

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Данилишин Артём Ростиславович

**Риск-нейтральная динамика ARIMA-GARCH моделей с
ошибками, распределенными по закону S_u Джонсона**

Специальность 1.2.2 – математическое моделирование, численные

методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор технических наук

Голембиовский Дмитрий Юрьевич

Москва - 2022

Содержание

Введение	4
ГЛАВА 1 Расширенный принцип Гирсанова и его применение к ARIMA-GARCH моделям.....	11
1.1 Расширенный принцип Гирсанова.....	11
1.2 ARIMA(p,d,q)-GARCH(P,Q) модели временных рядов	17
1.3 Применение расширенного принципа Гирсанова к ARIMA(p,d,q)-GARCH(P,Q) модели временных рядов	21
ГЛАВА 2 Модификация расширенного принципа Гирсанова.....	25
2.1 Введение. Постановка задачи	25
2.2 Производящая функция моментов распределения <i>Si</i> Джонсона.....	25
2.3 Исследование возможности использования полученной производящей функции моментов к расширенному принципу Гирсанова	28
2.4 Модификация расширенного принципа Гирсанова. Риск нейтральная динамика для ARIMA-GARCH модели с ошибками, распределенными по закону <i>Si</i> Джонсона	31
2.5 Выводы.....	37
ГЛАВА 3 Риск нейтральная динамика портфеля активов	39
3.1 Введение. Постановка задачи	39
3.2 Метод главных компонент	40
3.3 Риск нейтральная динамика портфеля активов при использовании метода главных компонент	45
3.4 Алгоритм численного решения задачи генерации риск-нейтрального процесса изменения цены базового актива.....	48
3.5 Выводы	48
ГЛАВА 4 Численные эксперименты оценки справедливой стоимости опционов.....	50
4.1 Введение. Постановка задачи	50
4.2 Калибровка параметров ARIMA-GARCH моделей и статистические тесты	50
4.3 Спецификация моделей ARIMA-GARCH. Оценка стоимости опционов. Сравнение эффективности моделей.....	57
4.5 Выводы	97
ГЛАВА 5 Численные эксперименты оценки VaR портфеля опционов	98
5.1 Введение. Постановка задачи	99
5.2 Описание данных и методика расчета VaR, бэк-тестирование.....	99
5.3 Спецификация ARIMA-GARCH моделей главных компонент.....	102
5.4 Результаты бэк-тестирования.....	107
5.5 Описание программы “Калькулятор расчета стоимости и риск-метрик опционов на основе риск-нейтральной динамики базовых активов”	109
5.6 Выводы	110
Заключение	111
Список используемой литературы.....	114

Приложение А.....	119
Приложение Б.....	124

Введение

Актуальность работы

Задача моделирования динамики финансовых активов является одной из актуальных задач финансовой математики [1]. Данная задача возникает как при оценке справедливой стоимости производных финансовых инструментов [2-4], так и оценке ценовых рисков [5-7] (а также их хеджировании [8-10]. На данный момент существует множество моделей, решающих поставленную задачу, все они делятся на два подхода. Первый подход основан на использовании физической вероятностной меры, а второй – риск-нейтральной (равновесной) [11;12]. Проблема первого подхода заключается в том, что физическая вероятностная мера является ретроспективной, что затрудняет прогнозирование будущих цен финансовых активов. Поэтому все большую актуальность приобретает использование моделей на основе риск-нейтральной меры. Риск-нейтральная вероятностная мера – это такая мера, что стоимость финансового инструмента на текущий момент времени равна математическому ожиданию стоимости цены в будущем, дисконтированному к текущему моменту времени (по безрисковой ставке процента) [11].

Теория расчета премии опционов европейского типа на одномерном полном рынке включает огромное количество публикаций, среди которых в целях диссертации следует выделить работы Блэка Ф. и Шоулза М. [13], Харрисона Дж. и Крепса Д. [14], Кокса Дж., Росса Р., Рубинштейна М. [15], Ширяева А. Н., Кабанова Ю. М., Крамкова Д. О., Мельникова А. В. [16], Фельмера Г. и Шида А. [17], Волкова С. Н., Крамкова Д. О. [18]. В данных исследованиях доказывается, что в полных рынках риск-нейтральная (мартингальная) мера существует и она единственна, также приводится ее явный вид, что, в свою очередь, позволяет найти стоимость опциона и построить совершенный хеджирующий портфель.

Однако, в случае неполного рынка, риск-нейтральная мера не единственна. Существует несколько основных методов выбора риск-нейтральной меры, большинство из которых основаны на следующих принципах:

1. Максимум индивидуальной функции полезности инвестора [19;20];
2. Минимум энтропии мартингальной вероятностной меры [21];
3. Минимум затрат при несовершенном хеджировании портфеля инвестором [22].

В работе “Option pricing in incomplete markets” [19] выводится локальная риск-нейтральная мера, которая отвечает стратегии максимизации индивидуальной функции полезности инвестора, однако в работе рассматривается только случай нормального

распределения. В работе “A Discrete Time Equivalent Martingale Measure” [22] доказывается, что расширенный принцип Гирсанова отвечает единственной риск-нейтральной мере, которая получается (в результате несовершенного хеджирования) минимизацией условного математического ожидания квадрата затрат по физической мере

$$\min_{\eta_{t-1}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{c}_t^2(\tilde{S}_t) | \mathcal{F}_{t-1}],$$

где $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[* | \mathcal{F}_t]$ – условное математическое ожидание по мере \mathbb{P} относительно σ – алгебры \mathcal{F}_t , $\tilde{c}_t(\tilde{S}_t)$ – скорректированные на риск затраты хеджирования портфеля активов, \tilde{S}_t – приведенная стоимость базового актива S_t , η_{t-1} – количество базового актива S_t в момент времени $t - 1$.

Если функцию полезности представить в виде прибыли инвестора, то задача минимизации затрат будет соответствовать двойственной задаче, отвечающей максимуму функции полезности. Таким образом, инвестору будет невыгодно отклоняться от оптимальной стратегии, которой будет соответствовать единственная мера, а соответственно и премия опционного контракта.

В работе Ширяева А.Н. [16] также описывается случай неполного рынка, для которого характерно то, что стоимость портфеля может оказаться как выше, так и ниже функции обязательств инвестора. Оптимальной стратегией для инвестора будет та, которая соответствует минимальному отклонению стоимости портфеля $X_T^{\pi(X_0^{\pi})}$ от функции обязательств f_T ,

$$\min_{X_0^{\pi}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\left(\frac{f_T}{B_T} - X_T^{\pi(X_0^{\pi})} \right)^2 \right],$$

где X_t^{π} – капитал портфеля в момент времени t состоящего из η_t единиц базового актива S_t , B_T – стоимость безрискового актива в момент времени T . Данной стратегии соответствует значение начального капитала инвестора

$$X_0^{\pi} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f_T]}{(1+r)^T}.$$

Таким образом, премия опциона должна оцениваться как математическое ожидание функции обязательств по риск-нейтральной мере, дисконтированное по безрисковой ставке процента (r).

Объединяя результаты вышеупомянутых работ, можно заключить, что оптимальной, с точки зрения инвестора, будет являться мера, получаемая с помощью расширенного

принципа Гирсанова, и, в условиях неполного рынка, стоимости премий опционных контрактов будут оцениваться с помощью, данной риск-нейтральной меры. Однако, во всех работах, посвященных расширенному принципу Гирсанова [23], не рассматриваются случаи, когда производящая функция моментов для распределения не определена, что сильно ограничивает применение расширенного принципа Гирсанова для оценки премий опционов. Существуют работы [24] в которых используются подходы построения риск-нейтральной меры, включающие использование приближения производящей функции моментов (до 4-го порядка). Недостатком данных методов является их неточность, из-за чего требуется проводить дополнительные исследования оценки точности приближения функции степенным рядом (оценка остатка ряда) и устойчивости метода трансформации вероятностной меры.

В работе, посвященной расширенному принципу Гирсанова [22], рассматривается случай многомерного случайного процесса, что позволяет находить риск-нейтральную меру для моделирования динамики базовых активов. На практике оценивание параметров таких моделей как ARIMA-GARCH для многомерного случайного процесса сопряжено с большими вычислительными сложностями. Это связано с тем, что приходится решать оптимизационную задачу для параметров всех уравнений моделей базовых активов, а также моделей их ковариаций. Данная проблема решается с помощью применения одного из методов сокращения размерности – метода главных компонент, либо метода независимых компонент [25].

Метод главных компонент позволяют выражать каждый случайный процесс через линейную комбинацию независимых компонент. В силу того, что в новой системе координат компоненты получаются статистически независимыми, оценку параметров можно проводить отдельно для каждой компоненты. В результате возникает вопрос о возможности построения риск-нейтральной динамики для базовых активов через линейную комбинацию динамик главных компонент. При выводе риск-нейтральной динамики в случае одного актива, используют понятие безрисковой процентной ставки базового актива, которая лежит в основе безарбитражности, однако главные компоненты не имеют экономического смысла, поэтому для них не существует безрисковая ставка. На данный момент, в современной литературе не представлены методы объединяющие методы декомпозиции случайных процессов и нахождение риск-нейтральных мер.

Целью диссертационного исследования является построение риск-нейтральной меры для ARIMA-GARCH случайного процесса с ошибками, имеющими распределение S_u Джонсона, и использование этой меры для расчета стоимости опционов. При помощи

метода главных компонент данный результат обобщается на случай многомерного распределения базовых активов.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Найти производящую функцию моментов для распределения S_u Джонсона в виде степенного ряда, провести анализ данного ряда на сходимость.
2. Модифицировать расширенный принцип Гирсанова для получения моментов случайного процесса относительно риск-нейтральной меры.
3. Найти коэффициенты модели ARIMA-GARCH, обеспечивающие риск-нейтральную динамику случайного процесса (одномерный случай).
4. Применить метод главных компонент и модификацию расширенного принципа Гирсанова для нахождения коэффициентов моделей ARIMA-GARCH, обеспечивающих риск-нейтральную динамику случайного многомерного процесса.
5. Разработать пакет компьютерных программ для численной оценки справедливой стоимости опционов относительно физической и риск-нейтральной меры.
6. Разработать пакет компьютерных программ для численной оценки VaR (value at risk, стоимостная мера риска) портфеля опционов относительно физической и риск-нейтральной меры.
7. Провести численные эксперименты для оценки эффективности полученной теории.

Методы исследования

Основные результаты получены методами теории рядов, теории меры, теории оптимизации, теории вероятностей, эконометрики.

Научная новизна:

Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Осуществлена модификация расширенного принципа Гирсанова, в которой вместо логарифмических приращений рассматриваются относительные приращения случайного процесса.
2. На основе модификации расширенного принципа Гирсанова получена новая риск-нейтральная вероятностная мера позволяющая совершать переход от физической меры случайных процессов к их риск-нейтральным аналогам. Данная мера обобщает результаты расширенного принципа Гирсанова на случай распределений, не имеющих производящей функции моментов.

3. Показано, что полученная вероятностная мера на основе модификации расширенного принципа Гирсанова дает возможность оценивать моменты любого порядка относительно риск-нейтральной меры для случайных процессов, функции плотности распределения которых не имеют производящей функции моментов.
4. На основе модификации расширенного принципа Гирсанова получена аналитическая форма ARIMA-GARCH модели случайного процесса, с ошибками, распределенными по закону S_u Джонсона, обеспечивающая риск-нейтральную динамику процесса.
5. На основе модификации расширенного принципа Гирсанова и метода главных компонент получен метод, позволяющий моделировать совместную риск-нейтральную динамику случайных процессов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Модификация расширенного принципа Гирсанова. Риск-нейтральная мера, полученная на основе модификации расширенного принципа Гирсанова. Аналитический вид модели ARIMA-GARCH на основе риск-нейтральной меры для одномерного и многомерного случайного процесса. Результаты опубликованы в [26].
2. Модификация численного метода Монте-Карло (на основе метода главных компонент) для поиска цен/мер риска на основе риск-нейтральной динамики базовых активов. Результаты опубликованы в [28].
3. Программный комплекс “Калькулятор расчета стоимости и риск-метрик опционов на основе риск-нейтральной динамики базовых активов” для численного решения задачи поиска цен/ мер риска опционных контрактов на основе риск-нейтральных цен базовых активов. Результаты экспериментов сравнения оценки премий опционов с рыночными ценами. Результаты экспериментов бэк-тестирования оценки однодневного VaR портфеля опционных контрактов Результаты опубликованы в [27; 28].

Эти положения соответствуют областям исследования 2,5,6 из паспорта специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Интерпретация и практическая значимость полученных результатов:

- На основании работ других авторов, посвященных риск-нейтральному моделированию цен базовых активов и оценке стоимости европейских опционов, сделан вывод о применимости полученной модификации расширенного принципа Гирсанова для моделирования цен базовых активов с распределениями, не

имеющими производящей функции моментов. Полученные ARIMA-GARCH модели на основе риск-нейтральной меры позволяют более точно производить оценку справедливой стоимости производных финансовых инструментов;

- Результаты, полученные для вектора случайных величин базовых активов, позволяют проводить риск-нейтральное моделирование портфеля базовых активов на основе метода главных компонент, что с одной стороны позволяет сократить размерность исходной задачи, с другой – учитывать линейные связи базовых активов друг с другом. Все это дает возможность оценивать меры риска (VaR (value at risk, стоимостная мера риска), CVaR (expected shortfall, ожидаемые потери)), необходимые для современного риск-менеджмента при принятии управленческих решений.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

- Научном семинаре кафедры Исследования операций ВМК МГУ.
- Научном семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ.
- Ломоносов-2020 секция «Вычислительная математика и кибернетика».
- Научная конференция «Тихоновские чтения 2020».
- Ломоносовские чтения 2020. «Секция вычислительной математики и кибернетики».

Личный вклад. Личный вклад автора состоит в получении производящей функции моментов для распределения S_u Джонсона в виде степенного ряда, анализе его на сходимость, изменении предположений расширенного принципа Гирсанова, доказательстве основных теорем расширенного принципа Гирсанова при новых предположениях, получении случайного процесса ARIMA-GARCH на основе риск-нейтральной меры. Также автором рассматривается случай совместного моделирования портфеля базовых активов, в результате чего строится алгоритм получения коэффициентов ARIMA-GARCH системы базовых активов на основе риск-нейтральной вероятностной меры. В Главе 4 и Приложении А представлены программные реализации, описанных в Главе 2 моделей ARIMA-GARCH случайных процессов на основе риск-нейтральной меры. Программный код позволяет оценивать параметры моделей и проводить оценку справедливой стоимости опционных контрактов европейского типа. В Главе 5 и Приложении Б представлены программные реализации, описанного в Главе 3 метода моделирования риск-нейтральной динамики портфеля базовых активов. Программный код позволяет оценивать меру риска VaR (однодневный) и проводить процедуру бэк-тестирования с целью валидации построенной модели. Постановка задач и проведение

научных исследований в рамках первых трех глав осуществлялись под руководством д.т.н. Голембиовского Д.Ю. Все основные результаты Глав 2-4 опубликованы с статьях [26;27] в соавторстве с проф. Голембиовским Д.Ю. Результаты Глав 3, 5 опубликованы в статье [28] без соавторства. В работах, опубликованных с соавтором, вклад диссертанта был определяющим.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях ([26-32]). Первые две статьи опубликованы в журнале, входящем в список SCOPUS, третья статья - в журнале, входящем в список ВАК. Получено Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и двух приложений. Полный объем диссертации составляет 126 страниц с 54 рисунками и 38 таблицами. Список литературы содержит 91 наименование.

ГЛАВА 1 Расширенный принцип Гирсанова и его применение к ARIMA-GARCH моделям

Расширенный принцип Гирсанова является одним из основных методов получения риск-нейтральной меры из физической. Данный подход исходит из предположений, что инвестор, в ходе динамического хеджирования собственного портфеля, минимизирует математическое ожидание квадрата затрат на его хеджирование. Таким образом, данную задачу, с экономической точки зрения, можно рассматривать как двойственную задачу максимизации индивидуальной функции полезности. В ходе динамического хеджирования, с учетом минимизации затрат, естественным способом получается мера, которая обладает свойством риск-нейтральности. Согласно доказанной в работе [22] теореме, данная мера единственна, что позволяет говорить об однозначности определения справедливой стоимости опциона для неполного рынка в условиях расширенного принципа Гирсанова.

1.1 Расширенный принцип Гирсанова

В рамках модели расширенного принципа Гирсанова, рассматриваются логарифм отношения цен базового актива во времени (логарифмическая доходность)

$$Y_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right), \quad (1.1)$$

где S_t – стоимость базового актива в момент времени t , выраженная в единицах валюты рассматриваемого финансового инструмента (опциона). При переходе к дисконтированным ценам базового актива ($\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$), где r – безрисковая процентная ставка по базовому активу, условие риск-нейтральности примет следующий вид:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{S}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \tilde{S}_{t-1}, \quad (1.2)$$

где $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$ – математическое ожидание относительно меры \mathbb{P} , \mathcal{F}_{t-1} – фильтрация относительно меры \mathbb{P} .

Динамика дисконтированных цен базового актива описывается следующим образом:

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 A_t M_t, \quad A_t = \prod_{k=1}^t \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right], \quad M_t = \frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_0 A_t}, \quad (1.3)$$

где процесс M_t является мартингалом:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_0 A_t} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] = \frac{\tilde{S}_{t-1} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} \mid \mathcal{F}_{t-1} \right]}{\tilde{S}_0 A_t} = \frac{\tilde{S}_{t-1} \frac{A_t}{A_{t-1}}}{\tilde{S}_0 A_t} = \frac{\tilde{S}_{t-1}}{\tilde{S}_0 A_{t-1}} = M_{t-1}.$$

Поделив левую и правую части выражения (1.3) на \tilde{S}_{t-1} , получим

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \frac{M_t}{M_{t-1}} = \tilde{S}_{t-1} e^{\ln \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \right)} W_t = \tilde{S}_{t-1} e^{v_t} W_t, \text{ где } W_t = \frac{M_t}{M_{t-1}}.$$

Учитывая, что $\ln \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \right) = -r + \ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t} | \mathcal{F}_{t-1}])$ получим $\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} = \frac{S_t}{S_{t-1}} e^{-r} \Rightarrow \ln \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \right) = -r + \ln \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \right) = -r + \ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t} | \mathcal{F}_{t-1}])$. В итоге окончательный вид динамики базового актива примет следующий вид:

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1} e^{-r + \ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t} | \mathcal{F}_{t-1}])} W_t = \tilde{S}_{t-1} e^{v_t} W_t. \quad (1.4)$$

Как видно из выражения (1.4), условие (1.2) выполняется когда $-r + \ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t} | \mathcal{F}_{t-1}]) = 0$, то есть условие риск-нейтральности можно записать следующим образом:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t} | \mathcal{F}_{t-1}] = e^r. \quad (1.5)$$

Расширенный принцип Гирсанова опирается на понятия эквивалентности мер и производной Радона-Никодима [33,34]. Напомним, что вероятностная мера \mathbb{Q} называется эквивалентной мартингальной мерой (equivalent martingale measure EMM) относительно меры \mathbb{P} (обозначение $\mathbb{Q} \approx \mathbb{P}$), если $\forall B \in \mathcal{F}: \mathbb{Q}(B) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(B) = 0$. Процесс \tilde{S}_t является мартингальным относительно меры \mathbb{Q} , если он согласован, интегрируем и $(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \tilde{S}_{t-1}, (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_t | \mathcal{F}_k] = \tilde{S}_k, k \leq t), t = 0, \dots, T)$. Понятие производной Радона-Никодима вытекает непосредственно из понятия об эквивалентности мер. Пусть \mathbb{Q} и \mathbb{P} две меры на (Ω, \mathcal{F}) . Если $\mathbb{Q} \approx \mathbb{P}$, тогда существует неотрицательная борелевская функция f на Ω , такая, что $\mathbb{Q}(B) = \int f d\mathbb{P}, B \in \mathcal{F}$. Более того, f единственна, т.к. если $\mathbb{Q}(B) = \int g d\mathbb{P}, \forall B \in \mathcal{F}$, то $f = g$. Функция $f = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ называется производной Радона-Никодима. В расширенном принципе Гирсанова утверждается, что случайный процесс Z_t , соответствующий производной Радона-Никодима $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_{t-1}}$,

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_{t-1}} = Z_t = \prod_{k=1}^t \frac{g_{W_k}^{\mathbb{P}} \left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}} \right) e^{v_k}}{g_{W_k}^{\mathbb{P}} \left(e^{-v_k} \frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}} \right)}, \quad (1.6)$$

где $g_{W_k}^{\mathbb{P}}$ – условная (относительно \mathcal{F}_{k-1}) плотность распределения величины W_k по мере \mathbb{P} , обеспечивает риск-нейтральную динамику для \tilde{S}_t в новой мере \mathbb{Q} . Таким образом, процесс \tilde{S}_t в новой мере \mathbb{Q} относительно старой \mathbb{P} должен являться мартингалом. Или, беря во внимание, что процесс M_t является мартингалом

относительно меры \mathbb{P} , закон распределения случайного процесса \tilde{S}_t новой мере \mathbb{Q} должен совпадать с законом распределения M_t по мере \mathbb{P} : $\mathcal{L}^{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathcal{L}^{\mathbb{P}}(M_t | \mathcal{F}_{t-1})$.

Для случайного процесса Y_k с условной плотностью распределения $f_{Y_k}^{\mathbb{P}}$, производная Радона-Никодима примет следующий вид [23]

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_{t-1}} = Z_t = \prod_{k=1}^t \frac{f_{Y_k}^{\mathbb{P}}(Y_k - r + \ln(M_{Y_k|\mathcal{F}_{k-1}}(1)))}{f_{Y_k}^{\mathbb{P}}(Y_k)}, \quad (1.7)$$

где $M_{Y_k|\mathcal{F}_{k-1}}(1)$ – значение условной производящей функции моментов в точке 1. Для перехода к распределению по мере \mathbb{Q} используется производящая функция моментов

$$M_{Y_t}^{\mathbb{Q}}(c) = e^{-c(-r + \ln(M_{Y_k|\mathcal{F}_{t-1}}(1)))} M_{Y_t}^{\mathbb{P}}(c). \quad (1.8)$$

В условиях неполного рынка цена опциона определяется исходя из соображений потенциального выигрыша экономического агента. Одним из способов подобного определения является максимизация индивидуальной функции полезности. Данный способ описан в статье “The GARCH option pricing model” [35], где выведена локальная риск-нейтральная мера. Данная метрика соответствует максимальному значению функции полезности экономического агента. Другой способ поиска цены финансового инструмента – минимизация издержек [22]. Рассмотрим портфель стоимости V_t , состоящий из η_t единиц базового актива \tilde{S}_t , которые агент динамически меняет каждый день, затрачивая на это капитал в размере $c_t(\tilde{S}_t)$,

$$V_t = \eta_t \tilde{S}_t = \eta_{t-1} \tilde{S}_t + c_t(\tilde{S}_t) \Rightarrow c_t(\tilde{S}_t) = \eta_t \tilde{S}_t - \eta_{t-1} \tilde{S}_t. \quad (1.9)$$

Изменение стоимости портфеля за один промежуток времени составит

$$\begin{aligned} V_t - V_{t-1} &= \eta_{t-1} \tilde{S}_t + c_t(\tilde{S}_t) - \eta_{t-2} \tilde{S}_{t-1} - c_{t-1}(\tilde{S}_{t-1}) \\ &= \eta_{t-1} \tilde{S}_t + c_t(\tilde{S}_t) - \eta_{t-2} \tilde{S}_{t-1} - \eta_{t-1} \tilde{S}_{t-1} + \eta_{t-2} \tilde{S}_{t-1} \\ &= \eta_{t-1} (\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}) + c_t(\tilde{S}_t). \end{aligned}$$

То есть изменение стоимости портфеля состоит из прироста капитала и капитальных затрат. Перепишем выражение изменения стоимости портфеля в следующем виде:

$$V_t = V_{t-1} + \eta_{t-1} (\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}) + c_t(\tilde{S}_t).$$

Можно сделать вывод, что если процессы V_t и \tilde{S}_t в новой мере \mathbb{Q} являются мартингалами, то средние затраты по новой мере должны быть нулевые, то есть

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[c_t(\tilde{S}_t) | \mathcal{F}_{t-1}] = 0.$$

Расширенный принцип Гирсанова определяет стоимость хеджа с использованием скорректированных на риск цен активов $\left(\tilde{S}_t e^{\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])-r}\right)$

$$\tilde{c}_t(\tilde{S}_t) = V_t \left(\tilde{S}_t e^{\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])-r} \right) - \eta_{t-1} \tilde{S}_t e^{\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])-r} \Rightarrow \tilde{c}_t \left(\tilde{S}_t e^{-\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])+r} \right) = c_t(\tilde{S}_t).$$

Согласно расширенному принципу Гирсанова, экономический агент действует так, чтобы минимизировать квадрат условного математического ожидания, скорректированной на риск стоимости хеджирующей позиции. В соответствии с этим утверждением формулируется утверждение об эквивалентности задачи минимизации стоимости хеджирующей позиции и меры расширенного принципа Гирсанова.

Утверждение 1.

Стратегия хеджирования $\pi = (\eta_t, t = 1, \dots, T)$, реализующая

$$\min_{\eta_{t-1}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{c}_t^2(\tilde{S}_t)|\mathcal{F}_{t-1}], \forall t = 1, \dots, T \quad (1.10)$$

соответствует выбору замены меры с плотностью

$$\prod_{k=1}^T \frac{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right) e^{\nu_k}}{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left(e^{-\nu_k} \frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)}. \quad (1.11)$$

□

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{c}_t^2(\tilde{S}_t)}{\partial \eta_{t-1}} &= -2\tilde{c}_t(\tilde{S}_t)\tilde{S}_t e^{\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])-r} = 0 \Rightarrow \min_{\eta_{t-1}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{c}_t^2(\tilde{S}_t)|\mathcal{F}_{t-1}] = \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\tilde{c}_t(\tilde{S}_t)\tilde{S}_t e^{\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])-r} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = 0. \end{aligned}$$

Пусть $h_t(\tilde{S}_t)$ – условная плотность распределения \tilde{S}_t по фильтрации \mathcal{F}_{t-1} , тогда

$$\int \tilde{c}_t(\tilde{S}_t)\tilde{S}_t e^{\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])-r} h_t(\tilde{S}_t) d\tilde{S}_t = 0.$$

Так как $\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1} e^{\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])-r} W_t = \tilde{S}_{t-1} e^{\nu_t} W_t$, то

$$\begin{aligned}
h_t(\tilde{S}_t) &= P(\tilde{S}_t < a)'_{a=\tilde{S}_t} = P\left(\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} e^{-\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])+r} < \frac{a}{\tilde{S}_{t-1}} e^{-\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])+r}\right)'_{a=\tilde{S}_t} = \\
&= \frac{g_{W_t}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} e^{-\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])+r}\right) e^{-\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])+r}}{\tilde{S}_{t-1}} = \frac{g_{W_t}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} e^{-v_t}\right) e^{-v_t}}{\tilde{S}_{t-1}}, \\
\int \tilde{c}_t(\tilde{S}_t) \tilde{S}_t e^{\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])-r} h_t(\tilde{S}_t) d\tilde{S}_t &= \left[U_t = \tilde{S}_t e^{\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])-r}\right] = \\
&= \int \frac{\tilde{c}_t\left(u_t e^{r-\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])}\right) u_t g_{W_t}^{\mathbb{P}}\left(\frac{u_t}{\tilde{S}_{t-1}}\right)}{\tilde{S}_{t-1}} du_t = \left[U_t = \tilde{S}_t\right] = \\
&= \int \frac{\tilde{c}_t\left(\tilde{S}_t e^{r-\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])}\right) \tilde{S}_t g_{W_t}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}}\right)}{\tilde{S}_{t-1}} d\tilde{S}_t = \\
&= \left[\tilde{c}_t\left(\tilde{S}_t e^{r-\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t}|\mathcal{F}_{t-1}])}\right) = c_t(\tilde{S}_t)\right] = \int \frac{c_t(\tilde{S}_t) \tilde{S}_t g_{W_t}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}}\right)}{\tilde{S}_{t-1}} d\tilde{S}_t = \\
&= \int c_t(\tilde{S}_t) \tilde{S}_t \frac{g_{W_t}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}}\right)}{\tilde{S}_{t-1} h_t(\tilde{S}_t)} h_t(\tilde{S}_t) d\tilde{S}_t = 0.
\end{aligned}$$

В результате получаем, что минимум квадрата условного математического ожидания, скорректированной на риск, стоимости хеджирующей позиции по мере \mathbb{P} , равен минимуму квадрата условного ожидания стоимости хеджирующей позиции по мере \mathbb{Q} , где

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{\frac{g_{W_t}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}}\right)}{\tilde{S}_{t-1} h_t(\tilde{S}_t)} h_t(\tilde{S}_t) d\tilde{S}_t}{h_t(\tilde{S}_t) d\tilde{S}_t} = \frac{g_{W_t}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}}\right)}{\tilde{S}_{t-1} h_t(\tilde{S}_t)}.$$

Подставляя в полученное выражение $h_t(\tilde{S}_t)$ и беря во внимание, что условие $\min_{\eta_{t-1}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{c}_t^2(\tilde{S}_t) | G_{t-1}]$ должно выполняться для $\forall t = 1, \dots, T$, получим

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \prod_{k=1}^T \frac{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right) e^{v_k}}{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left(e^{-v_k} \frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)}.$$

■

Утверждение 2.

Замена меры $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ Утверждения 1 является единственной заменой меры, соответствующей хеджирующей стратегии, при которой инвестор следует условию $\min_{\eta_{t-1}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{c}_t^2(\tilde{S}_t) | G_{t-1}]$.

Доказательство можно найти в [22]. Таким образом, найденная мера, соответствует случаю, когда инвестор минимизирует свои затраты на динамическое хеджирование позиции активов. Это условие соответствует единственной мере, найденной согласно расширенному принципу Гирсанова.

Для неполного рынка характерны случаи, когда стоимость портфеля может оказаться меньше функции обязательств и инвестор не сможет погасить их, либо стоимость портфеля может оказаться слишком высокой по сравнению с величиной обязательств, что приведет к лишним затратам на начальный капитал. Таким образом предлагается воспользоваться методом хеджирования в среднеквадратическом, то есть стратегией π^* , минимизирующей среднеквадратичную ошибку: [36]

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{f_T}{B_T} - V_T^{\pi^*} \right)^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[\left(\frac{f_T}{B_T} - V_T^{\pi} \right)^2 \right]. \quad (1.12)$$

Пусть $G_T^{\pi} = V_T^{\pi} - V_0^{\pi}$, тогда

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{f_T}{B_T} - V_0^{\pi^*} - G_T^{\pi^*} \right)^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[\left(\frac{f_T}{B_T} - V_0^{\pi} - G_T^{\pi} \right)^2 \right].$$

Введем также $\hat{h} = \frac{f_T}{B_T} - \frac{x}{B_0}$, где $x = V_0^{\pi}$, тогда

$$\mathbb{E} \left[(\hat{h} - G_T^{\pi^*})^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[(\hat{h} - G_T^{\pi})^2 \right],$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T^{\pi}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T V_T^{\pi}] = V_0^{\pi} \Rightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G_T^{\pi^*}] = 0 = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T G_T^{\pi^*}] \Rightarrow Z_T \perp G_T^{\pi^*}.$$

$$G_T^{\pi^*} = \hat{h} - Z_T \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T \hat{h}]}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T^2]} \quad (1.13)$$

Так как вектор Z_T перпендикулярен $G_T^{\pi^*}$, то $G_T^{\pi^*}$ удовлетворяющий выражению (1.13), будет являться ближайшим вектором к \hat{h} .

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} R(x, \pi) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\left(\frac{f_T}{B_T} - V_T^{\pi(x)} \right)^2 \right] \Rightarrow R(x^*, \pi^*) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\left(\frac{f_T}{B_T} - V_T^{\pi^*(x)} \right)^2 \right] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\left(\frac{f_T}{B_T} - V_T^{\pi(x)} \right)^2 \right] \\ &= R(x, \pi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r(x) = R(x, \pi^*(x)) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\left(\frac{f_T}{B_T} - V_T^{\pi^*(x)} \right)^2 \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\left(\hat{h} - G_T^{\pi^*(x)} \right)^2 \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\left(-Z_T \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T \hat{h}]}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T^2]} \right)^2 \right] \\
&= \frac{(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T \hat{h}])^2}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T^2]} = \left[\hat{h} = \frac{f_T}{B_T} - \frac{x}{B_0} \right] = \frac{\left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{f_T}{B_T} Z_T \right] - \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{x}{B_0} Z_T \right] \right)^2}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T^2]} \\
&= \frac{\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{f_T}{B_T} \right] - \frac{x}{B_0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[1] \right)^2}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T^2]} = \frac{\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{f_T}{B_T} \right] - \frac{x}{B_0} \right)^2}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T^2]}.
\end{aligned}$$

Минимум функции $r(x)$, очевидно, будет достигаться в точке

$$x^* = B_0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{f_T}{B_T} \right] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f_T]}{(1+r)^T}.$$

Таким образом, начальный капитал V_0^{π} обеспечивает оптимальное соотношение между начальными затратами инвестора и возможностями обеспечения его обязательств. Использование меры, полученной на основе расширенного принципа Гирсанова, позволяет оптимизировать затраты с точки зрения начальных вложений и минимальной стоимости хеджирующей позиции. Другими словами, портфель инвестора аппроксимирует самофинансируемый портфель (такой инвестиционный портфель, изменения цены которого определяются только начальным вложением V_0^{π} и колебаниями курса (без каких-либо дополнительных вложений) [36].

В качестве метода оценки математического ожидания $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f_T]$ в работе используется метод Монте-Карло [37], суть которого заключается в многократном моделировании случайного процесса при помощи генератора случайных величин с последующим использованием полученной статистики для вычисления оценки математического ожидания.

1.2 ARIMA(p,d,q)-GARCH(P,Q) модели временных рядов

В соответствии с разделом 1.1, в качестве объекта моделирования выступает логарифмическая доходность $Y_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right)$. Это удобно в том плане, что разные цены имеют разные шкалы, в то время как доходность не зависит от масштаба, что значительно облегчает анализ сравнения активов. Временной ряд Y_t рассматривается как дискретный случайный процесс $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$ [38;39]. Как правило, временной ряд разбивается на две составляющие [40;41]

$$Y_t = m_t + \epsilon_t, \quad (1.14)$$

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t,$$

где m_t – предсказуемый процесс, ϵ_t – недетерминированный процесс, описываемый белым шумом ε_t . Рассмотрим фильтрацию, ассоциированную с моделью (1.14), \mathcal{F}_t – последовательность возрастающих σ – алгебр \mathcal{F} , представляющая всю информацию рынка к моменту времени t . Тогда m_t и h_t определяются как условные математическое ожидание и дисперсия случайного процесса Y_t ,

$$m_t = \mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_{t-1}], \quad (1.15)$$

$$h_t = \text{Var}[Y_t | \mathcal{F}_{t-1}]. \quad (1.16)$$

Модель $ARIMA(p, d, q) - GARCH(P, Q)$ является комбинацией моделей $ARIMA(p, d, q)$ – (autoregressive integrated moving average) интегрированная модель авторегрессии и скользящего среднего) [42-44] и $GARCH(P, Q)$ – обобщенной авторегрессионной условной гетероскедастичности [41]. Рассмотрим отдельно каждую из них.

ARIMA модель находит свое применение в математической статистике и эконометрике благодаря своей простоте интерпретации и обширному кругу описываемых процессов. Модель представляет собой временной ряд в виде суммы предсказуемой компоненты, условного среднего с учетом накопленной информации к предыдущему моменту времени и непрогнозируемой ошибки. Модель $ARIMA(p, d, q)$ является обобщением модели $ARMA(p, q)$, которая имеет вид

$$Y_t = m_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim iid(0, h), \quad h > 0,$$

$$m_t = \mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_{t-1}] =$$

$$= \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \theta_1 \epsilon_{t-1} \quad (1.17)$$

$$+ \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q},$$

где временной ряд Y_t – стационарный процесс в широком смысле [45], случайные ошибки ϵ_t являются независимыми белыми шумами [46;47] (с одинаковыми законами распределения, нулевыми средними и дисперсиями h), $\phi_k, k = 0, \dots, p$ и $\theta_l, l = 0, \dots, q$ – параметры модели, принадлежащие области действительных чисел, которые характеризуют вклад предшествующих моментов времени в значение Y_t . Параметры p, q характеризуют порядок модели, то есть количество предшествующих моментов времени, которые влияют на текущее значение Y_t . Зачастую, на практике, данные значения выбирают не больше 3.

Стационарность в широком смысле предполагает, что среднее, дисперсия и ковариация Y_t не зависят от момента времени t , то есть

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mu < \infty, \quad \text{Var}[Y_t] = \gamma_0, \quad \text{Cov}[Y_t, Y_{t-k}] = \gamma_k. \quad (1.18)$$

С помощью оператора запаздывания L можно привести ряд $Y_t = c + \sum_{i=1}^p \alpha_i Y_{t-i} + \varepsilon_t$ к виду $(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i L^i)Y_t = c + \varepsilon_t \Rightarrow Y_t = (1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i L^i)^{-1}(c + \varepsilon_t) = (1 - \lambda_1 L)^{-1} \times \dots \times (1 - \lambda_p L)^{-1}(c + \varepsilon_t)$. Из данного выражения видно, что для выполнения условия (1.18), необходимо чтобы существовали обратные множители $(1 - \lambda_i L)^{-1} = [\lambda_i L < 1] = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_i L)^k$, для этого необходимо, чтобы корни $\mu_i = \frac{1}{\lambda_i}$ уравнения $1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i L^i$ были по модулю больше 1, то есть лежали вне единичного круга. В случае если имеется k единичных корней по модулю равных единице, то $Y_t(1 - L)^k \prod_{i=1}^{p-k} (1 - \lambda_i L) = c + \varepsilon_t$. Так как $Y_t(1 - L)^k = Y_t \sum_{i=0}^k C_k^i L^i = \Delta^k Y_t$, где Δ^k – разностный оператор порядка k , определяемый рекуррентно по формулам $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}, \dots, \Delta^k Y_t = \Delta^{k-1} Y_t - \Delta^{k-1} Y_{t-1}$ и $|\lambda_i| < 1, \forall i = 1, \dots, p - k$, полученный случайный процесс $\Delta^k Y_t$ будет являться стационарным. Модель $ARIMA(p, d, q)$ получается из модели $ARMA(p, q)$ если в качестве Y_t взять разность Y_t порядка d [48],

$$ARIMA(p, d, q)[Y_t] = ARMA(p, q)[\Delta^d Y_t]. \quad (1.19)$$

Обобщая результаты, можно сказать, что любой нестационарный ряд можно привести к стационарному последовательно производя дифференцирование [48] (беря разности), которое последовательно убирает все единичные корни характеристического многочлена.

$GARCH(P, Q)$ модель применяется в эконометрике для описания случайных процессов, у которых условная дисперсия ряда зависит от прошлых значений дисперсий и значений самого ряда. Данные модели предназначены для описания эффекта кластеризации волатильности на финансовых рынках (смена периодов высокой волатильности периодами низкой волатильности, при условии, что средняя (долгосрочная) волатильность стабильна) [40;41]. Модель GARCH с ненулевым средним значением случайного процесса Y_t записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} Y_t &= c + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^P \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, P, \beta_j > 0, j = 1, \dots, Q, c = \text{const}, \varepsilon_t \sim F(0,1)$. Так как $\mathbb{E}[Y_t] = c$, дисперсия равна $\text{Var}[Y_t] = \mathbb{E}[Y_t - \mathbb{E}[Y_t]]^2 = \mathbb{E}[\sigma_t^2 \varepsilon_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] = \mathbb{E}[\alpha_0 + \sum_{i=1}^P \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^Q \beta_j \sigma_{t-j}^2] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^P \alpha_i \mathbb{E}[\sigma_{t-i}^2] \mathbb{E}[\varepsilon_{t-i}^2] + \sum_{j=1}^Q \beta_j \mathbb{E}[\sigma_{t-j}^2]$, предположим, что случайный процесс Y_t стационарен, тогда $\text{Var}[Y_i] = \text{Var}[Y_j], \forall i, j \Rightarrow \mathbb{E}[\sigma_{t-i}^2] = \mathbb{E}[\sigma_{t-j}^2], \forall i, j \Rightarrow$

$Var[Y_t] = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^P \alpha_i - \sum_{j=1}^Q \beta_j}$. Из последнего выражения вытекает необходимое условие стационарности процесса: $\sum_{i=1}^P \alpha_i + \sum_{j=1}^Q \beta_j < 1$. Таким образом, GARCH модель имеет характеристику волатильности, именуемую как возвратность к среднему значению [48].

Следующим характеристикой GARCH процесса является показатель эксцесса (острота пика распределения случайной величины): $k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}[Y_t])^4]}{(\mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}[Y_t])^2])^2}$. Для наглядности рассмотрим модель $GARCH(1,1)$ со средней $c = 0$. Как известно, для нормального распределения (в данном случае – Гауссова) $\mathbb{E}[\varepsilon_t^4] = 3$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Y_t - \mathbb{E}[Y_t])^4] &= \mathbb{E}[(Y_t)^4] = \mathbb{E}[(\sigma_t \varepsilon_t)^4] = \mathbb{E}[\sigma_t^4] \mathbb{E}[\varepsilon_t^4] = 3\mathbb{E}[\sigma_t^4] = \left[\mathbb{E}[\sigma_t^4] = \mathbb{E}[(\alpha_0 + \right. \\ &\left. + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2)^2] = \mathbb{E}[\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 Y_{t-1}^2 + 2\alpha_0 \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + 2\alpha_1 \beta_1 Y_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1^2 Y_{t-1}^4 + \right. \\ &\left. + \beta_1^2 \sigma_{t-1}^4] = \alpha_0^2 + 2\alpha_0 \mathbb{E}[Y_{t-1}^2](\alpha_1 + \beta_1) + 2\alpha_1 \beta_1 \mathbb{E}[\sigma_t^4] + 3\alpha_1^2 \mathbb{E}[\sigma_t^4] + \beta_1^2 \mathbb{E}[\sigma_t^4] \Rightarrow \mathbb{E}[\sigma_t^4] = \right. \\ &\left. \frac{\alpha_0^2 + 2\alpha_0 \mathbb{E}[Y_{t-1}^2](\alpha_1 + \beta_1)}{1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1 - 3\alpha_1^2} \right] = 3\alpha_0^2 \left(1 + 2 \frac{\alpha_1 + \beta_1}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \right) (1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1 - 3\alpha_1^2)^{-1} = 3\alpha_0^2 (1 + \alpha_1 + \right. \\ &\left. + \beta_1) ((1 - \alpha_1 - \beta_1)(1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1 - 3\alpha_1^2))^{-1} \Rightarrow k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 + 3 = \right. \\ &\left. \frac{3\alpha_0^2 (1 + \alpha_1 + \beta_1) (1 - \alpha_1 - \beta_1)}{1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1 - 3\alpha_1^2} = 3 + \frac{6\alpha_1^2}{1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1 - 3\alpha_1^2}. \right. \end{aligned}$$

При выводе формулы для расчета эксцесса, имели место два знаменателя, которые не должны обращаться в нуль: $1 - \alpha_1 - \beta_1$ и $1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1 - 3\alpha_1^2$. Первое выполняется в силу необходимого условия стационарности временного ряда Y_t , второе условие, для того, чтобы показатель эксцесса был больше чем эксцесс нормального распределения ($k_{norm} = 3$), объединяют с условием неотрицательности $1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1 \beta_1 - 3\alpha_1^2$, но так как $\beta_1^2 + 2\alpha_1 \beta_1 + 3\alpha_1^2 = (\alpha_1 + \beta_1)^2 + 2\alpha_1^2 < 1 \Rightarrow (\alpha_1 + \beta_1)^2 < 1 \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 < 1$, условие $\beta_1^2 + 2\alpha_1 \beta_1 + 3\alpha_1^2 < 1$ обеспечивает стационарность случайного процесса Y_t и конечность показателя эксцесса.

Модель $ARIMA(p, d, q) - GARCH(P, Q)$ является комбинацией вышеописанных моделей $ARIMA(p, d, q)$ и $GARCH(P, Q)$. В общем виде модель ARIMA-GARCH модель $ARIMA(p, d, q) - GARCH(P, Q)$ имеет следующий вид

$$\begin{cases} \Delta^d Y_t = m_t + \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0,1); \\ m_t = \mathbb{E}[\Delta^d Y_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \phi_0 + \phi_1 \Delta^d Y_{t-1} + \dots + \phi_p \Delta^d Y_{t-p} + \theta_1 \sqrt{h_{t-1}} \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \sqrt{h_{t-q}} \varepsilon_{t-q}; \\ h_t = Var[\Delta^d Y_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \dots + \alpha_P h_{t-P} + \beta_1 h_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \beta_Q h_{t-Q} \varepsilon_{t-Q}^2. \end{cases}$$

1.3 Применение расширенного принципа Гирсанова к ARIMA(p,d,q)-GARCH(P,Q) модели временных рядов

В рамках данной работы рассматриваются нормальное распределение (N) [49], обобщенное экспоненциальное бета распределение второго типа (EGB2, BETTA) [50] и распределение S_u Джонсона (JSU) [51;52]. Для первых двух распределений известны преобразования, приводящие к риск-нейтральным ARIMA-GARCH моделям [23]. Приведем, в качестве примера, применение расширенного принципа Гирсанова для первых двух распределений. В силу того, что ε_t имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию равную единице, в случае ARIMA-GARCH модели с ошибкой, распределенной нормально, следует выбрать Гауссово распределение, которое уже имеет нужные значения параметров. В случае распределения EGB2 следует провести репараметризацию, то есть необходимо так подобрать параметры распределения, чтобы $\varepsilon_t \sim EGB2(0,1)$. Для этого напомним формулы плотности и производящей функции моментов распределения $EGB2(\alpha, \beta, \delta, \mu)$.

$$f(x, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{1}{\delta B(\alpha, \beta)} \frac{\left(\exp\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right)^\alpha}{\left(1 + \exp\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right)^{\alpha+\beta}}, \quad (1.21)$$

$$M_{\varepsilon_t}(c) = \frac{B(\alpha + \delta c, \beta - \delta c)}{B(\alpha, \beta)} e^{\mu c}, \quad (1.22)$$

где $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция [53], $x, \mu \in \mathbb{R}, \alpha, \beta, \delta > 0$. Математическое ожидание и дисперсия выводятся непосредственно из производящей функции моментов [54;55]:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varepsilon_t] &= \frac{dM_{\varepsilon_t}(c)}{dc} \Big|_{c=0} = \frac{d}{dc} \left(\frac{\Gamma(\alpha + \delta c)\Gamma(\beta - \delta c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{\mu c} \right) \Big|_{c=0} = \delta \left(\frac{\frac{d\Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\alpha}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\frac{d\Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\beta}}{\Gamma(\beta)} \right) + \mu \\ &= \mu + \delta \left(\frac{\frac{d\ln\Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\alpha}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\frac{d\ln\Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\beta}}{\Gamma(\beta)} \right) = \\ &= \left[\varpi(\alpha, \beta) = \frac{\frac{d\ln\Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\alpha}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\frac{d\ln\Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\beta}}{\Gamma(\beta)} \right] = \mu + \delta \varpi(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[\varepsilon_t] &= \frac{d^2 M_{\varepsilon_t}(c)}{dc^2} \Big|_{c=0} - \left(\frac{d M_{\varepsilon_t}(c)}{dc} \Big|_{c=0} \right)^2 = \\
&= \frac{d}{dc} \left(\delta e^{\mu c} \frac{d\Gamma(\alpha + \delta c)}{dc} \frac{\Gamma(\beta - \delta c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} - \delta e^{\mu c} \frac{d\Gamma(\beta - \delta c)}{dc} \frac{\Gamma(\alpha + \delta c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \right. \\
&\quad \left. + \mu e^{\mu c} \frac{\Gamma(\alpha + \delta c)\Gamma(\beta - \delta c)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \right) \Big|_{c=0} - \left(\mu + \delta \left(\frac{d \ln \Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\alpha} - \frac{d \ln \Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\alpha} \right) \right)^2 = \\
&= \delta^2 \frac{d^2 \Gamma(c)}{dc^2} \Big|_{c=\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \delta^2 \frac{d^2 \Gamma(c)}{dc^2} \Big|_{c=\beta} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \\
&\quad + \mu \delta \left(\frac{d \Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} - \frac{d \Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\beta} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right) - 2\delta \frac{d \Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\alpha} \frac{d \Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\beta} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\
&\quad + \mu^2 + \mu \delta \left(\frac{d \Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} - \frac{d \Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\beta} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right) - \mu^2 \\
&\quad - 2\mu \delta \left(\frac{d \Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} - \frac{d \Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\beta} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right) - \delta^2 \left(\frac{d \Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 \\
&\quad - \delta^2 \left(\frac{d \Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 + \\
&+ 2\delta \frac{d \Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\alpha} \frac{d \Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\beta} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \\
&= \left[\frac{d^2 \ln \Gamma(c)}{dc^2} \Big|_{c=\alpha} = \frac{d^2 \Gamma(c)}{dc^2} \Big|_{c=\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} - \left(\frac{d \Gamma(c)}{dc} \Big|_{c=\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 \right] = \\
&= \delta^2 \left(\frac{d^2 \ln \Gamma(c)}{dc^2} \Big|_{c=\alpha} + \frac{d^2 \ln \Gamma(c)}{dc^2} \Big|_{c=\beta} \right) = \\
&= \left[l(\alpha, \beta) = \frac{d^2 \ln \Gamma(c)}{dc^2} \Big|_{c=\alpha} + \frac{d^2 \ln \Gamma(c)}{dc^2} \Big|_{c=\beta} \right] = \delta^2 l(\alpha, \beta).
\end{aligned}$$

В итоге получим, что $Var[\varepsilon_t] = \delta^2 l(\alpha, \beta) = 1 \Rightarrow \bar{\delta} = 1/\sqrt{l(\alpha, \beta)}$, $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = \mu + \delta \varpi(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow \bar{\mu} = -\varpi(\alpha, \beta)/\sqrt{l(\alpha, \beta)}$. Тогда $\varepsilon_t|_{\mathcal{F}_{t-1}} \sim EGB2(\alpha, \beta, \bar{\delta}, \bar{\mu})$. Далее по распределению случайного процесса ε_t необходимо найти распределение $Y_t = m_t + \delta_t \varepsilon_t$.

$$\begin{aligned}
f_{Y_t}(y_t) &= f_{\varepsilon_t}(h(y_t)) \left(\frac{dh(y_t)}{dy_t} \right) = \left[\varepsilon_t = h(Y_t) = \frac{Y_t - m_t}{\delta_t} \right] = \\
&= \left[\frac{\frac{y_t - m_t}{\delta_t} - \bar{\mu}}{\delta} = \frac{y_t - m_t - \bar{\mu}\delta_t}{\delta_t \bar{\delta}} \right] = \left[\frac{dh(y_t)}{dy_t} = \frac{1}{\delta_t} \right] = \\
&= \frac{1}{\delta_t \bar{\delta} B(\alpha, \beta)} \frac{\left(\exp \left(\frac{y_t - m_t - \bar{\mu}\delta_t}{\delta_t \bar{\delta}} \right) \right)^\alpha}{\left(1 + \exp \left(\frac{y_t - m_t - \bar{\mu}\delta_t}{\delta_t \bar{\delta}} \right) \right)^{\alpha+\beta}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow Y_t|_{\mathcal{F}_{t-1}} \sim EGB2(\alpha, \beta, \delta_t \bar{\delta}, m_t + \bar{\mu}\delta_t).
\end{aligned}$$

Пользуясь вышеописанным соотношением, запишем производящую функцию моментов

$$M_{\varepsilon_t}(c) = \frac{B(\alpha + \delta_t \bar{\delta} c, \beta - \delta_t \bar{\delta} c)}{B(\alpha, \beta)} e^{(m_t + \bar{\mu}\delta_t)c}. \quad (1.23)$$

Используя формулу (1.8) получим производящую функцию моментов в риск-нейтральной мере \mathbb{Q}

$$\begin{aligned}
M_{Y_t|_{\mathcal{F}_{t-1}}}^{\mathbb{Q}}(c) &= e^{-c(-r + \ln(M_{Y_t}(1)))} \frac{B(\alpha + \delta_t \bar{\delta} c, \beta - \delta_t \bar{\delta} c)}{B(\alpha, \beta)} e^{(m_t + \bar{\mu}\delta_t)c} = \\
&= \frac{B(\alpha + \delta_t \bar{\delta} c, \beta - \delta_t \bar{\delta} c)}{B(\alpha, \beta)} e^{\left(r - \ln \frac{B(\alpha + \delta_t \bar{\delta}, \beta - \delta_t \bar{\delta})}{B(\alpha, \beta)} \right) c} \Rightarrow \\
&\Rightarrow Y_t^{\mathbb{Q}}|_{\mathcal{F}_{t-1}} \sim EGB2\left(\alpha, \beta, \delta_t \bar{\delta}, r - \ln \frac{B(\alpha + \delta_t \bar{\delta}, \beta - \delta_t \bar{\delta})}{B(\alpha, \beta)}\right).
\end{aligned}$$

Пользуясь производящей функцией моментов (1.23) можно найти новые параметры ARIMA-GARCH модели, выпишем их:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y_t|_{\mathcal{F}_{t-1}}] = r - \ln \frac{B(\alpha + \delta_t \bar{\delta}, \beta - \delta_t \bar{\delta})}{B(\alpha, \beta)} + \delta_t \bar{\delta} \varpi(\alpha, \beta),$$

$$\text{Var}^{\mathbb{Q}}[Y_t|_{\mathcal{F}_{t-1}}] = \delta_t \bar{\delta} l(\alpha, \beta) = \delta_t.$$

Таким образом, ARIMA-GARCH модель примет вид [23]

$$\begin{aligned}
Y_t &= r - \ln \frac{B(\alpha + \delta_t \bar{\delta}, \beta - \delta_t \bar{\delta})}{B(\alpha, \beta)} + \delta_t \bar{\delta} \varpi(\alpha, \beta) + \delta_t \varepsilon_t, \\
\varepsilon_t|_{\mathcal{F}_{t-1}} &\sim EGB2(\alpha, \beta, \bar{\delta}, \bar{\mu}), \\
\bar{\delta} &= 1/\sqrt{l(\alpha, \beta)}, \\
\bar{\mu} &= -\varpi(\alpha, \beta)/\sqrt{l(\alpha, \beta)}.
\end{aligned} \quad (1.24)$$

Подобным же образом находятся риск-нейтральные коэффициенты для нормального (Гауссова) распределения [23],

$$\begin{aligned}
f_{Y_t}(y_t) &= \frac{1}{\delta_t \sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{y_t - m_t}{\delta_t}\right)^2} \Rightarrow M_{Y_t|F_{t-1}}^{\mathbb{P}}(c) = e^{m_t c + \frac{1}{2} \delta_t^2 c^2} \Rightarrow M_{Y_t|F_{t-1}}^{\mathbb{Q}}(c) = \\
&= e^{-c(-r + \ln(M_{Y_t}(1)))} e^{m_t c + \frac{1}{2} \delta_t^2 c^2} = \left[\ln(M_{Y_t}(1)) = m_t + \frac{1}{2} \delta_t^2 \right] = \\
&= e^{c(r - \frac{1}{2} \delta_t^2) + \frac{1}{2} \delta_t^2 c^2}. \\
Y_t &= r - \frac{1}{2} \delta_t^2 + \delta_t \varepsilon_t, \\
\varepsilon_t|_{F_{t-1}} &\sim N(0,1).
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Вышеописанные формулы показывают, что преобразование меры при использовании расширенного принципа Гирсанова приводит к разным нейтральным к риску спецификациям, однако для них характерны две особенности, а именно, не меняются распределение случайного процесса и его переменная волатильность (условная дисперсия).

ГЛАВА 2 Модификация расширенного принципа Гирсанова

Особенностью расширенного принципа Гирсанова является то, что он требует существования производящей функции моментов распределения ошибки ARIMA-GARCH модели (1.8). Однако существует множество распределений, для которых данная функция не определена, одним из таких распределений является распределение S_u Джонсона [51;52]. Данное распределение является нелинейным преобразованием стандартного нормального распределения и, в силу свойств данного преобразования характеризуется наличием “тяжелых хвостов” [56;57] и асимметричностью [54], что позволяет достаточно хорошо приближать реальные цены базовых активов.

2.1 Введение. Постановка задачи

Рассматривается следующая постановка задачи обобщения результатов расширенного принципа Гирсанова на случай распределений не имеющих производящей функции моментов на примере распределения S_u Джонсона:

1. Оценить производящую функцию моментов распределения S_u Джонсона;
2. Проанализировать возможность использования полученной оценки производящей функции моментов к расширенному принципу Гирсанова;
3. В случае ограниченной применимости оценки производящей функции моментов, предложить возможность модификации расширенного принципа Гирсанова.

Задача может осложниться тем, что использование оценки производящей функции моментов влечет отклонение от оптимальной стратегии инвестора, сформулированной в Главе 1. Поэтому необходимо найти возможность построения риск-нейтральной меры, не нарушая принципа оптимальности инвестора.

2.2 Производящая функция моментов распределения S_u Джонсона

Ниже приводится краткий обзор распределения S_u Джонсона - $JSU(\xi, \lambda, \gamma, \delta)$ [51;52]. Данное распределение представляет собой четырехпараметрическое вероятностное распределение, которое образуется нелинейным преобразованием нормально распределенной случайной величины $X \sim N(0,1)$,

$$Y = \xi + \lambda \sinh \left(\frac{X - \gamma}{\delta} \right) = g(X), \quad (2.1)$$

где $-\infty < \xi < \infty$ – параметр сдвига местоположения, $0 < \lambda < \infty$ – параметр масштабирования, $-\infty < \gamma < \infty$ – параметр асимметрии, $0 < \delta < \infty$ – показатель эксцесса. Функция плотности распределения легко получается из формулы (2.1),

$$P(Y < y) = P(g(X) < y) = P(X < g^{-1}(y)) \Rightarrow f_Y(y) = f_N(g^{-1}(y)) \left| \frac{d g^{-1}(y)}{dy} \right|,$$

где f_N – функция плотности Гауссова распределения, $g^{-1}(y) = \gamma + \delta \sinh^{-1} \left(\frac{y-\xi}{\lambda} \right) \Rightarrow \frac{d g^{-1}(y)}{dy} = \frac{\delta}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y-\xi}{\lambda} \right)^2}}$, окончательно, функция плотности распределения S_u Джонсона примет следующий вид:

$$f_Y(y) = \frac{\delta}{\lambda \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y-\xi}{\lambda} \right)^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\gamma + \delta \sinh^{-1} \left(\frac{y-\xi}{\lambda} \right) \right)^2}. \quad (2.2)$$

Из выражения (2.2) также легко получается функция распределения S_u Джонсона

$$F_Y(y) = \Phi \left(\gamma + \delta \sinh^{-1} \left(\frac{y-\xi}{\lambda} \right) \right). \quad (2.3)$$

На рисунках 2.1, 2.2 приведены примеры зависимостей плотности распределения S_u Джонсона от параметров масштабирования и асимметрии.

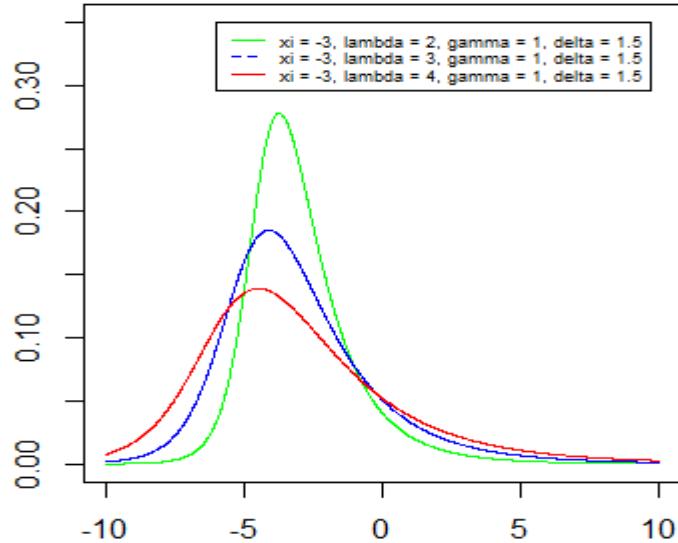


Рисунок 2.1 - Плотность распределения S_u Джонсона (для разных параметров λ)

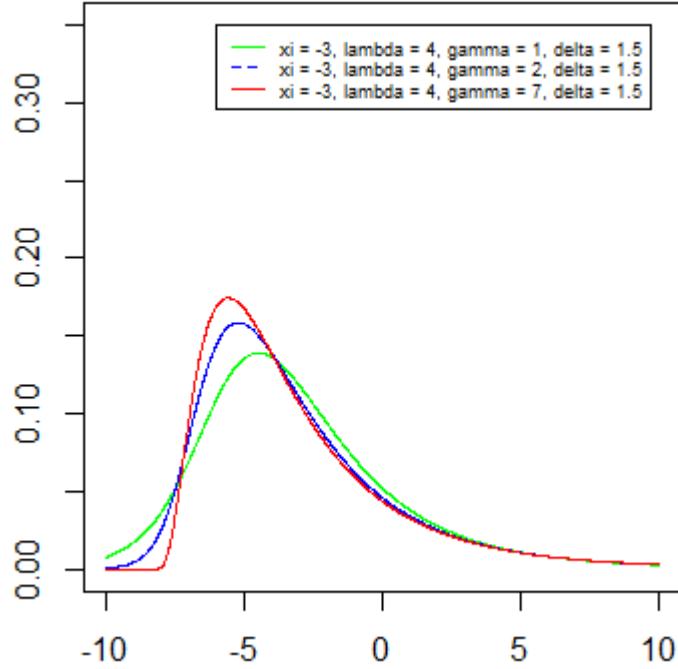


Рисунок 2.2 - Плотность распределения S_u Джонсона (для разных параметров γ)

Выпишем выражения для математического ожидания и дисперсии распределения S_u Джонсона,

$$\mathbb{E}[Y] = \xi - \lambda e^{\frac{1}{2\delta^2}} \sinh\left(\frac{\gamma}{\delta}\right), \quad (2.4)$$

$$Var[Y] = \frac{\lambda^2}{2} \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} - 1 \right) \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} \cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right) + 1 \right). \quad (2.5)$$

Найдем производящую функцию моментов [54;55], для этого преобразуем выражение (2.1) и распишем гиперболическую функцию синуса,

$$\frac{Y - \xi}{\lambda} = \sinh \frac{X - \gamma}{\delta} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{X - \gamma}{\delta}} - e^{-\frac{X - \gamma}{\delta}} \right). \quad (2.6)$$

Учитывая, что случайная величина X имеет стандартную нормальную плотность $f_N(x)$, найдем момент степени n для выражения (2.6):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\frac{Y - \xi}{\lambda}\right)^n\right] &= \frac{1}{2^n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\frac{x - \gamma}{\delta}} - e^{-\frac{x - \gamma}{\delta}} \right)^n f_N(x) dx \\ &= \frac{1}{2^n} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j e^{-\frac{(x-\gamma)(n-2j)}{\delta}} f_N(x) dx \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j e^{\frac{\gamma(n-2j)}{\delta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x(n-2j)}{\delta}} f_N(x) dx \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j e^{\frac{(n-2j)^2 + \gamma(n-2j)}{2\delta^2}}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x}{\delta}(n-2j)} f_N(x) dx = M_X\left(-\frac{n-2j}{\delta}\right) = e^{\frac{(n-2j)^2}{2\delta^2}}$.

Пользуясь общим видом производящей функции моментов, получим

$$M_{\frac{Y-\xi}{\lambda}}(c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \mathbb{E}\left[\left(\frac{Y-\xi}{\lambda}\right)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j e^{\frac{(n-2j)^2}{2\delta^2} + \frac{\gamma(n-2j)}{\delta}}. \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} M_{\frac{Y-\xi}{\lambda}}(c) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{y-\xi}{\lambda}c} f_Y(y) dy = e^{-\frac{\xi c}{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{y\frac{c}{\lambda}} f_Y(y) dy = e^{-\frac{\xi c}{\lambda}} M_Y\left(\frac{c}{\lambda}\right) \Rightarrow M_Y\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \\ &= M_{\frac{Y-\xi}{\lambda}}(c) e^{\frac{\xi c}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Делая замену переменной $c = \lambda u$, получаем

$$M_Y\left(\frac{\lambda u}{\lambda}\right) = M_{\frac{Y-\xi}{\lambda}}(\lambda u) e^{\frac{\xi \lambda u}{\lambda}} \Rightarrow M_Y(u) = M_{\frac{Y-\xi}{\lambda}}(\lambda u) e^{\xi u}.$$

Переходя вновь к аргументу c , $M_Y(c) = M_{\frac{Y-\xi}{\lambda}}(\lambda c) e^{\xi c}$. В конечном итоге производящая функция моментов примет следующий вид

[26]:

$$M_Y(c) = e^{\xi c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c\lambda}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j e^{\frac{(n-2j)^2}{2\delta^2} + \frac{\gamma(n-2j)}{\delta}}. \quad (2.8)$$

2.3 Исследование возможности использования полученной производящей функции моментов к расширенному принципу Гирсанова

Исследуем на сходимость полученный ряд, для этого отметим, что данный ряд является степенным и имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, где $x = \frac{c\lambda}{2}$, $a_n = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j e^{\frac{(n-2j)^2}{2\delta^2} + \frac{\gamma(n-2j)}{\delta}}$.

Найдем радиус сходимости степенного ряда [58]:

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{\lambda/2} \left| \frac{\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j e^{\frac{(n-2j)^2 + \gamma(n-2j)}{2\delta^2}}}{\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} C_{n+1}^j e^{\frac{(n+1-2j)^2 + \gamma(n+1-2j)}{2\delta^2}}} \right| = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{\lambda/2} \frac{e^{\frac{n^2 + \gamma n}{2\delta^2}}}{e^{\frac{(n+1)^2 + \gamma(n+1)}{2\delta^2}}} \left| \frac{\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j e^{-\frac{2jn + 2j^2 - 2j\gamma}{\delta^2}}}{\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} C_{n+1}^j e^{-\frac{2j(n+1) + 2j^2 - 2j\gamma}{\delta^2}}} \right| = \\
&= \left[0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^j e^{-\frac{2jn + 2j^2 - 2j\gamma}{\delta^2}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^j}{j!} e^{-\frac{2jn + 2j^2 - 2j\gamma}{\delta^2}} = 0 \right] = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{\lambda/2} \frac{e^{\frac{n^2 + \gamma n}{2\delta^2}}}{e^{\frac{(n+1)^2 + \gamma(n+1)}{2\delta^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{\lambda/2} \frac{1}{e^{\frac{n + 1 + \gamma}{2\delta^2}}} = 0.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\lambda \neq 0, \delta < \infty$, получим, что ряд имеет нулевой радиус сходимости, то есть значение производящей функции моментов не существует для любого значения не равному нулю. Таким образом, использование основной формулы расширенного принципа Гирсанова $M_{Y_t}^{\mathbb{Q}}(c) = e^{-t(-r + \ln(M_{Y_t}^{\mathbb{P}}(1)))} M_{Y_t}^{\mathbb{P}}(c)$ не представляется возможным по причине отсутствия конечного значения $\ln(M_{Y_t}^{\mathbb{P}}(1))$. Однако данный степенной ряд, как производящая функция моментов, имеет информацию о всех моментах случайной величины. Находить соответствующие моменты, используя свойства производящей функции моментов некорректно. Напомним, что для получения математического ожидания и дисперсии через производящую функцию моментов необходимо знать значения первых двух производных в точке нуль, то есть,

$$\mathbb{E}[Y] = \left. \frac{dM_Y(c)}{dc} \right|_{c=0}, \quad (2.9)$$

$$Var[Y] = \left. \frac{d^2M_Y(c)}{dc^2} \right|_{c=0} - \left(\left. \frac{dM_Y(c)}{dc} \right|_{c=0} \right)^2. \quad (2.10)$$

Но в случае распределения S_u Джонсона, получить значение производной не представляется возможным по причине того, что производящая функция моментов не определена в окрестности нуля. Поэтому найдем математическое ожидание и дисперсию используя производящую функцию моментов в виде степенного ряда и беря соответствующие множители перед степенями разложения функции. Для удобства введем обозначения

$$A_n = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j e^{\frac{(n-2j)^2 + \gamma(n-2j)}{2\delta^2}}, \quad A_0 = 1,$$

тогда $M_Y(c) = e^{\xi c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c\lambda}{2}\right)^n \frac{1}{n!} A_n$. Напомним, что производящая функция моментов в разложении имеет следующий вид [54;55]:

$$M_Y(c) = 1 + c\mathbb{E}[Y] + \frac{c^2\mathbb{E}[Y^2]}{2} + \frac{c^3\mathbb{E}[Y^3]}{3!} + \dots + \frac{c^n\mathbb{E}[Y^n]}{n!} + \dots \quad (2.11)$$

Соответственно, необходимо найти коэффициенты разложения производящей функции при c и c^2 . Как легко убедиться, раскладывая $e^{\xi c} = 1 + \xi c + \frac{(\xi c)^2}{2} + \dots$ до степени не выше второй, что данные коэффициенты равны $\xi + A_1 \frac{\lambda}{2}, \xi^2 + \xi \lambda A_1 + A_2 \frac{\lambda^2}{4}$. Математическое ожидание совпадает с первым коэффициентом, дисперсия находится как $\mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$, таким образом

$$\mathbb{E}[Y] = \xi + A_1 \frac{\lambda}{2}, \quad (2.12)$$

$$Var[Y] = \frac{\lambda^2}{4} (A_2 - A_1^2), \quad (2.13)$$

где A_1 и A_2 получаются из соответствующей подстановки $A_1 = e^{\frac{1}{2\delta^2} - \frac{\gamma}{\delta}} - e^{\frac{1}{2\delta^2} + \frac{\gamma}{\delta}} = -e^{\frac{1}{2\delta^2}} \left(e^{\frac{\gamma}{\delta}} - e^{-\frac{\gamma}{\delta}} \right) = -2e^{\frac{1}{2\delta^2}} \sinh\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$, $A_2 = e^{\frac{2}{\delta^2} + \frac{2\gamma}{\delta}} + e^{\frac{2}{\delta^2} - \frac{2\gamma}{\delta}} - 2$. Преобразуем полученные для A_1 и A_2 выражения:

$$A_1 = e^{\frac{1}{2\delta^2} - \frac{\gamma}{\delta}} - e^{\frac{1}{2\delta^2} + \frac{\gamma}{\delta}} = -e^{\frac{1}{2\delta^2}} \left(e^{\frac{\gamma}{\delta}} - e^{-\frac{\gamma}{\delta}} \right) = -2e^{\frac{1}{2\delta^2}} \sinh\left(\frac{\gamma}{\delta}\right),$$

$$A_2 = e^{\frac{2}{\delta^2} + \frac{2\gamma}{\delta}} + e^{\frac{2}{\delta^2} - \frac{2\gamma}{\delta}} - 2 = e^{\frac{2}{\delta^2}} \left(e^{\frac{2\gamma}{\delta}} + e^{-\frac{2\gamma}{\delta}} \right) - 2 = 2e^{\frac{2}{\delta^2}} \cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right) - 2,$$

Тогда математическое ожидание (2.4) получается прямой подстановкой полученного выражения для A_1 в выражение (2.12), а дисперсия (2.5) после подстановки A_1 и A_2 в (2.13) и использования свойства двойного угла для гиперболических функций:

$$\begin{aligned} Var[Y] &= \frac{\lambda^2}{4} (A_2 - A_1^2) = \frac{\lambda^2}{4} \left(2e^{\frac{2}{\delta^2}} \cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right) - 2 - 4e^{\frac{1}{\delta^2}} \sinh^2\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \right) = \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \left(e^{\frac{2}{\delta^2}} \cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right) - 1 - 2e^{\frac{1}{\delta^2}} \sinh^2\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \right) = \left[-2 \sinh^2\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) = 1 - \cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right) \right] \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \left(e^{\frac{2}{\delta^2}} \cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right) - 1 + e^{\frac{1}{\delta^2}} - e^{\frac{1}{\delta^2}} \cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right) \right) = \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} - 1 \right) \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} \cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right) + 1 \right), \end{aligned}$$

что подтверждает правильность полученной производящей функции моментов для распределения S_u Джонсона.

2.4 Модификация расширенного принципа Гирсанова. Риск нейтральная динамика для ARIMA-GARCH модели с ошибками, распределенными по закону S_u Джонсона

В основе расширенного принципа Гирсанова лежит моделирование динамики логарифма отношения цен базового актива, которое приводит к уравнению динамики $\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1} e^{-r + \ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t} | \mathcal{F}_{t-1}])} W_t$, где в показателе степени находится $\ln(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{Y_t} | \mathcal{F}_{t-1}])$, то есть логарифм производящей функции моментов в точке 1, который, как было доказано в разделе 2.3, не существует. В рамках данной работы, для модели ARIMA-GARCH с ошибками, распределенными по закону S_u Джонсона, предлагается моделировать доходность цен базовых активов:

$$\tilde{Y}_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1. \quad (2.14)$$

Заменим также выражение $(\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t)$ на дискретный аналог $(\tilde{S}_t = (1 + \frac{r}{n})^{-nt} S_t)$, где n – количество начислений безрисковой ставки в году. Согласно разделу 1.1, динамика дисконтированных цен базовых активов имеет вид

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \frac{M_t}{M_{t-1}} = \tilde{S}_{t-1} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] W_t. \quad (2.15)$$

Преобразуем выражение (2.15) следующим образом:

$$\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-n} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\frac{S_t}{S_{t-1}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] W_t = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t + 1 | \mathcal{F}_{t-1}]}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n} W_t \Rightarrow \tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1} (1 + \mu_t) W_t,$$

$$\text{где } \mu_t = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t + 1 | \mathcal{F}_{t-1}]}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n} - 1.$$

Теорема 2.1.

Процесс Z_t обеспечивает риск-нейтральную динамику для \tilde{S}_t по новой мере \mathbb{Q} относительно старой \mathbb{P} [26],

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_{t-1}} = Z_t = \prod_{k=1}^t \frac{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)(1+\mu_k)}{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left((1+\mu_k)^{-1}\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)}. \quad (2.16)$$

□

Для доказательства теоремы необходимо показать, что $\mathcal{L}^{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_t|G_{t-1}) = \mathcal{L}^{\mathbb{P}}(M_t|G_{t-1})$, то есть условный закон распределения дисконтированных цен базового актива в новой (риск-нейтральной) мере \mathbb{Q} совпадает с законом распределения случайного процесса M_t , который является мартингалом относительно физической меры \mathbb{P} .

$$Z_t = Z_{t-1} \frac{g_{W_t}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}}\right)(1+\mu_t)}{g_{W_t}^{\mathbb{P}}\left((1+\mu_t)^{-1}\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}}\right)} = Z_{t-1} \frac{g_{W_t}^{\mathbb{P}}((1+\mu_t)W_t)(1+\mu_t)}{g_{W_t}^{\mathbb{P}}(W_t)},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_t|\mathcal{F}_{t-1}] &= Z_{t-1} \int_{-\infty}^{\infty} g_t^{\mathbb{P}}((1+\mu_t)w_t)(1+\mu_t)dw_t = [(1+\mu_t)w_t = q_t] = \\ &= Z_{t-1} \int_{-\infty}^{\infty} g_t^{\mathbb{P}}(q_t)dq_t = Z_{t-1}. \end{aligned}$$

Обозначим условную плотность распределения случайного процесса M_t для меры \mathbb{P} как $\rho_t(M_t)$, тогда

$$\rho_t(M_t) = P(M_t < a)'_{a=M_t} = P\left(\frac{M_t}{M_{t-1}} < \frac{a}{M_{t-1}}\right)'_{a=M_t} = P\left(W_t < \frac{a}{M_{t-1}}\right)'_{a=M_t} = \frac{g_{W_t}^{\mathbb{P}}\left(\frac{M_t}{M_{t-1}}\right)}{M_{t-1}}.$$

Введем обозначение $\tilde{W}_t = (1+\mu_t)W_t$, тогда структура уравнений описывающих динамики M_t и \tilde{S}_t будут совпадать, $M_t = M_{t-1}W_t$, $\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1}\tilde{W}_t$. Далее обозначим условную плотность случайного процесса \tilde{S}_t по метрике \mathbb{Q} как $\tilde{\rho}_t(\tilde{S}_t)$, тогда

$$\tilde{\rho}_t(\tilde{S}_t) = Q(\tilde{S}_t < a)'_{a=\tilde{S}_t} = Q\left(\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} < \frac{a}{\tilde{S}_{t-1}}\right)'_{a=\tilde{S}_t} = Q\left(\tilde{W}_t < \frac{a}{\tilde{S}_{t-1}}\right)'_{a=\tilde{S}_t} = \frac{\tilde{g}_{\tilde{W}_t}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}}\right)}{\tilde{S}_{t-1}},$$

где $\tilde{g}_{\tilde{W}_t}^{\mathbb{Q}}$ – условная плотность распределения случайного процесса \tilde{W}_t по мере \mathbb{Q} . Таким образом осталось показать, что закон распределения случайного процесса W_t совпадает с законом распределения случайного процесса \tilde{W}_t ,

$$Q(\tilde{W}_t < a|G_{t-1}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[I_{\{\tilde{W}_t < a\}}|\mathcal{F}_{t-1}].$$

Определим функцию распределения $\tilde{G}_t^{\mathbb{Q}}$ для \tilde{W}_t ,

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\tilde{W}_t}^{\mathbb{Q}}(a) &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_t I_{\{\tilde{W}_t < a\}} | \mathcal{F}_{t-1}]}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}]} = \int_{-\infty}^{\infty} g_{W_t}^{\mathbb{P}}((1 + \mu_t)w_t)(1 + \mu_t)I_{\{\tilde{W}_t < a\}} dw_t = [\tilde{W}_t = (1 + \mu_t)W_t] = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g_{W_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{W}_t)I_{\{\tilde{W}_t < a\}} d\tilde{W}_t = \int_{-\infty}^a g_{W_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{W}_t) d\tilde{W}_t = G_{W_t}^{\mathbb{P}}(a),
\end{aligned}$$

откуда следует, что $\tilde{g}_{\tilde{W}_t}^{\mathbb{Q}} = g_{W_t}^{\mathbb{P}}$.

■

Теорема 2.2.

Случайный процесс Z_t , выраженный через условную плотность распределения $g_{W_t}^{\mathbb{P}}$ случайного процесса W_t , можно представить через условную плотность распределения $f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}$ по фильтрации \mathcal{F}_{t-1} случайного процесса \tilde{Y}_t [26],

$$\prod_{k=1}^t \frac{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)(1 + \mu_k)}{g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left((1 + \mu_k)^{-1} \frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right)} = \prod_{k=1}^t \frac{f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_k(1 + \mu_k) + \mu_k)(1 + \mu_k)}{f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_k)}. \quad (2.17)$$

□

$$\begin{aligned}
g_{W_k}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}\right) &= P(W_k < a)'_{a=\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}} = P\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}(1 + \mu_k)^{-1} < a\right)'_{a=\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}} = \\
&= P\left(\frac{S_k}{S_{k-1}} < a(1 + \mu_k)\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n\right)'_{a=\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}} = \\
&= P\left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 < a(1 + \mu_k)\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1\right)'_{a=\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}} = \\
&= f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}\left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}(1 + \mu_k)\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1\right)(1 + \mu_k)\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \\
&= f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_k(1 + \mu_k) + \mu_k)(1 + \mu_k)\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{W_k}^{\mathbb{P}} \left((1 + \mu_k)^{-1} \frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}} \right) &= P(W_k < a)'_{a=(1+\mu_k)^{-1} \frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}} = \\
&= P \left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}} (1 + \mu_k)^{-1} < a \right)'_{a=(1+\mu_k)^{-1} \frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}} = \\
&= P \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} < a(1 + \mu_k) \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n \right)'_{a=(1+\mu_k)^{-1} \frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}} = \\
&= P \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 < a(1 + \mu_k) \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n - 1 \right)'_{a=(1+\mu_k)^{-1} \frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}}} = \\
&= f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}} \left((1 + \mu_k)^{-1} \frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}} (1 + \mu_k) \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n - 1 \right) (1 + \mu_k) \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n = \\
&= f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}(Y_k) (1 + \mu_k) \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{g_{W_k}^{\mathbb{P}} \left(\frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}} \right) (1 + \mu_k)}{g_{W_k}^{\mathbb{P}} \left((1 + \mu_k)^{-1} \frac{\tilde{S}_k}{\tilde{S}_{k-1}} \right)} &= \frac{f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_k(1 + \mu_k) + \mu_k) (1 + \mu_k) \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n (1 + \mu_k)}{f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_k) (1 + \mu_k) \left(1 + \frac{r}{n} \right)^n} \\
&= \frac{f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_k(1 + \mu_k) + \mu_k) (1 + \mu_k)}{f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_k)}.
\end{aligned}$$

■

Для того, чтобы понять, как изменяются параметры распределения S_u Джонсона при переходе к новой (риск-нейтральной) мере \mathbb{Q} , найдем производящую функцию моментов в новой мере.

Утверждение 2.1 [26].

$$M_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{Q}}(c) = e^{-\frac{\mu_t c}{1+\mu_t}} M_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}} \left(\frac{c}{1 + \mu_t} \right). \quad (2.18)$$

□

$$\begin{aligned}
M_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{Q}}(c) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{\tilde{Y}_t c} | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{\tilde{Y}_t c} \frac{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_t(1 + \mu_t) + \mu_t) (1 + \mu_t)}{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_t)} Z_{t-1} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{\tilde{Y}_t c} \frac{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_t(1 + \mu_t) + \mu_t) (1 + \mu_t)}{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_t)} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_{t-1}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{t-1} \frac{f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_k(1+\mu_k) + \mu_k)(1+\mu_k)}{f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_k)} f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_k) d\tilde{y}_k \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{t-1} f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_k(1+\mu_k) + \mu_k)(1+\mu_k) d\tilde{y}_k = \left[\tilde{y}_k(1+\mu_k) + \mu_k = u_k \right. \\
&\quad \left. \Rightarrow d\tilde{y}_k = \frac{du_k}{1+\mu_k} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{t-1} f_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}(u_k) du_k = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[e^{\tilde{Y}_t c} \frac{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_t(1+\mu_t) + \mu_t)(1+\mu_t)}{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_t)} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tilde{Y}_t c} \frac{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t(1+\mu_t) + \mu_t)(1+\mu_t)}{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t)} f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t) d\tilde{y}_t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tilde{Y}_t c} f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t(1+\mu_t) + \mu_t)(1+\mu_t) d\tilde{y}_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{u_t - \mu_t}{1+\mu_t})c} f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(u_t) du_t \\
&= e^{-\frac{\mu_t c}{1+\mu_t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{u_t(\frac{c}{1+\mu_t})} f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(u_t) du_t = e^{-\frac{\mu_t c}{1+\mu_t}} M_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}} \left(\frac{c}{1+\mu_t} \right)
\end{aligned}$$

■

Найдем выражение плотности распределения $f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t)$ случайного процесса \tilde{Y}_t при условии равенства нулю математического ожидания и единице дисперсии случайного процесса ε_t :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= \xi - \lambda e^{\frac{1}{2\delta^2}} \sinh \left(\frac{\gamma}{\delta} \right) = 0 \Rightarrow \xi = \tilde{\lambda} e^{\frac{1}{2\delta^2}} \sinh \left(\frac{\gamma}{\delta} \right), \\
Var[\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= \frac{\lambda^2}{2} \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} - 1 \right) \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} \cosh \left(\frac{2\gamma}{\delta} \right) + 1 \right) = 1 \Rightarrow \tilde{\lambda} = \\
&= \sqrt{2} \left(\left(e^{\frac{1}{\delta^2}} - 1 \right) \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} \cosh \left(\frac{2\gamma}{\delta} \right) + 1 \right) \right)^{-\frac{1}{2}}, \\
f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t) &= f_{\varepsilon_t}(h(y_t)) \left(\frac{dh(y_t)}{dy_t} \right) = \left[\frac{\frac{y_t - m_t}{\delta_t} - \tilde{\xi}}{\tilde{\lambda}} = \frac{y_t - m_t - \tilde{\xi}\delta_t}{\delta_t \tilde{\lambda}} \right] = \left[\frac{dh(y_t)}{dy_t} = \frac{1}{\delta_t} \right] \Rightarrow \\
f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t) &= \frac{\delta}{\tilde{\lambda} \delta_t \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y_t - (m_t + \tilde{\xi}\delta_t)}{\delta_t \tilde{\lambda}} \right)^2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\gamma + \delta \sinh^{-1} \left(\frac{y_t - (m_t + \tilde{\xi}\delta_t)}{\delta_t \tilde{\lambda}} \right) \right)^2}. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Сравнивая выражения (2.2) с выражением (2.19) приходим к выводу, что распределение случайного процесса имеет распределение S_u Джонсона $JSU(m_t + \tilde{\xi}\delta_t, \tilde{\lambda}\delta_t, \gamma, \delta)$. Ранее было

показано, что производящая функция моментов распределения S_u Джонсона, как степенной ряд, имеет нулевой радиус сходимости, поэтому использовать выражение (2.18) не представляется возможным. Однако можно посчитать условное математическое ожидание и условную дисперсию относительно риск-нейтральной вероятностной меры.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t \frac{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_t(1 + \mu_t) + \mu_t)(1 + \mu_t)}{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_t)} Z_{t-1} \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] = \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t \frac{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_t(1 + \mu_t) + \mu_t)(1 + \mu_t)}{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_t)} \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Y}_t \frac{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t(1 + \mu_t) + \mu_t)(1 + \mu_t)}{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t)} f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t) d\tilde{y}_t = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Y}_t f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t(1 + \mu_t) + \mu_t)(1 + \mu_t) d\tilde{y}_t = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u_t - \mu_t}{1 + \mu_t}\right) f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(u_t) du_t = -\frac{\mu_t}{1 + \mu_t} \\
&\quad + \frac{1}{1 + \mu_t} \int_{-\infty}^{\infty} u_t f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(u_t) du_t = -\frac{\mu_t}{1 + \mu_t} + \frac{1}{1 + \mu_t} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \\
&= \frac{m_t + \delta_t \tilde{\xi} - \mu_t}{1 + \mu_t} - \frac{\tilde{\lambda} \delta_t}{1 + \mu_t} e^{\frac{1}{2\delta^2}} \sinh\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) = \left[\tilde{\xi} = \tilde{\lambda} e^{\frac{1}{2\delta^2}} \sinh\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \right] = \frac{m_t - \mu_t}{1 + \mu_t} = \\
&= \left[m_t - \mu_t = \frac{m_t \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n} - \frac{m_t + 1 - \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n} = \right. \\
&\quad \left. = -\frac{\left(1 - \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n\right)(m_t + 1)}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n}; 1 + \mu_t = \frac{m_t + 1}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n} \right] = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 \\
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^2 \frac{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_t(1 + \mu_t) + \mu_t)(1 + \mu_t)}{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_t)} Z_{t-1} \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] = \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t^2 \frac{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_t(1 + \mu_t) + \mu_t)(1 + \mu_t)}{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{Y}_t)} \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right] \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Y}_t^2 \frac{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t(1 + \mu_t) + \mu_t)(1 + \mu_t)}{f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t)} f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t) d\tilde{y}_t = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Y}_t^2 f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(\tilde{y}_t(1 + \mu_t) + \mu_t)(1 + \mu_t) d\tilde{y}_t = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u_t - \mu_t}{1 + \mu_t}\right)^2 f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(u_t) du_t = \\
&= \frac{\mu_t^2}{(1 + \mu_t)^2} - \frac{2\mu_t}{(1 + \mu_t)^2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(u_t) du_t + \frac{1}{(1 + \mu_t)^2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2 f_{\tilde{Y}_t}^{\mathbb{P}}(u_t) du_t = \\
&= \frac{\mu_t^2}{(1 + \mu_t)^2} - \frac{2\mu_t}{(1 + \mu_t)^2} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t | \mathcal{F}_{t-1}] + \frac{1}{(1 + \mu_t)^2} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}]
\end{aligned}$$

$$(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t | \mathcal{F}_{t-1}])^2 = \frac{\mu_t^2}{(1 + \mu_t)^2} - \frac{2\mu_t}{(1 + \mu_t)^2} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t | \mathcal{F}_{t-1}] + \frac{1}{(1 + \mu_t)^2} (\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t | \mathcal{F}_{t-1}])^2$$

$$\begin{aligned} Var^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] - (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t | \mathcal{F}_{t-1}])^2 \\ &= \frac{1}{(1 + \mu_t)^2} (\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}] - (\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t | \mathcal{F}_{t-1}])^2) = \frac{1}{(1 + \mu_t)^2} Var^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \frac{\delta_t^2 \tilde{\lambda}^2}{2(1 + \mu_t)^2} \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} - 1 \right) \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} \cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right) + 1 \right) = \\ &= \left[\tilde{\lambda}^2 = \frac{2}{\left(e^{\frac{1}{\delta^2}} - 1 \right) \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} \cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right) + 1 \right)} \right] = \frac{\delta_t^2}{(1 + \mu_t)^2} = \delta_t^2 \left(\frac{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n}{1 + m_t} \right)^2 \end{aligned}$$

Модель ARIMA-GARCH для ошибок, имеющих распределение S_u Джонсона примет вид [26]

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_t &= \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 + \delta_t \frac{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n}{1 + m_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_{t|\mathcal{F}_{t-1} \sim JS(\tilde{\xi}, \tilde{\lambda}, \gamma, \delta)}, \\ \tilde{\xi} &= \tilde{\lambda} e^{\frac{1}{2\delta^2}} \sinh\left(\frac{\gamma}{\delta}\right), \\ \tilde{\lambda} &= \sqrt{2} \left(\left(e^{\frac{1}{\delta^2}} - 1 \right) \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} \cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right) + 1 \right) \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.5 Выводы

В рамках данной главы рассматривалась задача поиска риск-нейтральных коэффициентов ARIMA-GARCH модели с ошибками, распределенными по закону S_u Джонсона. Сложность заключалась в том, что данное распределение не имеет производящей функции моментов, вследствие чего применение расширенного принципа Гирсанова не представлялось возможным.

В качестве первого результата была найдена производящая функция моментов распределения S_u Джонсона в виде степенного ряда, который имеет нулевой радиус сходимости. Использовать данный степенной ряд в рамках расширенного принципа Гирсанова не представляется возможным, так как необходимо знать значение производящей функции моментов в точке 1.

Следующим важным результатом является модификация расширенного принципа Гирсанова, которая позволила избавиться от необходимости существования производящей функции моментов. Вместе с тем найден новый закон перехода к риск-нейтральной вероятностной мере, который позволяет, не нарушая принципов оптимальности Гирсанова находить риск-нейтральные ARIMA-GARCH модели. В качестве примера применения полученного закона (2.17) (2.18) были получены риск-нейтральные коэффициенты ARIMA-GARCH модели с ошибками, имеющими распределение S_u Джонсона.

ГЛАВА 3 Риск нейтральная динамика портфеля активов

Оценка рисков портфеля опционных контрактов на различные базовые активы предполагает моделирование динамики цен этих активов. Если число активов велико, то для сокращения размерности часто используется метод главных компонент [59], который позволяет перейти от цен базовых активов к относительно небольшому числу некоррелированных компонент, каждая из которых может затем моделироваться отдельно. Метод главных компонент решает две проблемы: с одной стороны, уменьшает количество моделируемых объектов, позволяя сократить выборку, генерируемую при помощи метода Монте-Карло, с другой – оптимизационная задача нахождения статистических оценок параметров многомерной модели, описывающей динамику поведения цен базовых активов, сводится к серии независимых оптимизационных задач с меньшим числом неизвестных. В данной главе разрабатывается метод, позволяющий применить модификацию расширенного принципа Гирсанова для моделирования портфеля активов на основе метода главных компонент.

3.1 Введение. Постановка задачи

Рассматривается следующая постановка задачи моделирования динамики портфеля базовых активов:

1. Пусть имеется портфель базовых активов S_t^j , где $j = 1, \dots, l$ – номер базового актива в портфеле активов. Y_t^j – доходность базового актива j . Требуется перейти от доходностей базовых активов Y_t^j к главным компонентам X_t^i , где $i = 1, \dots, m$ – количество независимых компонент;
2. На основе полученных компонент найти коэффициенты ARIMA-GARCH моделей на основе риск-нейтральной меры используя расширенный / модифицированный принципа Гирсанова.

Сложность данной задачи заключается в том, что при переходе от физической метрики к риск-нейтральной необходимо знать безрисковую ставку базового актива. Поэтому элементарное применение расширенного принципа Гирсанова к некоррелируемым ARIMA-GARCH моделям главных компонент не представляется возможным, так как понятия безрисковой ставки для независимых компонент не определено.

3.2 Метод главных компонент

Метод главных компонент [59;60] заключается в разложении случайного вектора $X = (X_1, X_2, \dots, X_l)^T$ размерности l по линейно независимой системе векторов, отвечающей собственным значениям ковариационной матрицы вектора X .

Рассмотрим центрированный вектор $\tilde{X} = X - \mathbb{E}[X]$, тогда линейная модель главных компонент для \tilde{X} примет вид

$$\tilde{X} = AF, \quad (3.1)$$

где $F = (F_1, F_2, \dots, F_l)^T$ –нормированный и центрированный случайный вектор некоррелированных главных компонент F_j ($j = 1, \dots, l$), $A = a_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ –детерминированная матрица коэффициентов разложения случайных величин X_i на главные компоненты F_j . Далее излагается алгоритм нахождения случайного вектора F и построения матрицы A .

Пусть $\Sigma = \mathbb{E}[\tilde{X}\tilde{X}^T]$ –ковариационная матрица случайного вектора X . Ковариационная матрица является симметричной и неотрицательно определенной, поэтому имеет n вещественных неотрицательных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$. Введем матрицу Λ при условии, что $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_l \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим $v_j = (v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{lj})^T$ –нормированные собственные векторы матрицы Σ , соответствующие собственным значениям λ_j ($i = 1, \dots, l$). Тогда для $\forall j = 1, \dots, l$ следует, что $\det|\Sigma - \lambda_j I| = 0$, ($j = 1, \dots, l$), где I –единичная матрица размерности l .

$$\Sigma v_j = \lambda_j v_j, j = 1, \dots, l, \quad (3.3)$$

$$v_i^T v_j = \sum_{p=1}^l v_{pi} v_{pj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, l. \quad (3.4)$$

Введя матрицу $V = (v_1, v_2, \dots, v_l)$, с учетом соотношений (3.3) и (3.4) получим

$$v_i^T \Sigma v_j = \lambda_j v_i^T v_j = \begin{cases} \lambda_j, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, l, \quad (2.5)$$

тогда

$$V^T \Sigma V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_l \end{pmatrix} = \Lambda. \quad (3.6)$$

Пусть $\tilde{F} = V^T \tilde{X}$, при этом, так как $\mathbb{E}[\tilde{F}] = \mathbb{E}[V^T \tilde{X}] = V^T \mathbb{E}[\tilde{X}] = 0$, то \tilde{F} – центрированный вектор, а поскольку $\mathbb{E}[\tilde{F} \tilde{F}^T] = \mathbb{E}[V^T \tilde{X} \tilde{X}^T V] = V^T \mathbb{E}[\tilde{X} \tilde{X}^T] V = V^T \Sigma V$, то в силу (3.6) получаем, что компоненты случайного вектора \tilde{F} некоррелированы и $Var[\tilde{F}_j] = \lambda_j$ ($j = 1, \dots, l$). Поэтому нормированный и центрированный вектор F равен

$$F = \Lambda^{-\frac{1}{2}} \tilde{F} = \Lambda^{-\frac{1}{2}} V^T \tilde{X}. \quad (3.7)$$

Из $\Lambda = V^T \Sigma V$, то $\det(\Lambda - tE) = \det(V^T \Sigma V - tE) = \det(V^T (\Sigma - tE) V) = \det(V^T) \det(\Sigma - tE) \det(V) = \det(\Sigma - tE)$, и того, что у характеристического многочлена матрицы l –го порядка коэффициент при мономе t^{l-1} равен следу матрицы, следует, что $tr(\Sigma) = tr(\Lambda)$ (след матрицы является инвариантом относительно данного линейного преобразования). Из равенства следов матриц Σ и Λ получим, что

$$\sum_{i=1}^l Var[\tilde{X}_i] = \sum_{i=1}^l Var[X_i] = tr(\Sigma) = tr(\Lambda) = \sum_{i=1}^l \lambda_i = \sum_{i=1}^l Var[\tilde{F}_i]. \quad (3.8)$$

То есть дисперсия исходных случайных величин X_1, X_2, \dots, X_l полностью описывается дисперсией компонент $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_l$, при этом, в силу сделанного предположения $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l$, имеем $Var[\tilde{F}_1] > Var[\tilde{F}_2] > \dots > Var[\tilde{F}_l]$, таким образом дисперсия каждой следующей компоненты будет описывать меньшую долю дисперсии исходных случайных величин, чем дисперсия предыдущей главной компоненты.

Из того, что $\mathbb{E}[F^T F] = I$, то $\Sigma = \mathbb{E}[\tilde{X} \tilde{X}^T] = \mathbb{E}[A F^T F A^T] = A \mathbb{E}[F^T F] A^T = A A^T$ следует

$$cov(X_i, X_j) = cov(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j) = \sum_{p=1}^l a_{ip} a_{jp}, i, j = 1, \dots, l \quad (3.9)$$

В частности, $Var[\tilde{X}_i] = Var[X_i] = \sum_{j=1}^l a_{ij}^2, i = 1, \dots, l$, то есть ковариационная матрица случайного вектора X полностью воспроизводится матрицей коэффициентов A . Так как $\mathbb{E}[\tilde{X} F^T] = \mathbb{E}[A F^T] = A \mathbb{E}[F^T] = A$, то $cov(X_i, F_j) = a_{ij}, i, j = 1, \dots, l$ (ковариация случайной величины X_i и компоненты F_j равна элементу матрицы коэффициентов a_{ij}).

Найдем матрицу коэффициентов A . Из того, что $\tilde{F} = V^T \tilde{X}$ следует $V \tilde{F} = V V^T \tilde{X} = \tilde{X}$. Тогда с учетом (3.7) получим $\tilde{X} = V \tilde{F} = V \Lambda^{\frac{1}{2}} F$, откуда следует, что

$$A = V \Lambda^{\frac{1}{2}}, \quad (3.10)$$

$$F = \Lambda^{-\frac{1}{2}} V^T \tilde{X} = \frac{\sum_{i=1}^l v_{ij} \tilde{X}_i}{\sqrt{\lambda_j}} = \frac{\sum_{i=1}^l a_{ij} \tilde{X}_i}{\lambda_j}, j = 1, \dots, l. \quad (3.11)$$

Как правило, при моделировании случайных векторов используют k первых главных компонент, которыми описывается не менее 70% дисперсии исходных случайных величин ($k < l$) [60].

Далее приводится пример применения метода главных компонент к статистическим данным. В среде R Studio существует библиотека “HSAUR” [61] с набором статистических данных, которые использовались в качестве примера. В качестве данных были взяты результаты соревнований спортсменов разных стран мира в разных соревновательных категориях (бег с препятствиями, прыжок в высоту/длину, стрельба, бег на 200/800 метров, метание копья) и соответствующий общий результат. Таблица 3.1 представляет часть данных, полная выборка составляет 25 спортсменов.

	hurdles	highjump	shot	run200m	longjump	javelin	run800m	score
Joyner (USA)	12.69	1.86	15.80	22.56	7.27	45.66	128.51	7 291.00
John (GDR)	12.85	1.80	16.23	23.65	6.71	42.56	126.12	6 897.00
Behmer (GDR)	13.20	1.83	14.20	23.10	6.68	44.54	124.20	6 858.00
Sabl (URS)	13.61	1.80	15.23	23.92	6.25	42.78	132.24	6 540.00
Choub (URS)	13.51	1.74	14.76	23.93	6.32	47.46	127.90	6 540.00
Schulz (GDR)	13.75	1.83	13.50	24.65	6.33	42.82	125.79	6 411.00

Таблица 3.1 - Статистические данные результатов соревнований спортсменов.

По имеющимся данным можно составить корреляционную матрицу, которая отражает степень взаимосвязи результатов той или иной категории (таблица 3.2).

	hurdles	highjump	shot	run200m	longjump	javelin	run800m
hurdles	1.00	-0.81	-0.65	0.77	-0.91	-0.01	0.78
highjump	-0.81	1.00	0.44	-0.49	0.78	0.00	-0.59
shot	-0.65	0.44	1.00	-0.68	0.74	0.27	-0.42
run200m	0.77	-0.49	-0.68	1.00	-0.82	-0.33	0.62
longjump	-0.91	0.78	0.74	-0.82	1.00	0.07	-0.70
javelin	-0.01	0.00	0.27	-0.33	0.07	1.00	0.02
run800m	0.78	-0.59	-0.42	0.62	-0.70	0.02	1.00

Таблица 3.2 - Корреляционная таблица результатов по разным категориям спортивных дисциплин.

Далее, используя полученные выше формулы, производится разделение данных на главные компоненты (таблица 3.3).

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
Joyner (USA)	-4.12	-1.24	-0.37	-0.02	0.43	-0.34	0.35
John (GDR)	-2.88	-0.52	-0.90	0.48	-0.70	0.24	0.14
Behmer (GDR)	-2.65	-0.68	0.46	0.68	0.11	-0.24	-0.13
Sabl (URS)	-1.34	-0.69	-0.60	0.14	-0.45	0.09	-0.49
Choub (URS)	-1.36	-1.75	0.15	0.84	-0.69	0.13	0.24
Schulz (GDR)	-1.04	0.08	0.67	0.21	-0.74	-0.36	-0.10

Таблица 3.3 - Данные главных компонент статистических данных таблицы 3.1.

Как было ранее сказано, каждая следующая компонента вносит меньший вклад в дисперсию, рисунок 3.1 отображает данный факт, из него видно, что первая компонента описывает 63.718% всей дисперсии начальных данных, две компоненты уже описывают 80.78% дисперсии, что дает возможность компактифицировать исходную размерность пространства $l = 7$ в подпространство размерности $k = 2$, то есть плоскость. На рисунке 3.2 видно, что первая компонента позволяет узнать количество результирующих очков спортсмена при отсутствии информации об изначальном способе подсчета данных. Корреляция между первой компонентой и суммой баллов составляет -0.9912.

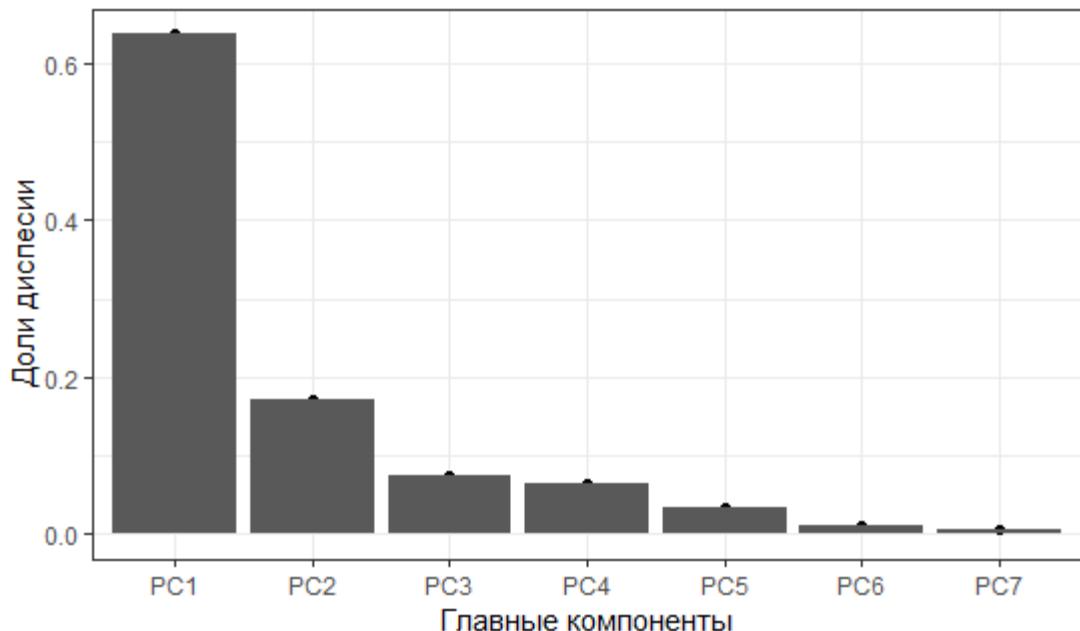


Рисунок 3.1 - Доли дисперсии, объясняемые главными компонентами.

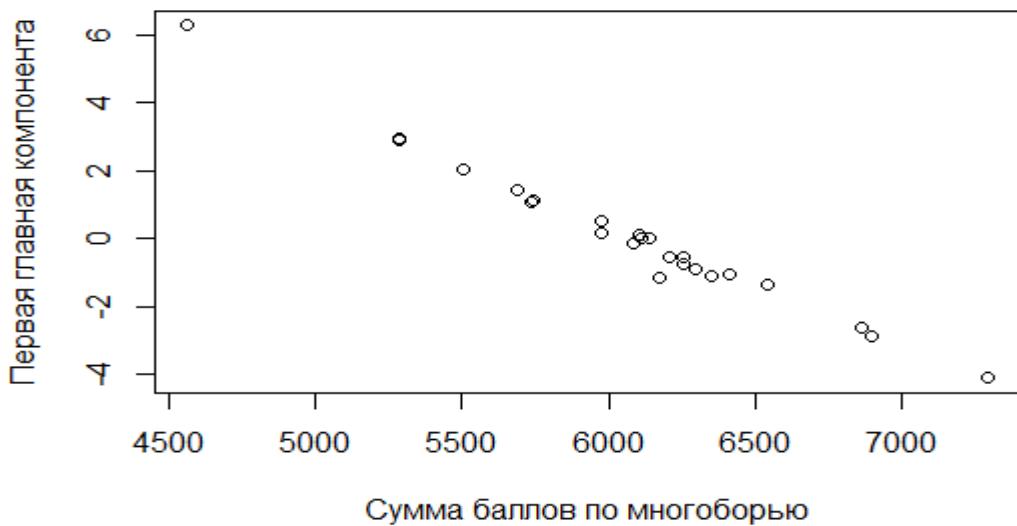


Рисунок 3.2 - График разброса между суммой полученных баллов и первой главной компонентой.

На рисунке 3.3 представлена упомянутая выше компактификация, из нее видно, что векторы longjump и hurdles имеют практически разнонаправленное положение относительно первой компоненты, таким образом можно сделать вывод, что данные дисциплины коррелированы с коэффициентом корреляции близком к -1, в действительности данный коэффициент (таблица 3.2) составляет -0.91. Таким образом можно восстановить ковариационную матрицу исходных данных (7-ми дисциплин), которая несет в себе информацию о исходных случайных величинах.

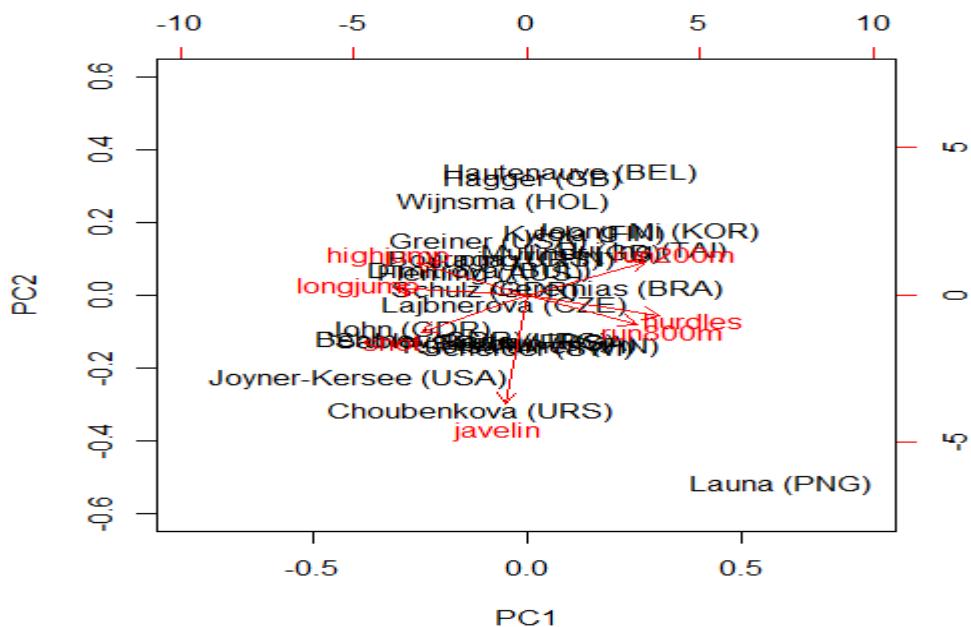


Рисунок 3.3 - Результат компактификации 7 –ми мерного исходного пространства на плоскость.

3.3 Риск нейтральная динамика портфеля активов при использовании метода главных компонент

Описанный выше метод главных компонент позволяет существенно упростить процесс моделирования случайного вектора. Первым существенным преимуществом является то, что полученные компоненты являются некоррелированными случайными величинами. Поэтому каждую компоненту можно моделировать независимо, используя *ARIMA* – *GARCH* модель. Это позволяет свести задачу поиска оптимальных параметров многомерной *ARIMA* – *GARCH* модели к ряду оптимизационных задач по поиску оптимальных одномерных *ARIMA* – *GARCH* процессов. Таким образом отпадает необходимость моделировать ковариации случайных процессов. Также, при помощи компактификации исходного пространства (см. рис. 3.3) можно избавиться от необходимости моделирования части компонент, что дополнительно облегчает исходную задачу. В данном разделе предлагается объединить результаты Главы 2 и аппарат метода главных компонент для получения риск-нейтральных коэффициентов *ARIMA* – *GARCH* модели главных компонент портфеля активов.

Как и ранее, рассматривается случайный процесс $Y_t^j = \ln \left(\frac{s_t^j}{s_{t-1}^j} \right)$, где $j = 1, \dots, l$ – номер базового актива в общем портфеле активов. Используя метод главных компонент, можно получить компоненты X_t^i , которые при помощи матрицы коэффициентов $A = (\alpha_j^i)$ восстанавливают динамику исходного случайного процесса: $Y_t^j = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i X_t^i$, где m – общее количество компонент X_t^i в случае сокращения размерности исходного случайного вектора $m < l$. Каждая компонента (случайный процесс) описывается моделью *ARIMA*(p, d, q) – *GARCH*(P, Q).

$$\begin{cases} X_t^i = m_t^i + \epsilon_t^i \\ \epsilon_t^i = \sqrt{h_t^i} \varepsilon_t^i, \quad \varepsilon_t^i \sim iid(0,1) \\ m_t^i = \phi_0^i + \phi_1^i X_{t-1}^i + \dots + \phi_p^i X_{t-p}^i + \theta_1^i \epsilon_{t-1}^i + \dots + \theta_q^i \epsilon_{t-q}^i \\ h_t^i = \alpha_0^i + \alpha_1^i h_{t-1}^i + \dots + \alpha_p^i h_{t-p}^i + \beta_1^i \epsilon_{t-1}^{i^2} + \dots + \beta_Q^i \epsilon_{t-Q}^{i^2} \end{cases} \quad (3.12)$$

В Главе 1 было описано, что переход к риск-нейтральной динамике случайного процесса Y_t^j происходит согласно выражению (1.8): $M_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c) = e^{-\Lambda_t^j c} M_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(c)$, где $\Lambda_t^j = -r_j + \ln(M_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(1))$. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайного процесса Y_t^j относительно риск-нейтральной меры \mathbb{Q} с помощью производящей функции моментов:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y_t^j | \mathcal{F}_{t-1}] &= \left. \frac{dM_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c)}{dc} \right|_{c=0} = \left. \left(-\Lambda_t^j e^{-\Lambda_t^j c} M_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(c) + e^{-\Lambda_t^j c} \frac{dM_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(c)}{dc} \right) \right|_{c=0} = \\ &= -\Lambda_t^j + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Y_t^j | \mathcal{F}_{t-1}], \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 M_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c)}{dc^2} \right|_{c=0} &= \left. \left(-\Lambda_t^j e^{-\Lambda_t^j c} M_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(c) + e^{-\Lambda_t^j c} \frac{dM_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(c)}{dc} \right)' \right|_c = \\ &= \Lambda_t^{j^2} - 2\Lambda_t^j \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Y_t^j | \mathcal{F}_{t-1}] + \left. \frac{d^2 M_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c)}{dc^2} \right|_{c=0}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} Var^{\mathbb{Q}}[Y_t^j | \mathcal{F}_{t-1}] &= \left. \frac{d^2 M_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c)}{dc^2} \right|_{t=0} - \left(\left. \frac{M_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c)}{dc} \right|_{c=0} \right)^2 = \\ &= \Lambda_t^{j^2} - 2\Lambda_t^j \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Y_t^j | \mathcal{F}_{t-1}] + \left. \frac{d^2 M_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c)}{dc^2} \right|_{c=0} - \left(-\Lambda_t^j + \left. \frac{dM_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(c)}{dc} \right|_{c=0} \right)^2 \\ &= \left. \frac{d^2 M_{Y_t^j}^{\mathbb{Q}}(c)}{dc^2} \right|_{c=0} - \left. \frac{dM_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(c)}{dc} \right|_{c=0}^2 = Var^{\mathbb{P}}[Y_t^j | \mathcal{F}_{t-1}]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из $Y_t^j = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i X_t^i$ и некоррелированности компонент, очевидны следующие соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Y_t^j | \mathcal{F}_{t-1}] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\sum_{i=1}^m \alpha_j^i X_t^i | \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X_t^i | \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i m_t^i, \\ Var^{\mathbb{P}}[Y_t^j | \mathcal{F}_{t-1}] &= Var^{\mathbb{P}}[\sum_{i=1}^m \alpha_j^i X_t^i | \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{i=1}^m \alpha_j^{i^2} Var^{\mathbb{P}}[X_t^i | \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{i=1}^m \alpha_j^{i^2} h_t^i. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из выражений (1.24, 1.25) Главы 1 видно, что случайная ошибка *ARIMA – GARCH* модели при преобразовании расширенного принципа Гирсанова не меняется, таким образом можно получить закон линейного преобразования ошибки базового актива через ошибки компонент. Для этого заметим, что из того, что $Y_t^j = \sum_{i=1}^m \alpha_j^i X_t^i$, следует, что базовый актив будет также описываться *ARIMA – GARCH* процессом

$$Y_t^j = M_t^j + \Omega_t^j E_t^j, \quad (3.17)$$

где M_t^i и Ω_t^i соответствуют выражениям (3.13). Тогда очевидно, что случайная ошибка модели динамики базового актива имеет вид

$$E_t^j = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_j^i \sqrt{h_t^i \varepsilon_t^i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \alpha_j^i h_t^i}}. \quad (3.18)$$

Легко убедиться, что полученная ошибка имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию равную единице. Таким образом выполняется условие ошибок *ARIMA* – *GARCH* модели (см. (3.12)). Объединяя выражения (3.13, 3.15 – 3.18), получим риск-нейтральную *ARIMA*(p, d, q) – *GARCH*(P, Q) модель динамики базовых активов Y_t^j ,

$$Y_t^j = -\Lambda_t^j + \sum_{i=1}^m \alpha_j^i m_t^i + \sqrt{\sum_{i=1}^m \alpha_j^i h_t^i} E_t^j, \quad E_t^j = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_j^i \sqrt{h_t^i \varepsilon_t^i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \alpha_j^i h_t^i}} \Big|_{\mathcal{F}_{t-1}} \sim iid(0,1). \quad (3.19)$$

Подставляя в выражение (3.19) $\Lambda_t^j = -r_j + \ln(M_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(1))$, можно получить динамику базового актива по динамикам компонент. Остается открытым вопрос нахождения $M_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(1)$, получить аналитическое выражение можно было бы, если компоненты были независимыми случайными процессами, тогда производящая функция моментов Y_t^j сводилась бы к выражению

$$M_{Y_t^j}^{\mathbb{P}}(1) = \prod_{i=1}^m M_{X_t^i}^{\mathbb{P}}(\alpha_j^i). \quad (3.20)$$

Однако компоненты являются линейно независимыми, что не дает возможности вывести аналитический вид производящей функции моментов Y_t^j , так как требуется знать совместную плотность распределения компонент. Первым способом решения возникшей проблемы является статистическая оценка производящей функции моментов по полученным реализациям Y_t^j относительно физической метрики. Другим способом является использование полученных в Главе 2 результатов модификации расширенного принципа Гирсанова. Напомним, что переход от физической меры к риск-нейтральной для предложенной модификации расширенного принципа Гирсанова имеет вид

$$M_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{Q}}(c) = e^{-\frac{\mu_t c}{1+\mu_t}} M_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}\left(\frac{c}{1+\mu_t}\right),$$

где $\mu_t = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\tilde{Y}_t + 1 | \mathcal{F}_{t-1}]}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n} - 1$, n – количество начислений за год безрисковой ставки процента, $\tilde{Y}_t^j = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$. Тогда, проводя аналогичные вычисления, сделанные в выражениях (3.13 – 3.15), получим условные математическое ожидание и дисперсию в риск-нейтральной мере [28]:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t^j | \mathcal{F}_{t-1}] &= \left(1 + \frac{r_j}{n}\right)^n - 1, \\ Var^{\mathbb{Q}}[\tilde{Y}_t^j | \mathcal{F}_{t-1}] &= \left(\frac{\left(1 + \frac{r_j}{n}\right)^n}{1 + \sum_{i=1}^m \alpha_j^i m_t^i}\right)^2 \sum_{i=1}^m \alpha_j^{i^2} h_t^i.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Тогда уравнение динамики базового актива (3.19) примет вид [28]

$$\tilde{Y}_t^j = \left(1 + \frac{r_j}{n}\right)^n - 1 + \left(\frac{\left(1 + \frac{r_j}{n}\right)^n}{1 + \sum_{i=1}^m \alpha_j^i m_t^i}\right) \sqrt{\sum_{i=1}^m \alpha_j^{i^2} h_t^i E_t^i}.\tag{3.22}$$

Выражение (3.22) уже не зависит от производящей функции моментов, что дает возможность, зная оценки параметров *ARIMA – GARCH* моделей главных компонент, безрисковые процентные ставки базовых активов, частоту их начисления и коэффициенты матрицы перехода от базовых активов к компонентам, получить риск-нейтральную динамику цен базовых активов.

3.4 Алгоритм численного решения задачи генерации риск-нейтрального процесса изменения цены базового актива

1. Для доходностей базовых активов \tilde{Y}_t^j , $j = \overline{1:l}$ найти матрицу перехода α_j^i от доходностей \tilde{Y}_t^j к главным компонентам X_t^i , $\overline{1:l}$. Выбрать количество компонент $m \leq l$, которые описывают не менее $k\%$ исходной дисперсии.
2. Для каждой из m моделей главных компонент оценить коэффициенты ARIMA-GARCH модели.
3. Сгенерировать N траекторий главных компонент до момента экспирации каждого из опционных контрактов.
4. Используя формулу (3.22) перейти от сценариев главных компонент к сценариям доходностей базовых активов.
5. Используя сценарии доходностей базовых активов, восстановить риск-нейтральные цены базовых активов вплоть до момента экспирации соответствующих опционных контрактов.

3.5 Выводы

В данной главе приведены теоретические выкладки, позволяющие находить риск-нейтральную динамику портфеля активов, а также понижать размерность исходной задачи. За основу были взяты метод главных компонент и расширенный принцип Гирсанова. Разложение исходного вектора случайных процессов на главные компоненты позволяет

проводить моделирование главных компонент независимо друг от друга. Однако прямое применение расширенного принципа Гирсанова к ARIMA-GARCH процессам главных компонент невозможно, в силу отсутствия понятия риск-нейтральной ставки для главных компонент. Однако из полученных формул (3.19) видно, что после восстановления исходного вектора случайных процессов вновь получаются ARIMA-GARCH процессы базовых активов, со взвешенными условными математическими ожиданиями и условными дисперсиями главных компонент. Ошибки базовых активов ARIMA-GARCH процессов также, как и ошибки ARIMA-GARCH процессов главных компонент удовлетворяют условиям нормировки (нулевое математическое ожидание и дисперсию равную единице). Таким образом расширенный принцип Гирсанова можно применить к ARIMA-GARCH процессам базовых активов. Однако возникает сложность вычисления производящей функции моментов базовых активов, так как главные компоненты не независимы, а лишь некоррелированы. Применение модификации расширенного принципа Гирсанова решает данную проблему, и позволяет получить окончательную формулу для нахождения риск-нейтральных коэффициентов базовых активов (3.22), необходимых для применения метода Монте-Карло для решения задачи оценки стоимости/риска метрик опционных контрактов. Оценка стоимостей портфеля опционных контрактов классическим методом Монте-Карло потребовала бы построения для каждого базового актива (портфеля опционных контрактов) риск-нейтральной ARIMA-GARCH модели, что привело бы к необходимости решения серии из l оптимизационных задач калибровки параметров. Модификация метода (алгоритм численного решения задачи генерирования риск-нейтральных цен базовых активов) позволяет снизить количество оптимизационных задач до $m \leq l$. При большом количестве базовых активов l величина m может быть сильно меньше, что дает значительный прирост в скорости работы алгоритма.

ГЛАВА 4 Численные эксперименты оценки справедливой стоимости опционов

На финансовых рынках одним из главных принципов ценообразования финансового инструмента выступает безарбитражность [62], т.е. отсутствие возможности получения безрисковой прибыли при нулевых затратах. Свойству безарбитражности рынка отвечает существование риск-нейтральной вероятностной меры. Полный рынок характеризуется наличием единственной риск-нейтральной меры, неполный рынок имеет множество подобных мер [63-65]. Основным методом оценки справедливой стоимости опционных контрактов европейского типа является формула Блэка – Шоулза [13]. Данная формула отвечает полному рынку и имеет единственную риск-нейтральную меру. Альтернативным способом является метод Монте-Карло [37], который предполагает моделирование динамики базового актива на основе риск-нейтральной меры, и на основе полученных реализаций, статистическую оценку опционного контракта.

4.1 Введение. Постановка задачи

В рамках данной главы рассматривается задача реализации комплекса программ, предназначенных для решения ряда задач:

1. Калибровка параметров риск-нейтральных коэффициентов ARIMA-GARCH моделей на основе квази-максимального правдоподобия для моделей с ошибками, имеющими нормальное распределение и обобщенное экспоненциальное бета распределения второго типа (согласно формулам 1.24, 1.25), распределение S_u Джонсона (2.22);
2. Оценка справедливой стоимости опционных контрактов (на разные базовые активы и разные сроки) европейского типа методом Монте-Карло;
3. Сравнение полученных результатов.

4.2 Калибровка параметров ARIMA-GARCH моделей и статистические тесты

В диссертационной работе рассматриваются три распределения ошибок ARIMA-GARCH моделей: нормальное распределение, обобщенное экспоненциальное бета распределение второго типа и распределение S_u Джонсона. В данном разделе для указанных распределений приводятся оценки параметров $ARMA(p, q) - GARCH(P, Q)$

моделей. В качестве метода калибровки параметров был выбран метод квазимаксимального правдоподобия (Quasi-Maximum Likelihood method, QML) [66-68], являющийся условным методом, так как решение зависит от начальных значений оптимизируемых параметров моделей. Напомним, что модель $ARMA(p, q) - GARCH(P, Q)$ имеет вид

$$\begin{cases} Y_t = m_t + \epsilon_t \\ \epsilon_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0,1) \\ m_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} \\ h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \dots + \alpha_P h_{t-P} + \beta_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + \beta_Q \epsilon_{t-Q}^2 \end{cases}$$

Рассмотрим случай нормального распределения ($\varepsilon_t \sim N(0,1)$). Пусть имеется реализация случайного процесса ϵ_t , на основе данных реализаций необходимо подобрать параметры $v = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_P, \beta_1, \dots, \beta_Q)$, обеспечивающие максимум функции правдоподобия случайного процесса ϵ_t . Функция правдоподобия случайного процесса ϵ_t является произведением функции плотности распределения в каждой точке реализации процесса ϵ_t . Так как ε_t имеет нормальное распределение с параметрами 0, 1, случайный процесс будет также иметь нормальное распределение с параметрами 0, h_t . Тогда функция правдоподобия примет вид

$$\begin{aligned} L_n(v) &= L_n(v, \epsilon_1, \dots, \epsilon_T) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{-\frac{\epsilon_t^2}{2h_t}}, \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \dots + \alpha_P h_{t-P} + \beta_1 \epsilon_{t-1}^2 + \dots + \beta_Q \epsilon_{t-Q}^2, \\ \alpha_0 &> 0, \alpha_1, \dots, \alpha_P, \beta_1, \dots, \beta_Q \geq 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

В силу монотонности функции натурального логарифма вместо функции правдоподобия обычно рассматривают натуральный логарифм данной функции $(\ln(L_n(v)) = \sum_{t=1}^T \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} e^{-\frac{\epsilon_t^2}{2h_t}}\right) = -\sum_{t=1}^T \left(\frac{\epsilon_t^2}{h_t} + \ln(h_t)\right)$, тогда задачу поиска параметров \hat{v}_n $ARMA(p, q) - GARCH(P, Q)$ модели можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{v}_n &= \arg \min_{v \in \Theta} -\ln(L_n(v)) = \arg \min_{v \in \Theta} \sum_{t=1}^T \left(\frac{\epsilon_t^2}{h_t} + \ln(h_t)\right), \\ &\quad \sum_{i=1}^P \alpha_i + \sum_{j=1}^Q \beta_j < 1, \\ \alpha_0 &> 0, \alpha_1, \dots, \alpha_P, \beta_1, \dots, \beta_Q \geq 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Рассмотрим случай обобщенного Бетта распределения второго типа. Как описывалось выше, если случайная величина $\varepsilon_t \sim EGB2(\varepsilon_t, \alpha, \beta, \bar{\delta}, \bar{\mu})$, то случайная величина $\epsilon_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \sim EGB2(\epsilon_t, \alpha, \beta, \bar{\delta} \sigma_t, \bar{\mu} \sigma_t)$. Выпишем натуральный логарифм функции плотности распределения случайного процесса ϵ_t :

$$\begin{aligned}
\ln(f(\epsilon_t, \alpha, \beta, \bar{\delta} \sqrt{h_t}, \bar{\mu} \sqrt{h_t})) &= \ln\left(\frac{1}{\bar{\delta} \sqrt{h_t} B(\alpha, \beta)} \frac{\left(\exp\left(\frac{\epsilon_t - \bar{\mu} \sqrt{h_t}}{\bar{\delta} \sqrt{h_t}}\right)\right)^\alpha}{\left(1 + \exp\left(\frac{\epsilon_t - \bar{\mu} \sqrt{h_t}}{\bar{\delta} \sqrt{h_t}}\right)\right)^{\alpha+\beta}}\right) = \\
&= -\ln(\bar{\delta} \sqrt{h_t}) - \ln(B(\alpha, \beta)) + \alpha \left(\frac{\epsilon_t - \bar{\mu} \sqrt{h_t}}{\bar{\delta} \sqrt{h_t}}\right) \\
&\quad - (\alpha + \beta) \ln\left(1 + \exp\left(\frac{\epsilon_t - \bar{\mu} \sqrt{h_t}}{\bar{\delta} \sqrt{h_t}}\right)\right); \mathbb{E}[\epsilon_t] = 0, \text{Var}[\epsilon_t] = h_t \Rightarrow \\
&\Rightarrow \bar{\mu} \sqrt{h_t} + \bar{\delta} \sqrt{h_t} \varpi(\alpha, \beta) = 0 \Rightarrow \bar{\mu} = -\frac{\varpi(\alpha, \beta)}{\sqrt{l(\alpha, \beta)}}; \bar{\delta}^2 h_t l(\alpha, \beta) = h_t \Rightarrow \bar{\delta} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{l(\alpha, \beta)}}, \\
\ln(L_n(v)) &= \sum_{t=0}^T \left(\ln(\sqrt{l(\alpha, \beta)}) - \ln(\sqrt{h_t}) - \ln(B(\alpha, \beta)) + \alpha \left(\frac{\epsilon_t + \frac{\sqrt{h_t} \varpi(\alpha, \beta)}{\sqrt{l(\alpha, \beta)}}}{\frac{\sqrt{h_t}}{\sqrt{l(\alpha, \beta)}}} \right) \right. \\
&\quad \left. - (\alpha + \beta) \ln\left(1 + \exp\left(\frac{\epsilon_t + \frac{\sqrt{h_t} \varpi(\alpha, \beta)}{\sqrt{l(\alpha, \beta)}}}{\frac{\sqrt{h_t}}{\sqrt{l(\alpha, \beta)}}}\right)\right) \right) = \\
&= \sum_{t=0}^T \left(\ln(\sqrt{l(\alpha, \beta)}) - \ln(B(\alpha, \beta)) + \alpha \varpi(\alpha, \beta) + \frac{\alpha \epsilon_t \sqrt{l(\alpha, \beta)}}{\sqrt{h_t}} - \ln(\sqrt{h_t}) \right. \\
&\quad \left. - (\alpha + \beta) \ln\left(1 + \exp\left(\frac{\epsilon_t \sqrt{l(\alpha, \beta)}}{\sqrt{h_t}} + \varpi(\alpha, \beta)\right)\right) \right).
\end{aligned}$$

В конечном итоге задача поиска параметров $v = (\alpha, \beta, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)$ для распределения $EGB2$ принимает вид [27]

$$\begin{aligned}
\hat{v}_n &= \arg \min_{v \in \Theta} -\ln(L_n(v)) = \\
&= \arg \min_{v \in \Theta} \sum_{t=0}^T \left(-\ln(\sqrt{l(\alpha, \beta)}) + \ln(B(\alpha, \beta)) - \alpha \varpi(\alpha, \beta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha \epsilon_t \sqrt{l(\alpha, \beta)}}{\sqrt{h_t}} + \ln(\sqrt{h_t}) \right. \\
&\quad \left. + (\alpha + \beta) \ln \left(1 + \exp \left(\frac{\epsilon_t \sqrt{l(\alpha, \beta)}}{\sqrt{h_t}} + \varpi(\alpha, \beta) \right) \right) \right), \\
&\quad \varpi(\alpha, \beta) = \frac{d \ln \Gamma(c)}{dc} \bigg|_{c=\alpha} - \frac{d \ln \Gamma(c)}{dc} \bigg|_{c=\alpha}, \\
&\quad l(\alpha, \beta) = \frac{d^2 \ln \Gamma(c)}{dc^2} \bigg|_{c=\alpha} + \frac{d^2 \ln \Gamma(c)}{dc^2} \bigg|_{c=\beta}, \\
&\quad \sum_{i=1}^P \alpha_i + \sum_{j=1}^Q \beta_j < 1, \\
&\quad \alpha, \beta, \alpha_0 > 0, \alpha_1, \dots, \alpha_P, \beta_1, \dots, \beta_Q \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Сформулируем оптимизационную задачу поиска параметров $ARMA(p, q) - GARCH(P, Q)$ модели для распределения S_u Джонсона:

$$\begin{aligned}
\epsilon_t \sim JSU(\epsilon_t, \bar{\xi}, \bar{\lambda}, \gamma, \delta) &\Rightarrow \epsilon_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t \sim JSU(\epsilon_t, \bar{\xi} \sqrt{h_t}, \bar{\lambda} \sqrt{h_t}, \gamma, \delta) \Rightarrow \ln(f(\epsilon_t, \bar{\xi} \sqrt{h_t}, \bar{\lambda} \sqrt{h_t}, \gamma, \delta)) \\
&= \ln(\delta) - \ln(\bar{\lambda} \sqrt{h_t}) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{\epsilon_t - \bar{\xi} \sqrt{h_t}}{\bar{\lambda} \sqrt{h_t}} \right)^2 \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\gamma + \delta \sinh^{-1} \left(\frac{\epsilon_t - \bar{\xi} \sqrt{h_t}}{\bar{\lambda} \sqrt{h_t}} \right) \right)^2; \mathbb{E}[\epsilon_t] = 0, \text{Var}[\epsilon_t] = h_t \Rightarrow \\
&\Rightarrow \bar{\xi} \sqrt{h_t} - \bar{\lambda} \sqrt{h_t} e^{\frac{1}{2\delta^2}} \sinh \left(\frac{\gamma}{\delta} \right) = 0 \Rightarrow \bar{\xi} = \\
&= \bar{\lambda} e^{\frac{1}{2\delta^2}} \sinh \left(\frac{\gamma}{\delta} \right), \frac{\bar{\lambda}^2 h_t}{2} \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} - 1 \right) \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} \cosh \left(\frac{2\gamma}{\delta} \right) + 1 \right) = h_t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Пусть } A &= \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} - 1 \right) \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} \cosh \left(\frac{2\gamma}{\delta} \right) + 1 \right), B = e^{\frac{1}{2\delta^2}} \sinh \left(\frac{\gamma}{\delta} \right) \Rightarrow h_t = \frac{\bar{\lambda}^2 h_t}{2} \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} - \right. \\
&\quad \left. - 1 \right) \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} \cosh \left(\frac{2\gamma}{\delta} \right) + 1 \right) = \frac{\bar{\lambda}^2 h_t}{2} A \Rightarrow \bar{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{A}}, \bar{\xi} = \bar{\lambda} e^{\frac{1}{2\delta^2}} \sinh \left(\frac{\gamma}{\delta} \right) = \sqrt{\frac{2}{A}} B,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln(L_n(v)) &= \sum_{t=0}^T \left(\ln(\delta) - \ln(\bar{\lambda}\sqrt{h_t}) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{\epsilon_t - \bar{\xi}\sqrt{h_t}}{\bar{\lambda}\sqrt{h_t}} \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\gamma + \delta \sinh^{-1} \left(\frac{\epsilon_t - \bar{\xi}\sqrt{h_t}}{\bar{\lambda}\sqrt{h_t}} \right) \right)^2 \right) = \\
&= \sum_{t=0}^T \left(\ln(\delta) - \ln \left(\sqrt{h_t} \sqrt{\frac{2}{A}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{\epsilon_t - \sqrt{h_t} \sqrt{\frac{2}{A}} B}{\sqrt{h_t} \sqrt{\frac{2}{A}}} \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\gamma + \delta \sinh^{-1} \left(\frac{\epsilon_t - \sqrt{h_t} \sqrt{\frac{2}{A}} B}{\sqrt{h_t} \sqrt{\frac{2}{A}}} \right) \right)^2 \right).
\end{aligned}$$

Задача поиска параметров $v = (\gamma, \delta, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)$ для распределения S_u Джонсона примет следующий вид [27]:

$$\begin{aligned}
\hat{v}_n &= \arg \min_{v \in \Theta} -\ln(L_n(v)) = \\
&= \arg \min_{v \in \Theta} \sum_{t=0}^T \left(-\ln(\delta) + \ln \left(\sqrt{\frac{2h_t}{A}} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{\epsilon_t}{\sqrt{\frac{2h_t}{A}}} - B \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\gamma + \delta \sinh^{-1} \left(\frac{\epsilon_t}{\sqrt{\frac{2h_t}{A}}} - B \right) \right)^2 \right), \tag{4.4} \\
A &= \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} - 1 \right) \left(e^{\frac{1}{\delta^2}} \cosh \left(\frac{2\gamma}{\delta} \right) + 1 \right), \\
B &= e^{\frac{1}{2\delta^2}} \sinh \left(\frac{\gamma}{\delta} \right), \\
\sum_{i=1}^P \alpha_i + \sum_{j=1}^Q \beta_j &< 1, \\
\delta, \alpha_0 &> 0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \geq 0.
\end{aligned}$$

Перечислим основные статистические тесты, которые будут использованы для анализа спецификаций моделей.

1. Тест Дики-Фуллера[69] - тест на стационарность временного ряда (наличие единичного корня). Суть теста заключается в преобразовании начального временного ряда $Y_t = aY_{t-1} +$

ϵ_t к виду $\Delta Y_t = (a - 1)Y_{t-1} + \epsilon_t = bY_{t-1} + \epsilon_t$ с последующим тестированием гипотезы $H_0: b = 0$ (ряд не стационарен). Предполагается, что процесс не является взрывным, поэтому альтернативной гипотезой является $H_1: b < 0$. Статистика теста - t -статистика проверки значимости для коэффициентов линейной регрессии, однако его распределение отличается от распределения Стьюдента, так как выражается через винеровский процесс (распределение Дики-Фуллера). Критические значения статистики Дики-Фуллера отличаются друг от друга в зависимости от выбранных моделей регрессий: **a.** Без константы и тренда, **б.** С константой, но без тренда, **в.** С константой и линейным трендом. При значении статистики меньшем чем критическое значение для выбранного уровня значимости нулевая гипотеза отвергается и ряд признается стационарным. В противном случае нулевая гипотеза не отвергается и ряд признается нестационарным (интегрированным).

Размер выборки	AR-модель	AR-модель с константой	AR-модель с константой и трендом
100	-2,60	-3,51	-4,04
∞	-2,58	-3,43	-3,96

Таблица 4.1 - Критические значения статистики Дики-Фуллера (1% уровень значимости).

Также, в случае большего количества лагов зависимости будет использован расширенный тест Дики-Фуллера, который, по аналогии с обычным тестом Дики-Фуллера, основывается на преобразовании исходного ряда к первым разностям, т.е. $Y_t = a_1Y_{t-1} + a_2Y_{t-2} + \epsilon_t \rightarrow \Delta Y_t = (a_1 + a_2 - 1)Y_{t-1} - a_2\Delta Y_{t-1} + \epsilon_t$, тогда по причине предполагаемого наличия единичного корня, ряд из первых разностей должен быть стационарен, отсюда вытекает необходимое равенство $a_1 + a_2 - 1 = 0$. Таким образом, гипотеза о наличие единичного корня в случае двух лагов примет вид $H_0: a_1 + a_2 - 1 = 0$ (ряд не стационарен).

2. Q-тест Льюнга-Бокса [70] – статистический тест для нахождения автокорреляции временных рядов. Нулевая гипотеза $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$ (данные являются случайными, т.е. белым шумом), альтернативная гипотеза $H_1: \text{данные не являются случайными}$. Статистика находится по формуле

$$Q = n(n + 2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{n - k}, \quad (4.5)$$

где n – число наблюдений, $\hat{\rho}_k$ – автокорреляция k –го порядка, m – число проверяемых лагов. Данная статистика имеет распределение хи-квадрат с m степенями свободы ($\chi^2_{1-\alpha, m}$). В случае $Q > \chi^2_{1-\alpha, m}$ нулевая гипотеза отвергается и делается вывод о возможном (с вероятностью $1 - \alpha$) наличии автокорреляции до m –го порядка в исходном временном ряду. Для анализа был выбран именно тест Льюнга-Бокса, а не тест Бокса-Пирса, так как первый остается состоятельным в случае, если случайный процесс не имеет нормального распределения (при условии конечности дисперсии).

3. Информационные критерии Акайке (AIC) [71;72] и Байеса (BIC) [73]. Оба критерия позволяют делать выбор между несколькими статистическими моделями. Основной предпосылкой к созданию критерия послужила задача оценки качества прогноза моделей по тестовой выборке при уже известном наборе обучающих данных (предполагается, что модель оценивается по методу максимального правдоподобия). Таким образом, критерий призван оценивать эффект переобучения модели (в основе критерия лежит расстояние Кульбака-Лейблера),

$$\begin{aligned} AIC &= 2k - 2 \ln(L_n(\hat{\theta})), \\ BIC &= k \ln(N) - 2 \ln(L_n(\hat{\theta})), \end{aligned} \tag{4.6}$$

где N – объем выборки, k – количество параметров, $L_n(\hat{\theta})$ – значение функции правдоподобия для найденных оптимальных параметров $\hat{\theta}$.

В качестве пакетных средств реализации оптимизационных задач 4.2, 4.3, 4.4 и статистических тестов Дики-Фуллера, Q-теста Льюнга-Бокса и информационного критерия Акайке / Байеса использовался язык программирования для статистической обработки данных R. Пакет “Rsolnp” [74] предназначен для решения нелинейных оптимизационных задач методом множителей Лагранжа [75]:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ g(x) = 0, l_h \leq h(x) \leq u_h, l_x \leq x \leq u_x, \end{aligned}$$

пакет “MASS” [76] – для решения задач прикладной статистики. Основной код программы оценки параметров риск-нейтральных аналогов ARIMA-GARCH моделей и оценки стоимостей опционов был реализован также в среде R. (исходных код доступен в приложении А).

4.3 Спецификация моделей ARIMA-GARCH. Оценка стоимости опционов.

Сравнение эффективности моделей

Данные для проведения численных экспериментов состоят из шести однотипных наборов цен опционов. Все расчеты проводились на 03 июня 2019 года. По дате экспирации, опционы были поделены на самые ближние и дальние, имеющиеся на рынке.

Первый набор данных представлен опционами на фондовый индекс DAX (Deutscher Aktienindex). Индекс DAX является важнейшим фондовым индексом Германии, данный индекс вычисляется как средневзвешенное по капитализации значение цен акций (находящихся в свободном обращении) крупнейших компаний Германии. Индекс отражает суммарный доход по капиталу, поэтому при его расчете учитываются полученные дивидендные доходы по акциям, которые, как предполагается, реинвестируются в акцию, по которой был получен дивиденд. Рассматривается 19 call и put опционов, величина страйка которых варьируется от 9 400 до 13 000 пунктов с шагом 200. Базовым активом выступает фьючерс с датой экспирации, соответствующей дате экспирации самого опциона. Дата экспирации ближайших опционов - 22 июня 2019 года, а дальних – 22 декабря 2023 года. Валюта – евро. Данные были взяты с сайта <https://www.eurexchange.com/exchange-en/products/idx/dax/DAX-Options-139884>.

Второй набор данных состоит из 20 call/put опционов на фондовый индекс SMI (Swiss Market Index). SMI является ключевым фондовым индексом Швейцарии. Данный индекс включает в себя 20 крупнейших компаний, акции которых торгуются на Швейцарской бирже. Страйк находится в диапазоне от 2 400 до 2 590 пунктов с шагом 10. Базовый актив также является фьючерсом на индекс с соответствующей датой экспирации. Дата погашения коротких опционов – 22 июня 2019 года, длинных – 22 декабря 2020 года. Валюта – швейцарский франк. Данные брались с сайта <https://www.eurexchange.com/exchange-en/products/idx/smi/SMIM-Options-253576>.

Третий набор данных – 10 put/call опционов на курс британского фунта к американскому доллару (British Pound / US Dollar). Страйк находится в диапазоне от 124 до 133 (величина лота составляет 100). Базовый актив – фьючерсный контракт на курс британского фунта к американскому доллару. Ближайшая дата экспирации – 22 июня 2019 года, самая дальняя дата экспирации 22 марта 2020 года. Валюта – доллар США. Источник данных – <https://derivatives.euronext.com/en/products/currency-options/PDX-DAMS/contract-specification>.

Четвертый набор данных представлен 9 put/call опционами на курс британского фунта к евро (British Pound / Euro). Страйк лежит в диапазоне от 111 до 119 (величина лота составляет 100) с шагом 1. Базовым активом выступает фьючерс на курс британского фунта к евро. Ближайшая дата – 22 июня 2019 года, дальняя – 22 марта 2020 года. Валюта – евро. Данные были взяты с сайта <https://derivatives.euronext.com/en/products/currency-options/PEX-DAMS/contract-specification>.

В пятый набор данных входят 10 put/call опционов на фьючерс, базовым активом которого выступает нефть (Light Sweet Crude Oil). Величина страйка варьируется от 51.0 до 55.5 USD за баррель нефти с шагом 0.5. Дата экспирации коротких опционов – 20 июля 2019 года, длинных – 22 июня 2020 года. Валюта – доллар США. Источник данных: http://www.cmegroup.com/trading/energy/natural-gas/natural-gas_contractSpecs_options.html?optionProductId=1352#optionProductId=1352.

Шестой набор данных состоит из 8 put/call опционов на фьючерсный контракт, базовым активом которого является природный газ (Natural Gas). Страйк находится в диапазоне от 2 250 до 2 500 USD/БТЕ с переменным шагом. Ближайшая дата экспирации 20 июля 2019 года, дальняя – 22 июля 2020 года. Валюта – доллар США. Данные были взяты с сайта http://www.cmegroup.com/trading/energy/crude-oil/light-sweet-crude_contractSpecs_options.html?optionProductId=1353#optionProductId=1353

В представленных данных фигурируют три вида валют (доллар США, евро и швейцарский франк), соответственно, при расчете справедливой стоимости опционов используются три безрисковые процентные ставки LIBOR (London Interbank Offered Rate). LIBOR – средневзвешенная процентная ставка по межбанковским кредитам, представляемым банками лондонском межбанковском рынке. Ставка LIBOR зависит от валюты и срока, на который представляется кредит одним банком другому, при этом срок варьируется от 1 дня (overnight) до 12 месяцев. Так как исходные данные базовых активов брались с дневным тиком, то ставка либор была выбрана сроком на день. На дату расчета (03 июня 2019 года) ставка CHF LIBOR составляла -0,80560%, USD LIBOR 2,36075%, EUR LIBOR -0,46614%.

Напомним, что в рамках диссертации оценка справедливой стоимости опционов проводится по методу Монте-Карло. Как упоминалось ранее, европейские call и put опционы с ценой исполнения X и стоимостью базового актива в день экспирации T характеризуются функциями выплат $b_c(S_T, X) = \max(S_T - X, 0)$, $b_p(S_T, X) = \max(X - S_T, 0)$ [77]. Тогда стоимость опционов определяется как среднее значение соответствующей

функции выплаты относительно риск-нейтральной меры \mathbb{Q} , приведенное к текущему моменту времени [78],

$$call/put = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[b_{c/p}(S_T, X)]}{(1+r)^T} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[b_{c/p}(S_T, X) \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right]}{(1+r)^T}, \quad (4.7)$$

где $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ – производная Радона-Никодима риск-нейтральной меры (в рамках данной работы это мера, полученная на основе расширенного принципа Гирсанова) относительно физической меры \mathbb{P} . Метод Монте-Карло позволяет по реализациям построенного $ARIMA - GARCH$ процесса произвести оценку среднего значения относительно физической меры \mathbb{P} [78]:

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M b_{c/p}(S_T, X) \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(m) \xrightarrow[M \rightarrow \infty]{P} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[b_{c/p}(S_T, X) \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right]. \quad (4.8)$$

Число траекторий реализации $ARIMA - GARCH$ процесса $M = 100\,000$ для ближайшей даты экспирации и $M = 10\,000$ для дальней даты. Эффективность каждой $ARIMA - GARCH$ модели оценивается по абсолютной ошибке (AE)

$$AE(Moneyness) = |call^m/put^m(Moneyness) - call/put(Moneyness)|, \quad (4.9)$$

где $call^m/put^m$ – рыночные котировки опциона call или put, $Moneyness = \frac{X}{S_0}$ – денежность опциона.

Опционы на индекс DAX

Исходные данные представлены значениями фондового индекса от 02 июня 2017 года до 03 июня 2019 года (объем выборки $N = 503$). На рисунке 4.1 на графике “Daily Return 1” отображены значения $Y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$, на графике “Daily Return 2” значения $\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-1} - 1$. Оба графика показывают, что данные ряды стационарны, данный факт подтверждается и расширенным тестом Дики-Фуллера (ADF):

Данные	Значение статистики	Критическое значение статистики (1%)
$Y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$	-8.3588	-3.96
$\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-1} - 1$	-8.373	-3.96

Таблица 4.2 - Результаты Расширенного теста Дики-Фуллера (DAX).

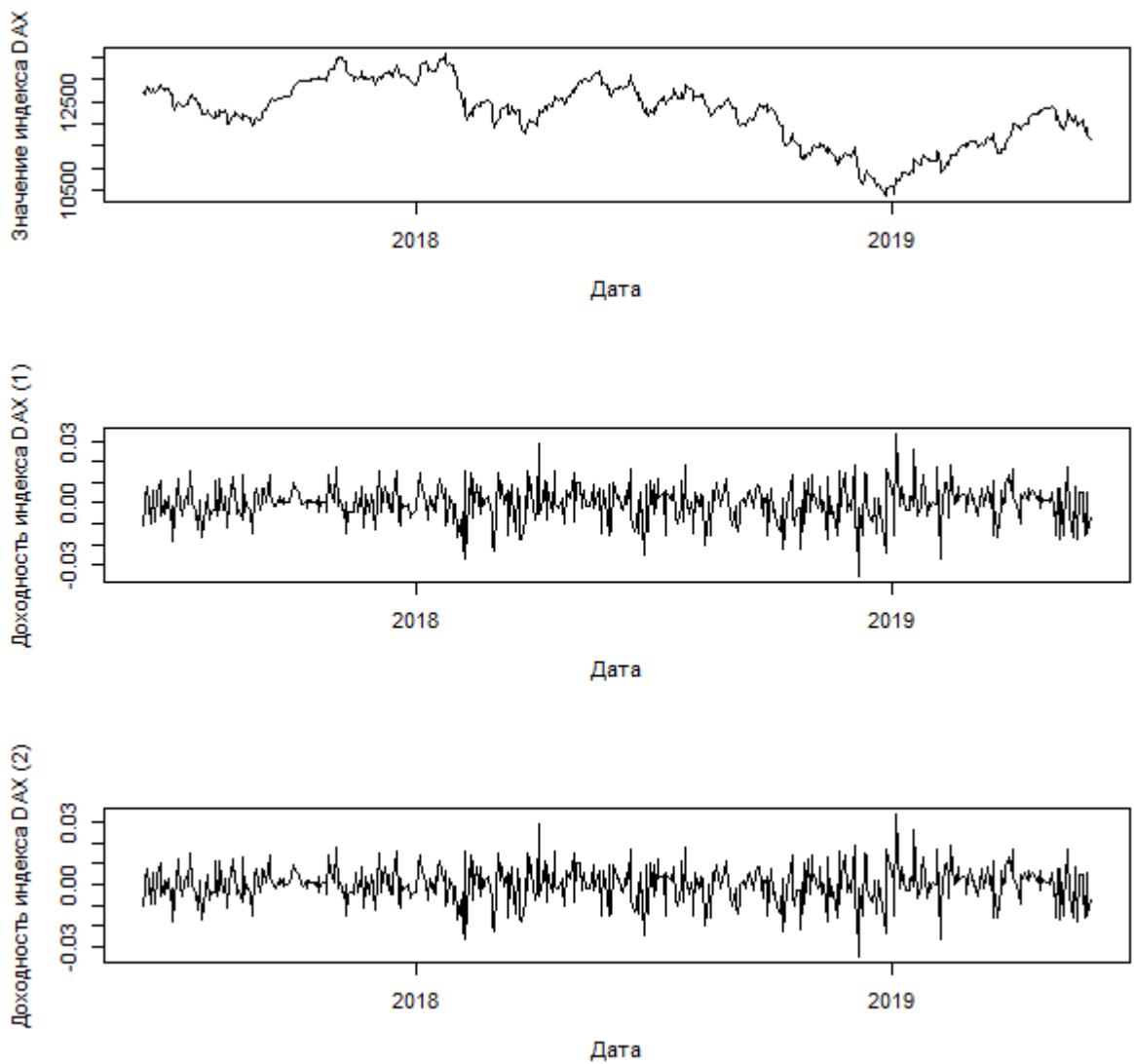


Рисунок 4.1 - Графики стоимости и доходностей Y_t (1), \tilde{Y}_t (2) фондового индекса DAX на конец дня (06.06.2017-03.06.2019).

Видно, что поведение Y_t и \tilde{Y}_t схожи, это связано с тем, что в первом приближении данные функции близки друг другу.

Для определения спецификации ARIMA-GARCH модели проанализируем графики автокорреляции ACF и частной автокорреляции PACF. Графический анализ по рисунку 4.2 позволяет сделать вывод об отсутствии автокорреляции, также приведем данные Q-теста Льюнга-Бокса (табл. 4.3).

Данные	Значение статистики	$\chi^2_{99\%,30}$
$Y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$	30.123	50.892
$\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-1} - 1$	30.251	50.892

Таблица 4.3 - Результаты Q-теста Льюнга-Бокса для 30 лагов (DAX).

Значение статистики для Y_t и \tilde{Y}_t меньше критического значения, следовательно, с вероятностью 99% автокорреляция меньше 30 –го порядка в исходных временных рядах отсутствует. Преобразуем исходные временные ряды к виду $Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$ и $\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$, то есть проверим зависимость не дневных доходностей, а доходностей за два дня. Причем, если в первом случае объем выборки составлял $N - 1$, то в данном случае, объем выборки составит уже $N - 2$:

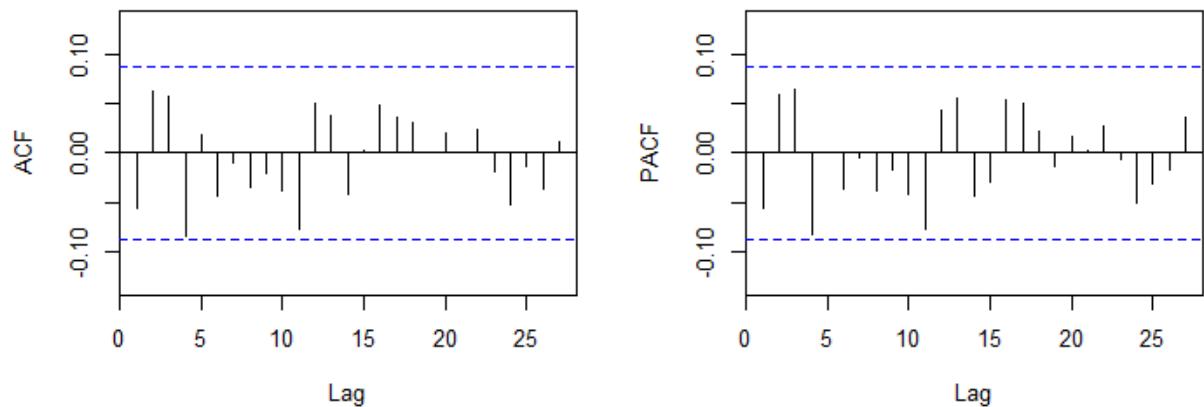


Рисунок 4.2 - Графики ACF и PACF для Y_t (DAX).

На рисунке 4.3 изображены графики ACF и PACF для $Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$, данные графики характерны для модели $ARIMA(0,0,1)$, то есть $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$. Результаты Q-теста Льюнга-Бокса для 5 лагов (табл. 4.4) также подтверждают сделанное предположение.

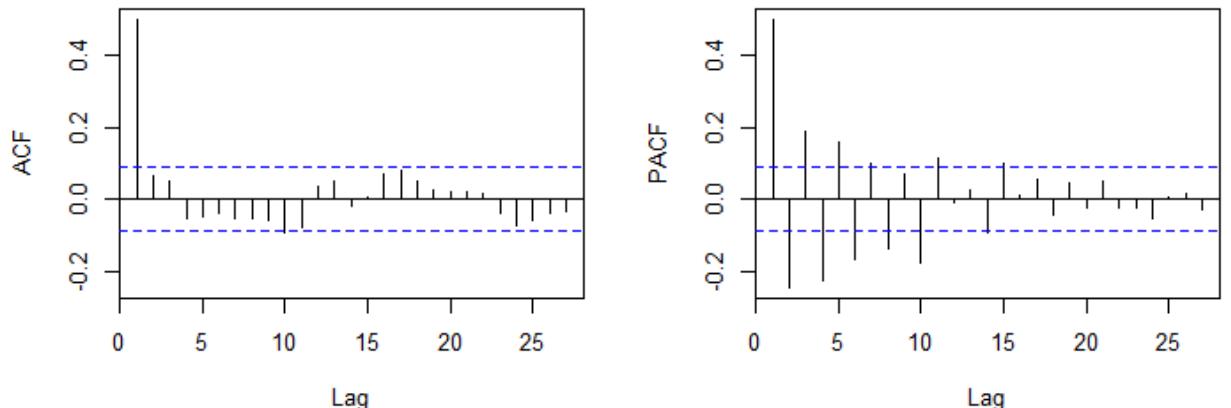


Рисунок 4.3 - Графики ACF и PACF для $Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$ (DAX).

Данные	Значение статистики	$\chi^2_{99,5}$
$Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$	132.33	15.086
$\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$	132.13	15.086

Таблица 4.4 - Результаты Q-теста Льюнга-Бокса для 5 лагов (DAX).

Приведем результаты калибровки параметров моделей $ARIMA(0,0,1)$ – $GARCH(1,1)$ для разных распределений ошибок (таблица 4.5). Полученные данные для разных видов распределения ошибок имеют сходство в виде статистической незначимости параметров ϕ_0 и α_0 (высокие значения $P - value$). В современной литературе оговаривается, что константу в моделях типа ARIMA необходимо сохранять даже в случаях, если она является статистически незначимой, это связано с тем, что ее удаление может привести к смещению оценок других параметров. Однако, для финансовых данных с достаточно высокой частотой (дневные и внутридневные) довольно часто получается незначительный средний доход. В данном контексте предположение о средней доходности равной нулю не может испортить прогноз и данное предположение является обычной практикой.

Таким образом, полученные значения $\phi_0 \approx 0$ можно оставить. По-другому дело обстоит с коэффициентом α_0 , его следует сохранить по причине того, что в уравнении дисперсии $\alpha_0 = \gamma V_L$, где V_L –долговременный уровень волатильности, $\gamma + \sum_{i=1}^P \alpha_i + \sum_{j=1}^Q \beta_j = 1$. Тогда из условия $\alpha_0 = 0$ будет следовать, что либо $V_L = 0$, что невозможно на реальных рынках, либо $\gamma = 0$, что влечет за собой нестационарность процесса, так как $\sum_{i=1}^P \alpha_i + \sum_{j=1}^Q \beta_j = 1$.

	<i>N</i>	<i>EGB2</i>	<i>JSU</i>
$L_n(\hat{v})$	1652.609	1658.26	1658.657
ϕ_0	-0.000100 (0.000798)	-0.00006 (0.000786)	-0.000074 (0.000792)
Std. Error			
t-value	-0.12480	-0.076381	-0.093104
Pr(> t)	0.900685	0.939116	0.925821
θ_1	0.950806 (0.013106)	0.948445 (0.015226)	0.949900 (0.013229)
Std. Error			
t-value	72.54849	62.292279	71.806222
Pr(> t)	0.000000	0.000000	0.000000
α_0	0.000003 (0.000005)	0.000003 (0.000004)	0.000003 (0.000004)
Std. Error			
t-value	0.55453	0.687438	0.718274
Pr(> t)	0.579215	0.491807	0.472588
α_1	0.071761 (0.031491)	0.067895 (0.027377)	0.067271 (0.030275)
Std. Error			
t-value	2.27881	2.480017	2.222013
Pr(> t)	0.022678	0.013138	0.026282
β_1	0.894232 (0.050380)	0.902903 (0.037822)	0.900226 (0.041630)
Std. Error			
t-value	17.74964	23.872549	21.624622
Pr(> t)	0.000000	0.000000	0.000000
<i>AIC</i>	-6.5773	-6.5919	-6.5934
<i>BIC</i>	-6.5352	-6.5369	-6.5385
ξ	-	-0.224916	-0.543876
κ	-	2.897165	2.298773

Таблица 4.5 - Результаты оценивания $ARIMA(0,0,1) - GARCH(1,1)$ моделей для $Y_t =$

$\ln(S_t/S_{t-2})$ и $\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$ фондового индекса DAX.

Остальные коэффициенты моделей статистически значимы. Также стоит отметить, что коэффициенты всех моделей одинаковы по знаку и порядку. Информационный критерий Байеса (BIC) и Акайке (AIC) показывают лучшие результаты для асимметричных распределений, что согласуется с большими значениями функций правдоподобий соответствующих моделей. В конце таблицы приведены значения коэффициентов асимметрии ξ (skewness) и эксцесса κ (excess kurtosis) для нормированных ошибок ϵ_t . Отрицательные значения коэффициента эксцесса для асимметричных распределений соответствуют вытянутости распределения ошибок влево (*Median > Mean*). Положительные значения κ соответствуют более островершинным распределениям ошибок, чем нормальное. Графики эмпирических плотностей распределений стандартизованных ошибок отображены на рисунке 4.4. Таким образом, распределения

ошибок *EGB2* и *JSU* имеют тяжелые хвосты (fat-tailed distribution).

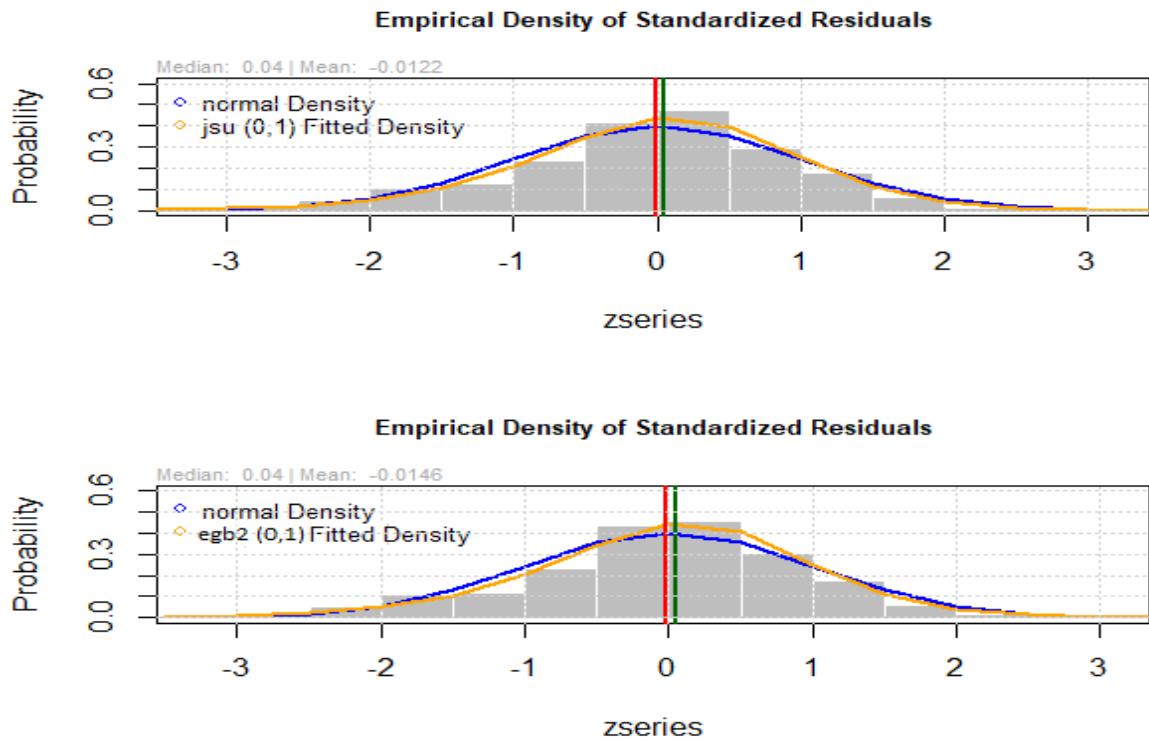


Рисунок 4.4 - Плотности распределений нормированных ошибок ϵ_t распределений *EGB2* и *JSU*.

Таблицы 4.6, 4.7 и рисунки 4.5, 4.6 отображают значения стоимостей опционов call/put на индекс DAX с датой экспирации 22 июня 2019 года. По рисункам 3.5, 3.6 видно, что для опционов call и put, лежащих глубоко вне денег стоимости практически совпадают.

На рисунках 4.7, 4.8 приведены графики абсолютных ошибок расчета цен опционов call/put на индекс DAX с датой экспирации 22 июня 2019 года. Легко видеть, что в обоих случаях меньшую ошибку дает *ARIMA – GARCH* модель с остатками, распределенными по закону S_u Джонсона, однако стоит отметить, что модель с остатками *EGB2* не сильно уступает первой, так, для опциона call, при значении *Moneyness* = 0,81 разница в ошибках между *JSU* и *EGB2* составляет 1,18, в то время как разница между *JSU* и *N* составляет 5,98. Для опциона put при *Moneyness* = 1,12 разницы составляют 1,13 и 5,86. Также на графиках представлена кривая абсолютных ошибок цен опционов построенной на основе модификации расширенного принципа Гирсанова для ARIMA-GARCH модели с ошибками, распределенными нормально (ARIMA-GARCH-N-mod). Видно, что ее значения практически совпадают со значениями кривой ARIMA-GARCH-N, что говорит о том, что модификация расширенного принципа Гирсанова дает результаты не хуже, чем классический расширенный принцип Гирсанова.

Strike	Price				AE			Moneyness
	<i>N</i>	<i>EGB2</i>	<i>JSU</i>	<i>market</i>	<i>N</i>	<i>EGB2</i>	<i>JSU</i>	
9400	2 706.27	2 701.47	2 700.29	2 633.30	72.97	68.17	66.99	0.81
9600	2 506.23	2 501.43	2 500.24	2 433.30	72.93	68.13	66.94	0.82
9800	2 306.18	2 301.38	2 300.19	2 233.40	72.78	67.98	66.79	0.84
10000	2 106.13	2 101.33	2 100.15	2 033.50	72.63	67.83	66.65	0.86
10200	1 906.08	1 901.28	1 900.10	1 833.60	72.48	67.68	66.50	0.88
10400	1 706.05	1 701.25	1 700.07	1 633.80	72.25	67.45	66.27	0.89
10600	1 506.08	1 501.29	1 500.10	1 434.10	71.98	67.19	66.00	0.91
10800	1 306.24	1 301.47	1 300.27	1 234.70	71.54	66.77	65.57	0.93
11000	1 106.86	1 102.12	1 100.90	1 035.80	71.06	66.32	65.10	0.94
11200	908.50	903.83	902.57	837.90	70.60	65.93	64.67	0.96
11400	713.05	708.52	707.19	643.10	69.95	65.42	64.09	0.98
11600	524.32	520.10	518.66	456.20	68.12	63.90	62.46	1.00
11800	350.43	346.74	345.22	286.50	63.93	60.24	58.72	1.01
12000	205.38	202.52	201.06	147.80	57.58	54.72	53.26	1.03
12200	102.38	100.52	99.36	55.70	46.68	44.82	43.66	1.05
12400	43.18	42.15	41.42	14.30	28.88	27.85	27.12	1.06
12600	15.27	14.81	14.46	2.90	12.37	11.91	11.56	1.08
12800	4.91	4.72	4.59	0.60	4.31	4.12	3.99	1.10
13000	1.57	1.50	1.45	0.10	1.47	1.40	1.35	1.12

Таблица 4.6 - Цены опционов call на индекс DAX (дата экспирации 22 июня 2019 года) и их абсолютные ошибки.

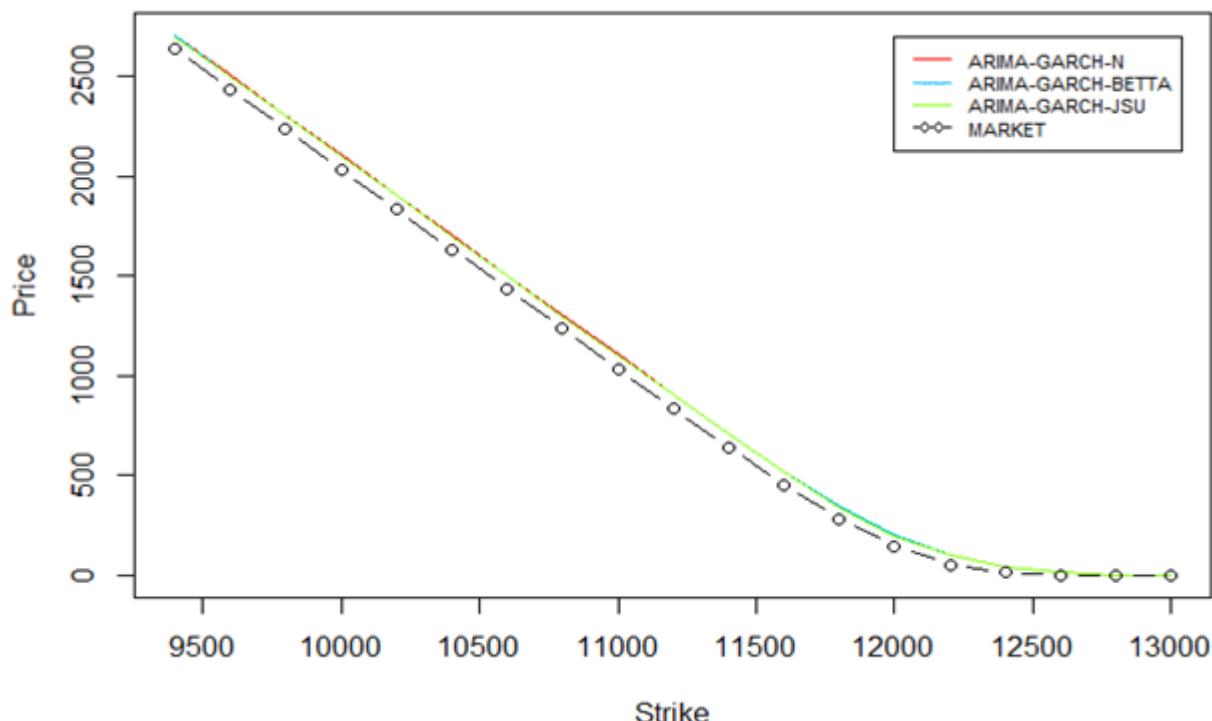


Рисунок 4.5 - Цены опционов call на индекс DAX (дата экспирации 22 июня 2019 года).

Strike	Price				AE			Moneyness
	N	EGB2	JSU	market	N	EGB2	JSU	
9400	0.00	0.00	0.00	0.40	0.40	0.40	0.40	0.81
9600	0.00	0.00	0.00	0.40	0.40	0.40	0.40	0.82
9800	0.00	0.00	0.00	0.50	0.50	0.50	0.50	0.84
10000	0.00	0.00	0.00	0.60	0.60	0.60	0.60	0.86
10200	0.00	0.00	0.00	0.80	0.80	0.80	0.80	0.88
10400	0.02	0.02	0.02	1.00	0.98	0.98	0.98	0.89
10600	0.10	0.11	0.10	1.40	1.30	1.29	1.30	0.91
10800	0.31	0.34	0.32	2.00	1.69	1.66	1.68	0.93
11000	0.98	1.03	1.00	3.10	2.12	2.07	2.10	0.94
11200	2.66	2.79	2.71	5.30	2.64	2.51	2.59	0.96
11400	7.26	7.54	7.39	10.50	3.24	2.96	3.11	0.98
11600	18.58	19.16	18.91	23.60	5.02	4.44	4.69	1.00
11800	44.74	45.85	45.51	54.00	9.26	8.15	8.49	1.01
12000	99.73	101.67	101.40	115.30	15.57	13.63	13.90	1.03
12200	196.79	199.73	199.75	223.20	26.41	23.47	23.45	1.05
12400	337.64	341.41	341.86	381.80	44.16	40.39	39.94	1.06
12600	509.78	514.12	514.94	570.50	60.72	56.38	55.56	1.08
12800	699.46	704.08	705.12	768.20	68.74	64.12	63.08	1.10
13000	896.17	900.90	902.03	967.80	71.63	66.90	65.77	1.12

Таблица 4.7 - Цены опционов рут на индекс DAX (дата экспирации 22 июня 2019 года) и их абсолютные ошибки.

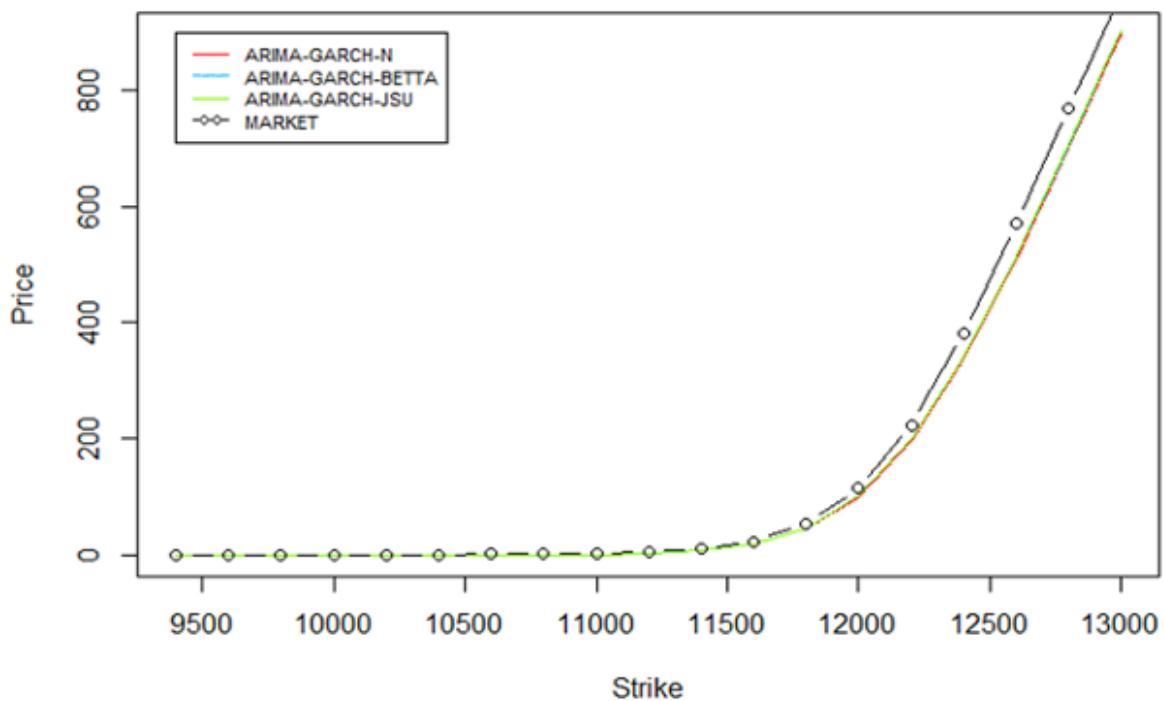


Рисунок 4.6 - Цены опционов рут на индекс DAX (дата экспирации 22 июня 2019 года).

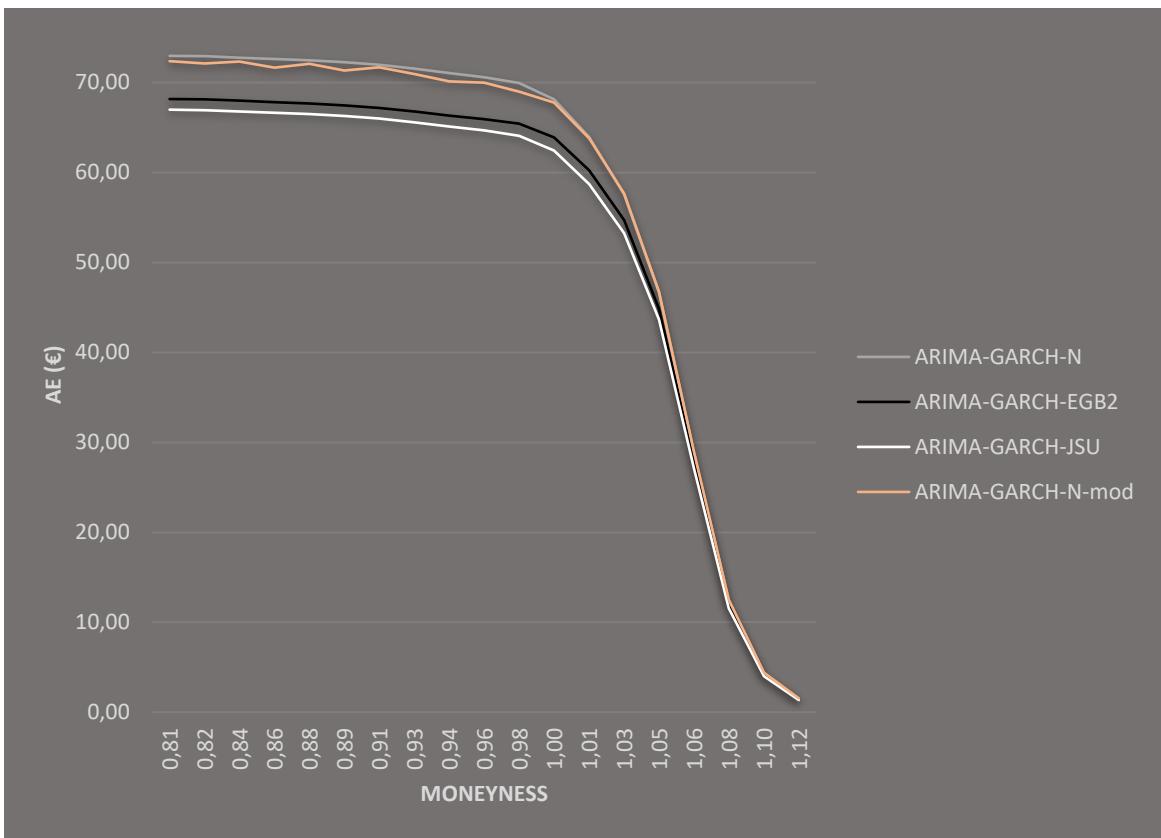


Рисунок 4.7 - Абсолютные ошибки цен опционов call на индекс DAX (дата экспирации 22 июня 2019 года).

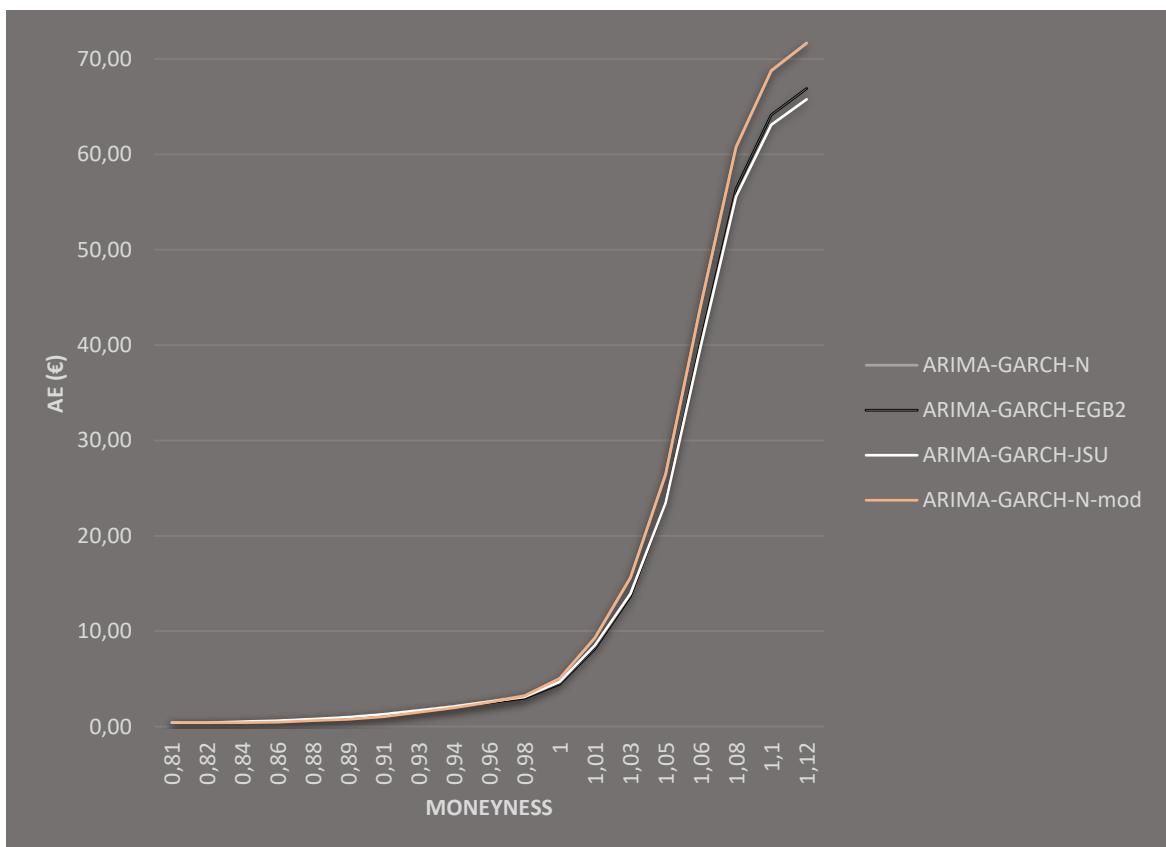


Рисунок 4.8 - Абсолютные ошибки цен опционов put на индекс DAX (дата экспирации 22 июня 2019 года).

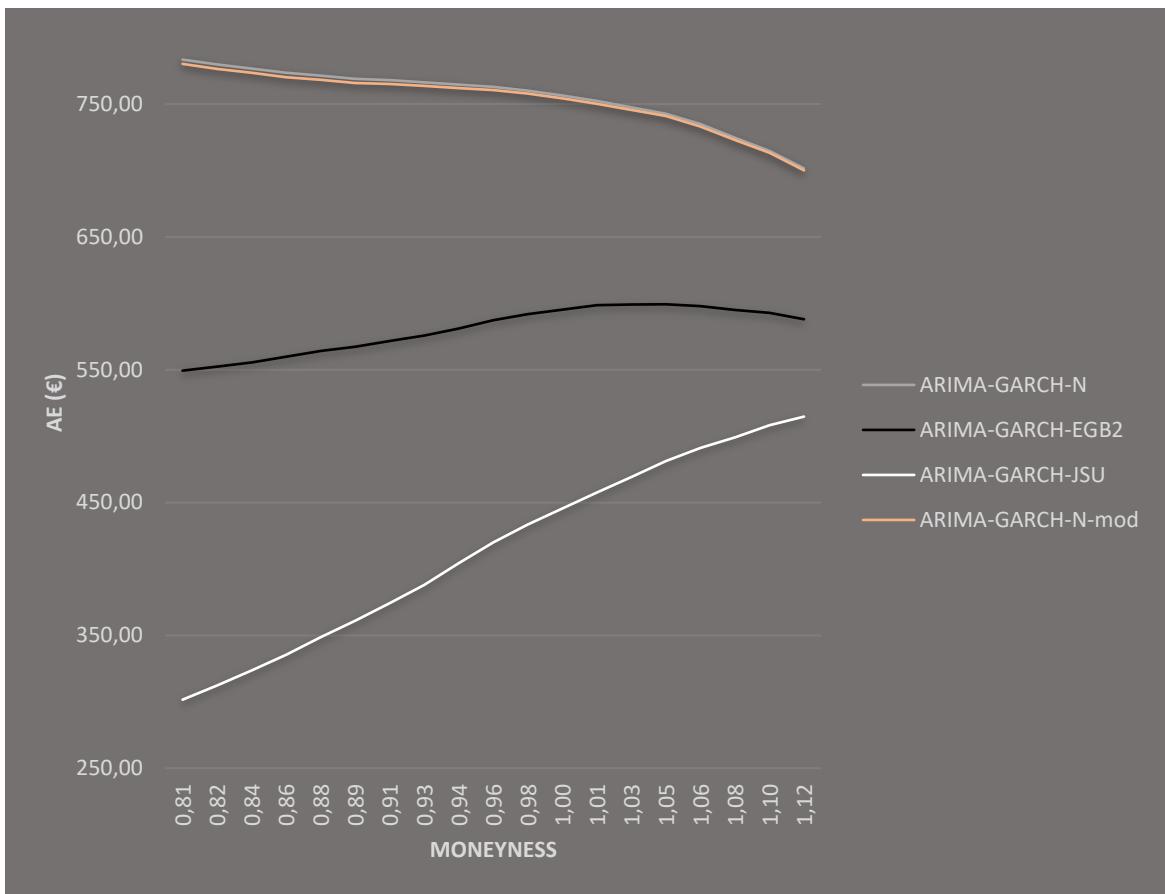


Рисунок 4.9 - Абсолютные ошибки цен опционов call на индекс DAX (дата экспирации 22 декабря 2023 года).

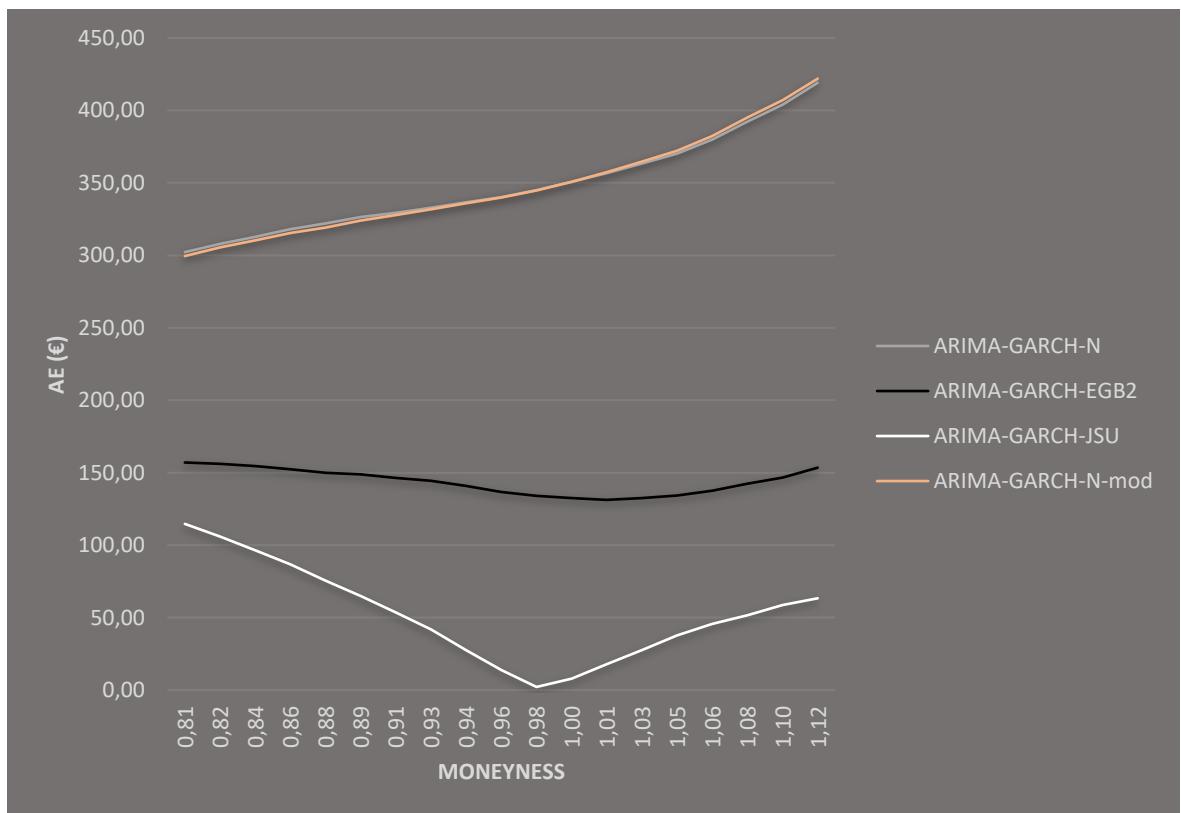


Рисунок 4.10 - Абсолютные ошибки цен опционов put на индекс DAX (дата экспирации 22 декабря 2023 года).

Рисунки 4.9, 4.10 демонстрируют результаты оценки справедливой стоимости опционов с датой экспирации 22 декабря 2023 года. Как видно, графики ошибок показывают схожие результаты с результатами оценки опционов с датой экспирации 22 июля 2019 года, однако расхождение в ошибках больше. Это связано с тем, что бралась стандартная оценка математического ожидания $\frac{\sum_{i=1}^M X_i}{M}$, где X_i – независимые, одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием m и дисперсией D . В диссертации для опционов с ближней датой экспирации бралось значение $M = 100\,000$, а с дальней - $M = 10\,000$, где M – количество траекторий реализации $ARIMA - GARCH$ модели, соответственно, ошибка между этими двумя наборами оценок справедливой стоимости опционов будет отличаться на порядок, что и наблюдается на рисунках 4.7, 4.8 и 4.9, 4.10.

Опционы на индекс SMI

Аналогичные рассуждения для опционов на индекс SMI позволяют определить, что наилучшей моделью является $ARIMA(2,0,2) - GARCH(1,1)$ и убедиться в стационарности случайного процесса (таблицы 4.8, 4.9, рисунок 4.12). Исходные данные представляют собой значения индекса SMI на конец дня с 06 июня 20117 года по 03 июня 2019 года (рис. 4.11).

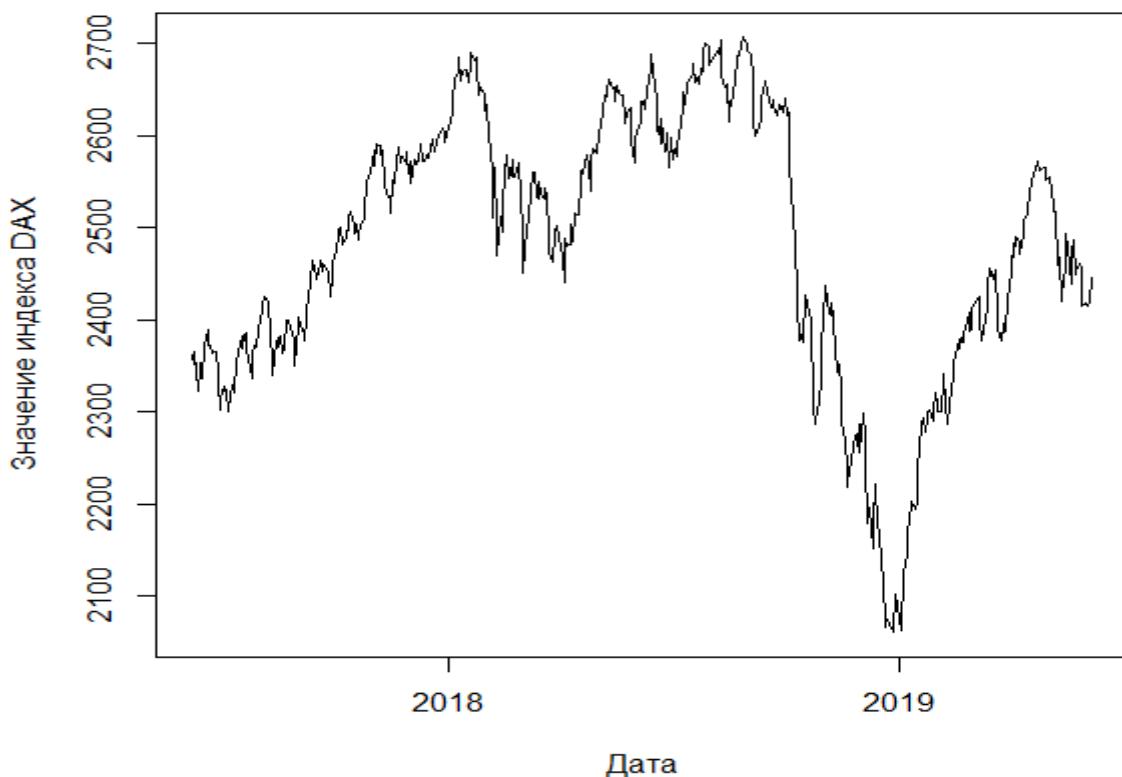


Рисунок 4.11 - График стоимости фондового индекса SMI на конец дня (06.06.2017-03.06.2019).

Данные	Значение статистики	Критическое значение статистики (1%)
$Y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$	-7.4471	-3.96
$\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-1} - 1$	-7.4677	-3.96

Таблица 4.8 - Результаты Расширенного теста Дики-Фуллера (SMI).

Данные	Значение статистики	$\chi^2_{95\%,5}$
$Y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$	11.332	11.0705
$\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-1} - 1$	11.231	11.0705

Таблица 4.9 - Результаты Q-теста Льюнга-Бокса для 5 лагов (SMI).

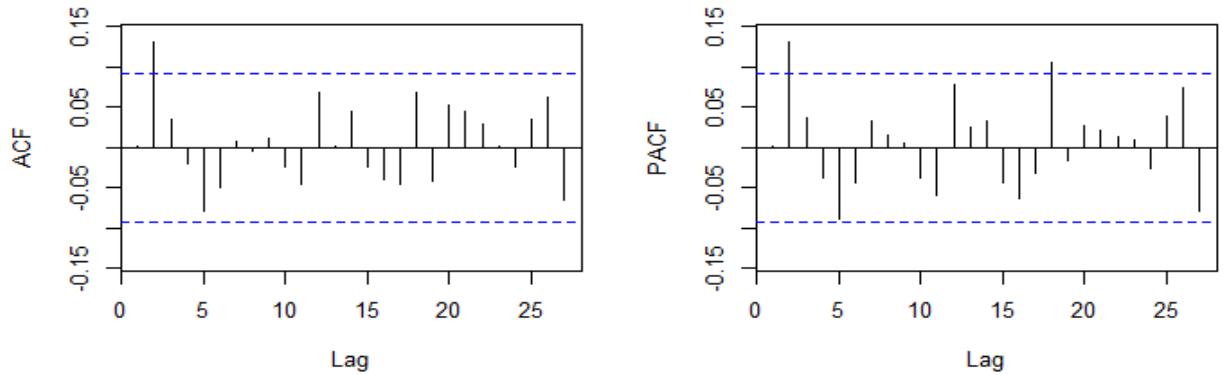


Рисунок 4.12 - Графики ACF и PACF для $Y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$ (SMI).

	<i>N</i>	<i>EGB2</i>	<i>JSU</i>
$L_n(\hat{v})$	1524.498	1534.513	1534.853
ϕ_1	0.692672 (0.105087)	0.648521 (0.117605)	0.646306 (0.119164)
Std. Error			
t-value	6.5914	5.5144	5.42365
Pr(> t)	0	0	0
ϕ_2	-0.713626 (0.107419)	-0.793825 (0.109211)	-0.79122 (0.108597)
Std. Error			
t-value	-6.6434	-7.2688	-7.28586
Pr(> t)	0	0	0
θ_1	-0.704832 (0.082404)	-0.685102 (0.093569)	-0.683143 (0.094874)
Std. Error			
t-value	-8.5534	-7.3219	-7.20049
Pr(> t)	0	0	0
θ_2	0.833996 (0.082199)	0.877989 (0.084859)	0.87657 (0.08418)
Std. Error			
t-value	10.146	10.3464	10.41299
Pr(> t)	0	0	0
α_0	0.000005 (0.000001)	0.000004 (0.000001)	0.000004 (0.000001)
Std. Error			
t-value	3.1699	2.707	2.87693
Pr(> t)	0.001525	0.006789	0.004016
α_1	0.129061 (0.024278)	0.136098 (0.032412)	0.137356 (0.032574)
Std. Error			
t-value	5.3159	4.199	4.21674
Pr(> t)	0	0.000027	0.000025
β_1	0.809151 (0.028029)	0.815933 (0.025771)	0.814786 (0.025875)
Std. Error			
t-value	28.8689	31.6613	31.48923
Pr(> t)	0	0	0
<i>AIC</i>	-6.7444	-6.7801	-6.7816
<i>BIC</i>	-6.6805	-6.6979	-6.6994
ξ	-	-0.684247	-0.599973
κ	-	4.403636	4.552354

Таблица 4.10 - Результаты оценивания $ARIMA(2,0,2) - GARCH(1,1)$ моделей для $Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$ и $\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$ индекса SMI.

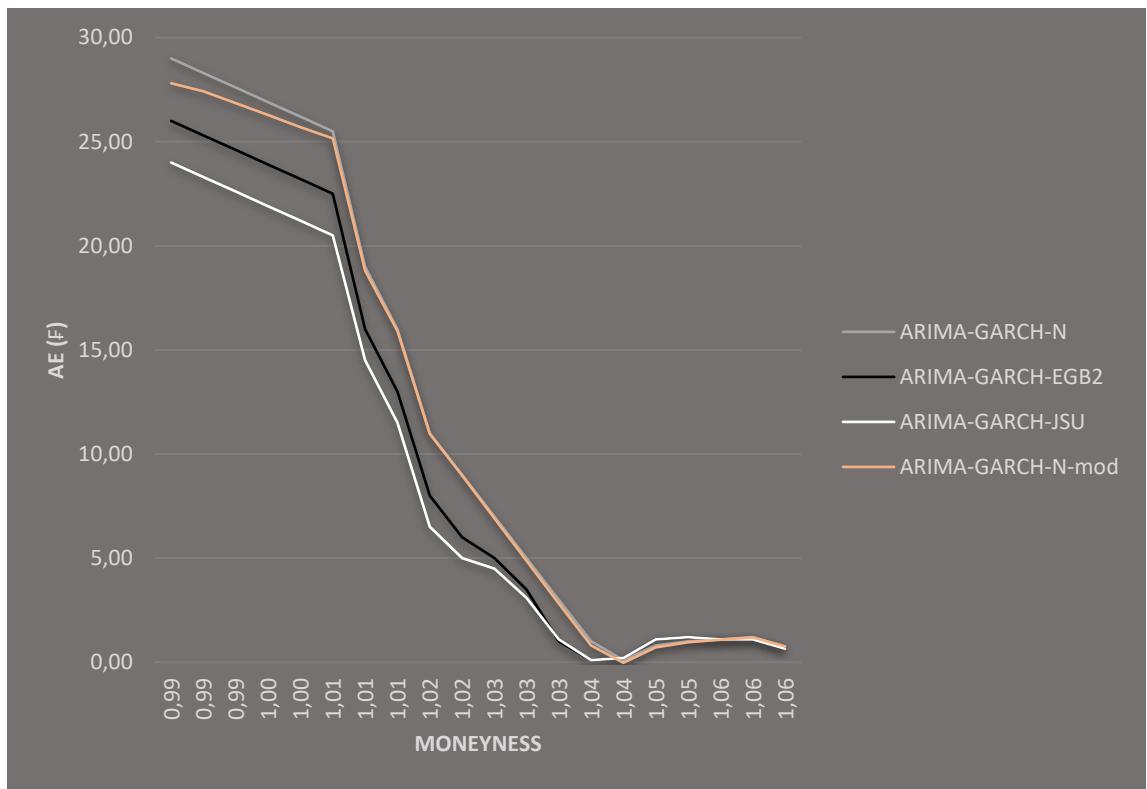


Рисунок 4.13 - Абсолютные ошибки цен опционов call на индекс SMI (дата экспирации 03 июня 2019 года).

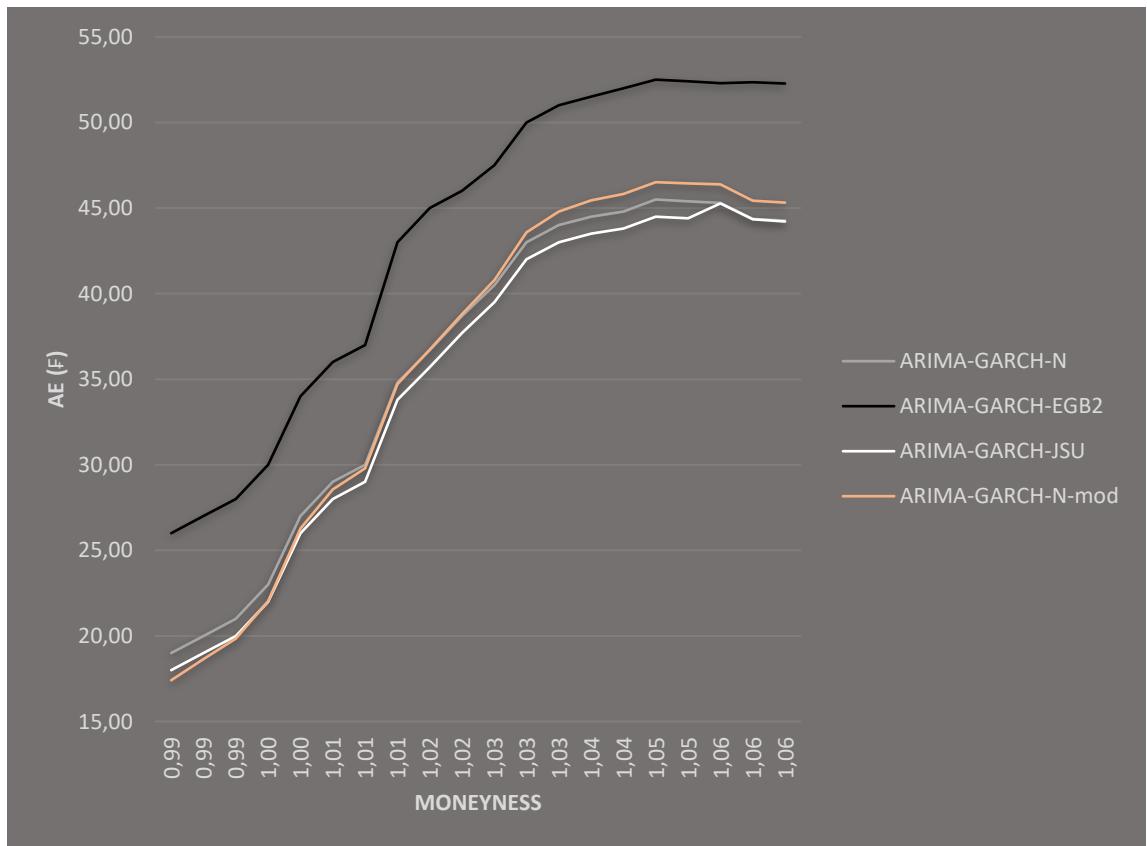


Рисунок 4.14 - Абсолютные ошибки цен опционов put на индекс SMI (дата экспирации 03 июня 2019 года).

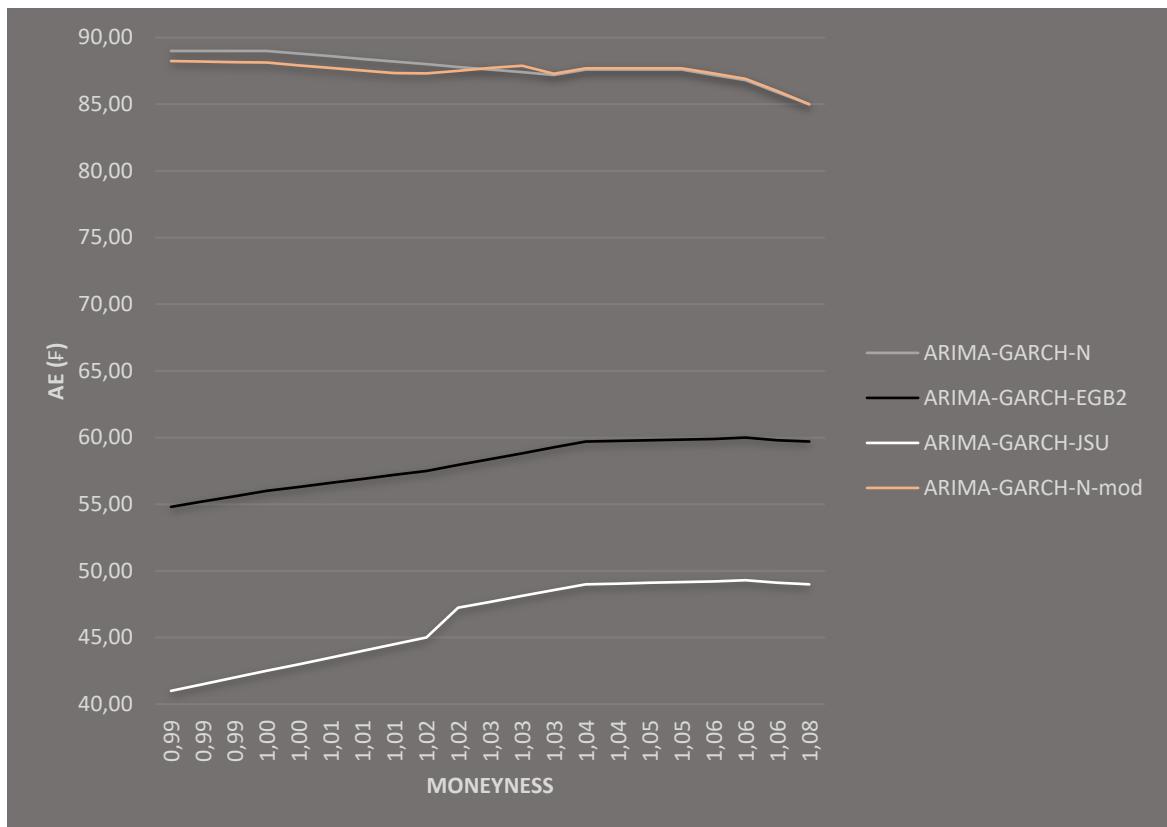


Рисунок 4.15 - Абсолютные ошибки цен опционов call на индекс SMI (дата экспирации 22 декабря 2020 года).

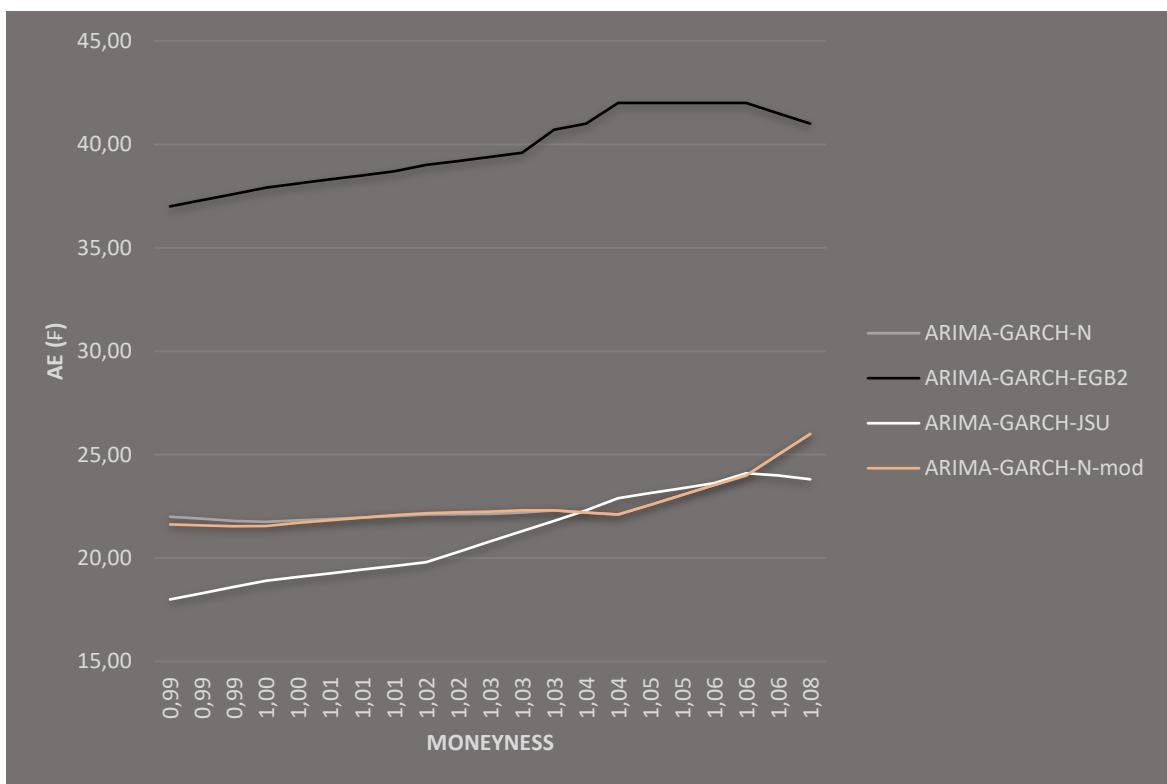


Рисунок 4.16 - Абсолютные ошибки цен опционов put на индекс SMI (дата экспирации 22 декабря 2020 года).

Из таблицы 4.10 следует, что уровень значимости всех коэффициентов больше, чем 99%, также видно, что из модели была убрана константа *ARIMA* части, так как она была статистически незначима. Знаки коэффициентов совпадают, а для моделей с ошибками *EGB2* и *JSU* характерны совпадения коэффициентов вплоть до второго знака после запятой. Также видно, что для данного временного ряда (*SMI*) характерно наличие “тяжелых хвостов”.

Абсолютные ошибки представлены на рисунках 4.13 – 4.16, на них можно видеть, что во всех экспериментах модель с ошибками *JSU* показала самые близкие результаты оценок стоимостей опционов к рыночным ценам. Среди моделей *EGB2* и *N* утверждать какая лучше однозначно нельзя, так, для оценки цен опционов call модель *EGB2* дает близкие к *JSU* значения, однако для put хорошо показывает себя модель с нормальным распределением. Также следует отметить, что для опционов call с датой экспирации 03 июня 2019 года и put с датой экспирации 22 декабря 2020 года и значениями *Moneyness* от 1,04 до 1,06, модель с нормальным распределением ошибок дает лучшие результаты.

Опционы на курс британского фунта к американскому доллару (British Pound / US Dollar)

Рисунок 4.18 отображает поведение коррелограмм (ACF, PACF), а проведенные Q-тесты Льюнга-Бокса показывают, что ряды $Y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$ и $\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-1} - 1$, полученные из исходного временного ряда S_t (рис. 4.17) значений курса британского фунта к американскому доллару не имеют автокорреляционных связей вплоть до 20 лага (таблица 4.11).

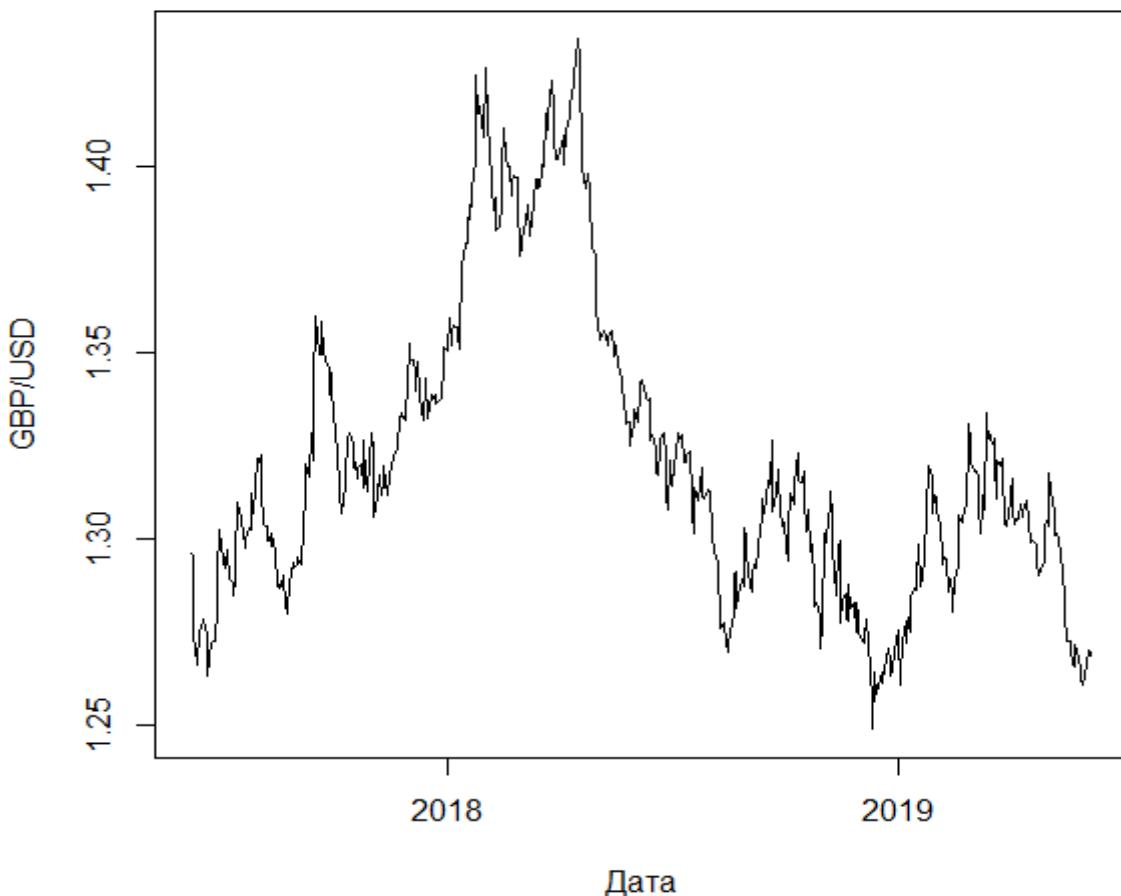


Рисунок 4.17 - График курса британского фунта к доллару США на конец дня (06.06.2017-03.06.2019).

Данные	Значение статистики	$\chi^2_{99\%,20}$
$Y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$	12.975	15.08627
$\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-1} - 1$	12.885	15.08627

Таблица 4.11 - Результаты Q-теста Льюнга-Бокса для 20 лагов (British Pound / US Dollar).

Исходный ряд S_t , как и в случае фондового индекса DAX, преобразован к виду $Y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$ и $\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-1} - 1$. На рисунке 4.18 видно, что коррелограммы ACF и PACF практически идентичны коррелограммам на рисунке 4.3, что позволяет делать вывод о схожей спецификации модели: $ARIMA(0,0,1) - GARCH(1,1)$. Таблицы 4.12 и 4.13 также позволяют убедиться в стационарности и автокоррелируемости полученных временных рядов (статистическая значимость первого лага на графике ACF и затухающее поведение графика PACF).

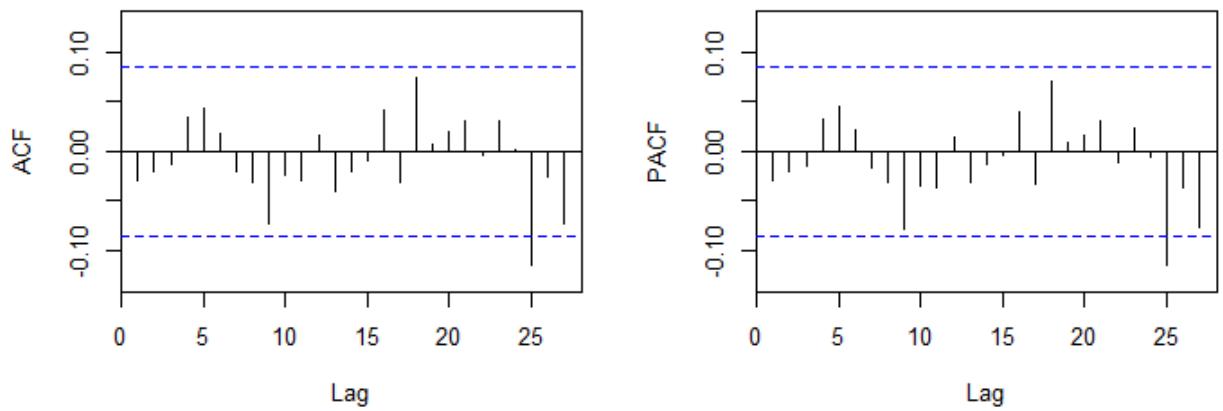


Рисунок 4.18 - Графики ACF и PACF для $Y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$ (British Pound / US Dollar).

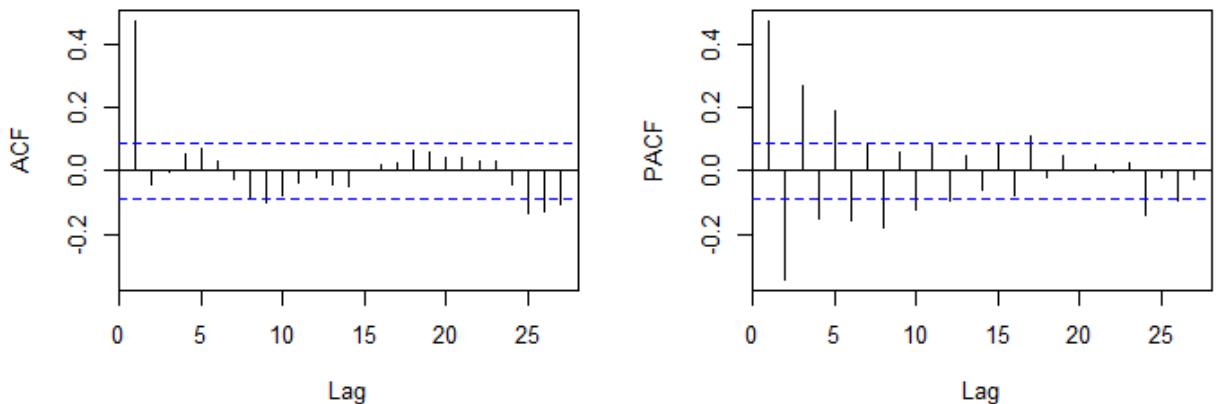


Рисунок 4.19 - Графики ACF и PACF для $Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$ (British Pound / US Dollar).

Данные	Значение статистики	$\chi^2_{99\%,5}$
$Y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$	122.54	15.08627
$\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-1} - 1$	122.54	15.08627

Таблица 4.12 - Результаты Q-теста Льюнга-Бокса для 5 лагов (British Pound / US Dollar).

Данные	Значение статистики	Критическое значение статистики (1%)
$Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$	-7.741	-3.96
$\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$	-7.7371	-3.96

Таблица 4.13 - Результаты расширенного теста Дики-Фуллера (British Pound / US Dollar).

	<i>N</i>	<i>EGB2</i>	<i>JSU</i>
$L_n(\hat{v})$	2010.074	2018.786	2018.925
θ_1	0.960904	0.960766	0.958651
Std. Error	(0.005945)	(0.006427)	(0.007069)
t-value	161.6327	149.4896	135.6167
Pr(> t)	0	0	0
α_0	0.000001	0.000001	0.000001
Std. Error	(0)	(0)	(0)
t-value	3.1783	8.4803	8.786
Pr(> t)	0.001481	0	0
α_1	0.006402	0.028848	0.028444
Std. Error	(0.000519)	(0.002913)	(0.003057)
t-value	12.326100	9.9024	9.3035
Pr(> t)	0.000000	0	0
β_1	0.976852	0.914257	0.912049
Std. Error	(0.002829)	(0.012017)	(0.01224)
t-value	345.2703	76.0784	74.5162
Pr(> t)	0	0	0
<i>AIC</i>	-7.7009	-7.7266	-7.7272
<i>BIC</i>	-7.6682	-7.6776	-7.6781
ξ	-	0.195656	0.092051
κ	-	2.885524	2.19142

Таблица 4.14 - Результаты оценивания $ARIMA(0,0,1) - GARCH(1,1)$ моделей для $Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$ и $\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$ (British Pound / US Dollar).

Исследование параметров, полученных в результате калибровки моделей, позволяет говорить о статистической значимости всех коэффициентов с уровнем значимости 99%. Порядок и знаки всех коэффициентов конкурирующих моделей совпадают. Значения функций правдоподобия и информационные критерии AIC и BIC показывают, что наилучшие результаты с точки зрения предсказательных возможностей модели имеет модель с ошибками распределенными по закону S_u Джонсона, однако результаты проведенных экспериментов по оценке справедливой стоимости опционов (рисунки 4.20 – 4.23) показывают, что модель с остатками, распределенными нормально, для опционов с ближайшей датой экспирации и для опционов call с датой экспирации 22 марта 2020 года, имеет схожие результаты с моделью имеющей ошибки распределенные по закону S_u Джонсона. Это связано с тем, что параметры калибровки моделей с ошибками, распределенными по закону S_u Джонсона и нормальному закону, практически совпадают. Из таблицы 4.14 следует, что значение параметра ξ (skewness) в модели с ошибками, распределенными по закону JSU ($\xi = 0.092051$) на порядок меньше, чем у модели с ошибками распределенными по закону EGB2 ($\xi = 0.195656$), что говорит о большей асимметрии последней модели. Этот же результат дает критерий Шапиро-Уилка [79] – формальный тест для проверки нормальности распределения выборки.

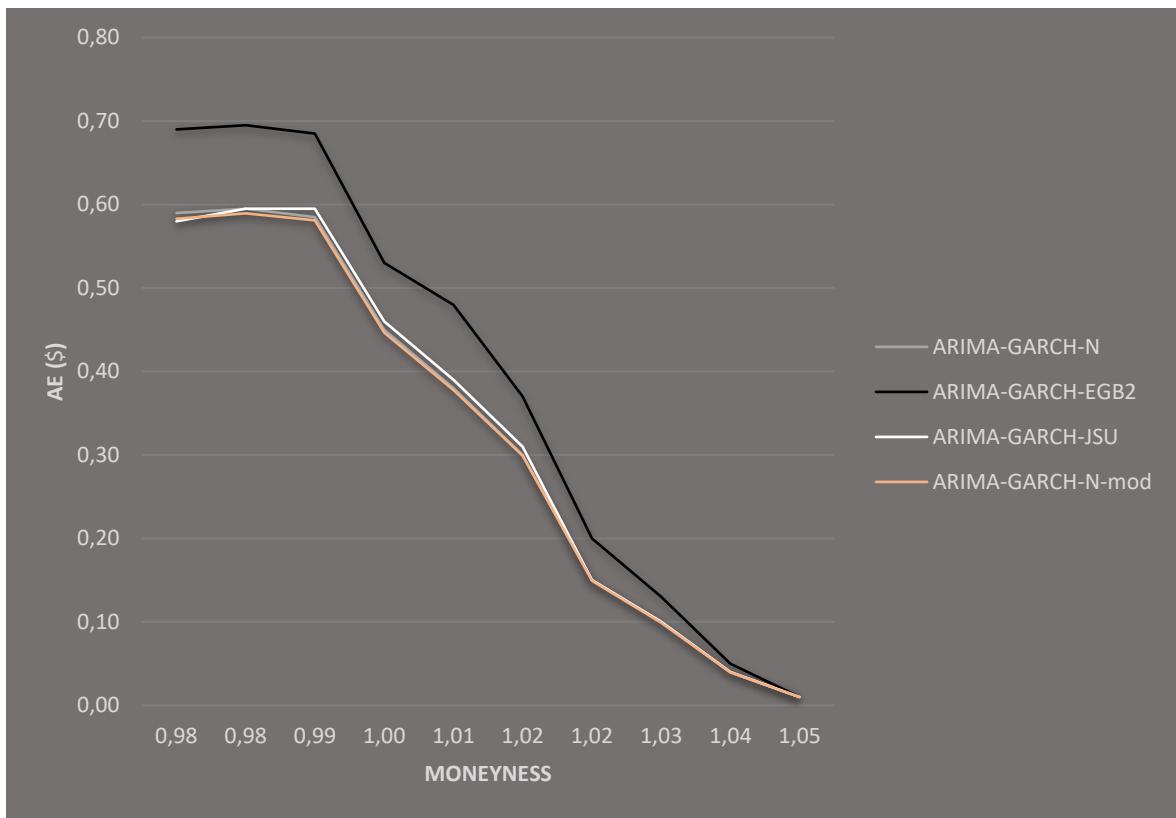


Рисунок 4.20 - Абсолютные ошибки цен опционов call British Pound / US Dollar (дата экспирации 22 июня 2019 года).

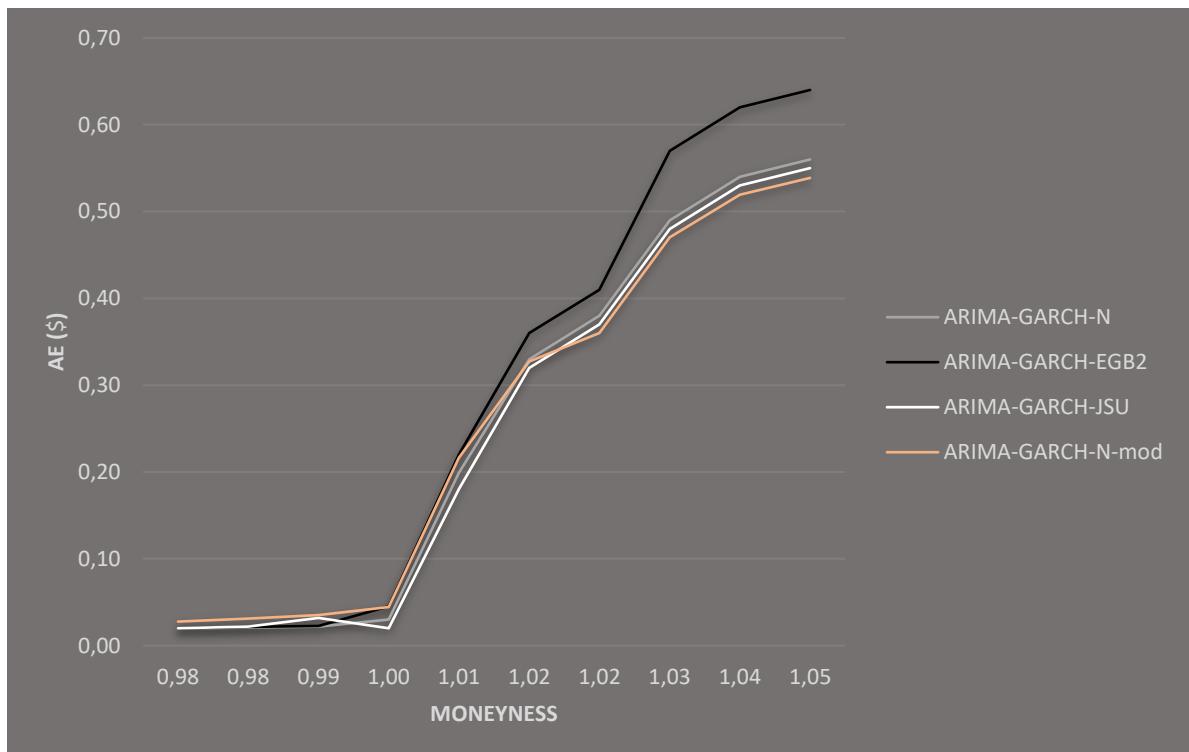


Рисунок 4.21 - Абсолютные ошибки цен опционов put British Pound / US Dollar (дата экспирации 22 июня 2019 года).

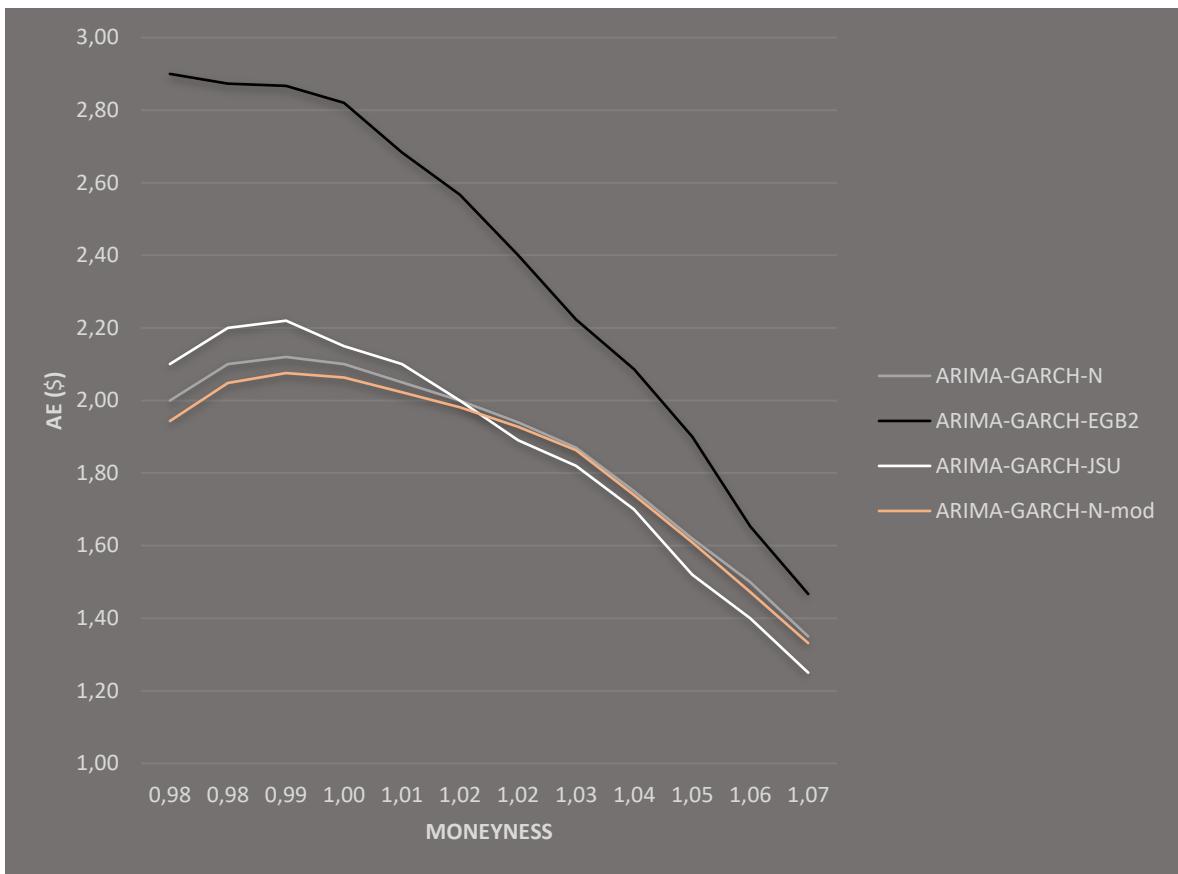


Рисунок 4.22 - Абсолютные ошибки цен опционов call British Pound / US Dollar (дата экспирации 22 марта 2020 года).

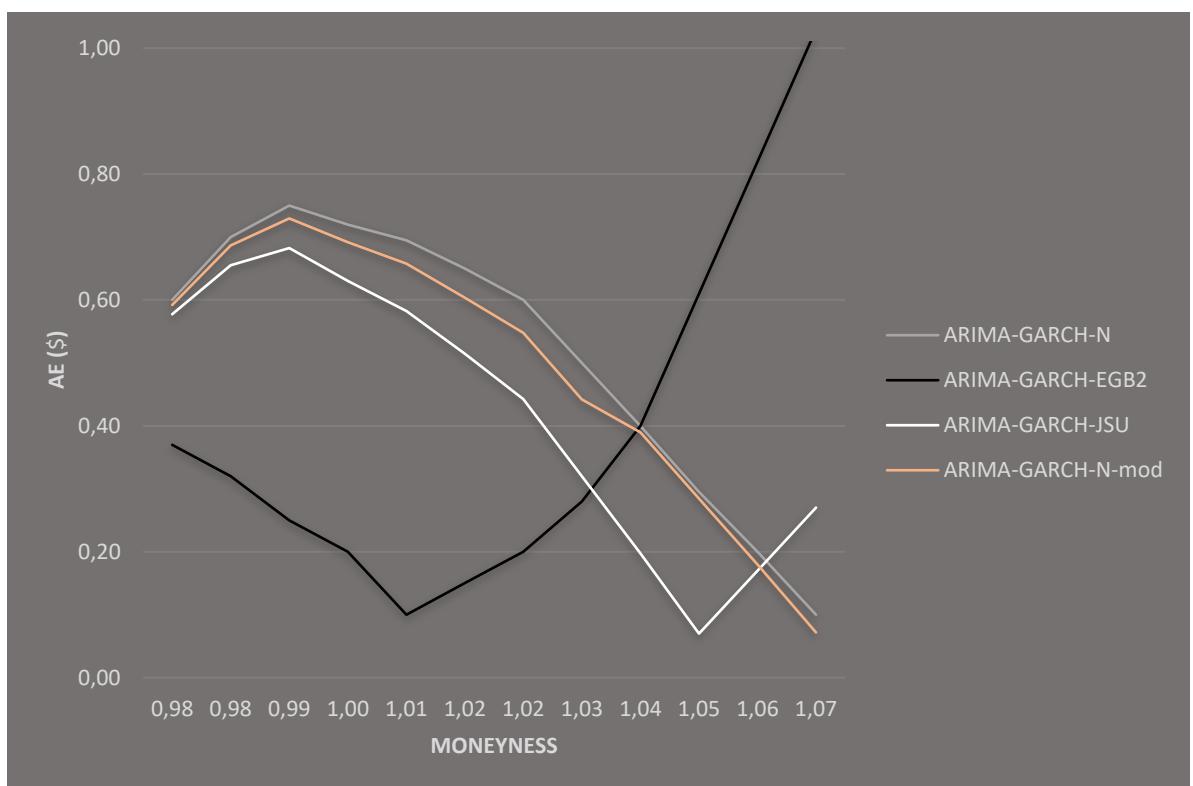


Рисунок 4.23 - Абсолютные ошибки цен опционов put British Pound / US Dollar (дата экспирации 22 марта 2020 года).

Нулевая гипотеза H_0 : случайная величина распределена нормально. В таблице 4.15 видно, что значения $p - value$ показывают, что модель ARIMA-GARCH с ошибками JSU больше приближена к нормальному распределению чем модель с ошибками $EGB2$.

Модель	Значение статистики	p-value
JSU	0.99317	0.209
$EGB2$	0.99146	0.09152

Таблица 3.15 - Результаты теста Шапиро-Уилка (British Pound / US Dollar).

Отдельно стоит отметить результаты оценки стоимости цен опционов put British Pound / US Dollar с датой экспирации 22 марта 2020 года. Нельзя однозначно сделать вывод о том, какая модель является наилучшей. К примеру, для значений $Moneyness < 1.034$ модель $EGB2$ дает наилучшие результаты, однако при увеличении показателя $Moneyness$ значения ошибок также возрастают. Похожая ситуация наблюдается и в случае сравнения моделей с распределениями ошибок N и JSU , ошибки оценок справедливой стоимости опционов по модели с распределением JSU меньше чем по модели с распределением N , однако при превышении значения $Moneyness = 1.055$, ошибки модели с распределением JSU начинают расти, в то время как модель с нормальным распределением наоборот, характеризуется более устойчивым поведением, то есть значения ошибок уменьшаются при удалении значений $Moneyness$ от единицы. Рисунок 4.23 также подтверждает сделанные выше предположения о схожести моделей с ошибками JSU и N (схожее значения цен опционов).

Опционы на курс британского фунта к евро (British Pound / Euro)

Как и в случае с опционами на курс британского фунта к американскому доллару, исходный ряд S_t (рис. 4.24), из-за отсутствия автокорреляционных связей (таблица 4.16), приводится к виду $Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$ и $\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$. Полученные в результате преобразования ряды являются стационарными и автокоррелированными на 99% уровне значимости. Полученные графики ACF и PACF могут натолкнуть на мысль о схожей модели поведения случайного процесса ARIMA с моделью, описанной для опционов на курс британского фунта к американскому доллару ($ARIMA(0,0,1)$), однако коррелограмма ACF имеет три первых статистически значимых значения корреляции, поэтому существует несколько возможных моделей, к примеру: $ARIMA(0,0,1)$, $ARIMA(0,0,3)$, $ARIMA(2,0,0)$, $ARIMA(4,0,0)$. Выбор между моделями делался на основе информационных критериев Акайке (AIC) и Байеса (BIC). Результаты для перечисленных моделей представлены в

таблице 4.19, которые позволяют сделать вывод о большей предсказательной способности модели $ARIMA(4,0,0)$, так как у данной модели самое большое значение функции правдоподобия и соответственно наименьшие значения показателей AIC и BIC.

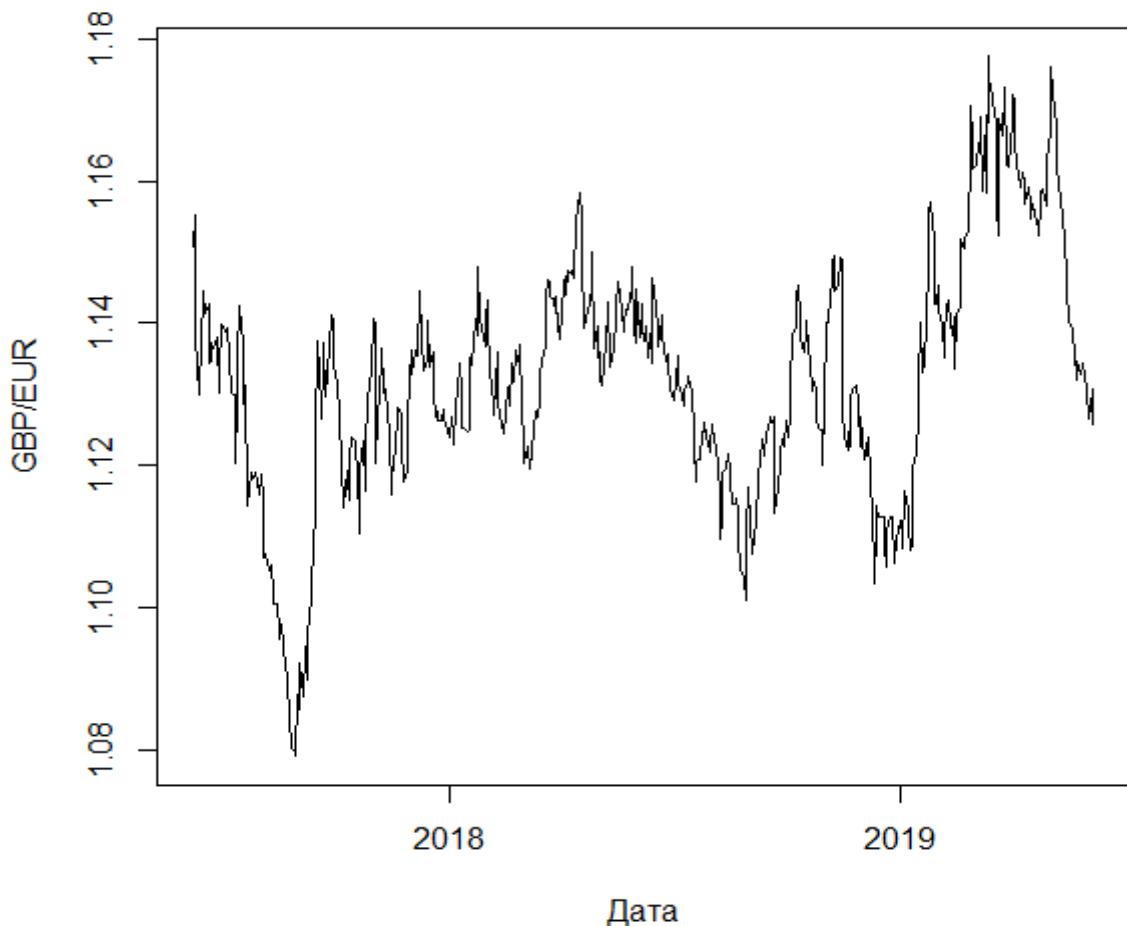


Рисунок 4.24 - График курса британского фунта к доллару евро на конец дня (06.06.2017-03.06.2019).

Данные	Значение статистики	$\chi^2_{95\%,5}$
$Y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$	7.3956	11.0705
$\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-1} - 1$	7.3453	11.0705

Таблица 4.16 - Результаты Q-теста Льюнга-Бокса для 5 лагов (British Pound / Euro).

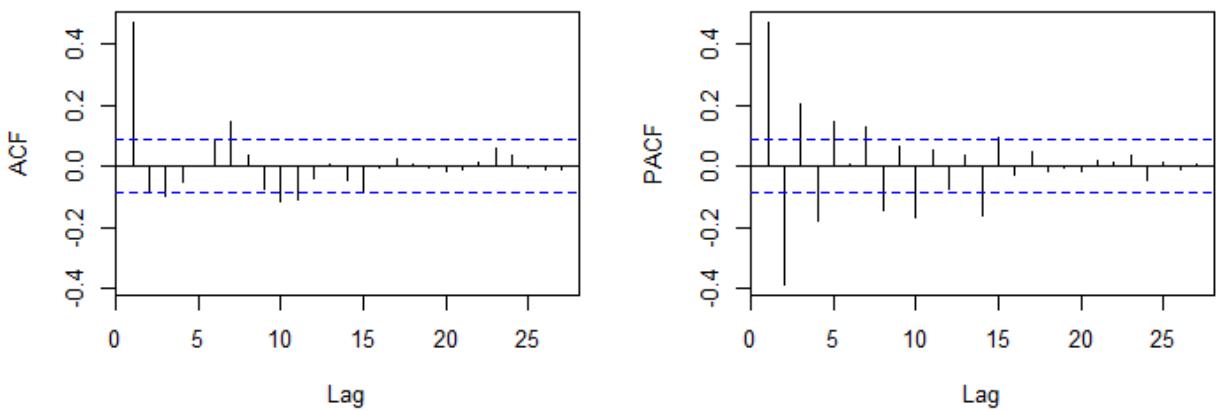


Рисунок 4.25 - Графики ACF и PACF для $Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$ (British Pound / Euro).

Данные	Значение статистики	$\chi^2_{99\%,5}$
$Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$	120.19	15.08627
$\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$	120.12	15.08627

Таблица 4.17 - Результаты Q-теста Льюнга-Бокса для 5 лагов (British Pound / Euro).

Данные	Значение статистики	Критическое значение статистики (1%)
$Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$	-7.5007	-3.96
$\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$	-7.4901	-3.96

Таблица 4.18 - Результаты Расширенного теста Дики-Фуллера (British Pound / Euro).

$ARMA(2,0)$	N	$EGB2$	JSU	$ARMA(4,0)$	N	$EGB2$	JSU
$L_n(\hat{v})$	1988.945	2003.607	2004.062	$L_n(\hat{v})$	1992.198	2004.33	2004.517
AIC	-8.0281	-8.0794	-8.0812	AIC	-8.0494	-8.0904	-8.0912
BIC	-7.9771	-8.0113	-8.0132	BIC	-8.0154	-8.0394	-8.0401
$ARMA(0,1)$	N	$EGB2$	JSU	$ARMA(0,3)$	N	$EGB2$	JSU
$L_n(\hat{v})$	1973.877	1978.603	1978.832	$L_n(\hat{v})$	1959.586	1963.319	1963.522
AIC	-7.9631	-7.9741	-7.975	AIC	-7.9133	-7.9203	-7.9211
BIC	-7.9035	-7.8975	-7.8985	BIC	-7.8708	-7.8608	-7.8616

Таблица 4.19 - Значения информационных критериев AIC и BIC (British Pound / Euro).

	<i>N</i>	<i>EGB2</i>	<i>JSU</i>
$L_n(\hat{v})$	2070.443	2078.092	2078.471
ϕ_1	0.781865	0.793585	0.794423
Std. Error	(0.048817)	(0.047103)	(0.047041)
t-value	16.0161	16.84775	16.88805
Pr(> t)	0	0	0
ϕ_2	-0.625868	-0.619403	-0.620009
Std. Error	(0.057821)	(0.056606)	(0.056504)
t-value	-10.8242	-10.94226	-10.97276
Pr(> t)	0	0	0
ϕ_3	0.272836	0.283295	0.284061
Std. Error	(0.057292)	(0.055983)	(0.055874)
t-value	4.762200	5.06039	5.08396
Pr(> t)	0.000002	0	0
ϕ_4	-0.167018	-0.16278	-0.162989
Std. Error	(0.045119)	(0.043355)	(0.043283)
t-value	-3.7017	-3.75455	-3.76566
Pr(> t)	0.000214	0.000174	0.000166
α_0	0.000003	0.000003	0.000003
Std. Error	(0.000000)	(0)	(0)
t-value	11.834100	8.41049	7.9096
Pr(> t)	0.000000	0	0
α_1	0.117312	0.13444	0.134804
Std. Error	(0.017913)	(0.025818)	(0.02581)
t-value	6.5492	5.20714	5.22299
Pr(> t)	0	0	0
β_1	0.740557	0.710272	0.710097
Std. Error	(0.029631)	(0.038925)	(0.039382)
t-value	24.9923	18.24705	18.03113
Pr(> t)	0	0	0
<i>AIC</i>	-7.9172	-7.9389	-7.9404
<i>BIC</i>	-7.8519	-7.8572	-7.8587
ξ	-	-0.095154	-0.098226
κ	-	3.490707	2.353444

Таблица 4.20 - Результаты оценивания $ARIMA(4,0,0) - GARCH(1,1)$ моделей для $Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$ и $\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$ (British Pound / Euro).

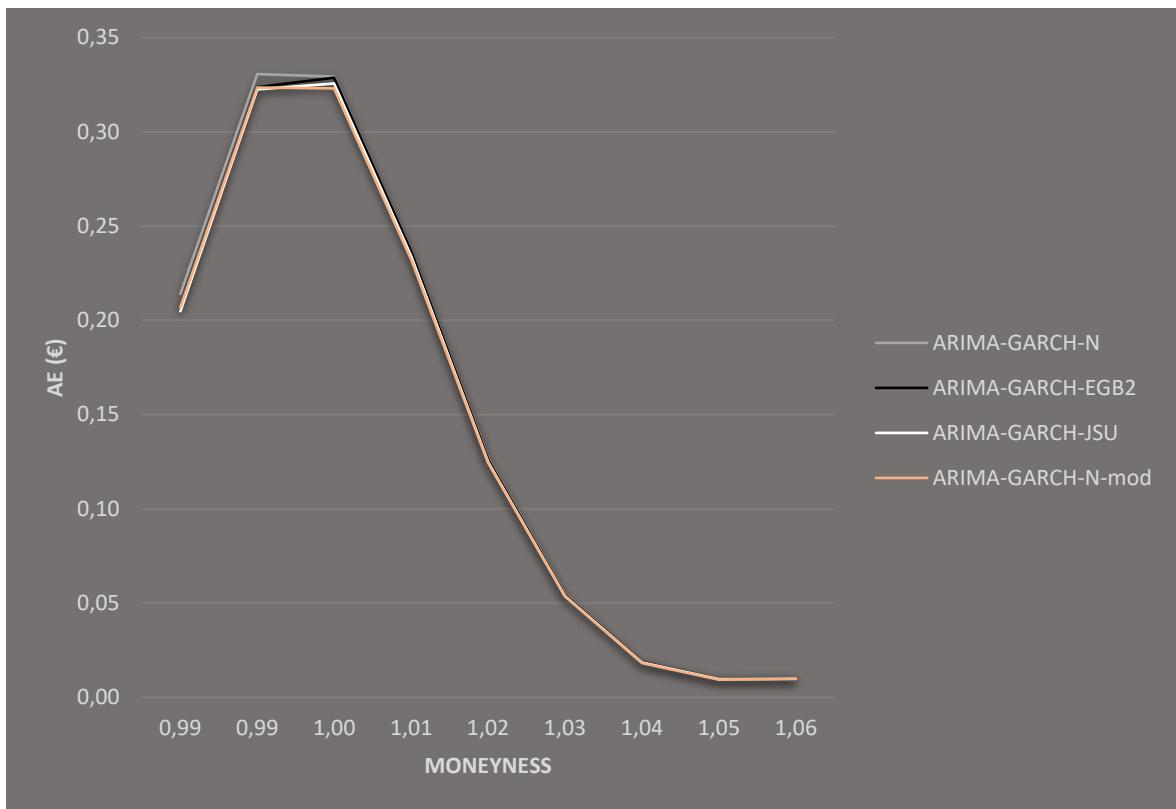


Рисунок 4.26 - Абсолютные ошибки цен опционов call British Pound / Euro (дата экспирации 22 июня 2019 года).

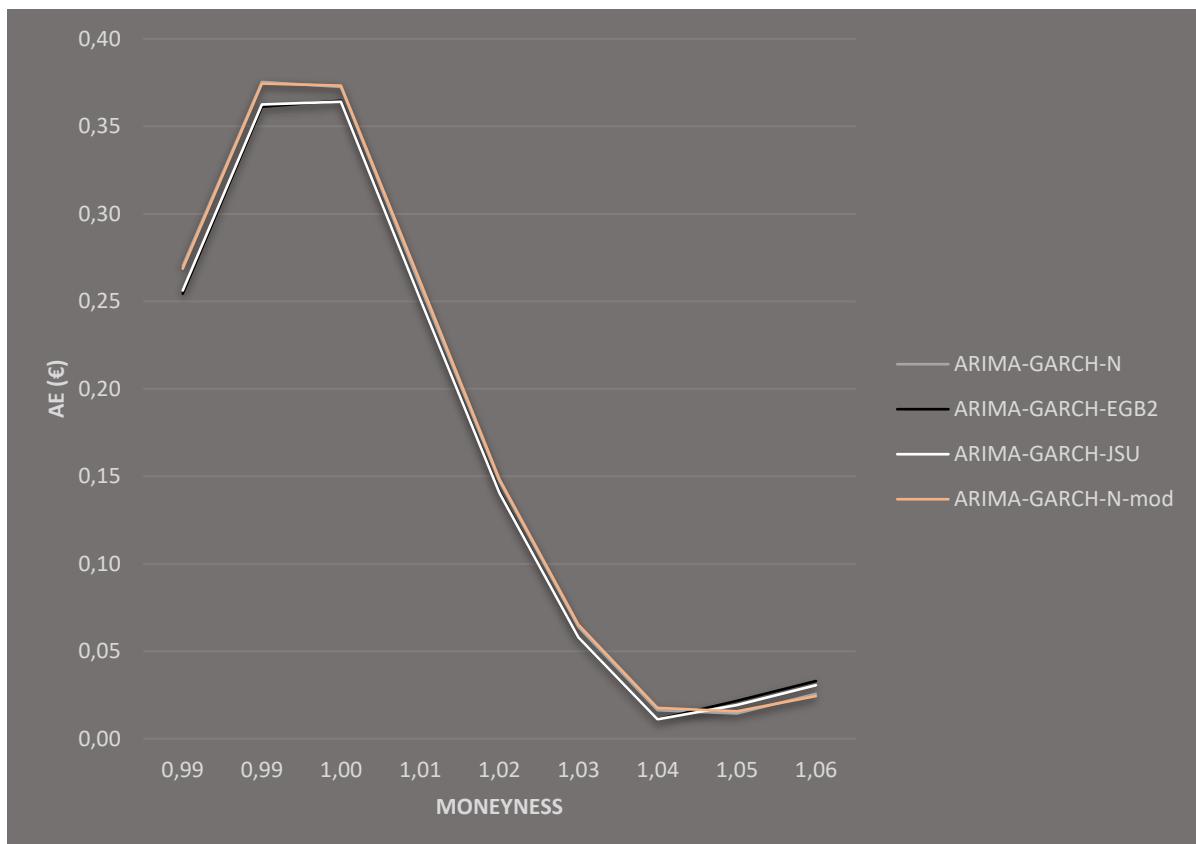


Рисунок 4.27 - Абсолютные ошибки цен опционов put British Pound / Euro (дата экспирации 22 июня 2019 года).

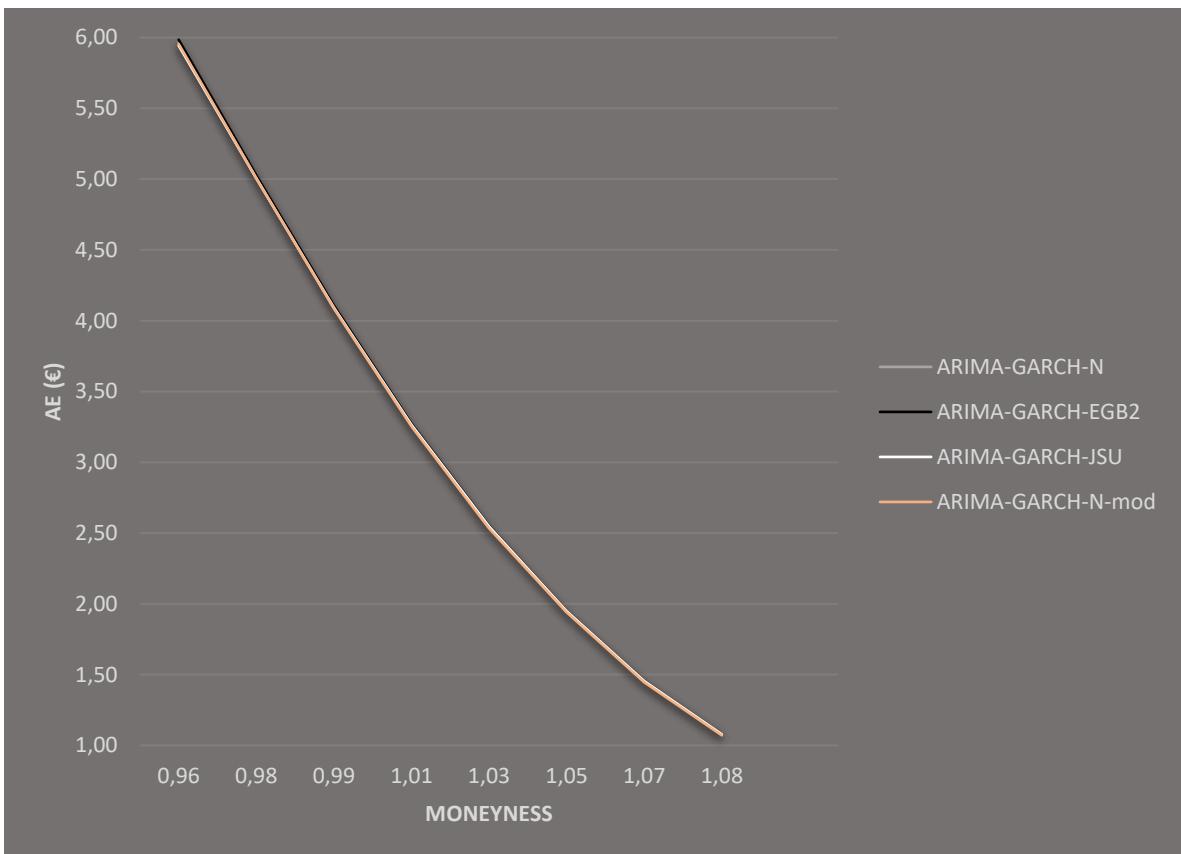


Рисунок 4.28 - Абсолютные ошибки цен опционов call British Pound / Euro (дата экспирации 22 марта 2020 года).

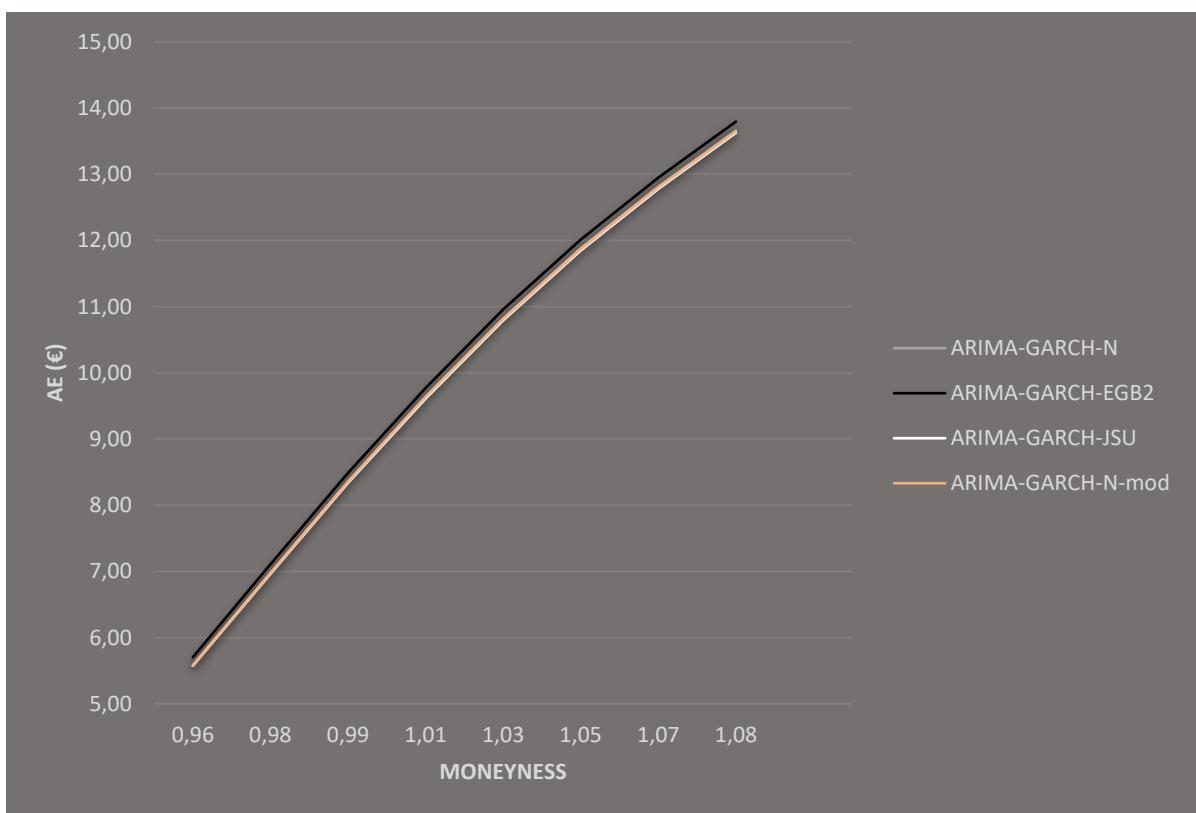


Рисунок 4.29 - Абсолютные ошибки цен опционов put British Pound / Euro (дата экспирации 22 марта 2020 года).

Результаты калибровки моделей (таблица 4.20) свидетельствуют о статистической значимости всех коэффициентов на уровне 99%, также коэффициенты близки друг к другу, а коэффициент асимметрии близок к нулю для распределений *EGB2* и *JSU*, что свидетельствует о близости моделей к нормальному распределению.

Анализ рисунков 4.26 – 4.29 показывает, что стоимости, полученные при помощи моделей с ошибками, имеющими распределения *EGB2* и *JSU*, практически совпадают, причем для опционов с датой экспирации 22 июня 2019 года оценки дают меньшие ошибки, чем полученные при помощи модели *ARIMA – GARCH* с нормальным распределением. Для опционов с датой экспирации 22 марта 2020 года графики практически совпадают, поэтому ниже приводятся табличные результаты абсолютных ошибок.

Moneyness	CALL				PUT			
	N	<i>EGB2</i>	<i>JSU</i>	<i>Nmod</i>	N	<i>EGB2</i>	<i>JSU</i>	<i>Nmod</i>
0.986	0.2140	0.2055	0.2048	0.2068	0.2703	0.2544	0.2562	0.2686
0.995	0.3307	0.3238	0.3226	0.3235	0.3754	0.3612	0.3625	0.3745
1.004	0.3294	0.3287	0.3256	0.3230	0.3726	0.3647	0.3641	0.3732
1.013	0.2368	0.2365	0.2341	0.2322	0.2586	0.2510	0.2510	0.2611
1.022	0.1271	0.1264	0.1250	0.1244	0.1474	0.1412	0.1405	0.1484
1.030	0.0550	0.0545	0.0538	0.0537	0.0638	0.0577	0.0578	0.0651
1.039	0.0189	0.0188	0.0185	0.0182	0.0163	0.0111	0.0111	0.0175
1.048	0.0097	0.0098	0.0097	0.0094	0.0144	0.0217	0.0193	0.0156
1.057	0.0099	0.0100	0.0099	0.0098	0.0257	0.0330	0.0305	0.0244

Таблица 4.21 - Абсолютные ошибки цен опционов call/put British Pound / Euro (дата экспирации 22 июня 2019 года).

Moneyness	CALL				PUT			
	N	<i>EGB</i>	<i>JSU</i>	<i>Nmod</i>	N	<i>EGB</i>	<i>JSU</i>	<i>Nmod</i>
0.959	0.9593	5.9704	5.9848	5.9436	5.5791	5.7015	5.5738	5.5725
0.977	0.9771	5.0263	5.0285	5.0060	6.9730	7.1076	6.9612	6.9694
0.995	0.9948	4.1065	4.1099	4.0944	8.3526	8.4860	8.3326	8.3500
1.013	1.0126	3.2699	3.2725	3.2645	9.6390	9.7731	9.6124	9.6345
1.030	1.0304	2.5477	2.5511	2.5464	10.8210	10.9543	10.7902	10.8132
1.048	1.0481	1.9507	1.9521	1.9507	11.8781	12.0131	11.8457	11.8669
1.066	1.0659	1.4558	1.4569	1.4551	12.8125	12.9481	12.7791	12.8005
1.084	1.0837	1.0786	1.0789	1.0785	13.6599	13.7959	13.6265	13.6458

Таблица 4.22 - Абсолютные ошибки цен опционов call/put British Pound / Euro (дата экспирации 22 марта 2020 года).

Из таблицы 4.21 видно, что модели *EGB2* и *JSU* дают меньшие ошибки по сравнению с нормальным распределением для опционов call и put (дата экспирации 22 июня 2019 года) на интервале *Moneyness* < 1.048. Для опционов с датой экспирации 22 марта 2020 года

лучшие результаты дают модели N и JSU (на всем рассматриваемом интервале *Moneyness*). Во всех случаях преимущество имеет модель, построенная на основе распределения S_u Джонсона.

Опционы на стоимость природного газа (Natural Gas)

Ряд $Y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$ (рисунок 4.30) для цен природного газа также не имеет автокорреляционных связей (рисунок 4.31), анализ показывает, что необходимо использовать модель $ARIMA(0,0,1) - GARCH(1,1)$ для преобразованного временного ряда $Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$.

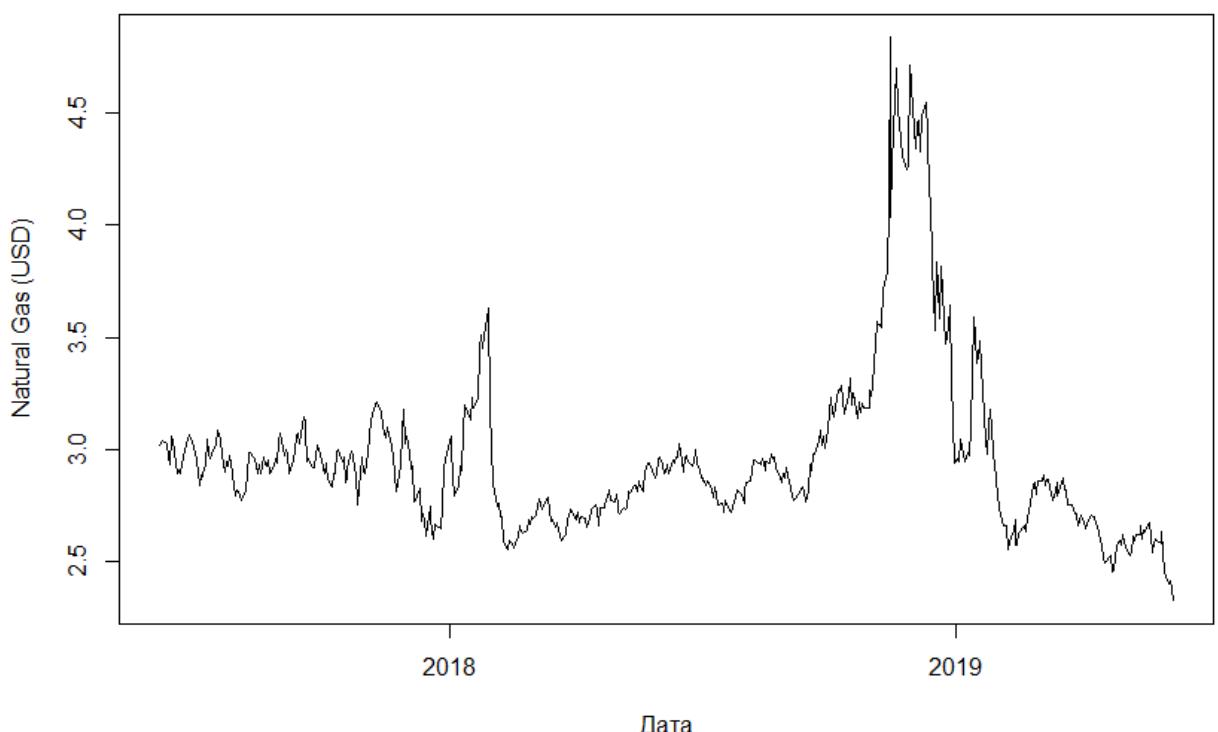


Рисунок 4.30 - График стоимости фьючерсного контракта на природный газ на конец дня (06.06.2017-03.06.2019).

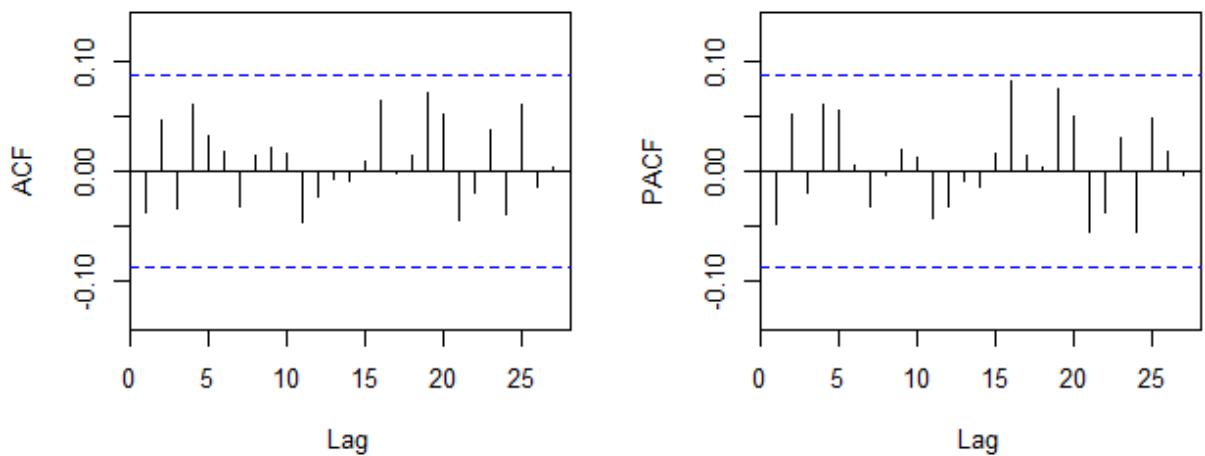


Рисунок 4.31 - Графики ACF и PACF для $Y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$ (Natural Gas).

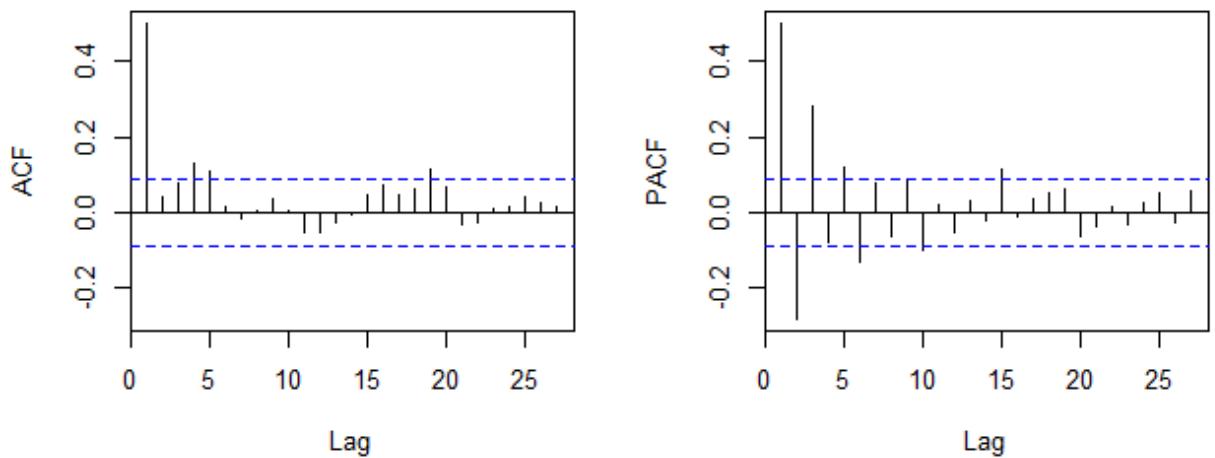


Рисунок 4.32 - Графики ACF и PACF для $Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$ (Natural Gas).

Данные	Значение статистики	$\chi^2_{99\%,5}$
$Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$	147.34	15.08627
$\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$	146.28	15.08627

Таблица 4.23 - Результаты Q-теста Льюнга-Бокса для 5 лагов (Natural Gas).

Данные	Значение статистики	Критическое значение статистики (1%)
$Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$	-7.2404	-3.96
$\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$	-7.2589	-3.96

Таблица 4.24 - Результаты Расширенного теста Дики-Фуллера (Natural Gas).

	<i>N</i>	<i>EGB2</i>	<i>JSU</i>
$L_n(\hat{v})$	1299.271	1313.38	1315.415
θ_1	0.886698	0.897053	0.893749
Std. Error	(0.02495)	(0.02086)	(0.021673)
t-value	35.5389	43.0032	41.2386
Pr(> t)	0	0	0
α_0	0.000014	0.000011	0.000011
Std. Error	(0.000001)	(0.000001)	(0.000001)
t-value	11.1229	12.0786	12.112
Pr(> t)	0	0	0
α_1	0.058728	0.044492	0.044999
Std. Error	(0.007146)	(0.005855)	(0.005694)
t-value	8.2182	7.5988	7.9022
Pr(> t)	0	0	0
β_1	0.900351	0.922502	0.921933
Std. Error	(0.013811)	(0.012666)	(0.012823)
t-value	65.1923	72.8336	71.8961
Pr(> t)	0	0	0
<i>AIC</i>	-5.1502	-5.1983	-5.2064
<i>BIC</i>	-5.1166	-5.1480	-5.1561
ξ	-	-0.295199	-0.576871
κ	-	2.013086	1.974535

Таблица 4.25 - Результаты оценивания $ARIMA(0,0,1) - GARCH(1,1)$ моделей для $Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$ и $\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$ (Natural Gas).

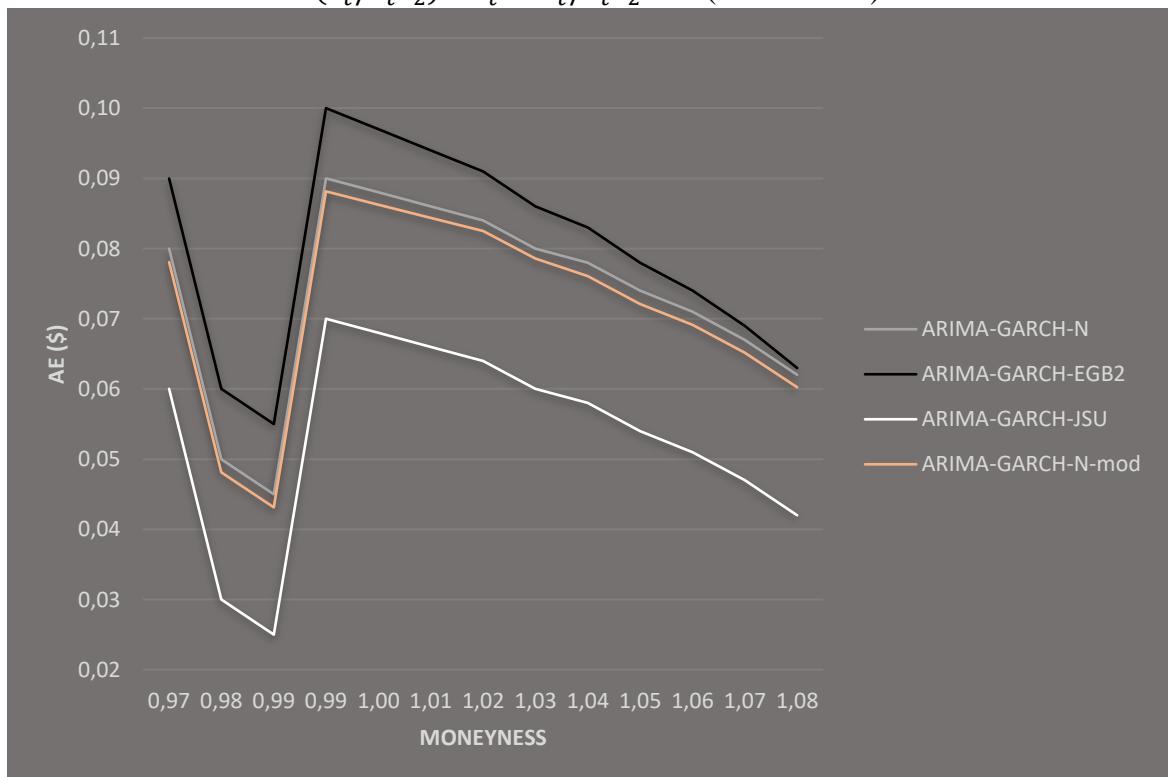


Рисунок 4.33 - Абсолютные ошибки цен опционов call Natural Gas (дата экспирации 20 июля 2019 года).

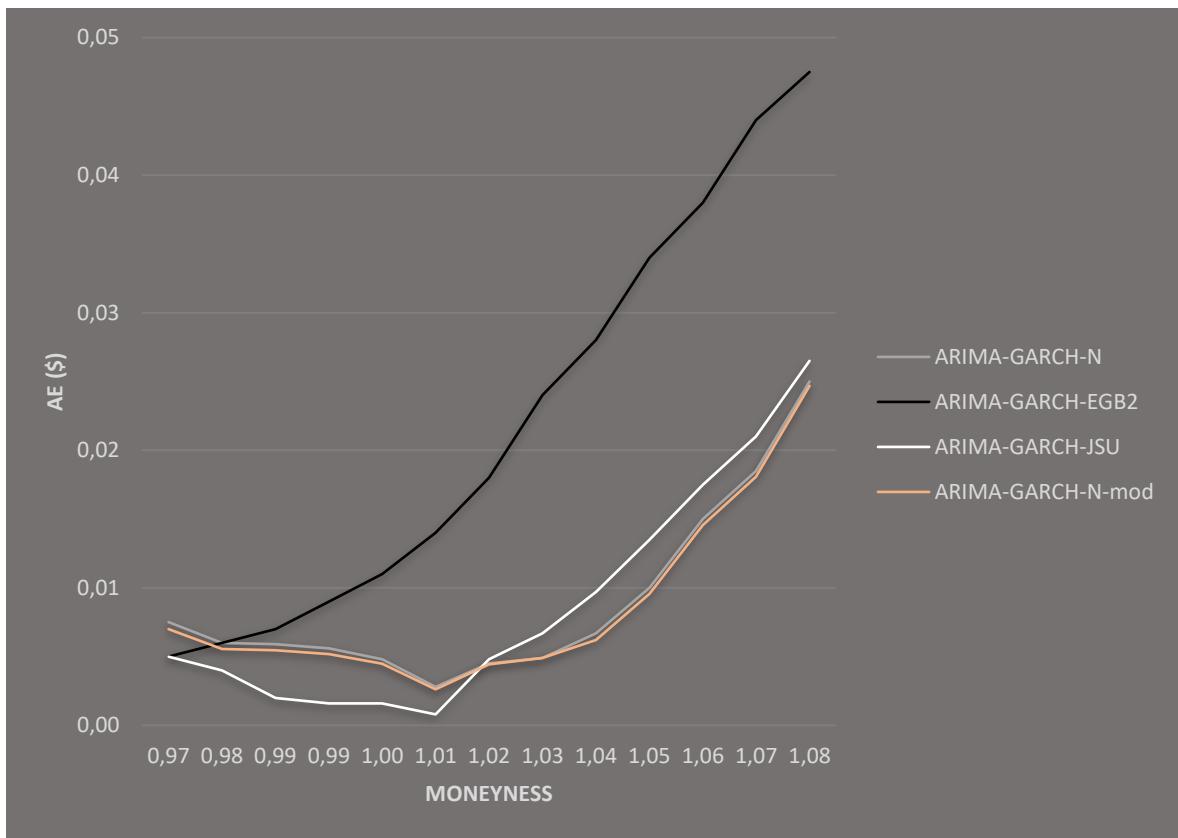


Рисунок 4.34 - Абсолютные ошибки цен опционов put Natural Gas (дата экспирации 20 июля 2019 года).

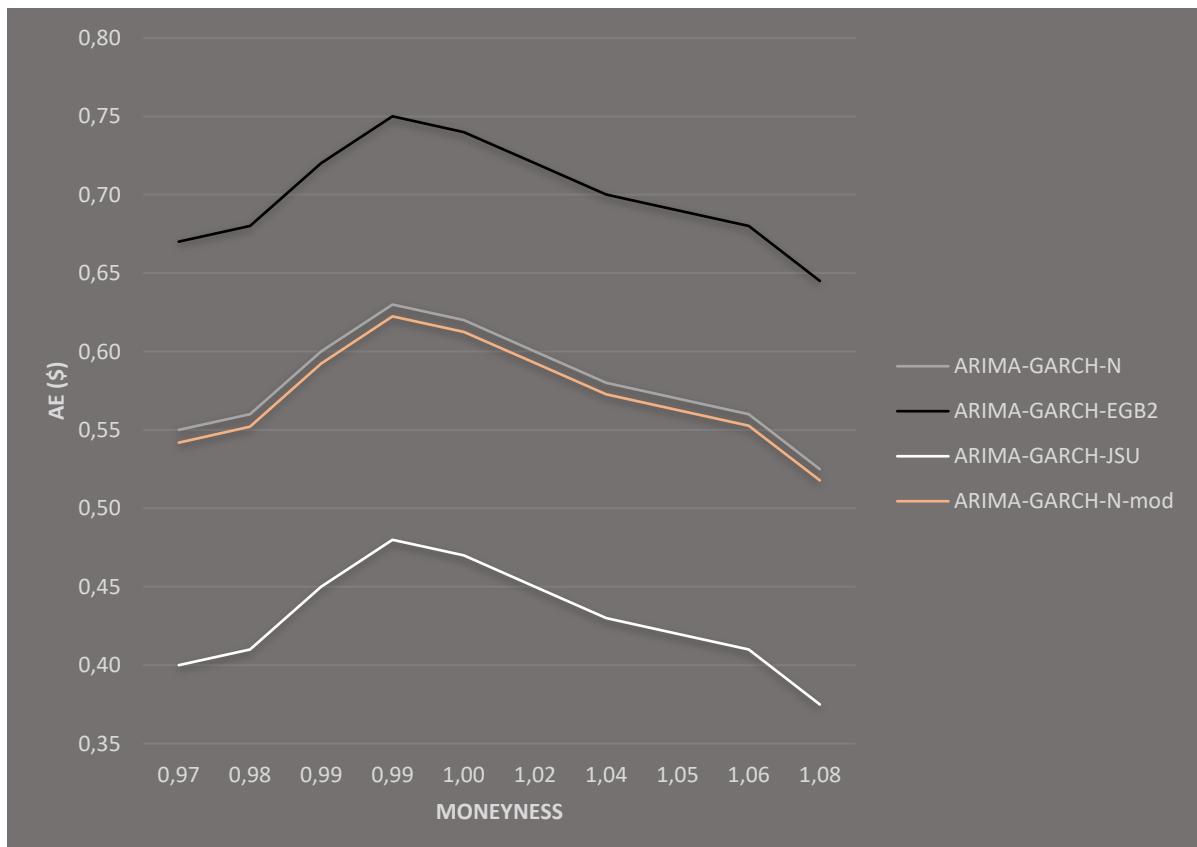


Рисунок 4.35 - Абсолютные ошибки цен опционов call Natural Gas (дата экспирации 22 июля 2020 года).

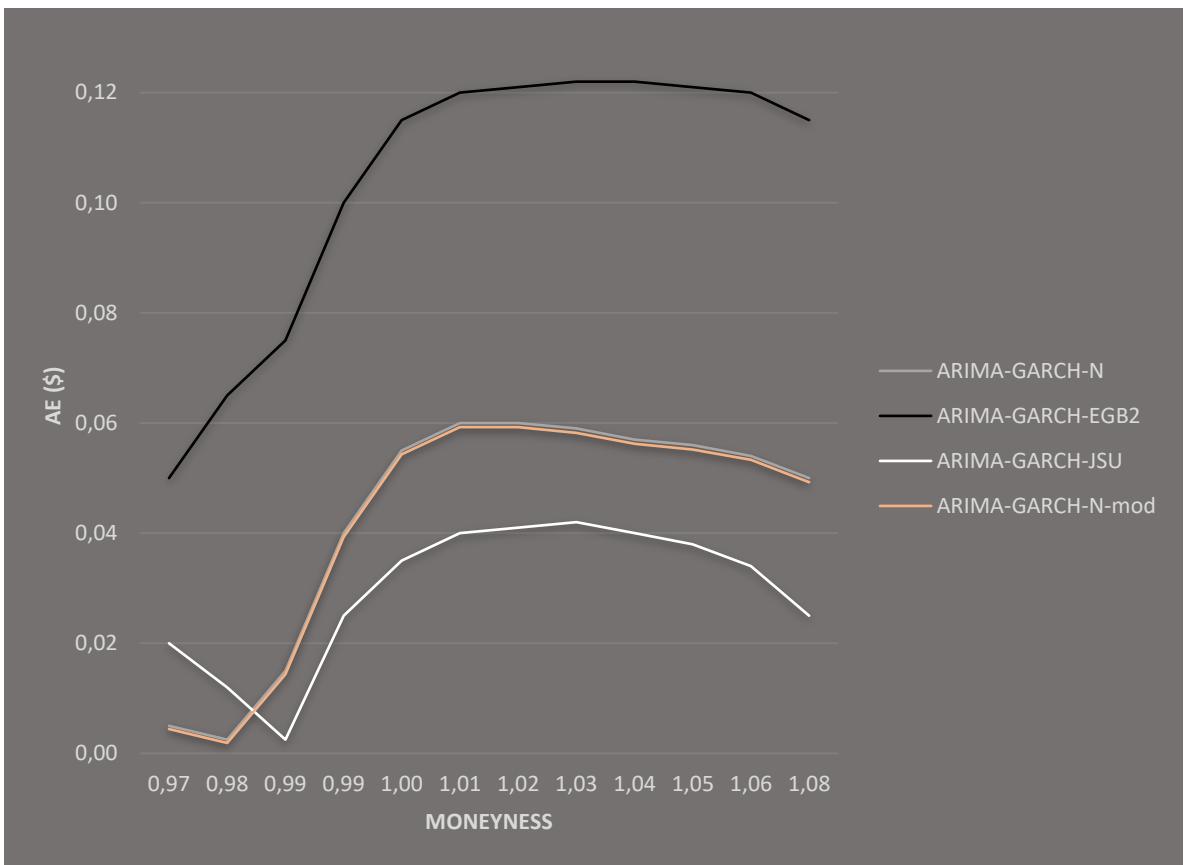


Рисунок 4.36 - Абсолютные ошибки цен опционов put Natural Gas (дата экспирации 22 июля 2020 года).

Все модели показывают небольшие значения абсолютных ошибок цен опционов. Как для дальних так и для близких опционных контрактов в большинстве случаев модель с распределением ошибок S_u Джонсона показывает наименьшие ошибки. Для опционов с датой экспирации 22 июля 2020 года в интервале *Moneyness* от 1,016 до 1,081 минимальные значения абсолютных ошибок показывает модель с нормальным распределением ошибок, однако стоит отметить, что разница в ошибках между *N* и *JSU* небольшая - 0,0027.

Опционы на стоимость нефти (Light Sweet Crude Oil)

Коррелограммы ACF и PACF (рисунок 4.38, 4.39) временного ряда $Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$ (рисунок 4.37) указывают на то, что в качестве ARIMA части необходимо рассматривать $ARIMA(2,0,0)$ (сильно значимые первые два лага частной автокорреляции и затухающее поведение ACF графика).



Рисунок 4.37 - График стоимости фьючерсного контракта на нефть на конец дня (06.06.2017-03.06.2019).

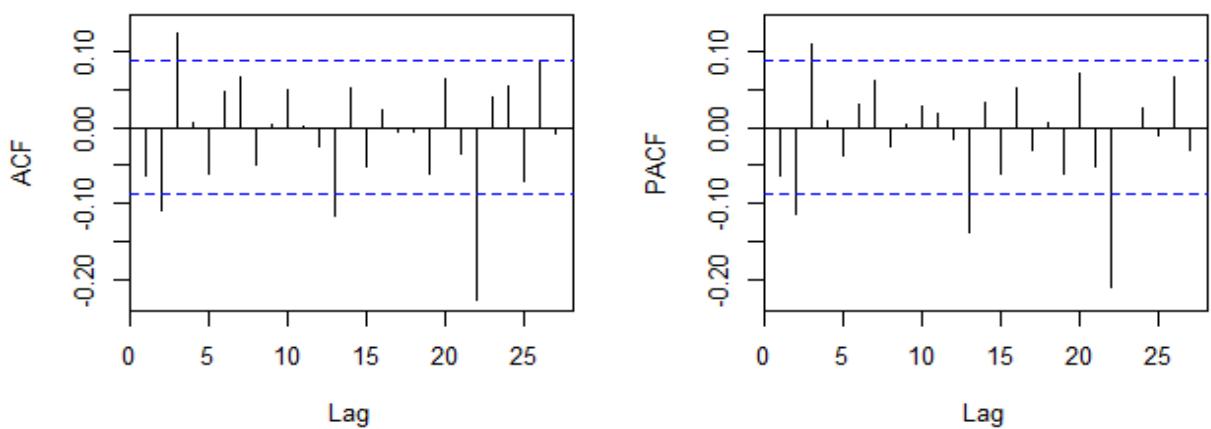


Рисунок 4.38 - Графики ACF и PACF для $Y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$ (Light Sweet Crude Oil).

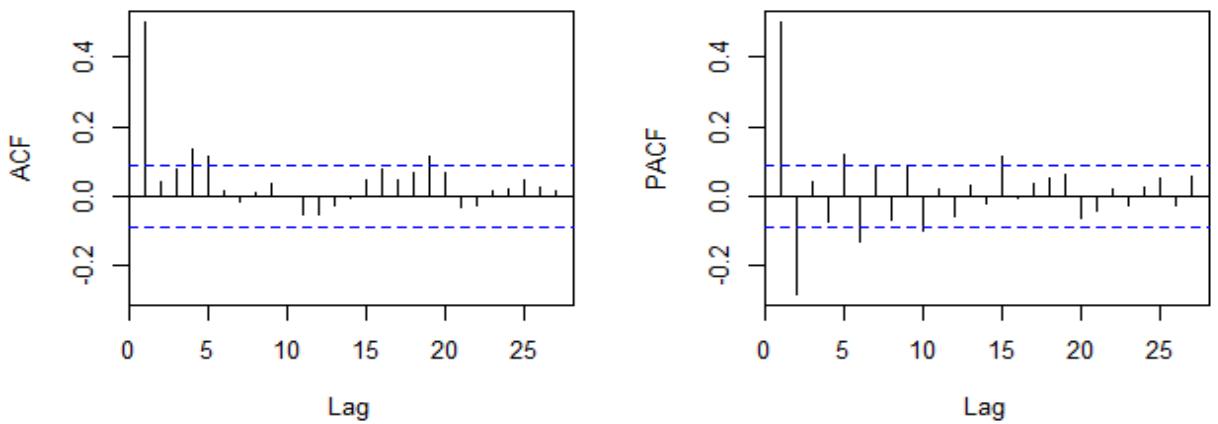


Рисунок 4.39 - Графики ACF и PACF для $Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$ (Light Sweet Crude Oil).

Данные	Значение статистики	$\chi^2_{99\%,5}$
$Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$	92.039	15.08627
$\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$	89.662	15.08627

Таблица 4.26 - Результаты Q-теста Льюнга-Бокса для 5 лагов (Light Sweet Crude Oil).

Данные	Значение статистики	Критическое значение статистики (1%)
$Y_t = \ln(S_t/S_{t-2})$	-7.5108	-3.96
$\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$	-7.5100	-3.96

Таблица 4.27 - Результаты Расширенного теста Дики-Фуллера (Light Sweet Crude Oil).

	<i>N</i>	<i>EGB2</i>	<i>JSU</i>
$L_n(\hat{v})$	1261.086	1267.017	1268.022
ϕ_1	0.667116 (0.043985)	0.657088 (0.043122)	0.659745 (0.043152)
Std. Error			
t-value	15.1668	15.2379	15.2888
Pr(> t)	0	0	0
ϕ_2	-0.313186 (0.043636)	-0.323465 (0.042236)	-0.322464 (0.042439)
Std. Error			
t-value	-7.1773	-7.6585	-7.5983
Pr(> t)	0	0	0
α_0	0.000015 (0.000002)	0.000013 (0.000001)	0.000013 (0.000001)
Std. Error			
t-value	8.341500	16.4056	16.1163
Pr(> t)	0.000000	0	0
α_1	0.049707 (0.007002)	0.042324 (0.005701)	0.041834 (0.005506)
Std. Error			
t-value	7.0988	7.424	7.5984
Pr(> t)	0	0	0
β_1	0.913128 (0.013747)	0.92728 (0.011196)	0.928020 (0.011169)
Std. Error			
t-value	66.424300	82.8231	83.0925
Pr(> t)	0.000000	0	0
<i>AIC</i>	-4.9944	1267.752	-5.0140
<i>BIC</i>	-4.9524	-4.9542	-4.9553
ξ		-0.70877	-0.27232
κ		4.405384	2.663401

Таблица 4.28 - Результаты оценивания $ARIMA(2,0,0) - GARCH(1,1)$ моделей для $Y_t =$

$\ln(S_t/S_{t-2})$ и $\tilde{Y}_t = S_t/S_{t-2} - 1$ (Light Sweet Crude Oil).

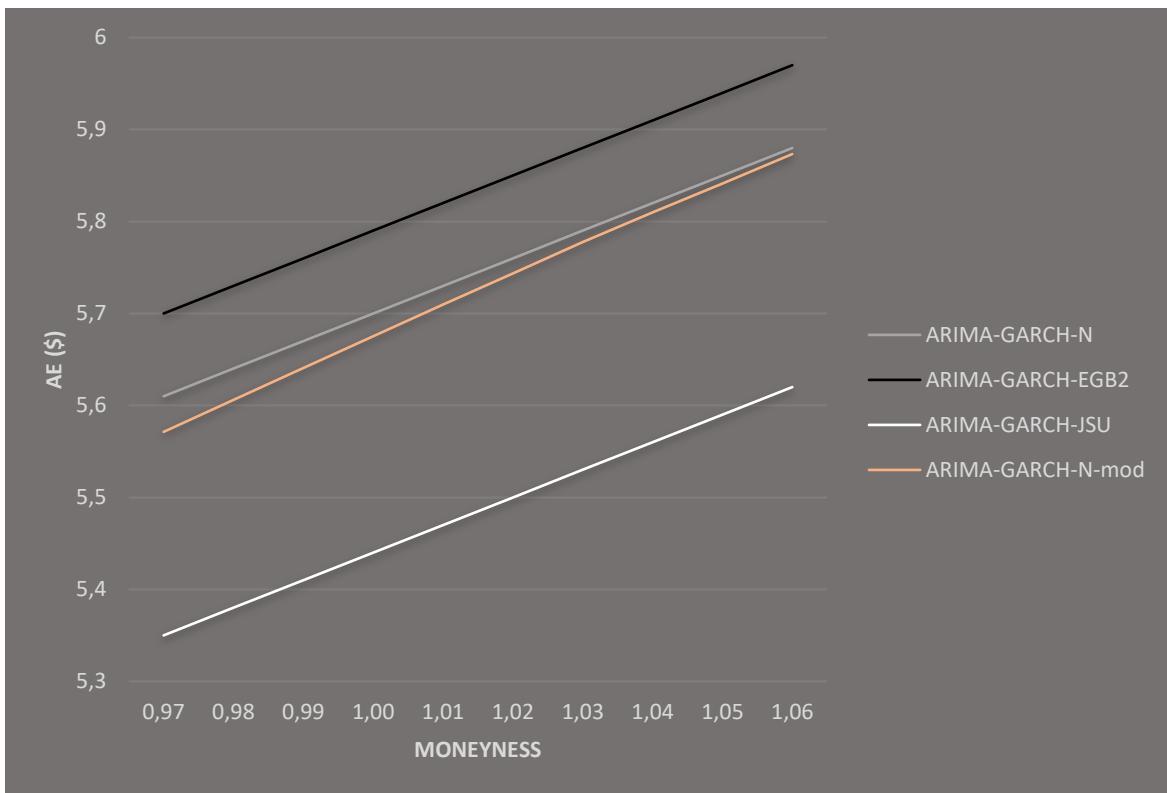


Рисунок 4.40 - Абсолютные ошибки цен опционов call Light Sweet Crude Oil (дата экспирации 20 июня 2019 года).

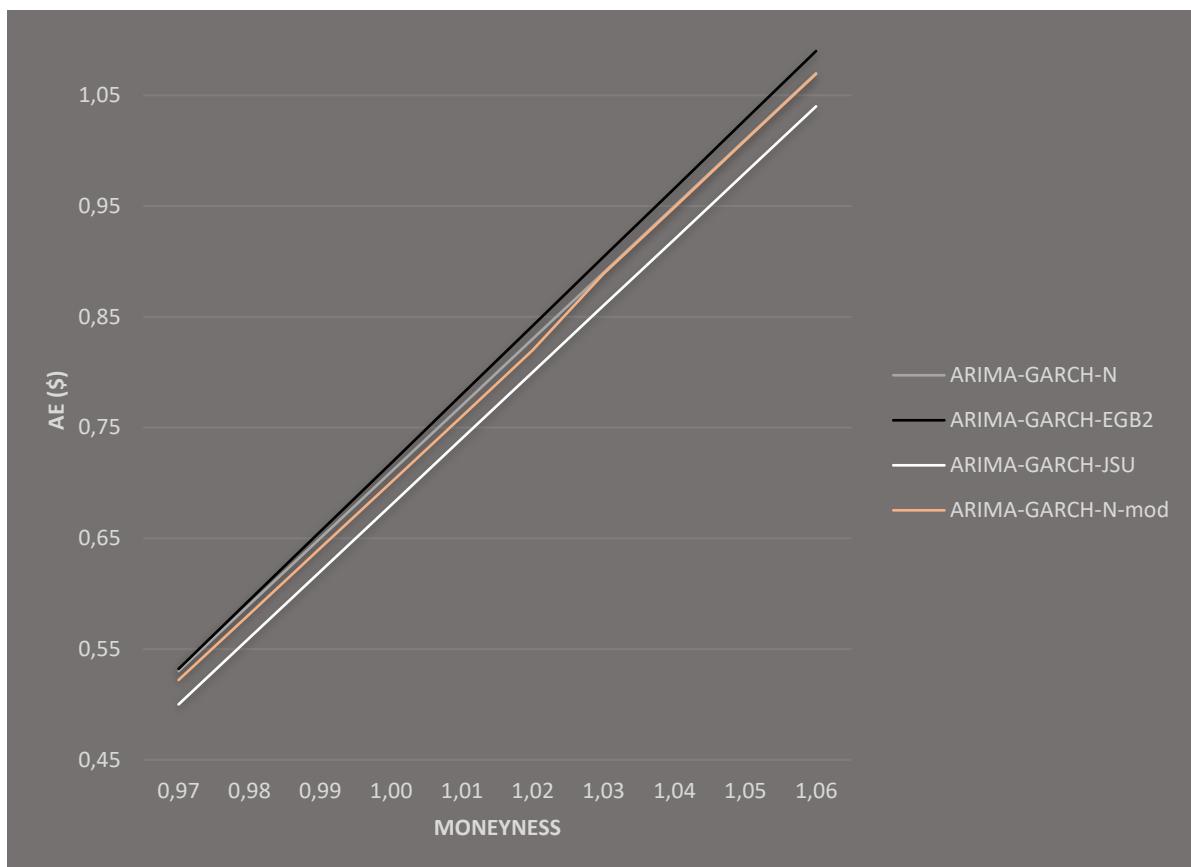


Рисунок 4.41 - Абсолютные ошибки цен опционов put Light Sweet Crude Oil (дата экспирации 20 июня 2019 года).

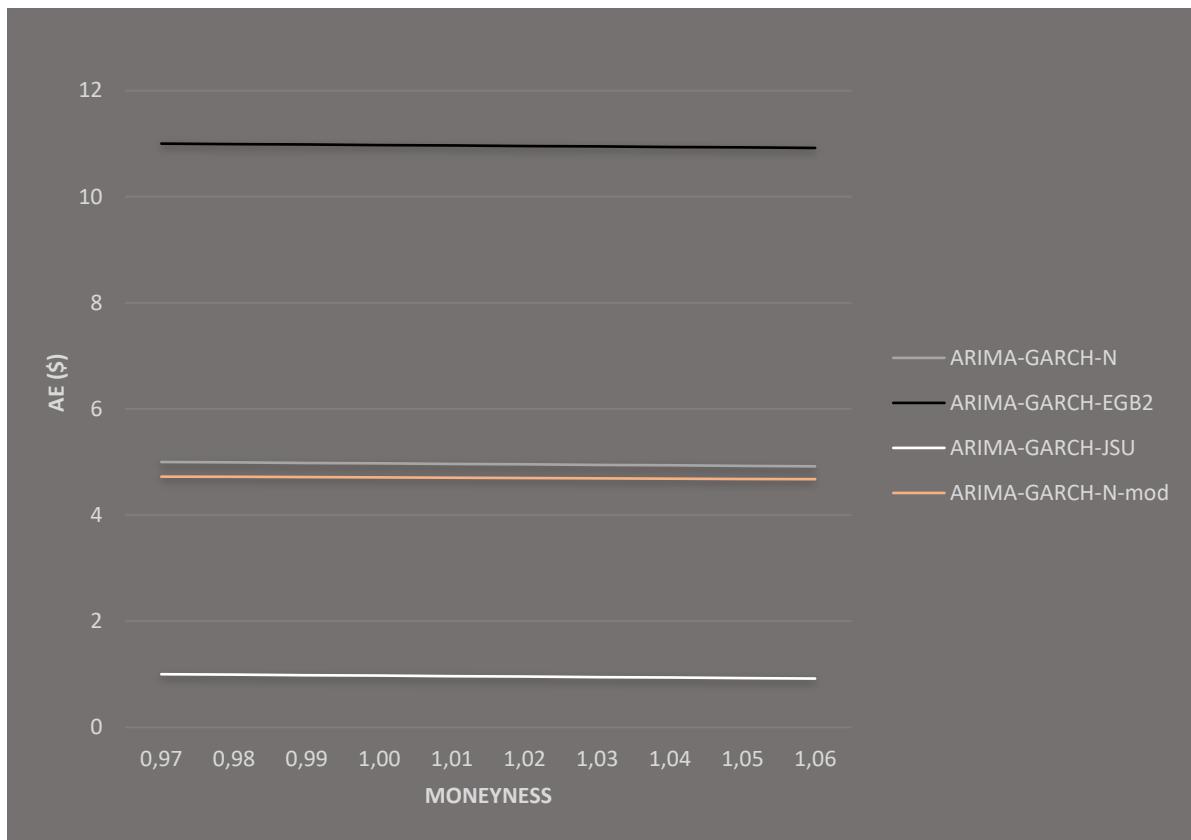


Рисунок 4.42 - Абсолютные ошибки цен опционов call Light Sweet Crude Oil (дата экспирации 22 июня 2020 года).

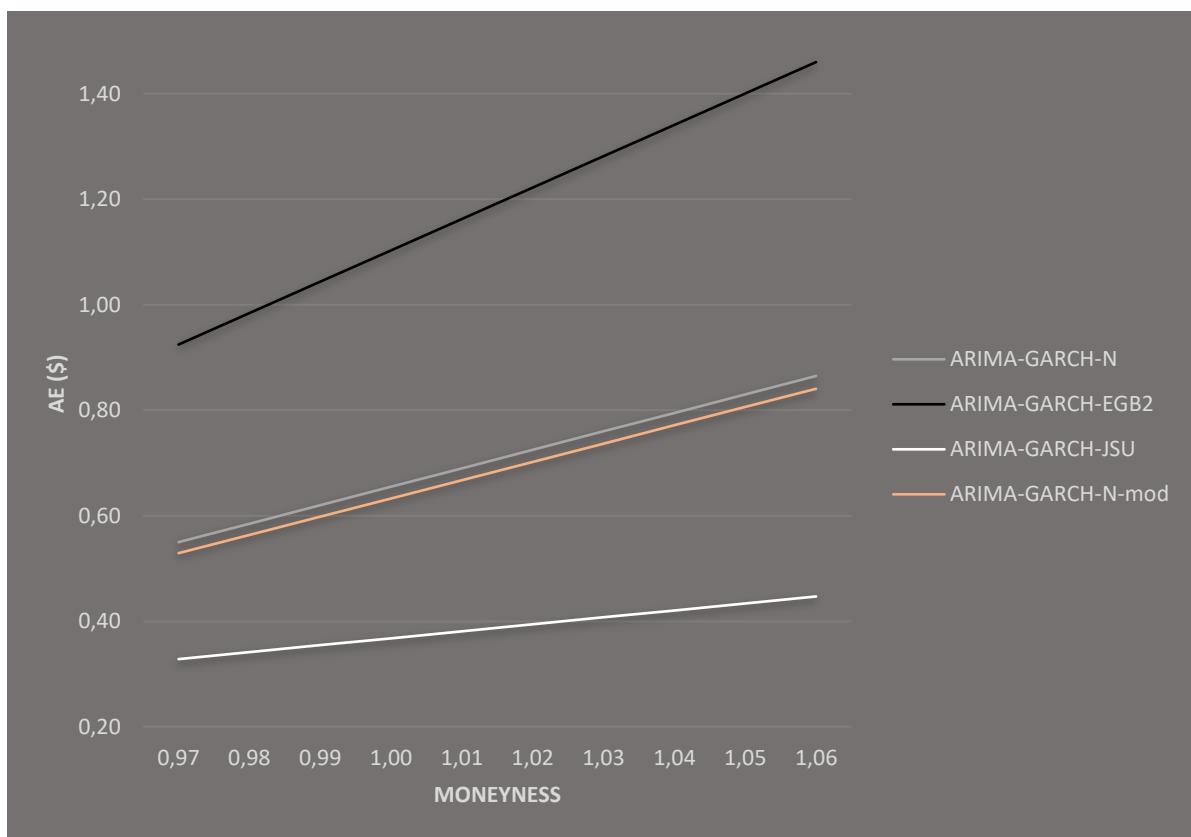


Рисунок 4.43 - Абсолютные ошибки цен опционов put Light Sweet Crude Oil (дата экспирации 22 июня 2020 года).

Как и в случае с опционом на природный газ (товарный опцион), абсолютные ошибки цен опционов небольшие, в частности это характерно для модели с распределением S_u Джонсона. Второй по качеству моделью оказалась $ARIMA - GARCH$ с ошибками, распределенными нормально. Данный результат можно объяснить большей схожестью распределений N и JSU , это видно по параметру асимметрии, для нормального распределения он составит нуль, а для $JSU = -0.27232$ и $EGB2 = -0.70877$.

4.5 Выводы

В данной главе были рассмотрены четыре модели ARIMA-GARCH с ошибками, имеющими нормальное распределение, обобщенное экспоненциальное бета распределение второго типа, и распределение S_u Джонсона. Первые две модели были реализованы по известным формулам, полученным применением расширенного принципа Гирсанова. Третья и четвертая модели реализовывались на основе результатов Главы 2. Эффективность конкурирующих моделей сравнивалась на основе оценивания абсолютной ошибки справедливой стоимости опционных контрактов относительно рыночной стоимости.

Результаты эмпирических исследований показывают, что на небольших временных промежутках модели обеспечивают близкие значения справедливой стоимости опционов. Для опционов с дальней датой экспирации (больше года) модели показывают существенно разные результаты. Модель, построенная для распределения S_u Джонсона, дает оценки стоимости, максимально близкие к ценам закрытия биржевых торгов для всех рассматриваемых опционных контрактов. Также необходимо отметить, что модель, построенная для нормального распределения на основе модификации расширенного принципа Гирсанова дает практически одинаковые результаты с моделью построенной на основе классического расширенного принципа Гирсанова.

ГЛАВА 5 Численные эксперименты оценки VaR портфеля опционов

В современном риск-менеджменте существует множество мер риска [80;81], позволяющих ограничивать потенциальные потери от инвестиций в активы при повышенной волатильности цен. Одной из основных мер риска является VaR [77; 82] (Value at Risk). VaR – это уровень потерь в течении N дней, вероятность превышения которого составляет $(100 - X)\%$, где X – уровень доверия (confidence level). VaR оценку риска, также называемую квантильной, в современном риск-менеджменте используют для решения задачи управления портфелем ценных бумаг. В своей статье [83] Кибзун А.И. и Кузнецов Е.А. показали, что замена критерия оптимальности среднего значения дохода на критерий гарантированного, с заданной вероятностью, значения капитала (квантильный критерий) позволяет преодолеть биржевой парадокс. Авторами использовался доверительный метод (т.к. известно, что наличие вероятностного ограничения не дает непосредственно применять метод динамического программирования), с помощью которого было найдено приближенное решение, однако оптимальная стратегия не обладала марковскими свойствами. Данную проблему разрешил Кан Ю.С. [84], показав, что квантильная задача управления с обратной связью сводится к задаче оптимального управления по вероятностному критерию, которую уже можно исследовать методом динамического программирования, в результате чего найденные стратегии уже являются марковскими. Вышеописанные результаты нашли множество применений в работах других авторов. В диссертационной работе [85] разработан алгоритм решения задач оптимизации квантильного критерия с линейными и квазилинейными по непрерывным случайнм параметрам функциями потерь, основанных на использовании моделей ядра вероятностной меры. В другой диссертационной работе [86], автор использует свойства квантильного критерия для построения алгоритмов решения задач стохастического программирования с CVaR-критерием (интегральный квантиль). В своих работах авторы отвечают на важный вопрос о том, как инвестор должен себя вести с точки зрения оптимальности, где в качестве меры риска предпочтительней использовать VaR, т.к. данный критерий обладает рядом нужных свойств. Однако оценку риска, как и оценку справедливой стоимости рекомендуется проводить на основе риск-нейтральной вероятностной меры, в силу ее перспективности. Также для расчета VaR портфеля деривативов необходимо формальное описание совместной динамики цен базовых активов. Таким образом для решения задачи оценки VaR портфеля деривативов можно применить результаты Главы 4.

5.1 Введение. Постановка задачи

В рамках данной главы ставится задача оценки однодневного VaR портфеля пяти опционных контрактов на пять различных базовых активов: фондовые индексы DAX (Deutscher Aktienindex) и SMI (Swiss Market Index), курс британского фунта к американскому доллару (British Pound / US Dollar), фьючерсы, базовыми активами которых выступают нефть (Light Sweet Crude Oil) и природный газ (Natural Gas). Необходимо:

1. На основе исторических данных базовых активов провести разложение вектора случайных процессов в линейную комбинацию главных компонент (некоррелируемых друг с другом);
2. Отобрать m компонент, которые описывают не менее 70% дисперсии исходных данных случайных процессов;
3. Оценить коэффициенты методом квази-максимального правдоподобия для каждой ARIMA-GARCH модели главных компонент;
4. С помощью формулы (3.22) получить риск-нейтральные коэффициенты ARIMA-GARCH моделей базовых активов;
5. На основе метода Монте-Карло провести оценку VaR портфеля опционных контрактов;
6. Провести бэк-тестирование и оценить эффективность модели на основе риск-нейтральной меры в сравнении с моделью на основе физической меры.

5.2 Описание данных и методика расчета VaR, бэк-тестирование

Рассмотрим портфель опционных контрактов, представленный в таблице 5.1. Из таблицы видно, что в данных представлены три вида валют, соответственно, согласно формуле (3.22) использовались три безрисковые процентные ставки, в качестве таковых взяты ставки LIBOR (London Interbank Offered Rate) на соответствующие валюты.

Базовый актив	Цена исполнения	Дата исполнения опционного контракта	Валюта	Тип опционного контракта
Индекс DAX	10750	19.06.2020	EUR	CALL
Индекс SMIM	2340	19.06.2020	CHF	PUT
GBP/USD	128	06.05.2020	USD	PUT
Natural Gas	2.25	25.06.2020	USD	CALL
Light Sweet Crude Oil	70	16.11.2022	USD	CALL

Таблица 5.1 – Состав портфеля опционных контрактов.

Для наглядности необходимости применения метода главных компонент приведена таблица 5.2, из которой следует, что большинство базовых активов имеют сильную линейную связь (корреляция между индексом SMIM и индексом DAX составляет 0.95).

	Индекс DAX	Индекс SMIM	GBP/USD	NG1	CL1
Индекс DAX	1.00				
Индекс SMIM	0.95	1.00			
GBP/USD	0.77	0.77	1.00		
NG1	0.48	0.27	0.05	1.00	
CL1	0.87	0.80	0.51	0.57	1.00

Таблица 5.2 – Корреляционная таблица базовых активов.

Результат применения метода главных компонент к доходностям базовых активов приведен в таблице 5.3. Так, например, индекс DAX будет иметь вид:

$$DAX = 0.58X_1 - 0.3X_2 + 0.26X_3 + 0.04X_4 + 0.71X_5,$$

где X_i – главная компонента с номером i .

	Компонента 1	Компонента 2	Компонента 3	Компонента 4	Компонента 5
Индекс DAX	0.58	-0.30	0.26	0.04	0.71
Индекс SMIM	0.59	-0.23	0.33	0.00	-0.70
GBPUSD	-0.05	-0.72	-0.52	-0.46	-0.05
NG1	0.35	0.55	-0.15	-0.74	0.05
CL1	0.44	0.18	-0.73	0.49	-0.04

Таблица 5.3 – Матрица перехода от главных компонент к базовым активам.

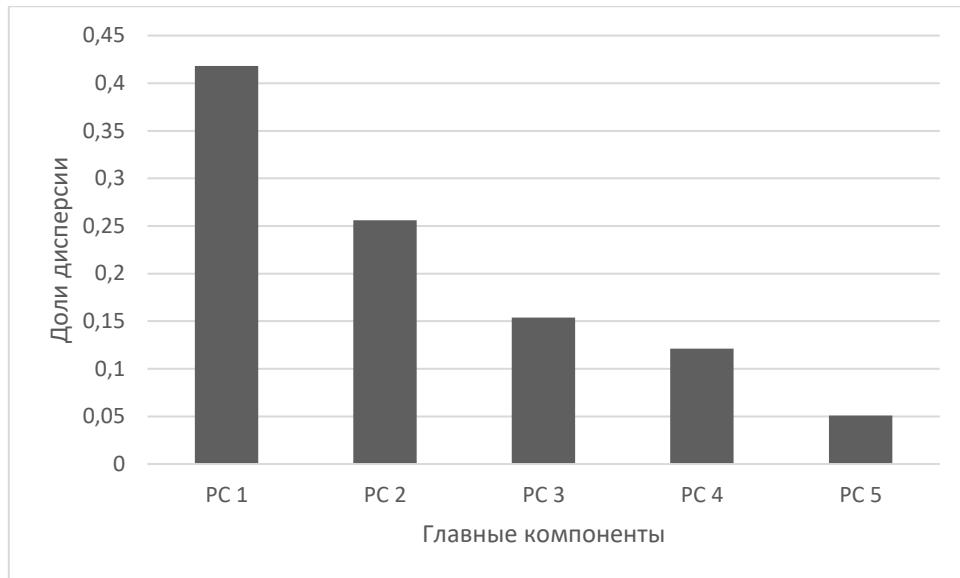


Рисунок 5.1 - Доли дисперсии базовых активов, объясняемые главными компонентами.

На рисунке 5.1 представлена гистограмма долей дисперсии, описываемых каждой компонентой. Из рисунка видно, что первые две компоненты описывают 67.4% дисперсии исходных данных, а три первые компоненты - 82.8%. Таким образом для задачи оценивания VaR портфеля будут использованы три первые главные компоненты.

Однодневный VaR портфеля опционных контрактов оценивался по методу Монте-Карло [87;88]. Для этого необходимо:

1. Сгенерировать траектории главных компонент на основе ARIMA-GARCH моделей начиная с момента времени t (текущий момент времени) до момента экспирации опциона с базовым активом Light Sweet Crude Oil (16.11.2022);
2. Согласно формуле (3.22) получить риск-нейтральные траектории базовых активов;
3. По полученным траекториям посчитать справедливые стоимости опционных контрактов на момент времени $t + 1$ и сложить их (в одной валюте);
4. Пункт 1 выполнить $N = 10\,000$ раз. Полученную выборку отсортировать по возрастанию и в качестве значения VaR с уровнем значимости α выбрать значение из выборки с номером $N \times \alpha + 1$;

В качестве критерия состоятельности модели проводился тест Купика [89]. Суть теста заключается в проведении расчетов меры риска VaR портфеля активов для заданного исторического промежутка времени и сравнении полученных результатов с рыночными данными стоимости портфеля (бэк-тестирование [90]). В качестве примера был рассмотрен

временной промежуток с 19 августа 2019 года по 23 марта 2020 года (количество рабочих дней между ними составило 150). Тест Купика позволяет сравнить модельную и эмпирическую частоту событий, когда историческая стоимость портфеля активов опускалась ниже значения VaR (превышение). Если N – объем выборки, K – количество превышений кривой VaR, $\alpha_0 = K/N$ – эмпирическая частота превышений кривой VaR, тогда нулевая гипотеза теста Купика:

$$\mathbb{H}_0: \alpha_0 = \alpha, \text{ против } \mathbb{H}_1: \alpha_0 \neq \alpha. \quad (5.1)$$

Проверка гипотезы осуществляется при помощи статистики

$$S_{Cup} = -2 \ln((1 - \alpha)^{N-K} \alpha^K) + 2 \ln((1 - \alpha_0)^{N-K} \alpha_0^K), \quad (5.2)$$

которая, в случае истинности нулевой гипотезы имеет распределение $\chi^2(1)$. Так как проводился двусторонний тест, то статистика, для уровня значимости $\tilde{\alpha} = 5\%$ должно принимать значения $\chi^2((1 - \tilde{\alpha})/2, 1) < S_{Cup} < \chi^2(1 - (1 - \tilde{\alpha})/2, 1)$.

Значения базовых активов, безрисковых ставок (LIBOR) и рыночные стоимости опционных контрактов были взяты из системы Bloomberg. Вычисления проводились в среде программирования R. В качестве вспомогательного инструмента использовалась библиотека “rugarch” [91], которая позволяет проводить калибровку параметров моделей ARIMA-GARCH для разных типов моделей и разных распределений ошибок. В качестве оптимизатора, для решения задачи поиска максимального правдоподобия, библиотека “rugarch” использует оптимизатор “solnp”, описанный в Главе 4. В качестве распределения ошибок моделей ARIMA-GARCH главных компонент было рассмотрено распределение S_u Джонсона. Также была использована встроенная в среду R функция “prcomp”, позволяющая получать главные компоненты (согласно методу главных компонент), а также матрицу перехода от главных компонент к исходным данным (таблица 5.3). Исходный код доступен в приложении Б.

5.3 Спецификация ARIMA-GARCH моделей главных компонент

В данном разделе приводится выбор спецификаций ARIMA-GARCH моделей первых трех главных компонент. Первая калибровка параметров моделей главных компонент, необходимых для проведения бэк-тестирования, проводилась по историческим данным главных компонент, полученных на основе стоимостей базовых активов с 05 января 2015 (рисунок 5.2) на дату 19 августа 2019 года. Объем выборки составил 1161 день.

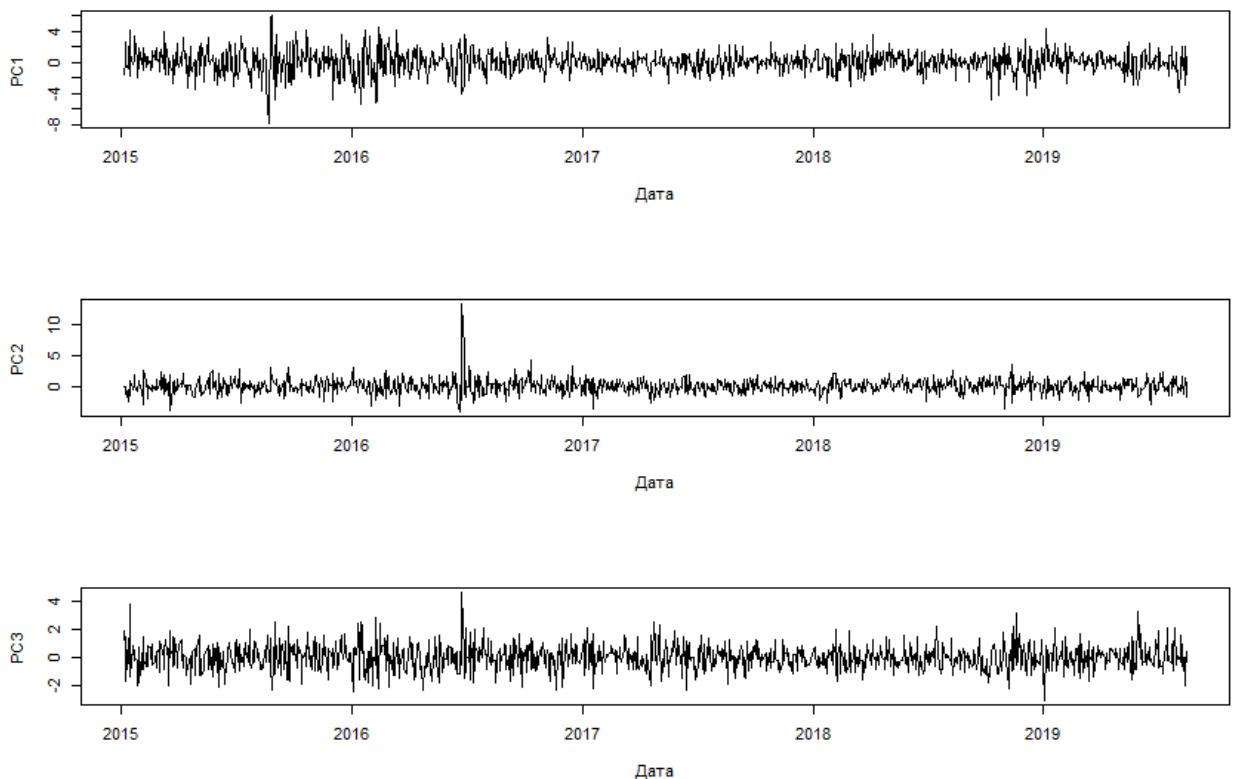


Рисунок 5.2 – Динамика первых трех главных компонент с 05.01.15 по 18.08.19.

Временные ряды главных компонент центрировались, поэтому значения константы ϕ_0 в уравнении (1.17) равен нулю. На основе анализа графиков ACF и PACF были выбраны две наилучшие альтернативные спецификации моделей ARIMA(2,0,2)-GARCH(1,1) и ARIMA(0,0,0)-GARCH(1,1). Результаты калибровки параметров моделей приведены в таблице 5.4. Из них видно, что в обеих моделях все коэффициенты ненулевые с уровнем значимости 95%. Используя обозначения Главы 4, в таблице также приведены значения коэффициента асимметрии ξ (skewness) и эксцесса κ (excess kurtosis) для нормированных ошибок ϵ_t . Видно, что значения коэффициента эксцесса в обеих моделях отрицательны, что свидетельствует о вытянутости распределения ошибок влево (*Median > Mean*). Положительные значения κ соответствуют более островершинным распределениям ошибок, чем нормальное. Выбор в пользу модели ARIMA(2,0,2) – GARCH(1,1) был сделан на основе информационных критериев Байеса (*BIC*) и Акайке (*AIC*).

ARIMA(2,0,2) – GARCH(1,1)				
	<i>Estimate</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t value</i>	<i>Pr(> t)</i>
ϕ_1	-0.469065	0.006973	-67.266000	0.000000
ϕ_2	-0.981200	0.004147	-236.592800	0.000000
θ_1	0.474867	0.002813	168.834800	0.000000
θ_2	0.997275	0.000136	7 328.623300	0.000000
α_0	0.049622	0.020353	2.438000	0.014767
α_1	0.094502	0.020491	4.611800	0.000004
β_1	0.881088	0.025829	34.112900	0.000000
ξ			-0.678421	
κ			3.170168	
<i>AIC</i>			-3.390200	
<i>BIC</i>			-3.429400	
$L_n(\hat{v})$			1 957.32	
ARIMA(0,0,0) – GARCH(1,1)				
	<i>Estimate</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t value</i>	<i>Pr(> t)</i>
α_0	0.112986	0.054405	2.076739	0.037826
α_1	0.040253	0.019269	2.089021	0.036706
β_1	0.860585	0.059483	14.467739	0.000000
ξ			-0.004828	
κ			2.041821	
<i>AIC</i>			-2.942300	
<i>BIC</i>			-2.964100	
$L_n(\hat{v})$			1 701.54	

Таблица 5.4 - Результаты калибровки параметров моделей ARIMA-GARCH PC1.

Результаты калибровки ARIMA-GARCH модели второй главной компоненты приведены в таблице 5.5. Из нее видно, что во всех трех моделях коэффициенты ненулевые с уровнем значимости 95%. В отличие от первой главной компоненты, информационные критерии Байеса и Акайке не сильно отличаются для трех альтернативных моделей. В этом случае принято делать выбор в пользу модели с меньшим количеством параметров (отдавать предпочтение простой модели). Таким образом динамика второй главной компоненты будет описываться при помощи *ARIMA(0,0) – GARCH(1,1)* случайного процесса. Также хотелось бы отметить, что для первой главной компоненты в таблице 5.4 не приведена модель *ARIMA(1,1) – GARCH(1,1)*, в отличие от второй главной компоненты (таблица 5.5), по причине статистической незначимости коэффициентов ϕ_1 и θ_1 . Значения *t value* для них составили – 1.0009 и 1.0157, значения *Pr(> |t|)* – 0.316853, 0.309765.

ARIMA(0,0,0) – GARCH(1,1)				
	<i>Estimate</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t value</i>	<i>Pr(> t)</i>
α_0	0.112986	0.054405	2.076739	0.037826
α_1	0.040253	0.019269	2.089021	0.036706
β_1	0.860585	0.059483	14.467739	0.000000
ξ		-0.004828		
κ		2.041821		
<i>AIC</i>		-2.942500		
<i>BIC</i>		-2.978300		
$L_n(\hat{v})$		1 701.54		
ARIMA(1,0,1) – GARCH(1,1)				
	<i>Estimate</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t value</i>	<i>Pr(> t)</i>
ϕ_1	-0.901054	0.064243	-14.025615	0.000000
θ_1	0.876338	0.070379	12.451660	0.000000
α_0	0.111824	0.054154	2.064918	0.038931
α_1	0.040005	0.019148	2.089293	0.036681
β_1	0.861501	0.059343	14.517339	0.000000
ξ		0.001094		
κ		2.038466		
<i>AIC</i>		-2.942300		
<i>BIC</i>		-2.973000		
$L_n(\hat{v})$		1 699.65		
ARIMA(2,0,2) – GARCH(1,1)				
	<i>Estimate</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t value</i>	<i>Pr(> t)</i>
ϕ_1	1.867023	0.002409	775.144210	0.000000
ϕ_2	-0.989113	0.002429	-407.152970	0.000000
θ_1	-1.854926	0.000787	-2 357.379660	0.000000
θ_2	0.974964	0.000650	1 499.463060	0.000000
α_0	0.107309	0.050653	2.118500	0.034133
α_1	0.044694	0.020287	2.203090	0.027589
β_1	0.860416	0.057386	14.993400	0.000000
ξ		-0.014636		
κ		2.042297		
<i>AIC</i>		-2.939000		
<i>BIC</i>		-2.964100		
$L_n(\hat{v})$		1 695.64		

Таблица 5.5 - Результаты калибровки параметров моделей ARIMA-GARCH PC2.

Результаты калибровки моделей ARIMA-GARCH для последней главной компоненты приведены в таблице 5.6. Из нее видно, что коэффициент α_0 модели *ARIMA(1,1) – GARCH(1,1)* равен нулю с уровнем значимости 95%. Информационные критерии AIC и BIC для двух моделей практически совпадают. Поэтому на основании статистической незначимости коэффициента α_0 и меньшего количества параметров модели *ARIMA(0,0) – GARCH(1,1)*, выбор делается в пользу последней.

ARIMA(1,0,1) – GARCH(1,1)				
	<i>Estimate</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t value</i>	<i>Pr(> t)</i>
ϕ_1	0.725211	0.148094	4.897000	0.000001
θ_1	-0.774282	0.135531	-5.713000	0.000000
α_0	0.017772	0.012373	1.436300	0.051909
α_1	0.034020	0.013713	1.480700	0.013111
β_1	0.942294	0.026458	35.615000	0.000000
ξ		0.292678		
κ		2.586190		
<i>AIC</i>			-2.536600	
<i>BIC</i>			-2.559900	
$L_n(\hat{v})$			1 464.24	
ARIMA(0,0,0) – GARCH(1,1)				
	<i>Estimate</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t value</i>	<i>Pr(> t)</i>
α_0	0.019267	0.014932	1.290300	0.046959
α_1	0.035771	0.015696	2.279000	0.022669
β_1	0.938727	0.031941	29.389900	0.000000
ξ		0.285805		
κ		2.564011		
<i>AIC</i>			-2.538100	
<i>BIC</i>			-2.567100	
$L_n(\hat{v})$			1 467.11	

Таблица 5.6 - Результаты калибровки параметров моделей ARIMA-GARCH PC3.

В ходе проведения бэк-тестирования, требуется, начиная с момента времени $t = 0$ (19 августа 2019), проводить калибровку моделей, при этом для моментов времени $t = 1, 2, \dots, T$, где $T = 23$ марта 2020 года, будет поступать новая информация, которая может повлиять на спецификацию моделей. Поэтому был проведен аналогичный, описанному выше, статистический анализ определения спецификаций ARIMA-GARCH моделей главных компонент для моментов времени: 30.09.19, 12.11.19, 27.12.19, 11.02.20, 23.03.20. Результат показал, что спецификации моделей во времени не менялись. Поэтому для проведения бэк-тестирования, в качестве моделей ARIMA-GARCH для главных компонент были определены следующие спецификации:

- PC1 - $ARIMA(2,0,2) – GARCH(1,1)$;
- PC1 - $ARIMA(0,0,0) – GARCH(1,1)$;
- PC1 - $ARIMA(0,0,0) – GRCH(1,1)$.

5.4 Результаты бэк-тестирования

В данном разделе приводятся результаты бэк-тестирования двух конкурирующих моделей, на основе риск-нейтральной меры (рисунок 5.3, 5.4) и физической (рисунок 5.5, 5.6). Бэк тестирование проводилось для 95% и 99% однодневного VaR портфеля опционов.

	Модель	Количество превышений VaR	Значение статистики	Нижнее критическое значение	Верхнее критическое значение	P-Value
VaR 95%	Риск-нейтральная мера	7	0.0359	0.0010	5.0239	0.8498
	Физическая мера	8	0.0344			0.8529
VaR 99%	Риск-нейтральная мера	2	0.1524			0.6962
	Физическая мера	4	2.8890			0.0892

Таблица 5.7 - Результаты теста Купика для уровня значимости $\alpha = 95\%$.

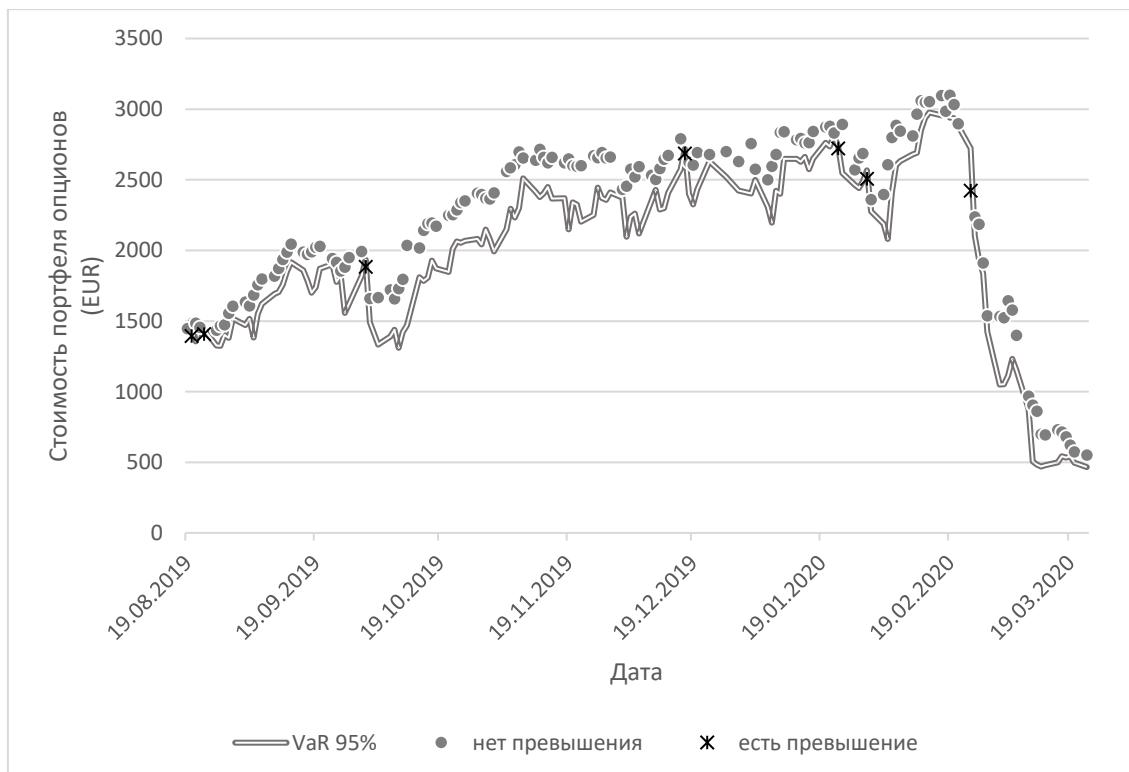


Рисунок 5.3 – Результаты оценки однодневного VaR 95% портфеля активов (риск-нейтральная мера).

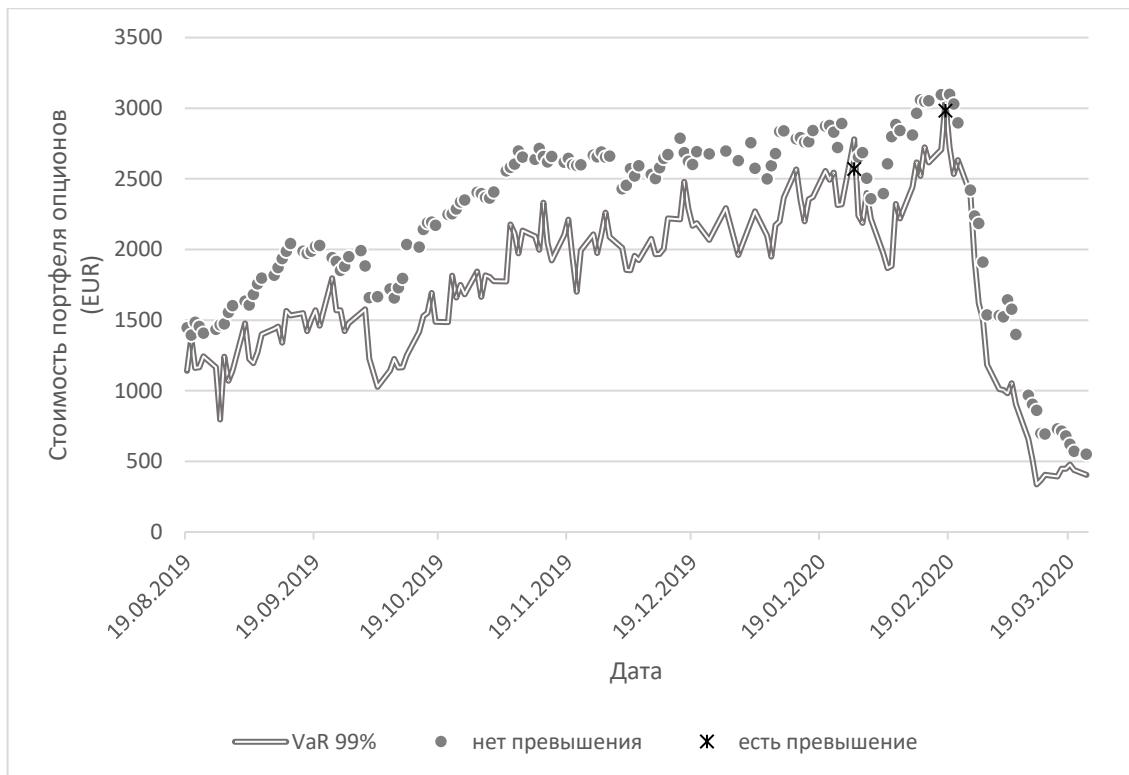


Рисунок 5.4 – Результаты оценки однодневного VaR 99% портфеля активов (риск-нейтральная мера).

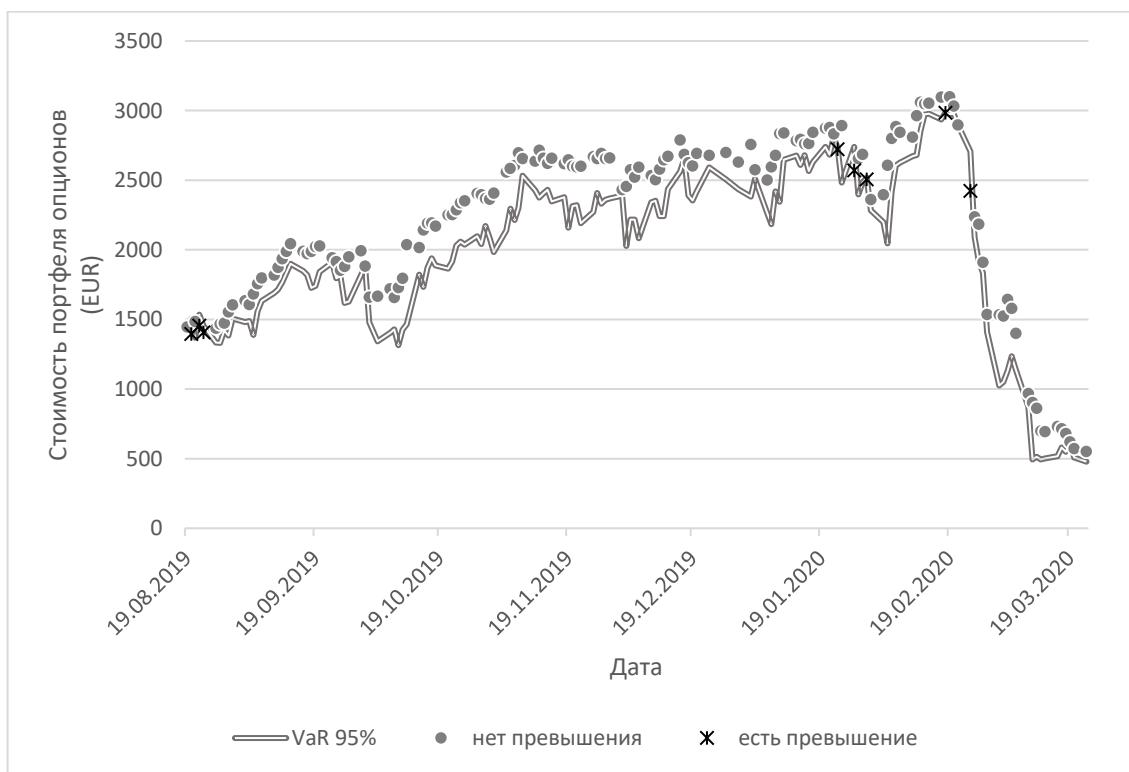


Рисунок 5.5 – Результаты оценки однодневного VaR 95% портфеля активов (физическая мера).

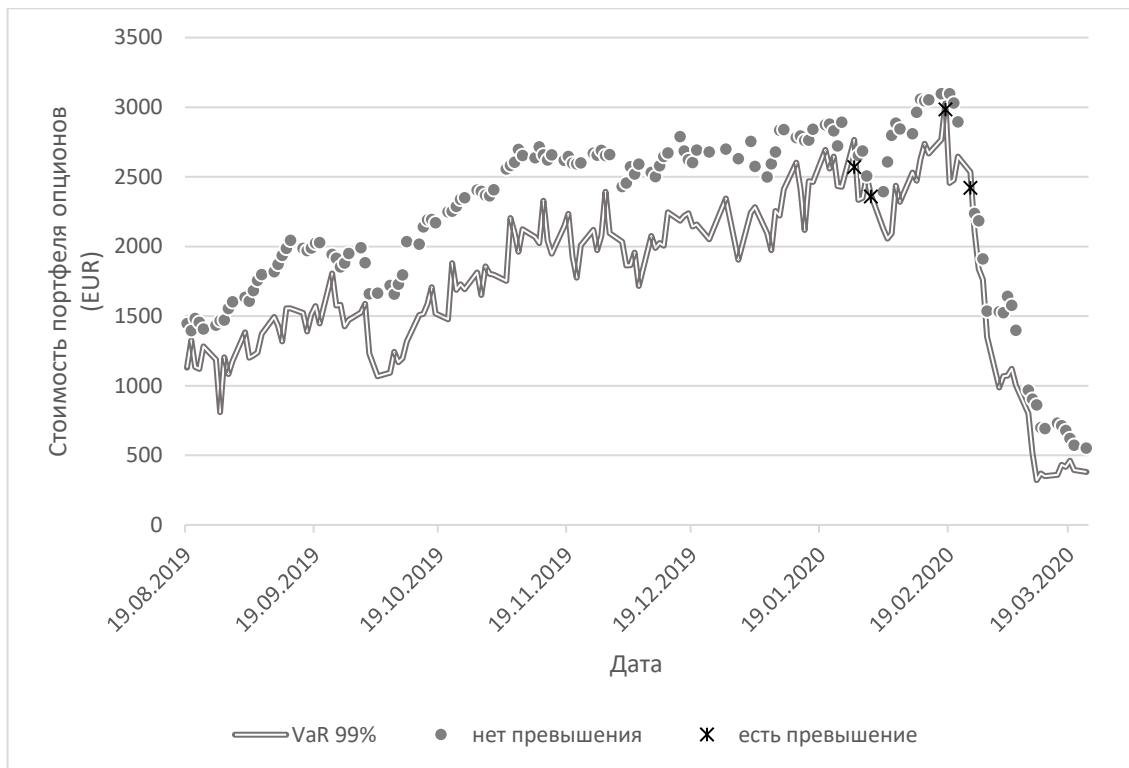


Рисунок 5.6 – Результаты оценки однодневного VaR 99% портфеля активов (физическая мера).

В таблице 5.7 представлены результаты теста Купика для уровня значимости 95%. Из таблицы видно, что обе модели проходят бэк-тестирование (значение статистики находится между критическими значениями). Для 95% однодневного VaR обе модели показывают примерно одинаковый результат. Однако в случае 99% VaR модель построенная на основе риск-нейтральной меры показывает результаты существенно лучше. Также стоит отметить, что понижение размерности исходной задачи дает прирост в скорости работы алгоритма на 34,19%.

5.5 Описание программы “Калькулятор расчета стоимости и риск-метрик опционов на основе риск-нейтральной динамики базовых активов”

Программой осуществляется оценка справедливой стоимости и мер риска опционного контракта/портфеля опционных контрактов при помощи модификации численного метода Монте-Карло на основе метода главных компонент. Пользователь в качестве входных параметров может варьировать количество сценариев (регулировать точность расчетов), а также процент исходной дисперсии, который будет описываться методом главных компонент. Также пользователь может выбрать распределение ошибки, необходимое при моделировании базовых активов ARIMA-GARCH случайными процессами. В качестве параметров расчета мер риска задаются уровень надежности и период расчета.

На вход программа принимает CSV файл с данными об опционных контрактах, а также историей динамики базовых активов. Программа представляет собой консольное приложение для операционной системы Windows, написанное на языке программирования R. Результатом работы программы является txt файл, в котором отображается либо информация по работе с программой (если пользователем не введены входные параметры, либо в качестве параметра введен "help":

```
"C:\Program Files\R\R-4.0.2\bin\Rscript" "source.R" help
[1] "Please enter arguments -----> "
[1] "1.File name with initial data"
[1] "2.Number of scripts for the Monte Carlo method"
[1] "3.The term for calculating risk indicators"
[1] "4.Percentage of variance utilization for principal component analysis"
[1] "5.Reliability level for calculating risk indicators"
[1] "6.Distribution (available: norm, snorm, std, sstd, ged, sged, nig, ghyp, jsu)"
[1] "Example: source.R inputPortfolio.csv 10000 1 0.8 0.05 norm",
```

либо результаты вычислений (в качестве примера приведен расчет стоимости портфеля опционных контрактов, описанных в пункте 5.4 на дату 19/08/2019):

```
"C:\Program Files\R\R-4.0.2\bin\Rscript" "source.R" inputPortfolio.csv 10000 10 0.96 0.05
norm
[1] "Fair value of portfolio = 1446.84"
[1] "VaR of portfolio for 10 days = 1437.56"
[1] "CVaR of portfolio for 10 days = 1431.68".
```

5.6 Выводы

На основе метода, разработанного в Главе 3, был реализован программный продукт, разработанный в среде программирования R, позволяющий проводить оценку справедливой стоимости и мер риска VaR / CVaR портфеля опционных контрактов. Также дополнительно реализован программный код (приложение Б), позволяющий проводить проверку выбранных спецификаций ARIMA-GARCH моделей главных компонент (проводить бэк-тестирование). Программный продукт позволяет эффективно находить оценку однодневного VaR портфеля на основе риск-нейтральной меры, т.к. результаты теста Купика показывают, что эффективность использования риск-нейтральной меры выше по сравнению с использованием физической.

Заключение

По итогам проведенных исследований можно сделать следующие выводы. Применение расширенного принципа Гирсанова к распределениям, не имеющим производящей функции моментов невозможно, так как требуется знание значения данной функции в точке 1 (1.8). Однако изменение предпосылок расширенного принципа Гирсанова (модификация расширенного принципа Гирсанова) дает возможность получить формулу перехода от физической меры к риск-нейтральной (2.18), которая уже не требует знания значения производящей функции моментов. Выражение (2.18), применяемое к производящей функции моментов, как и выражение (1.8), показывает, как преобразуются параметры распределения при переходе от физической меры к риск-нейтральной. Выражение (2.17) позволяет находить условные моменты случайной величины всех порядков относительно риск-нейтральной вероятностной меры. Применение выражения (2.17) к распределению S_u Джонсона позволило найти ARIMA-GARCH риск-нейтральную модель, хотя производящая функция моментов для данного распределения не определена.

Одной из основных задач современной финансовой математики является задача оценки справедливой стоимости производных финансовых инструментов. Для ее решения требуется моделировать динамику цен базовых активов. Это можно сделать двумя способами, на основе физической меры, либо на основе риск-нейтральной меры. Последний способ является более предпочтительным, т.к. учитывает экономические выгоды участников рынка. Мера, полученная на основе модификации расширенного принципа Гирсанова сохраняет все свойства меры, полученной на основе расширенного принципа Гирсанова (минимизация затрат при несовершенном хеджировании портфеля инвестором, риск-нейтральность, единственность). Однако преобразование к данной мере возможно для распределений как имеющих производящую функцию моментов, так и не имеющих.

Правильность теоретических результатов, полученных в Главе 2, подтверждается результатами численных экспериментов, проведенных в Главе 4. Исходной задачей была оценка справедливой стоимости шести опционных контрактов на шесть разных базовых активов и сравнение полученной теоретической цены с рыночной. Оценка проводилась методом Монте-Карло. Рассматривались три альтернативные ARIMA-GARCH модели, имеющие распределения ошибок: нормальное распределение, обобщенное экспоненциальное бета распределение, распределение S_u Джонсона. Риск-нейтральные меры для первых двух моделей были получены на основе классического расширенного принципа Гирсанова, для третьей модели использовалась модификация расширенного

принципа Гирсанова. Результаты показали, что практически во всех экспериментах, минимальное отклонение от рыночной цены показала ARIMA-GARCH модель с ошибками, распределенными по закону S_u Джонсона.

Для поиска справедливых стоимостей опционных контрактов был реализован программный код (приложение А), позволяющий находить оценки параметров моделей ARIMA-GARCH методом квази-максимального правдоподобия, совершая переход от физической меры к риск-нейтральной и получать риск-нейтральные цены базовых активов (на основе их доходностей), а также на основе найденных цен базисных активов находить справедливые стоимости опционных контрактов методом Монте-Карло.

Другой важной задачей современной финансовой математики является оценивание рисков производных финансовых инструментов. На данный момент существует множество мер риска, позволяющих решать данную задачу, одной из таких мер риска является величина VaR. Для нахождения величины VaR портфеля производных финансовых инструментов, требуется моделировать совместную динамику базовых активов, так как практически всегда базовые активы имеют линейную связь. В статистике существует метод, позволяющий свести задачу совместного моделирования динамики коррелируемых активов к динамике компонент, некоррелируемых друг с другом (метод главных компонент). Данных метод также позволяет уменьшить размерность исходной задачи, исходя из величины дисперсии, описываемой k первыми главными компонентами. Однако для оценивания величины VaR предпочтительней использовать, как упоминалось выше, риск-нейтральную меру. В Главе 3 приводится теория, позволяющая получать ARIMA-GARCH модели на основе риск-нейтральной меры, исходя из оценок коэффициентов ARIMA-GARCH моделей главных компонент, построенных на основе физической меры. Главный результат Главы 3 (формула 3.22) получен на основе модификации расширенного принципа Гирсанова, который позволил уйти от необходимости нахождения производящей функции моментов в заданной точке. В рамках Главы 3, возникла проблема, связанная уже не с возможностью существования производящей функции моментов, а с возможностью оценивания производящей функции моментов суммы случайных величин (взвешенной суммы главных компонент), так как требует знания маргинальной функции плотности распределения базовых активов. Применение результата Главы 2 (модификация расширенного принципа Гирсанова) позволила избавиться от необходимости поиска производящей функции моментов базовых активов.

Применение метода главных компонент сокращает размерность исходной задачи моделирования сценариев риск-нейтральной динамики цен базовых активов. Полученные

теоретические результаты Главы 3 позволили описать алгоритм численного решения задачи генерирования риск-нейтральных цен базовых активов, используемых в методе Монте-Карло для нахождения цен и мер риска опционных контрактов.

Результаты Главы 3 были применены для решения задачи оценивая однодневного VaR портфеля опционов. В качестве распределения было выбрано распределение S_u Джонсона, которое дало лучшие результаты для оценивая справедливой стоимости опционных контрактов (Глава 4). В качестве конкурирующих моделей рассматривались модель на основе физической и риск-нейтральных мерах. Результаты бэк-тестирования и тест Купика показали, что модель, построенная на основе риск-нейтральной меры дала лучшие результаты, что свидетельствует в пользу правильности полученных теоретических результатов. Модификация численного метода Монте-Карло позволило увеличить скорость работы алгоритма на 34,19%.

Для проведения процедуры бэк-тестирования был реализован программный код (приложение Б), в среде программирования R, позволяющий получать коэффициенты ARIMA-GARCH моделей на основе физической меры, а также риск-нейтральной, оценивать справедливую стоимость опционных контрактов методом Монте -Карло, и на основе найденных стоимостей строить оценку VaR портфеля опционных контрактов.

Результаты исследования показали, что использование риск-нейтральной меры для решения задачи оценивания мер риска опционных контрактов эффективнее по сравнению с использованием физической меры. В результате был реализован программный продукт “Калькулятор расчета стоимости и риск-метрик опционов на основе риск-нейтральной динамики базовых активов”.

Список используемой литературы

1. Sharpe William, Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk // The Journal of Finance, 1964. Vol. 19. Iss. 3. P. 425-442. doi: 10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x.
2. Alexander D., Bonaci C.G., Mustata R.V. Fair value measurement in financial reporting // Procedia Economics and Finance, 2012. Vol. 3. P. 84-90. doi: 10.1016/S2212-5671(12)00124-4.
3. André, P., Cazavan-Jeny, A., Dick, W., Richard, C., Walton, P. Fair Value Accounting and the Banking Crisis in 2008: Shooting the Messenger // Accounting in Europe, 2009. Vol. 6. Iss. 1. P. 3-24.
4. Antoniou I., Gorshkov Yu.S., Ivanov V.V., Kryanev A.V. Forecasting financial derivative prices // Chaos, Solitons and Fractals, 2000. №11. P. 223-229. doi: 10.1016/S0960-0779(98)00286-0.
5. Hendricks D. Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data // Economic Policy Review, Federal Reserve Bank of New York, 1996. P. 39–69.
6. Pritsker M. Evaluating Value at Risk Methodologies: Accuracy versus Computational Time // Journal of Financial Services Research, 1997. Vol. 12. P. 201–242.
7. Mazin A.M., Janabi A.I. Risk analysis, reporting and control of equity trading exposure: Viable applications to the Mexican financial markets // Journal of Derivatives & Hedge Funds, 2007. Vol. 13. P. 33-58. doi: 10.1057/palgrave.jdhf.1850059.
8. Кибзун А.И., Соболь В.Р. Модернизация стратегии последовательного хеджирования опционной позиции // Труды института математики и механики, 2013. Т. 19. № 2. С. 179-192.
9. Кибзун А.И., Соболь В.Р. Модификация стратегии последовательного хеджирования. Распределение потерь хеджера // Автоматика и телемеханика, 2015. №11. С. 34-50.
10. Кибзун А.И., Соболь В.Р. Двухшаговая задача хеджирования европейского кол-опциона при случайной длительности транзакций // Труды института математики и механики УрО РАН, 2015. Т.21. №3. С. 164-174.
11. Girsanov I.V. On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures // Theory of Probability & Its Applications, 1960. Vol. 5. Iss. 3. P. 285-301. doi:10.1137/1105027.
12. Dhaene J., Stassen B., Devolder P., Vellekoop M. The Minimal Entropy Martingale Measure in a Market of Traded Financial and Actuarial Risks // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015. Vol. 282, P. 111-133. doi:10.1016/j.cam.2014.12.004.
13. Black F., Scholes M., The Pricing of Options and Corporate Liabilities // The Journal of Political Economy, 1973. Vol. 81. Iss. 3. P. 637 – 654.
14. Harrison J.M., Kreps D. M. Martingales and arbitrage in multiperiod security markets // Journal of Economic Theory, 1979. Vol. 20. P. 381-408.
15. Cox, J. C., Ross R.A., Rubinstein M. Option pricing: a simplified approach. // Journal of Financial Economics, 1979. Vol. 7. Iss. 3. P. 229-263.
16. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов // Теория вероятности и ее применение, 1994. Т. 39. № 1. С. 23-79.

17. Фёльмер Г., Шид А. Введение в стохастические финансы. Дискретное время. Москва: МЦНМО, 2008, 496 с.
18. Волков С.Н., Крамков Д.О. О методологии хеджирования опционов // Обзор прикладной и промышленной математики, 1997. Т. 4. № 1. С. 18-66.
19. Mark H.A. Davis. Option pricing in incomplete markets // Mathemat of Derivative Securities, 1998. Vol. 49. Iss. 3. P. 216-226.
20. Venter R.G., Pricing options under stochastic volatility. Pretoria: University of Pretoria, 2003. 124 p.
21. Marko Frittelli, The Minimal Entropy Measure and the Valuation Problem in Incomplete Markets // Mathematical Finance, 2000. Vol. 10. Iss. 1. P. 39-52. doi: 10.1111/1467-9965.00079.
22. Elliott R. J., Madan D. B. A Discrete Time Equivalent Martingale Measure // Mathematical Finance, 1998. Vol. 8. Iss. 2. P. 127–152. doi: 10.1111/1467-9965.00048.
23. Yi Xi. Comparison of option pricing between ARMA-GARCH and GARCH-M models: MoS Thesis. London, Ontario, Canada: University of Western Ontario, 2013. 73 p.
24. Simonato J.G., Stentoft L. Which pricing approach for options under GARCH with non-normal innovations? July 2015. <https://www.degroote.mcmaster.ca/files/2015/11/SimonatoStentoft.pdf>.
25. Bell D. Transformations of measures on an infinite-dimensional vector space. In: Cinlar. E., Fitzsimmons P.J., Williams R.J. Seminar on Stochastic Processes // Progress in Probability, 1990. Vol. 24. — Р. 15-25. doi:10.1007/978-1-4684-0562-0_3.
26. Данилишин А. Р., Голембиовский Д. Ю. Риск-нейтральная динамика для ARIMA-GARCH модели с ошибками, распределенными по закону S_U Джонсона // Информатика и ее применения, 2020. Vol. 14. Iss. 1. – Р. 48 – 55. doi: 10.14357/19922264200107.
27. Данилишин А. Р., Голембиовский Д. Ю. Оценка стоимости опционов на основе ARIMA-GARCH моделей с ошибками, распределенными по закону S_U Джонсона // Информатика и ее применения, 2020. Vol. 14. Iss. 4. – Р. 83 – 90. doi: 10.14357/19922264200412.
28. Данилишин А. Р. Риск-нейтральная динамика портфеля базовых активов при использовании метода главных компонент // "Труды ИСА РАН", 2020. Vol. 70. Iss. 3. – Р. 13 – 23. doi: 10.14357/20790279200302.
29. Данилишин А. Р., Голембиовский Д. Ю. Риск-нейтральная динамика для модели ARIMA-GARCH с ошибками, распределенными по закону S_U Джонсона // Ломоносовские чтения-2020. Секция «Вычислительной математики и кибернетики». Изд-во Моск. ун-та, 2020, С. 70-71.
30. Данилишин А. Р., Голембиовский Д. Ю. Модификация расширенного принципа Гирсанова и его применение к моделированию ARIMA-GARCH случайных процессов // Тихоновские чтения: Научная конференция / МГУ им. М. В. Ломоносова. – М.: МАКС Пресс, 2018., С. 90-90.
31. Данилишин А. Р. Динамика портфеля активов на основе физической и риск-нейтральной вероятностной меры // Научная конференция «Ломоносов-2020»: секция «Вычислительная математика и кибернетика» / Издательский отдел факультета ВМК МГУ Москва.
32. Данилишин А. Р., Голембиовский Д. Ю. Модификация расширенного принципа Гирсанова и результаты оценки опционов на основе ARIMA-GARCH моделей с

- ошибками, распределенными по закону Си Джонсона // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2020. Т. 27. № 2. С. 123 – 125.
33. Bell D. Transformations of measures on an infinite-dimensional vector space // *Progress in Probability* (PRPR), 1990. Vol. 24: Seminar on Stochastic Processes, 1990. P. 15–25. doi: 10.1007/978-1-4684-0562-0_3.
 34. Cameron R. H., Martin W. T. Transformation of Wiener integrals under a general class of linear transformations translations // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1945. Vol. 58. P. 184–219. doi: 10.1090/S0002-9947-1945-0013240-1.
 35. Duan J. The GARCH option pricing model // *Mathematical Finance*, 1995. Vol. 5. Iss. 1. P. 13–32.
 36. Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. – М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 260 с.
 37. Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo method // *Journal of the American Statistical Association*, 1949. Vol. 44. P. 335-341.
 38. Mangel M. Discrete and Continuous Stochastic Processes // *Mathematics in Science and Engineering*, 1985. Vol. 172. P. 6-41. doi: 10.1016/S0076-5392(08)63267-1.
 39. Sawarag Y., Sunahara Y., Nakamizo T. Mathematical Description of Random Processes // *Mathematics in Science and Engineering*, 1967. Vol. 39. P. 12-49. doi: 10.1016/S0076-5392(08)61045-0.
 40. Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity // *Econometrics*, 1986. Vol. 31. P. 307-327. doi: 10.1016/0304-4076(86)90063-1.
 41. Nelson DB. Conditional heteroscedasticity of asset returns. A new approach // *Econometrica*, 1991. Vol. 59. P. 347-370. doi: 10.2307/2938260.
 42. Box G., Jenkins G., Reinsel C. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 3rd ed., 1994.
 43. Davis R., Resnick S. Limit theory for moving averages of random variables with regularity varying tail probabilities // *Ann. Probab.*, 1985. Vol. 13. Iss. 1. P. 179-195.
 44. Granger C., Joyeux R. An introduction to long-memory time series and fractional differencing // *J. Time Ser. Anal.*, 1980. Vol. 1. P. 15-30.
 45. Adenstedt R. On large-sample estimation for the mean of a stationary random sequence // *Ann. Statist.*, 1974. Vol. 2. Iss. 6. P. 1095-1107.
 46. Balakrishnan A. Nonlinear white noise theory. In *Multivariate analysis, Proc. Fifth Internat. Sympos.*, Univ. Pittsburgh, Pittsburgh, Pa., 1978. P. 97–109.
 47. Bagchi A., Mazumdar R. Some recent results in finitely additive white noise theory // *Acta Appl. Math.*, 1994. Vol. 35. Iss. 1-2. P. 27–47.
 48. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. – М.: ДЕЛО, 2004 (<http://math.isu.ru/ru/chairs/me/files/books/magnus.pdf>).
 49. Włodzimierz B. *The Normal Distribution (Characterizations with Applications)*, Springer-Verlag New York. 1995. doi: 10.1007/978-1-4612-2560-7.
 50. James B., Yexiao J. A generalization of the beta distribution with applications // *Journal of Econometrics*, 1995. Vol. 66. Iss. 1-2. P. 133-152. doi: 10.1016/0304-4076(94)01612-4.
 51. Johnson N. Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation // *Biometrika*, 1949. Vol. 36. Iss. 1-2. P. 149-176. doi: 10.2307/2332539.
 52. Johnson N. Bivariate Distributions Based on Simple Translation Systems // *Biometrika*, 1949. Vol. 36. Iss. 3-4. P. 297-304. doi: 10.1093/biomet/36.3-4.297.

53. Davis P. Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function // *American Mathematical Monthly*, 1959. Vol. 66. Iss. 10. P. 849-869. doi: 10.2307/2309786.
54. Bulmer M. *Principles of Statistics*, Dover, 1979. P. 75-79.
55. Grimmett, Geoffrey. *Probability - An Introduction*, Oxford University Press, 1986. 101 pp.
56. Hill B. A simple general approach to inference about the tail of a distribution // *Ann. Stat.*, 1975. Vol. 3. P. 1163-1174.
57. Chun S., Zhishui H., Chen Y., Liang H. A wide class of heavy-tailed distributions and its applications // *Frontiers of Mathematics in China*, 2007. Vol. 2. Iss. 2. P. 257-286. doi: 10.1007/s11464-007-0018-1.
58. Sierpiński, Wacław. O szeregu potęgowym który jest zbieżny na całem swem kole zbieżności jednostajnie ale nie bezwzględnie // *Prace matematyka-fizyka*, 1918. Vol. 29. P. 263-266.
59. Pearson K., On lines and planes of closest fit to systems of points in space // *Phil*, 1901. – P. 559 – 572. doi: 10.1080/14786440109462720.
60. Дубров А. М., Мхитарян В. С., Трошин Л.И. *Многомерные статистические методы и основы эконометрики*. — М.: МЭСИ, 2002.
61. Brian S., Hothorn T. *A Handbook of Statistical Analyses Using R (Package 'HSAUR')*, CRAN, 2017. 43 pp.
62. Fontana, Claudio. Weak and strong no-arbitrage conditions for continuous financial markets // *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2015. Vol. 18. Iss. 1. doi: 10.1142/S0219024915500053.
63. Diamond P. The Role of a Stock Market in a General Equilibrium Model with Technological Uncertainty // *American Economic Review*, 1967. Vol. 57. Iss. 4. P. 759-776.
64. Arrow K. The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing // *Review of Economic Studies*, 1964. Vol. 31. Iss. 2. P. 91-96. doi: 10.2307/2296188.
65. Ehling P., Heyerdahl-Larsen Ch. Complete and incomplete financial markets in multi-good economies // *Journal of Economic Theory*, 2015. Vol. 160. P. 438-462. doi: 10.1016/j.jet.2015.10.006.
66. Lindsay, Bruce G. Composite likelihood methods // *Contemporary Mathematics*, 1988. Vol. 80. P. 221-239. doi: 10.1090/conm/080/999014.
67. Cox D. A note on pseudo-likelihood constructed from marginal densities // *Biometrika*, 2004. Vol. 91. Iss. 3. P. 729-737. doi: 10.1093/biomet/91.3.729
68. Christian F., Francq M. *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, United Kingdom: Wiley, 2019. 504 pp.
69. Dickey D., Fuller W. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root // *Journal of the American Statistical Association*, 1979. Vol. 74. Iss. 366. P. 427-431. doi: 10.1080/01621459.1979.10482531.
70. Box G., Pierce D. Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models // *Journal of the American Statistical Association*, 1970. Vol. 65. Iss. 332. P. 1509-1526. doi: 10.1080/01621459.1970.10481180.
71. Akaike H. A new look at the statistical model identification // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974. Vol. 19. Iss. 6. P.716-723. doi: 10.1109/TAC.1974.1100705.
72. Akaike H. Prediction and entropy // *A Celebration of Statistics*, 1985. P. 1-24.
73. Schwarz, Gideon E. Estimating the dimension of a model // *Annals of Statistics*, 1978. Vol. 6. Iss. 2. P. 461-464. doi: 10.1214/aos/1176344136.

74. Ghalanos A., Theussl St. General Non-Linear Optimization (Package 'Rsolnp'), CRAN, 2015. 15 pp.
75. Pourciau, Bruce H. Modern multiplier rules // American Mathematical Monthly, 1980. Vol. 87. Iss. 6. P. 433-452. doi: 10.2307/2320250.
76. Ripley B., Venables B. Support Functions and Datasets for Venables and Ripley's MASS, CRAN, 2020. 170 pp.
77. Hull J. Options, futures, and other derivatives. — 10th ed., Pearson, 2018. 896 pp.
78. Boyle Ph. Options: A Monte Carlo approach // Journal of Financial Economics, 1977. Vol. 4. Iss. 3. P. 323-338. doi: 10.1016/0304-405X(77)90005-8.
79. Shapiro S., Wilk M. An analysis of variance test for normality (complete samples) // Biometrika, 1965. Vol. 52. Iss. 3-4. P. 591-611. doi: 10.1093/biomet/52.3-4.591.
80. Artzner Ph., Delbaen F. Coherent Measures of Risk // Mathematical Finance, 1999. Vol. 9. Iss. 3. P. 203-228. doi: 10.1111/1467-9965.00068.
81. Balbás A., Garrido J., Mayoral S. Properties of Distortion Risk Measures // Methodology and Computing in Applied Probability, 2008. Vol. 11. Iss. 3. P. 385-392. doi: 10.1007/s11009-008-9089-z.
82. Leavens, Dickson H. Diversification of investments // Trusts and Estates, 1945. Vol. 80. Iss. 5. P. 469-473.
83. Кибзун А.И., Кузнецов Е.А. Оптимальное управление портфелем ценных бумаг // Автоматика и телемеханика, 2001. Vol. 9. P. 101 – 113. doi: 10.1023/A:1011651827296.
84. Кан Ю.С., Оптимизация управления по квантильному критерию // Автоматика и телемеханика, 2001. Vol. 5. P. 77 – 88. doi: 10.1023/A:1010270723106.
85. Васильева С.Н., Алгоритмы анализа и оптимизации квантильного критерия в задачах стохастического программирования с билинейными и квазилинейными функциями потерь: дис. канд. физ.-мат. наук. Московский авиационный институт, Москва, 2018.
86. Чернобровов А.И., Использование свойств VaR-критерия для построения алгоритмов решения задач стохастического программирования с CVaR-критерием: дис. канд. физ.-мат. наук. Московский авиационный институт, Москва, 2012.
87. Dufour J-M. Monte carlo tests with nuisance parameters: A general approach to finite-sample inference and nonstandard asymptotics // Journal of Econometrics, 2006. Vol. 133. Iss. 2. P. 443-477. doi: 10.1016/j.jeconom.2005.06.007.
88. Hong L., Hu Zh., Liu G. Monte Carlo Methods for Value-at-Risk and Conditional Value-at-Risk: A Review // ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, 2014. Vol. 24. Iss. 4. 37 pp.
89. Kupiec P. Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models // The Journal of Derivatives, 1995. Vol. 3. Iss. 2. doi: 10.3905/jod.1995.407942.
90. Pajhede, Thor. Backtesting Value-at-Risk: A Generalized Markov Framework // Journal of Forecasting, 2017. Vol. 36. Iss. 5. P. 597-613. doi: 10.1002/for.2456.
91. Ghalanos A., Kley T. Univariate GARCH Models (Package 'rugarch'), CRAN, 2020. 108 pp.

Приложение А

Численное моделирование риск-нейтральных динамик базовых активов

В данном разделе приведены детали реализации и отрывки из исходного кода программы, использовавшейся для численного моделирования риск-нейтральных динамик базовых активов, указанных в Главе 4 и оценки справедливых стоимостей опционных контрактов европейского типа на них. Реализация всех численных методов выполнена на языке программирования R.

А.1 Моделирование риск-нейтральных цен (нормальное распределение)

Листинг А.1

```
1 # Функция правдоподобия
2 LLE_NORM = function(par, key=0) {
3   result      = array()
4   sigma_t2    = array()
5   xi          = array()
6   sigma_t2[1] = par["alpha0"]
7   xi[1]        = log_p[1] - par["phi0"]
8   result[1]    = xi[1]^2/sigma_t2[1] + log(sigma_t2[1])
9   for(i in 2:length(log_p)){
10     xi[i]      = log_p[i] - par["phi0"] - par["phi1"]*log_p[i-1] - ...
11     -par["theta1"]*xi[i-1]
12     sigma_t2[i] = par["alpha0"] + par["alpha1"]*sigma_t2[i-1] + ...
13     + par["beta1"]*xi[i-1]^2
14     result[i]   = xi[i]^2/sigma_t2[i] + log(sigma_t2[i])
15   }
16   if(key==1){
17     return(c(sigma_t2[length(sigma_t2)],xi[length(xi)]))
18   } else return(sum(result))
19 }
20 # Функция ограничений для оптимизационной задачи оценки параметров
21 equal = function(x) {
22   return(c(x[5] + x[6],x[6]^2-2*x[6]*x[5]+3*x[5]^2))
23 }
24 # solnp - оптимизатор, который решает задачу максимизации
25 # функции правдоподобия
26 out      = solnp(par, LLE_NORM, ineqfun = equal, ...
27 ineqLB = c(0,0), ...
28 ineqUB = c(0.999,0.999),LB = c(-100,-100,-100,0,0,0),
29 UB = c(100,0.999,100,1,1,1))
30 params_norm = c(out$pars[1],out$pars[2],out$pars[3],...
31   out$pars[4],out$pars[5],out$pars[6])
32 last     = LLE_NORM(params_norm,key=1)
33 model_norm_rn = array(data = NA, dim = c(deep,nmonte))
34 eps      = array(data = NA, dim = c(deep+1,nmonte))
35 for(i in 1:(deep+1)) eps[i,] = rnorm(nmonte,0,1)
36 sigma_t2      = array(data = NA, dim = c(deep,nmonte))
37 # Процесс получения волатильностей и нахождения риск-нейтральных
38 # доходностей цен базового актива
39 sigma_t2[1,]  = params_norm[4] + params_norm[5]*last[1] + ...
40   params_norm[6]*last[2]^2
41 model_norm_rn[1,] = r - sigma_t2[1,]/2 + sqrt(sigma_t2[1,])*eps[1,]
42 for(i in 2:deep){
43   sigma_t2[i,]  = params_norm[4] + params_norm[5]*sigma_t2[i-1,] + ...
44   + params_norm[6]*sigma_t2[i-1,]*eps[i-1,]^2
```

```

42  model_norm_rn[i,] = r - sigma_t2[i,]/2 + sqrt(sigma_t2[i,])*eps[i,]
43 }
44 prices_norm = array()
45 # Восстановление цен базового актива по доходностям
46 for(i in 1:nmonte){
47   prices_norm[i] = ...
48   = prod(exp(model_norm_rn[,i]))*datas$DAX[length(datas$DAX])
49 }

```

A.2 Моделирование риск-нейтральных цен (EGB2 распределение)

Листинг А.2

```

1 # функция правдоподобия
2 LLE_EGB2 = function(par, key=0){
3   rezult      = array()
4   sigma_t2   = array()
5   xi          = array()
6   sigma_t2[1] = par["alpha0"]
7   xi[1]       = log_p[1] - par["phi0"]
8   omega       = trigamma(par["a"]) + trigamma(par["b"])
9   delta       = digamma(par["a"]) - digamma(par["b"])
10  rezult[1]   = -log(sqrt(omega)) + log(beta(par["a"],par["b"])) - ...
11    - par["a"]*delta - par["a"]*xi[1]*sqrt(omega)/...
12    / sqrt(sigma_t2[1]) + log(sqrt(sigma_t2[1])) + ...
13    + (par["a"]+par["b"])* ...
14    *log(1+exp(xi[1]*sqrt(omega)/sqrt(sigma_t2[1])+delta))
15  for(i in 2:length(log_p)){
16    xi[i]       = log_p[i] - par["phi0"] - par["phi1"]*log_p[i-1] - ...
17    - par["thetal"]*xi[i-1]
18    sigma_t2[i] = par["alpha0"] + par["alpha1"]*sigma_t2[i-1] + ...
19    + par["betta1"]*xi[i-1]^2
20    rezult[i]   = -log(sqrt(omega)) + log(beta(par["a"],par["b"])) - ...
21    - par["a"]*delta - par["a"]*xi[i-1]*sqrt(omega)/...
22    / sqrt(sigma_t2[i-1]) + log(sqrt(sigma_t2[i-1])) + (par["a"]+par["b"])*...
23    *log(1+exp(xi[i-1]*sqrt(omega)/sqrt(sigma_t2[i-1])+delta))
24  }
25  if(key==1){
26    return(c(sigma_t2[length(sigma_t2)],xi[length(xi])))
27  } else return(sum(rezult))
28 }
29 # Функция ограничений для оптимизационной задачи оценки параметров
30 equal = function(x) {
31   return(c(x[1]-x[2],x[7]+x[8],x[8]^2-2*x[8]*x[7]+3*x[7]^2))
32 }
33 # solnp - оптимизатор, который решает задачу максимизации
34 # функции правдоподобия
35 out      = solnp(par, LLE_EGB2, ineqfun = equal, ineqLB = ...
36   = c(-1000,0,0), ineqUB = c(0,0.999,0.999),
37   LB = c(0.0001,0.0001,-100,-100,-100,0,0,0),
38   UB = c(100,100,100,0.999,100,1,1,1))
39 params_egb2 = c(out$pars[1],out$pars[2],out$pars[3],out$pars[4],...
40   out$pars[5],out$pars[6],out$pars[7],out$pars[8])
41 last      = LLE_EGB2(params_egb2,key=1)
42 model_egb2_rn = array(data = NA, dim = c(deep,nmonte))
43 omega      = trigamma(params_egb2[1]) + trigamma(params_egb2[2])
44 delta      = digamma(params_egb2[1]) - digamma(params_egb2[2])
45 sigma_t2   = array(data = NA, dim = c(deep,nmonte))

```

```

44 # Процесс получения волатильностей и нахождения риск-нейтральных
45 # доходностей цен базового актива
46 sigma_t2[1,] = params_egb2[6] + params_egb2[7]*last[1] + ...
47           + params_egb2[8]*last[2]^2
48 eps        = array(data = NA, dim = c(deep+1,nmonte))
49 for(i in 1:(deep+1)) eps[i,] = rEGB2(nmonte, mu = -delta/...
50   / sqrt(omega), sigma = 1/sqrt(omega), nu = params_egb2[1],...
51   tau = params_egb2[2])
52 model_egb2_rn[1,] = r + sqrt(last[1])*delta/sqrt(omega) - ...
53   - log(beta(params_egb2[1]+sqrt(last[1])/sqrt(omega)),
54 for(i in 2:deep){
55   sigma_t2[i,] = params_egb2[6] + params_egb2[7]*sigma_t2[i-1,] + ...
56   + params_egb2[8]*sigma_t2[i-1,]*eps[i-1,]^2
57   model_egb2_rn[i,] = r + sqrt(sigma_t2[i,])*delta/...
58   / sqrt(omega) - log(beta(params_egb2[1]+...
59   + sqrt(sigma_t2[i,])/sqrt(omega))
60 }
61 prices_EGB2 = array()
62 # Восстановление цен базового актива по доходностям
63 for(i in 1:nmonte){
64   prices_EGB2[i] = prod(exp(model_egb2_rn[,i]))*...
65   * datas$DAX[length(datas$DAX)]
```

A.3 Моделирование риск-нейтральных цен (JSU распределение)

Листинг A.3

```

1 # Функция правдоподобия
2 LLE_JSU = function(par, key=0){
3   delta      = par["delta"]
4   gamma      = par["gamma"]
5   rezult    = array()
6   sigma_t2  = array()
7   xi         = array()
8   m_t        = array()
9   sigma_t2[1] = par["alpha0"]
10  xi[1]      = returns[1] - par["phi0"]
11  A          = (exp(1/delta/delta)-1)*(exp(1/delta/delta)*...
12  * cosh(2*gamma/delta)+1)
13  B          = exp(1/2/delta/delta)*sinh(gamma/delta)
14  rezult[1]  = -log(delta)+log(sqrt(2*sigma_t2[1]/A))+...
15  + log(1+(xi[1]/sqrt(2*sigma_t2[1]/A)-B)^2)/2 + ...
16  +(gamma+delta*asinh((xi[1]/sqrt(2*sigma_t2[1]/A)-B)))^2/2
17  m_t[1]     = par["phi0"]
18  for(i in 2:length(returns)){
19    xi[i]      = returns[i] - par["phi0"] - par["phi1"]*returns[i-1] - ...
20    - par["theta1"]*xi[i-1]
21    sigma_t2[i] = par["alpha0"] + par["alpha1"]*sigma_t2[i-1] + ...
22    + par["beta1"]*xi[i-1]^2
23    rezult[i]  = -log(delta)+log(sqrt(2*sigma_t2[i-1]/A))+...
24    + log(1+(xi[i-1]/sqrt(2*sigma_t2[i-1]/A)-B)^2)/2+...
25    +(gamma+delta*asinh((xi[i-1]/sqrt(2*sigma_t2[i-1]/A)-B)))^2/2
26    m_t[i]     = par["phi0"] + par["phi1"]*m_t[i-1] + ...
27    +(par["theta1"]+par["phi1"])*xi[i-1]
28  }
29  if(key==1){
30    return(c(sigma_t2[length(sigma_t2)],xi[length(xi)],m_t[length(m_t])))
31  } else return(sum(rezult))
32 }
```

```

31 # Функция ограничений для оптимизационной задачи оценки параметров
32 equal = function(x) {
33   return(c(x[7]+x[8],x[8]^2-2*x[8]*x[7]+3*x[7]^2))
34 }
35 # solnp - оптимизатор, который решает задачу максимизации
36 # функции правдоподобия
37 out      = solnp(par, LLE_JSU, ineqfun = equal, ...
38   ineqLB = c(0,0), ineqUB = c(0.999,0.999),...
39   LB = c(0.0001,-100,-100,-100,-100,0,0,0),...
40   UB = c(100,100,100,0.999,100,1,1,1))
41 params_jsu =
42 c(out$pars[1],out$pars[2],out$pars[3],out$pars[4],out$pars[5],...
43   out$pars[6],out$pars[7],out$pars[8])
44 last      = LLE_JSU(params_jsu,key=1)
45 model_jsu_rn = array(data = NA, dim = c(deep,nmonte))
46 xi        = array(data = NA, dim = c(deep,nmonte))
47 sigma_t2  = array(data = NA, dim = c(deep,nmonte))
48 m_t       = array(data = NA, dim = c(deep,nmonte))
49 A = (exp(1/params_jsu[1]/params_jsu[1])-1)*(exp(1/params_jsu[1]/...
50   /params_jsu[1])*cosh(2*params_jsu[2]/params_jsu[1])+1)
51 B = exp(1/2/params_jsu[1]/params_jsu[1])*sinh(params_jsu[2]/...
52   /params_jsu[1])
53 eps = array(data = NA, dim = c(deep+1,nmonte))
54 for(i in 1:(deep+1)) eps[i,] = rJSUo(nmonte, mu = B*sqrt(2/A), ...
55   sigma = sqrt(2/A), nu = params_jsu[2], tau = params_jsu[1])
56 # Процесс получения волатильностей и нахождения риск-нейтральных
57 # доходностей цен базового актива
58 sigma_t2[1,] = params_jsu[6] + params_jsu[7]*last[1] + ...
59   + params_jsu[8]*last[2]^2
60 m_t[1,] = last[3]
61 xi[1,] = last[2]
62 model_jsu_rn[1,] = ((1+r/k)^k) - 1 +sqrt(sigma_t2[1,])*...
63   *(((1+r/k)^k)/(1+m_t[1,]))*eps[1,]
64 for(i in 2:deep){
65   sigma_t2[i,] = params_jsu[6] + params_jsu[7]*...
66   * sigma_t2[i-1,] + params_jsu[8]*sigma_t2[i-1,]*eps[i-1,]^2
67   m_t[i,] = params_jsu[3] + params_jsu[4]*...
68   * m_t[i-1] + (params_jsu[4]+params_jsu[5])*xi[i-1]
69   model_jsu_rn[i,] = r + sqrt(sigma_t2[i,])*((1+r)/(1+m_t[i,]))*eps[i,]
70   xi[i,] = model_jsu_rn[i,] - params_jsu[3] - params_jsu[4]*...
71   model_jsu_rn[i-1,] - params_jsu[5]*xi[i-1]
72 }
73 prices_jsu = array()
74 # Восстановление цен базового актива по доходностям
75 for(i in 1:nmonte){
76   prices_jsu[i] = prod(model_jsu_rn[,i]+1)*datas$DAX[length(datas$DAX)]
77 }

```

А.4 Оценка справедливой стоимости опционов и визуализация результатов

Листинг А.4

```

1 strikes      = c("Значения страйков опционов")
2 true_val_call = c("Значения рыночных стоимостей опционов call")
3 true_val_put  = c("Значения рыночных стоимостей опционов put")
4 table_call = array(data = NA, dim = c(length(strikes),5))
5 table_put  = array(data = NA, dim = c(length(true_val_put),5))
6 # Оценка стоимости опционов методом Монте-Карло
7 for(i in 1:length(strikes)){
8   table_call[i,1] = strikes[i]

```

```

9  table_call[i,2] = mean(pmax(prices_norm - strikes[i],0))/...
10 ...((1+r)^(days/365))
11 table_call[i,3] = mean(pmax(prices_EGB2 - strikes[i],0))/...
12 ...((1+r)^(days/365))
13 table_call[i,4] = mean(pmax(prices_jsu - strikes[i],0))/...
14 ...((1+r)^(days/365))
15 table_call[i,5] = true_val_call[i]
16 }
17 for(i in 1:length(true_val_put)){
18   table_put[i,1] = as.double(names(true_val_put)[i])
19   table_put[i,2] = mean(pmax(as.double(names(true_val_put)[i]) - ...
20     ...prices_norm,0))/((1+r)^(days/365))
21   table_put[i,3] = mean(pmax(as.double(names(true_val_put)[i]) - ...
22     ...prices_EGB2,0))/((1+r)^(days/365))
23   table_put[i,4] = mean(pmax(as.double(names(true_val_put)[i]) - ...
24     ...prices_jsu,0))/((1+r)^(days/365))
25   table_put[i,5] = true_val_put[[i]]
26 }
27 # Визуализация значений теоретических и рыночных цен опционов
28 plot(table_call[,1],table_call[,2],col="red",type="l", xlab="Strike", ...
29   ...ylab="Price",ylim=c(15,25))
30 lines(table_call[,1],table_call[,3],col="deepskyblue1")
31 lines(table_call[,1],table_call[,4],col="chartreuse")
32 lines(table_call[,1],table_call[,5],"black")
33 legend(53,25,legend = c("ARIMA-GARCH-N","ARIMA-GARCH-BETTA","ARIMA-...
34   ...GARCH-JSU","MARKET"),col = c("red","deepskyblue1",...
35   ..."chartreuse","gray1"), lty=1:2, cex=0.7)
36 plot(table_put[,1],table_put[,2],col="red",type="l", xlab="Strike",...
37   ...ylab="Price",ylim=c(0,1.5))
38 lines(table_put[,1],table_put[,3],col="deepskyblue1")
39 lines(table_put[,1],table_put[,4],col="chartreuse")
40 lines(table_put[,1],table_put[,5],"black")
41 legend(51,1.5,legend = c("ARIMA-GARCH-N","ARIMA-GARCH-BETTA",...
42   ..."ARIMA-GARCH-JSU","MARKET"),col = c("red","deepskyblue1",...
43   ..."chartreuse","gray1"), lty=1:2, cex=0.8)
44 moneyness = strikes/datas$DAX[length(datas$DAX)]
45 # Вычисление абсолютной ошибки теоретических цен относительно рыночных
46 table_call_err = array(data = NA, dim = c(length(moneyness),3))
47 table_put_err = array(data = NA, dim = c(length(true_val_put),3))
48 for(i in 2:4){
49   table_call_err[,i-1] = abs(table_call[,i]-table_call[,5])
50   table_put_err[,i-1] = abs(table_put[,i]-table_put[,5])
51 }
52 # Визуализация результатов абсолютных ошибок теоретических цен опционов
53 plot(moneyness,table_call_err[,1],col="red",type="l", xlab="Moneyness", ...
54   ...ylab="AE", ylim = c(0,1))
55 lines(moneyness,table_call_err[,2],col="deepskyblue1")
56 lines(moneyness,table_call_err[,3],col="chartreuse")
57 legend(1.015,1,legend = c("ARIMA-GARCH-N","ARIMA-GARCH-BETTA",...
58   ..."ARIMA-GARCH-JSU"),col = c("red","deepskyblue1","chartreuse"),...
59   ...lty=1:2, cex=0.55)
60 plot(table_put[,1]/datas$DAX[length(datas$DAX)],table_put_err[,1],...
61   ...col="red",type="l",xlab="Moneyness", ylab="AE",ylim=c(0.4,1.5))
62 lines(table_put[,1]/datas$DAX[length(datas$DAX)],...
63   ...table_put_err[,2],col="deepskyblue1")
64 lines(table_put[,1]/datas$DAX[length(datas$DAX)],...
65   ...table_put_err[,3],col="chartreuse")
66 legend(1.015,1.45,legend = c("ARIMA-GARCH-N","ARIMA-GARCH-BETTA"...
67   ...,"ARIMA-GARCH-JSU"),col = c("red","deepskyblue1",...
68   ..."chartreuse"), lty=1:2, cex=0.55)

```

Приложение Б

Бэк-тестирование однодневного VaR

В данном разделе приведены детали реализации и исходных код программы, предназначеннной для численного моделирования риск-нейтральных динамик портфеля базовых активов опционных контрактов, оценки справедливой стоимости портфеля опционных контрактов (методом Монте-Карло), а также процедуры бэк-тестирования (методом Монте-Карло), указанных в Главе 5. Реализация всех численных методов выполнена на языке программирования R.

Б. Бэк тестирование однодневного VaR портфеля опционных контрактов

Листинг Б

```

1 library('rugarch')
2 # Уровень значимости VaR
3 alpha = 0.95
4 options_spec_inf = read.csv("Файл_со_спецификациями...
5     ..._опционных_контрактов", sep = ";")
6 # Количество базовых активов
7 q_assets = 3
8 # Количество реализаций методом Монте-Карло ...
9 # для оценки справедливой стоимости портфеля опционных контрактов
10 mc_inner = 10000
11 n = 365
12 # Количество главных компонент
13 n_comp = 3
14 # Количество реализаций методом Монте-Карло ...
15 # для оценки однодневного VaR портфеля
16 simq = 10000
17 input = read.csv("Файл_с_историческими_значениями...
18     ..._базовых_активов", sep = ";")
19 input_quotes = read.csv("Файл_с_данными_стоимостей_ опционных...
20     ..._контрактов_и_безрисковых_ставок", sep = ";")
21 results = array(data = 0, dim = c(final_time, 6))
22 colnames(results) = c("date", "VaR_rn", "VaR_ff", ...
23     ... "Portfolio", "Upper_rn", "Upper_ff")
24 rn_rates = array(data = NA, dim = c(dim(input_quotes)[1], q_assets))
25 rn_rates[,1] = input_quotes[,13]/100; rn_rates[,2] = ...
26     ... input_quotes[,14]/100; rn_rates[,3:5] = input_quotes[,12]/100
27 inner_result = array(data = 0, dim = c(final_time, mc_inner, 2))
28 for(mc_counter in 1:final_time){
29     show(c("Промежуточный результат (номер дня бэк-тестирования) ----->"...
30         ... , mc_counter))
31     for(monte in 1:mc_inner){
32         calibration_datas = rbind(input[mc_counter:dim(input)[1],],...
33             ... input_quotes[1:mc_counter,c(1,7:11)])
34         # День расчета VaR портфеля
35         today = as.Date(calibration_datas$Date[length(... ...
36             ... calibration_datas$Date)], format = "%d.%m.%Y")
37         results[mc_counter, 1] = mc_counter
38         # Массив количества дней до экспирации
39         days_to_exp = as.integer(as.Date(options_spec_inf$Expiration, ...
40             ... format = "%d.%m.%Y") - today)
41         expiration_in_days = max(days_to_exp)
42         calibration_datas_rep = array(data = 0, dim = c(dim(...
```

```

40     ...calibration_datas)[1]-1, (dim(calibration_datas)[2]-1)))
41 # Преобразование базовых активов в доходности
42 for(i in 1:q_assets)
43     calibration_datas_rep[,i] = as.matrix(calibration_datas[2:...
44     ...dim(calibration_datas)[1],i+1]/calibration_datas[1:...
45     ...dim(calibration_datas)[1]-1],i+1]-1)
46 colnames(calibration_datas_rep) = dimnames(calibration_datas)[...
47     ...[[2]][2:dim(calibration_datas)[2]]]
48 dat_m_d = array(data = 0, dim = c(2, dim(calibration_datas_rep)[2]))
49 # Нормирование доходностей
50 for (i in 1:dim(calibration_datas_rep)[2]){
51     dat_m_d[1,i] = mean(calibration_datas_rep[,i])
52     dat_m_d[2,i] = sd(calibration_datas_rep[,i])
53     calibration_datas_rep[,i] = (calibration_datas_rep[,i]...
54     ... - dat_m_d[1,i])/dat_m_d[2,i]
55 }
56 # Применение метода главных компонент с выводом промежуточных
57 # результатов
58 hept.pca = prcomp(calibration_datas_rep[,1:q_assets])
59 head(hept.pca$rotation)
60 summary(hept.pca)
61 # Спецификация моделей (распределение SU Джонсона)
62 simul = array(data = NA, dim=c(4, expiration_in_days, n_comp, simq))
63 spec = ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(1,1), include.mean...
64     ... = FALSE), variance.model = list(model="sGARCH", ...
65     ...garchOrder=c(1,1)), distribution.model = "jsu")
66 # Оценка параметров модели (процесс калибровки)
67 for (i in 1:n_comp){
68     fit = ugarchfit(spec = spec, data= hept.pca$x[,i], solver = 'solnp')
69     ttt = ugarchsim(fit, n.sim = expiration_in_days, n.start = 0, ...
70     ...m.sim = simq, startMethod= "sample")
71     simul[1,,i,] = ttt@simulation$seriesSim
72     simul[2,,i,] = ttt@simulation$seriesSim - ttt@simulation$residSim
73     simul[3,,i,] = ttt@simulation$sigmaSim
74     simul[4,,i,] = ttt@simulation$residSim/ttt@simulation$sigmaSim
75 }
76 out_assets_rn = array(data = 0, dim = c(expiration_in_days, ...
77     ...q_assets, simq))
78 out_assets_ff = array(data = 0, dim = c(expiration_in_days, ...
79     ...q_assets, simq))
80 temp_1 = array(data = 1, dim = c(expiration_in_days, simq))
81 temp_2 = array(data = 0, dim = c(expiration_in_days, simq))
82 # Восстановление динамики базовых активов (формула (3.22))
83 for(i in 1:q_assets){
84     temp_1 = array(data = 1, dim = c(expiration_in_days, simq))
85     temp_2 = array(data = 0, dim = c(expiration_in_days, simq))
86     for(j in 1:n_comp){
87         out_assets_ff[,i,] = out_assets_ff[,i,] + hept.pca$rotation...
88         ...[i,j]*simul[1,,j,]
89         temp_1 = temp_1 + hept.pca$rotation[i,j]*simul[2,,j,]
90         temp_2 = temp_2 + hept.pca$rotation[i,j]*simul[3,,j,]*simul[4,,j,]
91     }
92     out_assets_rn[,i,] = out_assets_rn[,i,] + ((1+rn_rates...
93         ...[mc_counter,i]/n)^n) - 1 + (((1+rn_rates[mc_counter,i]...
94         ...n)^n)/(temp_1))*temp_2
95 }
96 # Процедура обратная нормировки
97 for (i in 1:q_assets){
98     calibration_datas_rep[,i] = calibration_datas_rep[,i]*dat_m_d...
99     ...[2,i] + dat_m_d[1,i]
100    out_assets_rn[,i,] = out_assets_rn[,i,]*dat_m_d[2,i] +
101        dat_m_d[1,i]

```

```

99      out_assets_ff[,i,] = out_assets_ff[,i,]*dat_m_d[2,i] +
100 dat_m_d[1,i]
101  }
102  mass_of_final_assets_rn = array(data = 0, dim = c(q_assets, simq))
103  mass_of_final_assets_ff = array(data = 0, dim = c(q_assets, simq))
104  temp_var = array(data = 0, c(2,q_assets))
105  # Процедура поиска сценариев значений базовых активов в момент
106  # экспирации опционов
107  for(q in 1:q_assets){
108    for(mc in 1:simq){
109      mass_of_final_assets_rn[q,mc] =
110 prod(out_assets_rn[1:days_to_exp[q],q,mc]+1)*as.double(calibration_...
111 ...datas[as.Date(calibration_datas[,1], format = "%d.%m.%Y")...
112 ...==today,][q+1])
113      mass_of_final_assets_ff[q,mc] = prod(out_assets_ff...
114 ...[1:days_to_exp[q],q,mc]+1)*as.double(...calibration_datas[as.Date(calibration_datas[,1],...
115 ... format = "%d.%m.%Y")==today,][q+1])
116    }
117  # Оценка справедливой стоимости опционных контрактов (по
118  # методу Монте-Карло)
119  for(i in 1:q_assets){
120    if(options_spec_inf$type[i] == "CALL"){
121      mass_of_final_assets_rn[i,] = pmax(mass_of_final_assets_rn[i,]-
122 options_spec_inf$strike[i],0)/((1+rn_rates[mc_counter,i])^((days_to_...
123 ...exp[i]-1)/365))
124      mass_of_final_assets_ff[i,] = pmax(mass_of_final_assets_ff[i,]-
125 options_spec_inf$strike[i],0)/((1+rn_rates[mc_counter,i])^((days_to_...
126 ...exp[i]-1)/365))
127    }else{
128      mass_of_final_assets_rn[i,] = pmax(-mass_of_final_assets_rn...
129 ...[i,]+options_spec_inf$strike[i],0)/((1+rn_rates[mc_...
130 ...counter,i])^((days_to_exp[i]-1)/365))
131      mass_of_final_assets_ff[i,] = pmax(-mass_of_final_assets_ff...
132 ...[i,]+options_spec_inf$strike[i],0)/((1+...
133 ...rn_rates[mc_counter,i])^((days_to_exp[i]-1)/365))
134    }
135    inner_result[mc_counter, monte, 1] = inner_result[mc_counter,... ...
136 ... monte, 1] + mean(mass_of_final_assets_rn[i,])
137    inner_result[mc_counter, monte, 2] = inner_result[mc_counter,... ...
138 ...monte, 2] + mean(mass_of_final_assets_ff[i,])
139  }
140  # Заполнение таблицы превышений
141  rezults[mc_counter,2] = quantile(inner_result[mc_counter,,1], (1-alpha))
142  rezults[mc_counter,3] = quantile(inner_result[mc_counter,,2], (1-alpha))
143  rezults[mc_counter,4] = sum(input_quotes[mc_counter+1,2:6])
144  if(rezults[mc_counter,4]<rezults[mc_counter,2]){
145    rezults[mc_counter,5] = 1
146  }else{
147    rezults[mc_counter,5] = 0
148  }
149  if(rezults[mc_counter,4]<rezults[mc_counter,3]){
150    rezults[mc_counter,6] = 1
151  }else{
152    rezults[mc_counter,6] = 0
153  }
154 }

```