

$$\alpha = 1, \quad T = 8, \quad s \in [11, 18], \quad t^* = (s - T) + \frac{3T}{2 * 2^{J^t}}, \quad s^* = s;$$

2) вейвлет разложение  $\delta$ -функции (см. приложение П.3):

$$\delta(t - t^*) = \varphi_{00}(t)\varphi_{00}(t^*) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} \psi_{jk}(t)\psi_{jk}(t^*),$$

$$\delta(s - s^*) = \varphi_{00}(s)\varphi_{00}(s^*) + \sum_{j=0}^{J^s} \sum_{k=0}^{2^j-1} \psi_{jk}(s)\psi_{jk}(s^*).$$

Вычислительные эксперименты показали, что уже при  $J^t = 2$  и  $J^s = 2$  с.к. оптимальная оценка  $\eta$  качества с.к. оптимального линейного оператора  $A_t$  равна 0,7973 при значениях сигнала  $W(s) \in [-12; 10]$ . На рисунке П.10.11 изображены графики реализации сигнала  $W(s)$  и его оценки  $W^*(s)$  при  $s \in [11, 18]$ . На рисунке 4.3.2 изображен график с.к. оценки  $\eta(s)$  качества оператора  $A_t$  при  $s \in [11, 18]$ .

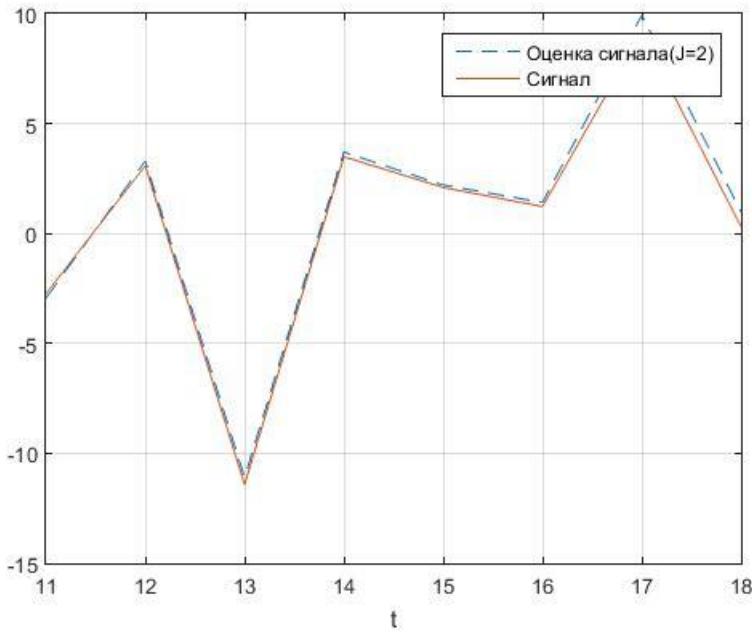


Рисунок П.10.11 – Реализация сигнала  $W(s)$  и его оценка  $W^*(s)$

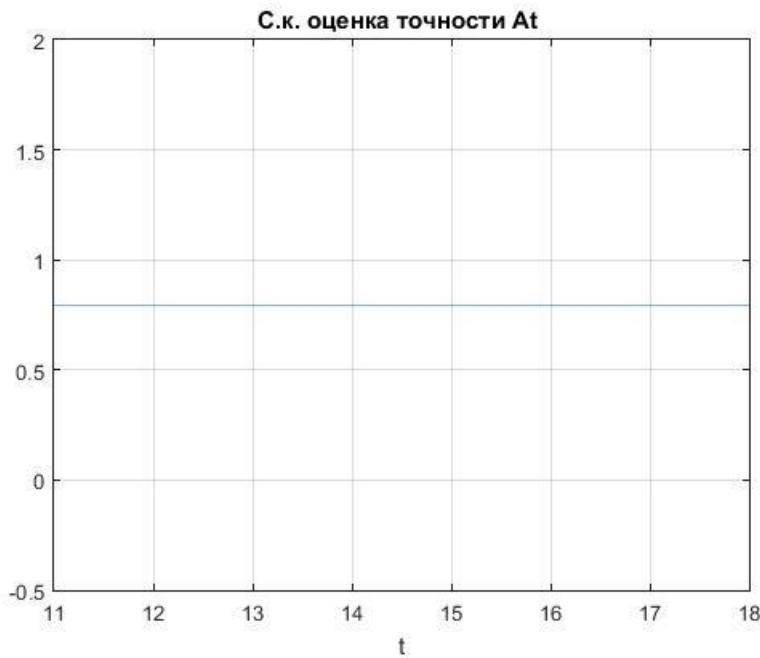


Рисунок П.10.12 – С.к. оценка  $\eta(s)$  качества оператора  $A_t$

## П.11. Описание ИПО "Синтез-ВЛ"

На основе методических результатов п. 4.2 разработано ИПО "Синтез-ВЛ" в среде MATLAB, которое реализует алгоритм построения вейвлет с.к. оптимального

линейного оператора в случае линейной зависимости сигнала от параметров и аддитивной помехи (алгоритмы 4.2.1.1 и 4.2.1.2) и осуществляет:

- 1) ввод исходных данных: набор подпрограмм-функций, задающих структурные функции  $\xi_1(t), \dots, \xi_N(t), \zeta_1(s), \dots, \zeta_N(s)$ ; ковариационные функции  $K_X(t, \tau)$  и  $K_{YX}(s, \tau)$ ; область определения  $T$  наблюдения СтП  $Z(t)$  в виде отрезка  $[t_0, t_1]$ ; область определения  $S$  оценки СтП  $W(t)$  в виде отрезка  $[s_0, s_1]$ ; максимальные уровни вейвлет разложения  $J^t$  и  $J^s$ ;
- 2) одномерное вейвлет разложение структурных функций  $\xi_1(t), \dots, \xi_N(t), \zeta_1(s), \dots, \zeta_N(s)$  по вейвлет базису Хаара с применением стандартной функции wavedec;
- 3) двумерное вейвлет разложение ковариационных функций  $K_X(t, \tau)$  и  $K_{YX}(s, \tau)$  по вейвлет базису Хаара с применением стандартной функции wavedec2;
- 4) автоматическое составление и решение СЛАУ для вычисления параметров:  $a_{jk}^u, d_{jkl}^u, a_{00}^v, d_{00in}^v$  ( $i = 1, \dots, J^s; n = 0, 1, \dots, 2^i - 1; j = 1, \dots, J^t; k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ );
- 5) вывод результатов в числовом виде.

Исходные данные, задаваемые в числовом виде:

- 1) начальный момент времени наблюдения сигнала  $T0=t_0$ ;
- 2) конечный момент времени наблюдения сигнала  $T=t_1$ ;
- 3) начальный момент времени оценки сигнала  $S0=s_0$ ;
- 4) конечный момент времени оценки сигнала  $SS=s_1$ ;
- 5) максимальные уровни вейвлет разложения  $Jt = J^t, Js = J^s$ ;
- 6) количество базисных вейвлет функций  $Nt = 2 * 2^{J^t}, Ns = 2 * 2^{J^s}$ .

Исходные данные в аналитическом виде, задаваемые в виде пользовательских функций-подпрограмм:

- 1) набор функций-подпрограмм  $fksi1, \dots, fksiN$  для задания структурных функций  $\xi_1, \dots, \xi_N$ ;
- 2) набор функций-подпрограмм  $fdzet1, \dots, fdzetN$  для задания структурных функций  $\zeta_1, \dots, \zeta_N(s)$ ;

- 3) подпрограмма-функция fcov для задания ковариационной функции  $K_X(t, \tau)$ ;
- 4) подпрограмма-функция fcovYX для задания ковариационной функции  $K_{YX}(s, \tau)$ .

Подпрограммы-функции имеют синтаксис вызова: cov=fcov(t1,t2); covYX=fcovYX(s,t); ksi=fksii(t) ( $i=1, \dots, N$ ); dzet=fdzeti(s) ( $(i=1, \dots, N)$ ).

Все вычисления осуществляются в подпрограмме-функции SYNTHESISWL1, которая имеет синтаксис вызова:

$$[W_{\text{Ot}}, \text{nett}] = \text{SYNTHESISWL1} (\text{Jt}, \text{Nt}, \text{T0}, \text{T}, \text{Js}, \text{Ns}, \text{S0}, \text{SS}, \text{NS}).$$

Выходные данные выдаются в матричном виде:

- 1) W\_{\text{Ot}}(\text{Ns}) - вектор значений с.к. оптимальной оценки  $W^*(s)$  сигнала  $W(s)$  в точках  $s_j = S0 + (j - 1)$  для  $j = 1, 2, \dots, NS$ ;
- 2) nett(Ns) - вектор значений с.к. оптимальной оценки  $\eta$  качества с.к. оптимального линейного оператора  $A_t$  в точках  $s_j = S0 + (j - 1)$  для  $j = 1, 2, \dots, NS$ .

При вычислениях используется подпрограмма-функция KRWL1 для построения ВЛКР процесса  $X(t)$  на основе двумерного вейвлет разложения ковариационной функции  $K_X(t, \tau)$  по вейвлетам Хаара.

## **П.12. Вейвлет фильтры для информационно-управляющей системы в условиях ударных воздействий**

Информационно-управляющая система в условиях ударных воздействий описывается уравнениями на отрезке  $[t_0, T]$ :

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2, \\ \dot{X}_2 &= -\omega_c^2 X_1 - 2\varepsilon\omega_c X_2 + S + n_t^{\text{уд}} + V_1^{\text{уд}}, \\ \dot{X}_3 &= X_1, \end{aligned} \quad (\text{П.12.1})$$

в условиях наблюдений:

$$Z_1 = \dot{Y}_1 \equiv 0, Z_2 = \dot{Y}_2 = X_2 + V_2, Z_3 = \dot{Y}_3 \equiv 0, \quad (\text{П.12.2})$$

где  $X = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T$  и  $Y = [0 \ Y_2 \ 0]^T$  – векторы состояния и наблюдений,  $V_1^{\text{уд}}$  и  $V_2$  – скалярные независимые гауссовские белые шумы с интенсивностями  $\nu_1^{\text{уд}}$  и  $\nu_2$  ( $\nu_2 \neq 0$ ).

Для оценки  $\hat{X}_t$  вектора состояния  $X_t = X(t)$  ИУС уравнение фильтра Калмана–Бьюси в векторной форме имеет вид:

$$\dot{\hat{X}}_t = a_{0t}^{\text{уд}} + \beta_t Z_t + (a_1^{\text{уд}} - \beta_t b_1) \hat{X}_t, \quad \hat{X}_t(t_0) = \hat{X}_0. \quad (\text{П.12.3})$$

Здесь введены обозначения:

$$a_{0t}^{\text{уд}} = \begin{bmatrix} 0 \\ S + n_t^{\text{уд}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_1^{\text{уд}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_c^2 & -2\varepsilon\omega_c & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\beta_t = R_t b_1^T \nu_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\nu_2} R_{12} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\nu_2} R_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\nu_2} R_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнения для  $R_t$  записываются в векторном виде

$$\dot{R}_t = a_1 R_t + R_t a_1^T + c_1 \nu_1^{\text{уд}} c_1^T - \beta_t \nu_2 \beta_t^T, \quad R(t_0) = R_0, \quad c_1^T = [0 \ 1 \ 0]^T,$$

или в скалярной форме

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R}_{11} = 2R_{12} - \frac{1}{\nu_2} R_{12}^2, \quad R_{11}(t_0) = R_{110}; \\ \dot{R}_{12} = R_{22} - \omega_c^2 R_{11} - 2\varepsilon\omega_c R_{12} - \frac{1}{\nu_2} R_{12} R_{22}, \quad R_{12}(t_0) = R_{120}; \\ \dot{R}_{13} = R_{11} + R_{23} - \frac{1}{\nu_2} R_{12} R_{23}, \quad R_{13}(t_0) = R_{130}; \\ \dot{R}_{22} = -2(\omega_c^2 R_{12} + 2\varepsilon\omega_c R_{22}) + \nu_1^{\text{уд}} - \frac{1}{\nu_2} R_{22}^2, \quad R_{22}(t_0) = R_{220}; \\ \dot{R}_{23} = R_{12} - \omega_c^2 R_{13} - 2\varepsilon\omega_c R_{23} - \frac{1}{\nu_2} R_{22} R_{23}, \quad R_{23}(t_0) = R_{230}; \\ \dot{R}_{33} = 2R_{13} - \frac{1}{\nu_2} R_{23}^2, \quad R_{11}(t_0) = R_{110}. \end{array} \right.$$

Окончательные скалярные уравнения ФКБ для ИУС при УВ имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}_1 &= \left(1 + \frac{1}{\nu_2} R_{12}\right) \hat{X}_2 - \frac{1}{\nu_2} R_{12} Z_2, \\ \dot{\hat{X}}_2 &= S + n_t^{\text{уд}} - \omega_c^2 \hat{X}_1 - \left(2\varepsilon\omega_c - \frac{R_{22}}{\nu_2}\right) \hat{X}_2 - \frac{1}{\nu_2} R_{22} Z_2, \\ \dot{\hat{X}}_3 &= \hat{X}_1 + \frac{1}{\nu_2} R_{23} \hat{X}_2 - \frac{1}{\nu_2} R_{23} Z_2. \end{aligned} \quad (\text{П.12.4})$$

Перейдем к построению вейвлет фильтра Калмана–Бьюси в предположении, что скалярные элементы матриц  $S$ ,  $n_t^{\text{уд}}$ ,  $\nu_1^{\text{уд}}$ ,  $\nu_2$ ,  $R_t$  принадлежат пространству  $L^2[t_0, T]$ . Сначала запишем уравнения (П.12.3) в виде

$$\dot{\hat{X}}_t = A_0 + AX_t, \quad \hat{X}(t_0) = \hat{X}_0,$$

$$A_0 = [A_{h0}]_h = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\nu_2} R_{12} Z_2 \\ -\frac{1}{\nu_2} R_{22} Z_2 + S + n_t^{\text{уд}} \\ -\frac{1}{\nu_2} R_{23} Z_2 \end{bmatrix},$$

$$A = [A_{hk}]_{h,k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \frac{1}{\nu_2} R_{12} & 0 \\ -\omega_c^2 & -\left(2\varepsilon\omega_c - \frac{R_{22}}{\nu_2}\right) & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{\nu_2} R_{23} \end{bmatrix}.$$

Далее перейдем к уравнениям, заданным на единичном отрезке:

$$\hat{X}' = \bar{A}_0 + \bar{A}\hat{X}, \quad \hat{X}(0) = \hat{X}_0.$$

Здесь  $\bar{A}_0 = (T - t_0)A_0$ ,  $\bar{A} = (T - t_0)A$ . В результате, согласно теореме 4.3.2, придем к искомому ВЛФКБ для оценки составляющих  $\hat{X}_h$  ( $h=1,2,3$ ) в режиме реального времени:

$$\hat{X}_h = \sum_{s=1}^L c_{hs} p_s + \hat{X}_{0h}.$$

Здесь коэффициенты  $c_{hs}$  находятся из СЛАУ:

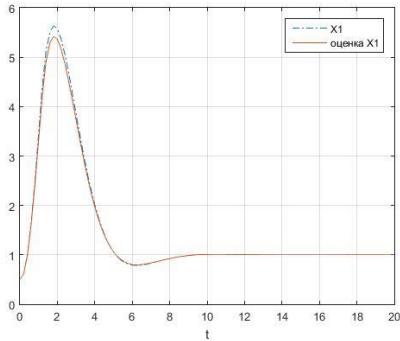
$$c_{hs} = \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^L c_{hi} g_s^{hki} + \hat{X}_{0h} \sum_{i=1}^L q_s^{hk} + \rho_s^h \quad (s = 1, 2, \dots, L),$$

где введены обозначения:  $g_s^{hki} = \int_0^1 \bar{A}_{hk}(\tau) p_i(\tau) w_s(\tau) d\tau$ ,  $q_s^{hk} = \int_0^1 \bar{A}_{hk}(\tau) w_s(\tau) d\tau$ ,

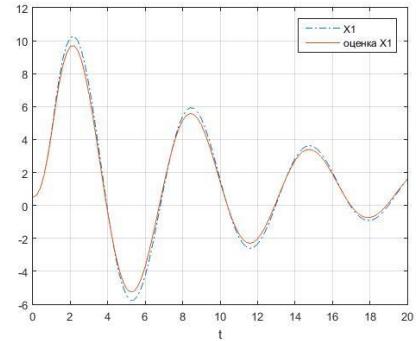
$$\rho_s^h = \int_0^1 \bar{A}_{h0}(\tau) w_s(\tau) d\tau.$$

Вычислительные эксперименты осуществлялись с применением ИПО "СтС-ВЛ-Фильтр" для  $\omega_c = 1$ ;  $S = 1$ ;  $\nu_2 = 1$ ;  $J = 5$ . Для проведения сравнительного анализа зависимости результатов синтеза ВФКБ от параметра  $\varepsilon$ , на рисунках П.12.1–П.12.10 результаты представлены для  $\varepsilon = 0,7$  и  $\varepsilon = 0,1$  для детерминированного удара с  $n_t^{\text{уд}}$  и стохастического удара с  $\nu_t^{\text{уд}}$  в  $t_{\text{уд}} = 0,135$ :

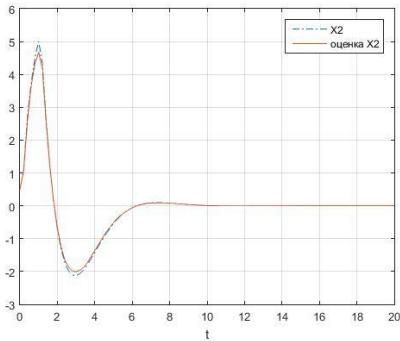
$$n_t^{\text{уд}} = \begin{cases} 10, & \text{если } t \in [t_{\text{уд}}; t_{\text{уд}} + 1], \\ 0, & \text{если } t \notin [t_{\text{уд}}; t_{\text{уд}} + 1]. \end{cases}, \quad v_t^{\text{уд}} = \begin{cases} 6, & \text{если } t \in [t_{\text{уд}}; t_{\text{уд}} + 1], \\ 0, & \text{если } t \notin [t_{\text{уд}}; t_{\text{уд}} + 1]. \end{cases}$$



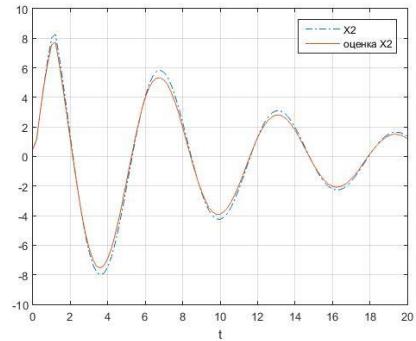
**Рис. П.12.1.** График реализации  $X_1$  и ее оценки  
для  $\varepsilon = 0,7$



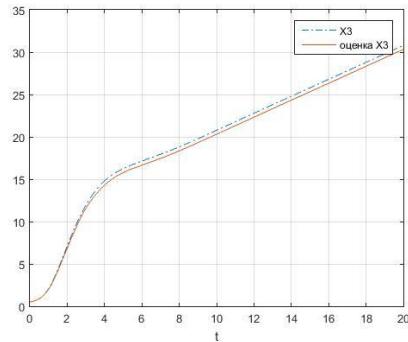
**Рис. П.12.2.** График реализации  $X_1$  и ее оценки  
для  $\varepsilon = 0,1$



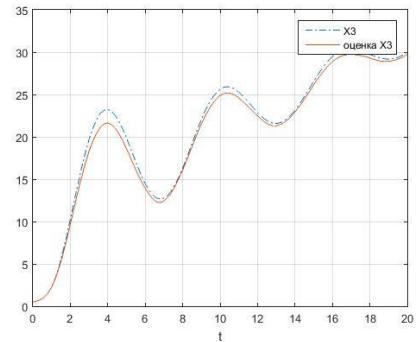
**Рис. П.12.3.** График реализации  $X_2$  и ее оценки  
для  $\varepsilon = 0,7$



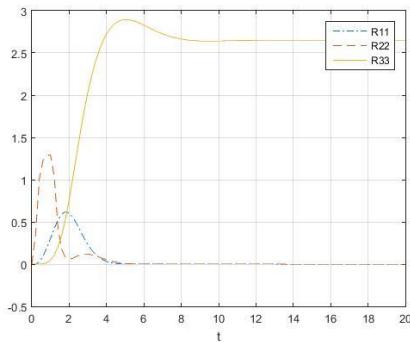
**Рис. П.4.124.** График реализации  $X_2$  и ее оценки  
для  $\varepsilon = 0,1$



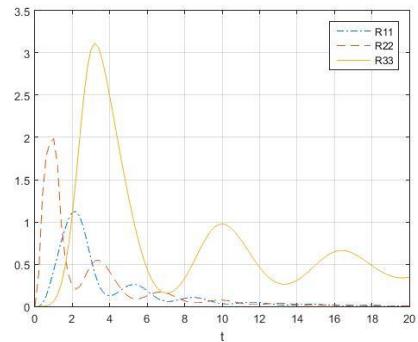
**Рис. П.12.5.** График реализации  $X_3$  и ее оценки  
для  $\varepsilon = 0,7$



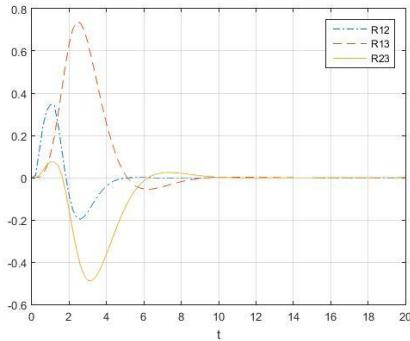
**Рис. П.12.6.** График реализации  $X_3$  и ее оценки  
для  $\varepsilon = 0,1$



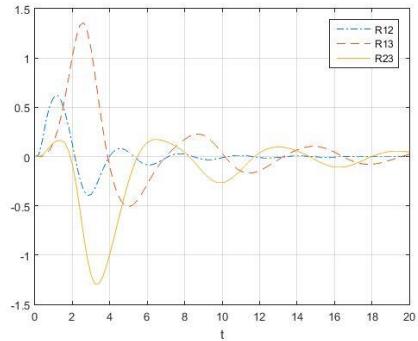
**Рис. П.12.7.** Графики дисперсий ошибки фильтрации  $R_{11}, R_{22}, R_{33}$  для  $\varepsilon = 0,7$



**Рис. П.12.8.** Графики дисперсий ошибки фильтрации  $R_{11}, R_{22}, R_{33}$  для  $\varepsilon = 0,1$



**Рис. П.12.9.** Графики дисперсий ошибки фильтрации  $R_{12}, R_{13}, R_{23}$  для  $\varepsilon = 0,7$



**Рис. П.12.10.** Графики дисперсий ошибки фильтрации  $R_{12}, R_{13}, R_{23}$  для  $\varepsilon = 0,1$

Для моделирования ВЛФКБ для ИУС в условиях ударных воздействий в среде MATLAB разработано ИПО "СтС-ВЛ-Фильтр". При моделировании скалярного белого шума  $V_1^{\text{уд}}$  с интенсивностью  $v_1^{\text{уд}}$  использовалось ИПО построения ВЛКР СФ "СтИТ-КРВЛ.1" на основе ортогонального разложения ковариационной функции белого шума  $V_1^{\text{уд}}$  по двумерному ортонормированному вейвлет базису Хаара. При решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом вейвлетов Хаара применялось ИПО "СтС-ВЛ-Анализ".

С применением ИПО "СтС-ВЛ-Фильтр" был реализован следующий алгоритм построения ВЛФКБ:

1. Задание исходных данных: промежутка наблюдения  $[t_0, t_1]$ , начальных данных вектора состояния  $X$ , параметров  $\varepsilon$ ,  $\omega_c, S, v_2, n_t^{\text{уд}}, v_t^{\text{уд}}$ .
2. Вычисление  $R_t$ .
3. Определение в пространстве  $L^2[0,1]$  ортонормированной системы вейвлетов Хаара с заданным уровнем вейвлет разрешения  $J$ .

4. Вычисление интегралов от вейвлетов Хаара.
5. Для моделирования реализаций приведение заданной системы к безразмерному времени и ее решение МВЛХГ с применением ИПО "СтС-ВЛ-Анализ" и "СтИТ-КРВЛ.1".
6. Задание значений наблюдаемого процесса  $Z(t)$  ( $t \in [t_0, t_1]$ ) в точках  $t_j = t_0 + (j - 1)\Delta t$  для  $j = 1, 2, \dots, L; L = 2 \cdot 2^J; \Delta t = \frac{t_1 - t_0}{L-1}$ .
7. Составление и решение системы линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $c_{hs}$ .
8. Вычисление с.к. оценки  $\hat{\bar{X}}_h$  для каждой составляющей вектора состояния  $\bar{X}_t$ .
9. Переход от безразмерного времени  $\bar{t} \in [0, 1]$  к  $t \in [t_0, t_1]$  и определение с.к. оценки  $\hat{X}(t)$  по формуле:
$$\hat{X}(\bar{t}) = \hat{X}((t_1 - t_0)\bar{t} + t_0).$$
10. Построение графиков.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Публикации в журналах, входящих в перечень ВАК РФ

1. Конашенкова Т.Д., Шин В.И. Приближенный метод определения моментов fazовых координат многомерных стохастических систем. // Автоматика и телемеханика, 1990. №1. С. 43-52.
2. Андреева Е.В., Конашенкова Т.Д., Маишева Е.Ю., Огнева О.С., Петрова М.В., Шин В.И. Модифицированные квазимоментные и моментно-семиинвариантные методы анализа многомерных стохастических систем и их программная реализация. // Системы и средства информатики, М.:Наука, 1992, Вып. 2, с. 160-171.
3. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д., Семендейев Н.Н., Басилашвили Д.А. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (I). // Системы высокой доступности. 2009. Т. 5. №3. С. 4-52.
4. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д., Семендейев Н.Н., Сергеев И.В., Басилашвили Д.А. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (II). // Системы высокой доступности. 2010. Т.6. №2. С. 4-45.
5. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д., Семендейев Н.Н., Сергеев И.В., Басилашвили Д.А. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (III). // Системы высокой доступности. 2010. Т.6. №4. С. 23-47.
6. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Шоргин В.С., Макаренкова И.В., Конашенкова Т.Д., Агафонов Е.С., Семендейев Н.Н. Развитие компьютерной поддержки статистических научных исследований систем высокой точности и доступности // Системы и средства информатики, 2011. Вып.21. №1. С. 3-33.
7. Синицын И.Н., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Конашенкова Т.Д. Развитие математического обеспечения для анализа нелинейных многоканальных круговых стохастических систем. // Системы и средства информатики. –М.: ИПИ РАН, 2012. Т. 22. № 1. С.3-21.

8. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (IV). // Системы высокой доступности, 2017. Т 13. №3. С. 55–69
9. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (V). // Системы высокой доступности, 2018. Т.14. №1. С. 59-70.
10. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (VI). // Системы высокой доступности, 2018. Т. 14. №2. С. 40-56.
11. Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (VII). // Системы высокой доступности, 2019. Т. 15. №1. С. 47-61.
12. Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (VIII). // Системы высокой доступности, 2019. Т. 15. №1. С. 62-69.
13. Konashenkova, Tatyana Dmitrievna. Развитие моментно-семиинвариантного программного обеспечения стохастического анализа. // Международный журнал "Современные информационные технологии и ИТ-образование" [S. I.], v. 15, n. 1, p. 232-241, apr. 2019. ISSN 2411-1473.  
<http://sitico.cs.msu.ru/index.php/SITITO/article/view/490>
14. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Оптимизация стохастических систем на основе вейвлет канонических разложений. // Автоматика и телемеханика, 2020. № 11. С. 138–156.
15. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (IX) // Системы высокой доступности. 2020. Т. 16. № 4. С. 5–23.

16. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (Х) // Системы высокой доступности. 2020. Т. 16. № 4. С. 24–39.

### **Публикации в сборниках трудов конференций**

1. Sinitsyn I.N. ,Belousov V.V., Konashenkova T.D. Software tools for circular stochastic systems fnalyses. // XXIX International Seminar on stability Problems for stochastic models. Book of abstracts. 2011, Institute of Informatics Problems RAS. – P. 86-87.
2. Sinitsyn I.N. , Belousov V.V., Konashenkova T.D. Software tools for spherical stochastic systems analysis and filtering. // Международный семинар по проблемам устойчивости стохастических моделей (ISSPSM-2012) и VI международный рабочий семинар «Прикладные задачи теории вероятности и математической статистики, связанные с моделированием информационных систем» (АРТР+МС'2012). Сборник тезисов. – М.: ИПИ РАН, 2012. С. 91-93.
3. Синицын И. Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Стохастические канонические вейвлет разложения в задачах моделирования вибродаронадежности компьютерного оборудования. // XVIII международная научная конференция «Системы компьютерной математики и их приложения» (СКМП – 2017), г. Смоленск, 19-21 мая 2017 года. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2017. С. 123–124.
4. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Экспресс моделирование стохастических систем высокой доступности на основе вейвлет канонических разложений. // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIX международной научной конференции, посвященной 100-летию физико-математического факультета СмолГУ. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2018. Вып. 19. С.213-220.

5. Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Развитие прямых методов аналитического интерполяционного моделирования распределений в стохастических системах.// Системы компьютерной математики и их приложения: Материалы XX международной научной конференции. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2019. Вып. 20.4.1. С. 256-260.
6. Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Метод линейной оптимальной обработки информации посредством вейвлет разложений. // Системы компьютерной математики и их приложения: Материалы XXI Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. – Вып. 21. С.213–221. [http://fizmat.smolgu.ru/images/stories/SKMP/skmp\\_2020.pdf](http://fizmat.smolgu.ru/images/stories/SKMP/skmp_2020.pdf).