

На правах рукописи

Константинов Сергей Валерьевич

**Решение задачи синтеза системы управления на
основе аппроксимации множества оптимальных
траекторий методом сетевого оператора**

Специальность 2.3.1 —
«Системный анализ, управление и обработка информации,
статистика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Москва — 2022

Работа выполнена в Федеральном исследовательском центре «Информатика и управление» Российской академии наук в отделе №55.

Научный руководитель: **Дивеев Асхат Ибрагимович**
доктор технических наук, профессор,
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук,
главный научный сотрудник отдела №55

Официальные оппоненты: **Афанасьев Валерий Николаевич**,
доктор технических наук, профессор,
Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова НИУ ВШЭ,
профессор департамента прикладной математики

Скобцов Юрий Александрович,
доктор технических наук, профессор,
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (ГУАП),
профессор кафедры компьютерных технологий и программной инженерии (кафедра 43)

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Защита состоится «___» _____ 2022 г. в ___ часов ___ минут на заседании диссертационного совета 24.1.224.01 на базе федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН) по адресу: 117312, г. Москва, проспект 60-летия Октября, 9 (конференц-зал, 1-й этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИЦ ИУ РАН по адресу: г. Москва, ул. Вавилова, д. 40 и на официальном сайте ФИЦ ИУ РАН: <http://www.frccsc.ru>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор. 2, ученому секретарю диссертационного совета 24.1.224.01.

Автореферат разослан «___» _____ 2022 года.

Телефон для справок: +7 (499) 135-51-64.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.224.01,
канд. физ.-мат. наук, доцент

И.В. Смирнов

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена решению задачи общего синтеза системы управления. Данная задача была сформулирована В.Г. Болтянским в конце 1960-х годов [1; 3]. В отличие от задачи оптимального управления, решение задачи общего синтеза системы управления реализует принцип обратной связи и позволяет найти функцию управления от координат пространства состояний объекта, при этом начальное состояние объекта уже не будет играть роли и может быть любым. Задача общего синтеза системы управления является основной задачей современной теории управления [2].

Методы решения задачи синтеза можно поделить на два класса: методы аналитического поиска и численные методы. К наиболее известным методам аналитического поиска относятся метод аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), метод бэкстеппинга и метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР). Все эти методы не являются универсальными, сильно ограничены размерностью и зависят от модели объекта управления. К численным ранее относились методы, в которых функция управления задавалась разработчиком с точностью до значения параметров. В основном это были методы, в которых настраивались параметры регуляторов.

В начале XXI века впервые было получено численное решение задачи синтеза с помощью методов символьной регрессии [6]. Первый метод данного класса — метод генетического программирования (Дж. Коза) — появился в 1992 году и изначально был предназначен для автоматического написания компьютерных программ. При решении задачи синтеза системы управления с помощью методов символьной регрессии осуществляется поиск структуры и параметров математического выражения функции управления. Все методы символьной регрессии представляют математическое выражение в форме кода и осуществляют поиск оптимального решения с помощью специального генетического алгоритма, в котором основные операции скрещивания и мутации преобразованы для работы с закодированным выражением.

С 2006 года профессором А.И. Дивеевым и его учениками было решено множество задач синтеза управления на основе методов символьной регрессии. Основным недостатком используемого ими подхода являлось то, что он был направлен на поиск решения задачи синтеза системы управления по значению заданного функционала в пространстве всех возможных решений. Как итог, для полученных решений нельзя было определить их близость к оптимальному решению.

Таким образом, создание эффективного численного метода решения задачи синтеза системы управления, в котором будет определена оценка

близости найденного решения к оптимальному, является актуальной задачей. Решению данной задачи посвящены работы автора, представленные в списке публикаций по теме диссертации, и подытоживающая их диссертационная работа. Автором разработан новый подход численного решения задачи синтеза системы управления и нахождения структуры многомерной функции управления на основе аппроксимации множества предварительно найденных оптимальных траекторий.

Целью диссертационной работы является разработка эффективного численного метода решения задачи синтеза системы управления с оценкой близости численного решения к оптимальному.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. разработка численного метода решения задачи синтеза системы управления на основе аппроксимации оптимальных траекторий;
2. формирование множества данных для аппроксимации из оптимальных траекторий путём численного решения задачи оптимального управления для разных начальных условий;
3. сравнительное исследование численных методов решения задачи оптимального управления на основе прямого подхода и выбор наиболее эффективных из них;
4. разработка гибридного алгоритма оптимизации для решения задачи оптимального управления;
5. формализация вида функционала качества аппроксимации и разработка алгоритма поиска оптимального решения на основе методов символьной регрессии;
6. разработка комплекса программ, реализующих все этапы предложенного численного метода синтеза системы управления;
7. применение предложенного подхода и разработанного комплекса программ для решения прикладной задачи синтеза системы управления автомобилеподобным роботом.

Научная новизна диссертации состоит в следующем.

1. Впервые предложен двухэтапный численный метод решения задачи синтеза системы управления на основе аппроксимации множества оптимальных траекторий:
 - а) предложено использовать информацию об оптимальных траекториях в качестве данных для аппроксимации;
 - б) разработан алгоритм аппроксимации данных, полученных на основе оптимальных траекторий, с помощью методов символьной регрессии, позволяющий оценить близость найденного решения к оптимальному.
2. Выполнены сравнительные исследования и выявлены эффективные алгоритмы для решения задачи оптимального управления.
3. Разработан новый гибридный алгоритм для решения задачи оптимального управления.

4. Впервые с помощью разработанного метода и комплекса программ, его реализующего, численными экспериментами подтверждена его эффективность.

Теоретическая значимость. Разработан и апробирован численный метод решения задачи синтеза системы управления на основе аппроксимации оптимальных траекторий. Показано, что данный метод при поиске численного решения задачи синтеза позволяет определять близость найденного решения к оптимальному.

Практическая значимость. Разработка проблемно-ориентированного комплекса программ решения задачи синтеза системы управления была выполнена в рамках проекта 075-15-2020-799 «Методы построения и моделирования сложных систем на основе интеллектуальных и суперкомпьютерных технологий, направленные на преодоление больших вызовов» Минобрнауки России. Предложенный метод решения задачи синтеза системы управления используется в научно-исследовательской и опытно-конструкторской работе инжинирингового центра «Интеллектуальные роботизированные системы и технологии» Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова (Белгород, Россия), а также внедрен в деятельность ООО «Экспериментальная мастерская НаукаСофт» (Москва, Россия) при проектировании и разработке программно-аппаратных комплексов, что подтверждается соответствующими актами, представленными в Приложении к диссертационной работе. Разработанные алгоритмы применяются в научно-исследовательской работе роботозцентра Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук (Москва, Россия).

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В соответствии с формулой специальности 2.3.1 «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика» (технические науки) в диссертации разработаны методы совершенствования управления сложными прикладными объектами, а именно — численный метод решения задачи синтеза системы управления. Разработанный метод ориентирован на повышение эффективности управления. Полученные результаты исследования соответствуют следующим пунктам областей исследований, перечисленных в паспорте научной специальности: пункт 4 — “Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта”; пункт 7 — “Методы и алгоритмы структурно-параметрического синтеза и идентификации сложных систем”.

Методология и методы исследования. Методологическую основу диссертационного исследования составляют методы системного и сравнительного анализа в области теории оптимального управления,

численных методов оптимизации, методов символьной регрессии и дифференциальных уравнений. При проведении вычислительного эксперимента применяется метод моделирования с использованием системного подхода.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Новый численный метод решения задачи общего синтеза системы управления на основе аппроксимации оптимальных траекторий методами символьной регрессии. Предложенный метод не накладывает ограничений на размерность и вид объекта управления, не требует предварительных аналитических преобразований. При поиске решения он позволяет оценить близость текущего решения к оптимальному.
2. Методы на основе эволюционных алгоритмов для решения задачи оптимального управления и получения оптимальных траекторий. Показано, что при прямом подходе решения задачи оптимального управления, для которого характерны увеличение размерности пространства поиска и многоэкстремальность целевой функции, эволюционные алгоритмы позволяют получить значительно более точные решения.
3. Новый гибридный алгоритм для решения задачи оптимального управления. Новый алгоритм сочетает свойства двух наиболее эффективных в области решения задачи оптимального управления алгоритмов.
4. Комплекс программ, реализующий предложенный метод для решения задачи общего синтеза системы управления.
5. Решение прикладной задачи синтеза системы управления автомобилеподобным роботом с помощью разработанного метода. На основании оценки полученного решения прикладной задачи подтверждена эффективность разработанного численного метода синтеза системы управления.

Достоверность Достоверность результатов следует из применения строгих математических методов и известных теоретических оценок погрешностей численных решений и на основании вычислительных экспериментов. Достоверность результатов подтверждается сравнением полученных решений с известными результатами других авторов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях: International Symposium “Intelligent Systems” (INTELS) — 2020, 2018, 2016, 2014; International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT) — 2022, 2020, 2018; International Conference “Optimization and Applications” (OPTIMA) — 2021, 2020; European Control Conference (ECC) — 2020; Международная научно-практическая конференция “Фундаментально-прикладные проблемы безопасности, живучести, надёжности, устойчивости и эффективности систем” — 2019; International Conference

on Natural Computation, Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (ICNC-FSKD) — 2017; Всероссийская научная конференция с международным участием Моделирование коэволюции природы и общества: проблемы и опыт. К 100-летию со дня рождения ак. Н.Н. Моисеева — 2017, Международная научно-практическая конференция “Инженерные системы” — 2015 и на научном семинаре “Всероссийский семинар с международным участием «Эволюционные вычисления»” (ФИЦ ИУ РАН) — 2019.

Личный вклад. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, являются итогом самостоятельной работы автора. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами. В совместных работах автор принимал непосредственное участие в постановке задачи и выборе направления исследования, в программной реализации и обсуждении результатов исследований. При подготовке работ [A33; A8; A16; A17; A7; A18—A20; A22] вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 25 научных изданиях, среди них: публикаций в журналах, рекомендованных ВАК — 7, публикаций в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus — 15, публикаций в трудах российских и зарубежных конференций — 3. Зарегистрированы 8 программ для ЭВМ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения, списка литературы и 1 приложения. Полный объем диссертации составляет 180 страниц, включая 12 рисунков и 4 таблицы. Список цитируемой литературы содержит 180 наименований.

Содержание работы

Во **Введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту положения, приведено краткое изложение содержания диссертации.

В **Главе 1** приводятся постановка задачи общего синтеза системы управления и обзор известных методов ее решения.

В **разделе 1.1** дана формальная постановка задачи общего синтеза системы управления. Задача была сформулирована В.Г. Болтянским в 1960-х гг. [1; 3]. Ее решение состоит в нахождении функции управления от компонент вектора состояния объекта управления. Такая функция управления обеспечит перемещение объекта из начального состояния некоторой области в терминальное состояние по оптимальной траектории согласно заданному критерию. Задача общего синтеза системы управления имеет

следующее описание. Задана математическая модель объекта управления

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $\mathbf{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ — вектор управления, U — ограниченное компактное множество. Заданы множество начальных состояний

$$X_0 \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2)$$

и терминальное состояние

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f, \quad (3)$$

где t_f — ограниченное время процесса управления. Функционал имеет вид

$$J = \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \rightarrow \min. \quad (4)$$

Требуется найти управление в форме многомерной функции от компонент вектора пространства состояний объекта

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где $\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \in U$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Искомое управление (5) при подстановке в математическую модель (1) $\forall \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \in X_0$ обеспечит перемещение объекта управления в состояние (3), доставляющее минимум функционалу (4).

В **разделе 1.2** приводится обзор известных методов решения задачи общего синтеза системы управления. Показано, что большинство известных методов либо ограничены размерностью задачи, либо зависят от модели объекта управления. Численный метод динамического программирования (Р. Беллман) не позволяет получить математическое выражение функции управления. Наиболее популярные в последнее время метод обхода интегратора — Backstepping (П. Кокотович) и метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (А.А. Колесников) могут быть применены только для определенного вида математических моделей.

В **разделе 1.3** приведена постановка задачи численного синтеза системы управления на основе многокритериальной структурно-параметрической оптимизации. Задана модель объекта управления (1), множество начальных условий (2) заменено конечным множеством из N элементов

$$\tilde{X}_0 = \{\mathbf{x}^{0,1}, \dots, \mathbf{x}^{0,N}\}. \quad (6)$$

Задано терминальное условие (3). Критерии качества включают сумму значений функционалов для решений из всех начальных условий из (6)

$$J_1 = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \right)_{\mathbf{x}^{0,j}} \rightarrow \min, \quad J_2 = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^L |\varphi_k(\mathbf{x}(t_f))| \right)_{\mathbf{x}^{0,j}} \rightarrow \min, \quad (7)$$

где $\varphi_k(\mathbf{x}(t_f))$, $k = \overline{1, L}$ — функции оценки достижения терминального условия (3), при $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f \Rightarrow \varphi_k(\mathbf{x}(t_f)) = 0$. Решением поставленной задачи является множество Парето-оптимальных управлений в виде функции от координат пространства состояний $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \Pi$, где Π — множество Парето-оптимальных решений по значениям функционалов (7).

В **разделе 1.4** приведено описание метода решения задачи численного синтеза системы управления на основе многокритериальной структурно-параметрической оптимизации методами символьной регрессии. Введем обозначение записи функции управления $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$, где \mathbf{s} — вектор постоянных параметров. Решением задачи численного синтеза системы управления будет запись оптимальной структуры функции $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{g}^*(\mathbf{x}, \mathbf{s}^*)$ и оптимальные значения ее параметров \mathbf{s}^* . Выбор решения осуществляется на множестве Парето в пространстве функционалов (7), $\Pi = \{\tilde{\mathbf{g}}^i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{s}}^i) : i = 1, 2, \dots\}$. Для поиска решения строится множество возможных решений в форме записей функций $G = \{\mathbf{g}^j(\mathbf{x}, \mathbf{s}^j) : j = 1, 2, \dots\}$ и применяются операции специального генетического алгоритма для получения записей $\tilde{\mathbf{g}}^i(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{s}}^i)$, удовлетворяющих задаче (1), (3), (6) и (7). Синтез системы управления на основе многокритериальной оптимизации структуры функции управления реализует подход выбора оптимального решения на пространстве всех возможных решений. Поиск решения $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{g}^*(\mathbf{x}, \mathbf{s}^*)$ среди всех возможных решений из множества G осуществляется без учета его близости к оптимальному, что не позволяет оценить качество решения без проведения дополнительных исследований.

В **Главе 2** представлен обзор методов символьной регрессии и показана возможность их применения для задач синтеза системы управления.

В **разделе 2.1** приведено описание класса методов символьной регрессии для синтеза системы управления. Все методы данного класса осуществляют поиск на нечисловом пространстве кодов функций. Запись нечисловой структуры в виде кода специфична для каждого конкретного метода. В общем виде метод символьной регрессии состоит из алгоритма кодирования символьного выражения и алгоритма поиска на пространстве кодов. В задачах синтеза системы управления методы символьной регрессии осуществляют одновременный поиск структуры математического выражения и значений его параметров.

В **разделе 2.2** приведен обзор методов символьной регрессии. Первым и наиболее цитируемым является метод генетического программирования (Дж. Коза), предложенный в 1992 году. Среди известных методов символьной регрессии следует упомянуть метод декартового генетического программирования (Дж. Миллер), метод грамматической эволюции (М. О'Нейл), метод индуктивного программирования (Н. Николаев), метод аналитического программирования (И. Зелинка), метод матриц разбора (С. Луо) и метод сетевого оператора (А.И. Дивеев). В

разделе 2.2.4 описывается принцип малых вариаций, который, при использовании в методах символьной регрессии, позволяет существенно упростить поиск решения и преодолеть некоторые их недостатки. В разделе 2.2.5 рассматривается используемый в работе метод сетевого оператора.

В Главе 3 представлен выносимый на защиту численный метод решения задачи синтеза системы управления на основе аппроксимации множества оптимальных траекторий. Данный метод был спроектирован с целью исправить основной недостаток численных методов символьной регрессии для решения задачи синтеза системы управления. Разработанный метод основан на идее получения функции управления путем аппроксимации точек оптимальных траекторий. Для этого решение задачи синтеза системы управления разбивается на два этапа. На первом этапе определяется множество начальных состояний в заданной области и для каждого начального состояния решается задача оптимального управления. По результатам решения на полученном множестве оптимальных траекторий определяется множество точек для аппроксимации. На втором этапе с помощью метода символьной регрессии осуществляется поиск функции управления от координат состояний объекта, которая аппроксимирует множество определенных на первом этапе точек. В качестве минимизируемого функционала используется значение ошибки аппроксимации.

В разделе 3.1 приведено описание алгоритма решения задачи численного синтеза системы управления на основе аппроксимации оптимальных траекторий. На первом этапе заменяем множество (2) конечным множеством из N начальных условий (6) и многократно решаем задачу оптимального управления для получения множества функций управления от времени и соответствующих частных решений для аппроксимации

$$\tilde{D} = \{(\tilde{\mathbf{x}}^1(\cdot), \tilde{\mathbf{u}}^1(\cdot)), \dots, (\tilde{\mathbf{x}}^N(\cdot), \tilde{\mathbf{u}}^N(\cdot))\}, \quad (8)$$

где $\tilde{\mathbf{u}}^j(\cdot)$ и $\tilde{\mathbf{x}}^j(\cdot)$ — соответственно найденная функция управления и частное решение системы (1) для начального условия $\mathbf{x}^{0,j} \in \tilde{X}_0$, $j = \overline{1, N}$.

Для численной аппроксимации вводим дискретизацию по времени $\Delta_s t > 0$ и определяем множество дискретных значений времени для всех найденных решений из множества (8), $T_j = (0, \Delta_s t, 2\Delta_s t, \dots, M_j \Delta_s t)$, где $M_j = \left\lceil \frac{t_f(\mathbf{x}^{0,j})}{\Delta_s t} \right\rceil$, $t_f(\mathbf{x}^{0,j})$ — время процесса управления для найденного решения задачи оптимального управления из начального состояния $\mathbf{x}^{0,j}$, $j = \overline{1, N}$. Тогда значения векторов состояния и управления для каждого начального состояния в дискретный момент времени $t_j \in T_j$ можно записать в виде $\tilde{\mathbf{x}}^{j,i} = \tilde{\mathbf{x}}^j(t_{j,i})$ и $\tilde{\mathbf{u}}^{j,i} = \tilde{\mathbf{u}}^j(t_{j,i})$ соответственно, $i = \overline{1, M_j}$, $j = \overline{1, N}$. В итоге получаем множество точек оптимальных траекторий и управлений

$$D = \{((\tilde{\mathbf{x}}^{1,1}, \tilde{\mathbf{u}}^{1,1}), \dots, (\tilde{\mathbf{x}}^{1,M_1}, \tilde{\mathbf{u}}^{1,M_1})), \dots, ((\tilde{\mathbf{x}}^{N,1}, \tilde{\mathbf{u}}^{N,1}), \dots, (\tilde{\mathbf{x}}^{N,M_N}, \tilde{\mathbf{u}}^{N,M_N}))\}. \quad (9)$$

На втором этапе решаем задачу численного синтеза системы управления и ищем многомерную функцию управления от координат состояний объекта (5), удовлетворяющую критерию

$$J = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \|\tilde{\mathbf{x}}^{j,i} - \mathbf{x}^j(\mathbf{x}^{0,j}, t_{j,i})\| \rightarrow \min, \quad (10)$$

где $\mathbf{x}^j(\mathbf{x}^{0,j}, t_{j,i})$ — частное решение системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^j(\mathbf{x}^{0,j}, t_{j,i-1}), \mathbf{h}(\mathbf{x}^j(\mathbf{x}^{0,j}, t_{j,i-1})))$ для начального условия $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{0,j}$ в дискретный момент времени $t_{j,i}$, $i = \overline{1, M_j}$, $\mathbf{x}^j(\mathbf{x}^{0,j}, t_{j,0}) = \mathbf{x}^{0,j}$ — состояние объекта управления в начальный момент времени $t_{j,0} = 0$, $j = \overline{1, N}$. Значение функционала (10) определяет близость рассматриваемого решения к оптимальным траекториям, представленным в виде множества аппроксимируемых значений (9). Чем ближе значение функционала (10) к нулю, тем точнее выполнена аппроксимация и ближе решение к оптимальному.

В разделе 3.2 дана постановка задачи численного синтеза системы управления на основе аппроксимации множества оптимальных траекторий методами символьной регрессии. Решаем задачу оптимального управления (1), (3), (4) и (6). В результате получаем множество для аппроксимации (8). Выполняем дискретизацию данного множества и получаем множество точек оптимальных траекторий и соответствующих им управлений (9). Вводим в функцию управления вектор параметров $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^k$ в качестве дополнительного аргумента. Поиск функции управления и значений ее параметров будем осуществлять одновременно с помощью метода символьной регрессии путем аппроксимации множества оптимальных траекторий (9). Решением задачи будет оптимальная структура функции управления $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{g}^*(\mathbf{x}, \mathbf{s}^*)$ и оптимальные значения ее параметров \mathbf{s}^* , доставляющие минимум критерию (10).

Главным преимуществом разработанного подхода является возможность в процессе поиска функции управления производить оценку близости текущих возможных решений к оптимальному на основе значения критерия (10). Также, в отличие от метода, рассмотренного в разделе 1.4, разработанный метод предполагает однокритериальную оптимизацию. Эффективность разработанного подхода исследовалась на различных задачах синтеза системы управления [A15; A17; A7; A18; A21; A22].

В Главе 4 рассмотрены вопросы численного решения задачи оптимального управления. Для её решения в работе используется прямой подход как более универсальный. В процессе работы было проведено масштабное исследование по применению эволюционных алгоритмов для решения задачи оптимального управления. Полученные результаты отражены в публикациях [A1—A4; A32; A8; A10; A12; A20].

В разделе 4.1 приведена формальная постановка задачи оптимального управления [3]. Задан объект управления в виде (1), задано одно

начальное состояние $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, $t_0 \geq 0$, задано терминальное состояние (3), функционал качества включает фазовые ограничения и точность попадания в терминальное состояние

$$J = \mu \|\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}^f\| + \int_{t_0}^{t_f} \left(f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^z \alpha_i \vartheta(h_i(\mathbf{x})) h_i(\mathbf{x}) \right) dt \rightarrow \min, \quad (11)$$

где μ — весовой коэффициент, $\vartheta(h_i(\mathbf{x}))$ — функция Хэвисайда, α_i — заданные коэффициенты штрафа, $i = \overline{1, z}$, z — число фазовых ограничений. Результатом решения задачи является векторная функция управления $\tilde{\mathbf{u}}(\cdot)$.

В **разделе 4.2** рассматриваются численные методы решения задачи оптимального управления прямым подходом, который заключается в сведении исходной задачи к задаче конечномерной оптимизации и применении методов нелинейного программирования. Редукция исходной задачи производится с помощью кусочно-линейной аппроксимации. Для этого зададим малый интервал $\Delta t > 0$ и определим количество интервалов $M = \lceil \frac{t_{max}}{\Delta t} \rceil$, где t_{max} — ограничение на время управления. В результате получаем приближенное решение задачи оптимального управления. Значение управления $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ в момент времени t будет определяться из соотношения

$$\tilde{u}_j(t) = q_{(j-1)M+i} + (q_{(j-1)M+i+1} - q_{(j-1)M+i}) \frac{(t - (i-1)\Delta t)}{\Delta t}, \quad (12)$$

где $i\Delta t \leq t < (i+1)\Delta t$, $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, m}$. Решением задачи является вектор постоянных параметров $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_p]^T$, где $p = m(M+1)$.

В **разделе 4.3** представлен обзор методов безусловной оптимизации для решения задачи оптимального управления. Приводится пошаговое описание следующих эволюционных алгоритмов: генетический алгоритм, метод дифференциальной эволюции, метод роя частиц, пчелиный алгоритм, алгоритм летучих мышей, алгоритм серых волков. Для поиска данные алгоритмы используют информацию об оценках множества возможных решений. Процедура преобразования множества построена на основе некоторых аналогий с живой природой и состоит из этапов исследовательского и локального поиска, являющихся последовательными процессами диверсификации и интенсификации.

В **разделе 4.4** приводится сравнение эффективности алгоритмов для решения задачи оптимального управления. Исследования применения эволюционных алгоритмов для решения задачи оптимального управления проводились начиная с 2014 года [A31] и показали, что эволюционные алгоритмы обладают высокой эффективностью и имеют преимущества над другими известными методами [A1; A4; A32; A8; A10; A12], что также подтверждается результатами зарубежных исследований [5; 7].

В работе [A4] рассматривалась задача оптимального управления гусеничным роботом в пространстве с двумя фазовыми ограничениями.

В Таблице 1 приведены результаты сравнительного анализа градиентных и эволюционных алгоритмов. Лучшим по сумме мест по трём критериям оказался пчелиный алгоритм, далее следует алгоритм серых волков. Лучший из градиентных методов — метод Марквардта — занял 5-ую позицию.

Таблица 1 — Результаты сравнительного анализа эволюционных и градиентных алгоритмов на основе решения задачи оптимального управления

Алгоритм	Лучший результат	Среднее значение	СКО
Пчелиный	2,4308	2,5284	0,0639
Серых волков	2,4781	2,8418	0,0671
Роя частиц	2,5100	2,7835	0,4287
Генетический	2,5116	2,9577	0,3543
Марквардта	2,5466	3,1735	0,3882
Adam	2,5759	3,3047	0,5931
Летучих мышей	2,5421	3,3134	0,8846
Дифференциальной эволюции	2,8599	3,6074	0,5899
Наискор. градиентного спуска	2,7257	3,6222	1,0180
Случайного поиска	4,2796	5,1516	0,6416
Ньютона-Рафсона	3,1155	5,1373	1,6584

В разделе 4.5 рассматриваются вопросы гибридизации алгоритмов с целью повышения их эффективности и области применения.

В разделе 4.6 описан новый гибридный алгоритм на основе алгоритма серых волков и пчелиного алгоритма, впервые представленный автором в работе [A19]. Методы, составившие его основу, хорошо зарекомендовали себя для решения разнообразных сложных мультимодальных оптимизационных задач, в том числе задач оптимального управления, что показано в работах [A1—A4; A32; A8; A10; A12].

Приведем основные этапы гибридного алгоритма. Генерируем множество из H векторов возможных решений \mathbf{q}^j , $j = \overline{1, H}$. На каждой итерации производим исследующий поиск вокруг заданного числа B лучших векторов \mathbf{q}^k путем построения E_k векторов $\mathbf{g}^{k_e} = \mathbf{q}^k + \boldsymbol{\xi}^{k_e}$, где $\boldsymbol{\xi}^{k_e}$ — вектор случайно распределенных величин на интервале $[-r_i; r_i]$, $i = \overline{1, p}$, $e = \overline{1, E_k}$, $k = \overline{1, B}$. Если для функционала (11) выполняется условие $J(\mathbf{g}^{k_e}) < J(\mathbf{q}^k)$, то $\mathbf{q}^k = \mathbf{g}^{k_e}$. Далее производим модификацию всех возможных решений по формуле $\mathbf{q}^j = \frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}^j + \boldsymbol{\beta}^j + \boldsymbol{\delta}^j)$, $j = \overline{1, H}$. Дополнительные векторы $\boldsymbol{\alpha}^j$, $\boldsymbol{\beta}^j$, $\boldsymbol{\delta}^j$ вычислены на основе трех наилучших решений \mathbf{q}^α , \mathbf{q}^β , \mathbf{q}^δ по формулам $\boldsymbol{\alpha}^j = \mathbf{q}^\alpha - a(2\xi_1 - 1)|2\xi_2\mathbf{q}^\alpha - \mathbf{q}^j|$, $\boldsymbol{\beta}^j = \mathbf{q}^\beta - a(2\xi_3 - 1)|2\xi_4\mathbf{q}^\beta - \mathbf{q}^j|$, $\boldsymbol{\delta}^j = \mathbf{q}^\delta - a(2\xi_5 - 1)|2\xi_6\mathbf{q}^\delta - \mathbf{q}^j|$, где ξ_1, \dots, ξ_6 — случайно распределенные величины на интервале $[0; 1]$, $a = 2 - \frac{2w}{W}$ — параметр линеаризации, w — номер текущей итерации, W — максимальное число итераций. В модифицированном множестве возможных решений отбираем S худших

решений и заменяем их на новые, сгенерированные случайно, и производим уменьшение радиусов области поиска r_i , $i = \overline{1, p}$. Поиск продолжается до достижения максимального числа итераций W .

Сравнительный анализ эффективности разработанного гибридного алгоритма показал высокое качество гибридизации [A19]. В гибридном алгоритме удалось достичь взаимной компенсации слабых сторон исходных алгоритмов, при этом уменьшив число настраиваемых параметров. Совокупная эффективность гибридного алгоритма по всем рассмотренным в [A19] тестам оказалась выше чем у исходных алгоритмов по отдельности. Новый гибридный алгоритм предлагается использовать для поиска численного решения прикладных задач оптимального управления.

В **Главе 5** рассмотрена прикладная задача синтеза системы управления автомобилеподобным роботом.

В **разделе 5.1** приведено описание математической модели автомобилеподобного робота [4].

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \cos(x_3) \\ \dot{x}_2 = u_1 \sin(x_3) \\ \dot{x}_3 = \frac{u_1}{L} \tan(u_2) \end{cases}. \quad (13)$$

Вектор управления ограничен $\mathbf{u}^- \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^+$, где $\mathbf{u}^- = [-10 \ -1]^T$, $\mathbf{u}^+ = [10 \ 1]^T$.

В **разделе 5.2** сформулирована постановка задачи синтеза системы управления в пространстве с фазовыми ограничениями. Начальное состояние робота определено на ограниченной области начальных условий

$$X_0 = \{7 \leq x_{0,1} \leq 9, \ 9 \leq x_{0,2} \leq 11, \ x_{0,3} = \pi\}. \quad (14)$$

Задано терминальное состояние $\mathbf{x}^f = [0 \ 0 \ \pi]^T$ и фазовые ограничения на плоскости движения робота $h_i(x) = r_i^* - \sqrt{(x_{i,1}^* - x_1)^2 + (x_{i,2}^* - x_2)^2} \leq 0$, $i = \overline{1, z}$, где $z = 4$ — число фазовых ограничений, $r_1^* = 3$, $x_{1,1}^* = 2$, $x_{1,2}^* = 8$, $r_2^* = 3$, $x_{2,1}^* = 8$, $x_{2,2}^* = 2$, $r_3^* = 1,5$, $x_{3,1}^* = 2,5$, $x_{3,2}^* = 2,5$, $r_4^* = 1,5$, $x_{4,1}^* = 7,5$, $x_{4,2}^* = 7,5$. Необходимо найти структуру функции управления $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, обеспечивающую перемещение робота из любого начального состояния $\mathbf{x}^0 \in X_0$ в терминальное состояние \mathbf{x}^f за минимальное время.

В **разделе 5.3** рассматривается решение поставленной задачи с помощью разработанного численного метода на основе аппроксимации оптимальных траекторий.

В **разделе 5.3.1** описывается первый этап метода — поиск множества оптимальных траекторий. Заменим ограниченную область начальных условий (14) на конечное множество \tilde{X}_0 из $N = 9$ начальных состояний

$$\begin{aligned} \tilde{X}_0 = \{ & \mathbf{x}^{0,1} = [7 \ 9 \ \pi]^T, \quad \mathbf{x}^{0,2} = [8 \ 9 \ \pi]^T, \quad \mathbf{x}^{0,3} = [9 \ 9 \ \pi]^T, \\ & \mathbf{x}^{0,4} = [7 \ 10 \ \pi]^T, \quad \mathbf{x}^{0,5} = [8 \ 10 \ \pi]^T, \quad \mathbf{x}^{0,6} = [9 \ 10 \ \pi]^T, \\ & \mathbf{x}^{0,7} = [7 \ 11 \ \pi]^T, \quad \mathbf{x}^{0,8} = [8 \ 11 \ \pi]^T, \quad \mathbf{x}^{0,9} = [9 \ 11 \ \pi]^T \}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для каждого начального состояния из (15) находим решение задачи оптимального управления $\mathbf{u}(\mathbf{x}^{0,j}, t)$, обеспечивающее минимум функционалу (11). Поиск осуществляем прямым подходом на основе сведения к задаче нелинейного программирования с помощью кусочно-линейной аппроксимации в соответствии с (12) и применяем разработанный гибридный алгоритм. Полученное решение, ввиду использования прямого подхода и применения эволюционных алгоритмов, будет приблизительно оптимальным. Соответственно на втором этапе в аппроксимируемом множестве используются приблизительно оптимальные траектории.

Значения функционала (11), полученные при численном решении задачи оптимального управления для начальных состояний из (15), приведены в Таблице 2. На Рис. 1 представлены графики траекторий движения робота на плоскости. В результате для системы (13) было получено множество оптимальных траекторий и функций управления в форме (8).

Таблица 2 — Результаты решения задачи оптимального управления для различных начальных условий

j	$\mathbf{x}^{0,j}$	J_j^{opt}
1	$\mathbf{x}^{0,1} = [7 \ 9 \ \pi]^T$	1,2883
2	$\mathbf{x}^{0,2} = [8 \ 9 \ \pi]^T$	1,4063
3	$\mathbf{x}^{0,3} = [9 \ 9 \ \pi]^T$	1,4712
4	$\mathbf{x}^{0,4} = [7 \ 10 \ \pi]^T$	1,3974
5	$\mathbf{x}^{0,5} = [8 \ 10 \ \pi]^T$	1,4182
6	$\mathbf{x}^{0,6} = [9 \ 10 \ \pi]^T$	1,5095
7	$\mathbf{x}^{0,7} = [7 \ 11 \ \pi]^T$	1,4855
8	$\mathbf{x}^{0,8} = [8 \ 11 \ \pi]^T$	1,5097
9	$\mathbf{x}^{0,9} = [9 \ 11 \ \pi]^T$	1,5935

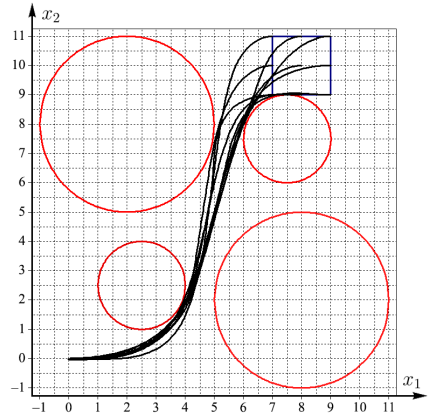


Рис. 1 — Графики траекторий из различных начальных состояний.

В разделе 5.3.2 описывается второй этап — синтез системы управления роботом на основе аппроксимации множества оптимальных траекторий. Введем малое значение $\Delta_s t > 0$ и определим множество дискретных значений времени $T_j = (0, \Delta_s t, 2\Delta_s t, \dots, M_j \Delta_s t)$, где $M_j = \left\lceil \frac{t_f(\mathbf{x}^{0,j})}{\Delta_s t} \right\rceil$, $t_f(\mathbf{x}^{0,j})$ — время процесса управления для найденного решения задачи оптимального управления из начального состояния $\mathbf{x}^{0,j}$, $j = \overline{1, N}$. Сформируем множество из значений вектора состояния в дискретный момент времени $t_{j,i} \in T_j$, $D_j = \{(\tilde{\mathbf{x}}^{j,1}), \dots, (\tilde{\mathbf{x}}^{j,M_j})\}$, $i = \overline{1, M_j}$, $j = \overline{1, N}$, где $\tilde{\mathbf{x}}^{j,i} = \tilde{\mathbf{x}}^j(t_{j,i})$ — значение вектора состояния робота в дискретный момент времени $t_{j,i} \in T_j$ при движении из начального состояния $\mathbf{x}^{0,j}$, $j = \overline{1, N}$. В итоге получим набор данных для аппроксимации

$$D = \{D_1, \dots, D_N\}. \quad (16)$$

Численным решением задачи синтеза системы управления является многомерная функция управления от координат вектора состояний и вектора параметров объекта

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{g}^*(\mathbf{x}, \mathbf{s}^*), \quad (17)$$

найденная методом сетевого оператора в соответствии с функционалом

$$J = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{M_j} \|\tilde{\mathbf{x}}^{j,i} - \mathbf{x}^j(\mathbf{x}^{0,j}, t_{j,i})\| + \sum_{k=1}^z \alpha_k \vartheta(h_k(\mathbf{x})) h_k(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad (18)$$

где $\mathbf{x}^j(\mathbf{x}^{0,j}, t_{j,i})$ — частное решение системы (13) для начального условия $\mathbf{x}^{0,j}$ в дискретный момент времени $t_{j,i} \in T_j$, $\tilde{\mathbf{x}}^{j,i}$ — эталонное решение из аппроксимируемого множества (16) для соответствующего начального условия и момента времени, $i = \overline{1, M_j}$, $j = \overline{1, N}$, α_k — штрафной коэффициент, $h_k(\mathbf{x})$ — фазовое ограничение в пространстве состояний объекта, $k = \overline{1, z}$, z — число фазовых ограничений, $\vartheta(h_k(\mathbf{x}))$ — функция Хэвисайда.

В разделе 5.4 приведены результаты вычислительного эксперимента. Поиск функции управления (17) производился в трёх независимых экспериментах, отличающихся числом N используемых оптимальных траекторий в аппроксимируемом множестве (16) и значением параметра их дискретизации $\Delta_s t$. В **Эксперименте 1** $N = 9$, $\Delta_s t = 0,01$; в **Эксперименте 2** $N = 9$, $\Delta_s t = 0,05$; в **Эксперименте 3** $N = 5$, $\Delta_s t = 0,01$. Было получено три решения задачи синтеза вида (17). В Таблице 3 в колонках J^1 , J^2 и J^3 приведены значения функционала (11), полученные с помощью найденных решений задачи синтеза в соответствующих экспериментах, J^{opt} — значение функционала, полученное при решении задачи оптимального управления для соответствующего начального состояния.

Лучшее решение поставленной задачи синтеза было получено в **Эксперименте 1**. Среднее отклонение значений функционала от эталонных составило 0,0715, среднеквадратическое отклонение — 0,0388. Анализ результатов в трех экспериментах показывает, что значение параметра $\Delta_s t$ имеет существенное влияние на качество решения задачи, в то время как значение N имеет незначительное влияние на решение при значительном влиянии на время расчета. На Рис. 2 — 4 представлены графические результаты, полученные с помощью найденной в **Эксперименте 1** функции управления (сплошная линия), и эталонные значения, полученные путем решения задачи оптимального управления для соответствующих начальных состояний (пунктирная линия). Как видно из графиков, полученные решения удовлетворяют фазовым ограничениям и обеспечивают достижение терминального состояния с заданной точностью.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертации.

В **Приложении А** представлены акты о внедрении, подтверждающие применение результатов диссертационного исследования в научной и коммерческой деятельности.

Таблица 3 — Сравнительные результаты для найденных решений задачи синтеза системы управления

i	$\mathbf{x}^{0,i}$	J_i^1	J_i^2	J_i^3	J_i^{ocp}
1	$\mathbf{x}^{0,1} = [7 \ 9 \ \pi]^T$	1,3363	1,3808	1,3250	1,2883
2	$\mathbf{x}^{0,2} = [8 \ 9 \ \pi]^T$	1,4455	1,4443	1,4549	1,4063
3	$\mathbf{x}^{0,3} = [9 \ 9 \ \pi]^T$	1,5086	1,5382	1,5446	1,4712
4	$\mathbf{x}^{0,4} = [7 \ 10 \ \pi]^T$	1,4155	1,6257	1,4047	1,3974
5	$\mathbf{x}^{0,5} = [8 \ 10 \ \pi]^T$	1,4983	1,7604	1,5026	1,4182
6	$\mathbf{x}^{0,6} = [9 \ 10 \ \pi]^T$	1,6233	1,8636	1,6642	1,5095
7	$\mathbf{x}^{0,7} = [7 \ 11 \ \pi]^T$	1,5255	1,5371	1,5258	1,4855
8	$\mathbf{x}^{0,8} = [8 \ 11 \ \pi]^T$	1,5824	1,6736	1,5888	1,5097
9	$\mathbf{x}^{0,9} = [9 \ 11 \ \pi]^T$	1,7119	1,7715	1,7230	1,5935
10	$\mathbf{x}^{0,10} = [7,5 \ 9 \ \pi]^T$	1,3954	1,5671	1,4008	1,3493
11	$\mathbf{x}^{0,11} = [8,5 \ 9 \ \pi]^T$	1,4995	1,4914	1,5107	1,4418
12	$\mathbf{x}^{0,12} = [7 \ 9,5 \ \pi]^T$	1,3804	1,5204	1,3558	1,3428
13	$\mathbf{x}^{0,13} = [7,5 \ 9,5 \ \pi]^T$	1,4172	1,6439	1,4279	1,3815
14	$\mathbf{x}^{0,14} = [8 \ 9,5 \ \pi]^T$	1,4731	1,6214	1,4861	1,4119
15	$\mathbf{x}^{0,15} = [8,5 \ 9,5 \ \pi]^T$	1,5507	1,6720	1,5305	1,4521
16	$\mathbf{x}^{0,16} = [9 \ 9,5 \ \pi]^T$	1,6819	1,7229	1,7142	1,4896
17	$\mathbf{x}^{0,17} = [7,5 \ 10 \ \pi]^T$	1,4484	1,6933	1,4499	1,4052
18	$\mathbf{x}^{0,18} = [8,5 \ 10 \ \pi]^T$	1,5531	1,8117	1,5623	1,4566
19	$\mathbf{x}^{0,19} = [7 \ 10,5 \ \pi]^T$	1,4806	1,6385	1,4489	1,4353
20	$\mathbf{x}^{0,20} = [7,5 \ 10,5 \ \pi]^T$	1,5027	1,7887	1,5669	1,4506
21	$\mathbf{x}^{0,21} = [8 \ 10,5 \ \pi]^T$	1,5445	1,7065	1,5453	1,4634
22	$\mathbf{x}^{0,22} = [8,5 \ 10,5 \ \pi]^T$	1,5853	1,7555	1,5830	1,5043
23	$\mathbf{x}^{0,23} = [9 \ 10,5 \ \pi]^T$	1,6567	1,8040	1,6566	1,5545
24	$\mathbf{x}^{0,24} = [7,5 \ 11 \ \pi]^T$	1,5581	1,6794	1,5513	1,4965
25	$\mathbf{x}^{0,25} = [8,5 \ 11 \ \pi]^T$	1,6728	1,7228	1,6672	1,5457
Сред. знач. отклонения		0,0715	0,207	0,0772	—
СКО		0,0388	0,0936	0,0481	—

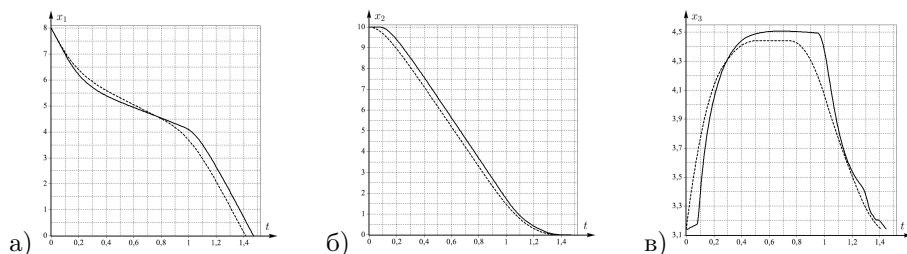


Рис. 2 — Графики изменения фазовых координат робота во времени при движении из начального состояния $\mathbf{x}^0 = [8 \ 10 \ \pi]^T$: $x_1(t)$ — (а); $x_2(t)$ — (б); $x_3(t)$ — (в); сплошная линия — полученное значение; пунктирная линия — эталонное значение.

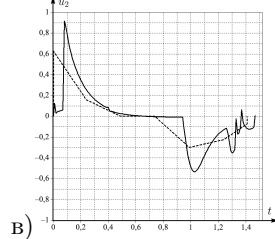
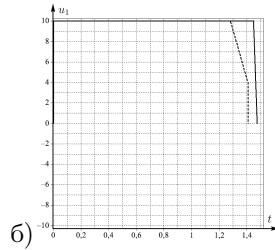
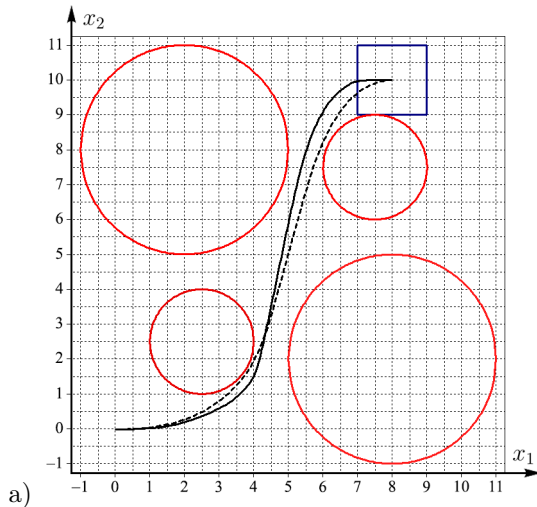


Рис. 3 — Траектория движения робота на плоскости из начального состояния $\mathbf{x}^0 = [8 \ 10 \ \pi]^T$ (а) и графики изменения управляющих воздействий во времени (б) и (в); сплошная линия — полученное значение; пунктирная линия — эталонное значение.

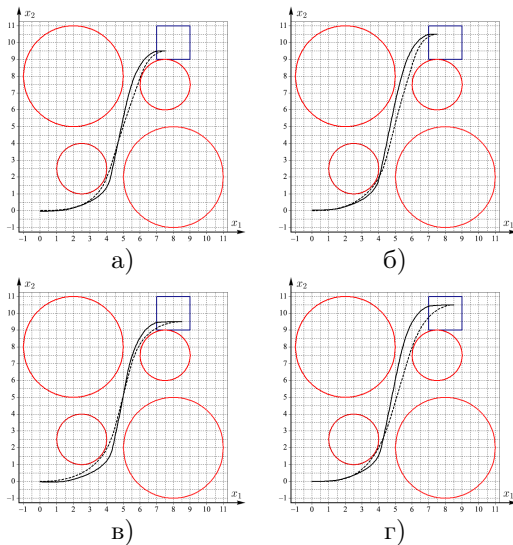


Рис. 4 — Траектории движения робота на плоскости, полученные с помощью найденной функции управления (сплошная линия), и эталонные траектории (пунктирная линия):

- а) — начальное состояние $\mathbf{x}^0 = [7,5 \ 9,5 \ \pi]^T$;
- б) — начальное состояние $\mathbf{x}^0 = [7,5 \ 10,5 \ \pi]^T$;
- в) — начальное состояние $\mathbf{x}^0 = [8,5 \ 9,5 \ \pi]^T$;
- г) — начальное состояние $\mathbf{x}^0 = [8,5 \ 10,5 \ \pi]^T$.

Основные результаты диссертации

1. Разработан численный метод решения задачи синтеза системы управления на основе аппроксимации множества оптимальных траекторий методами символьной регрессии;
2. Показано, что разработанный метод позволяет оценить близость найденного решения к оптимальному;
3. Экспериментально показано, что эволюционные алгоритмы оказались наиболее эффективными применительно к задачам оптимального управления с фазовыми ограничениями;
4. Разработан гибридный алгоритм на основе алгоритма серых волков и пчелиного алгоритма;
5. Разработан комплекс программ, реализующих все этапы предложенного метода решения задачи синтеза системы управления;
6. Решена прикладная задача синтеза системы управления автомобилеподобным роботом в пространстве с фазовыми ограничениями.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях из списка ВАК РФ

- A1. Дивеев А. И., Константинов С. В. Исследование эволюционных алгоритмов для решения задачи оптимального управления // Труды МФТИ. — 2017. — Т. 9, № 3. — С. 76—85.
- A2. Дивеев А. И., Константинов С. В. Эволюционные алгоритмы для решения задачи оптимального управления // Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования. — 2017. — Т. 18, № 2. — С. 254—265.
- A3. Дивеев А. И., Константинов С. В. Задача оптимального управления и ее решение эволюционным алгоритмом «серого волка» // Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования. — 2018. — Т. 19, № 1. — С. 67—79.
- A4. Дивеев А. И., Константинов С. В. Исследование практической сходимости эволюционных алгоритмов оптимального программного управления колесным роботом // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2018. — № 4. — С. 75—98.
- A5. Поиск структуры и параметров закона взаимодействия веществ в химической реакции методом сетевого оператора / И. М. Губайдуллин [и др.] // Наукоемкие технологии. — М., 2016. — Т. 17, № 6. — С. 76—82.
- A6. Разработка кинетических моделей сложных химических реакций методом сетевого оператора [Электронный ресурс] / И. М. Губайдуллин [и др.] // Современные проблемы науки и образования. — 2014. — № 6. — С. 1—11. — URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=16113> (дата обр. 12.04.2022).
- A7. *Konstantinov S. V., Diveev A. I. Solving the Problem of the Optimal Control System General Synthesis Based on Approximation of a Set of Extremals using the Symbol Regression Method // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering. — 2020. — Vol. 2, no. 131. — P. 59—74.*

В изданиях, входящих в международные базы цитирования Scopus и Web of Science

- A8. Comparative Research of Random Search Algorithms and Evolutionary Algorithms for the Optimal Control Problem of the Mobile Robot / S. V. Konstantinov [et al.] // *Procedia Computer Science*. — 2019. — Vol. 150. — P. 462—470.
- A9. Diveev A. I., Balandina G. I., Konstantinov S. V. Binary variational genetic programming for the problem of synthesis of control system // 2017 13th International Conference on Natural Computation, Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (ICNC-FSKD). — 2017. — P. 186—191.
- A10. Diveev A. I., Konstantinov S. V. Study of the Practical Convergence of Evolutionary Algorithms for the Optimal Program Control of a Wheeled Robot // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2018. — Vol. 57, no. 4. — P. 561—580.
- A11. Diveev A. I., Konstantinov S. V., Danilova A. M. Solution of the optimal control problem by symbolic regression method // *Procedia Computer Science*. — 2021. — Vol. 186. — P. 646—653.
- A12. Diveev A. I., Konstantinov S. V., Sofronova E. A. A comparison of evolutionary algorithms and gradient-based methods for the optimal control problem // 2018 5th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT). — 2018. — P. 259—264.
- A13. Diveev A., Konstantinov S. Applying Neural Networks for the Identification of Control Object Mathematical Models for the Control Problems // 2022 8th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT). — IEEE, 2022. — P. 1059—1063.
- A14. Diveev A., Sofronova E., Konstantinov S. Approaches to Numerical Solution of Optimal Control Problem Using Evolutionary Computations // *Applied Sciences*. — 2021. — Vol. 11, no. 15. — P. 7096.
- A15. Diveev A. I., Konstantinov S. V. Solution of the problem of the control system general synthesis by approximation of a set of extremals // *Advances in Optimization and Applications. OPTIMA 2020. Communications in Computer and Information Science*. Vol. 1340. — Springer, 2021. — P. 113—128.
- A16. Konstantinov S. V., Baryshnikov A. A. Comparative analysis of evolutionary algorithms for the problem of parametric optimization of PID controllers // *Procedia Computer Science*. — 2017. — Vol. 103. — P. 100—107.
- A17. Konstantinov S. V., Diveev A. I. Control system synthesis based on optimal trajectories approximation by symbolic regression for group of robots // 2020 7th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT). — IEEE, 2020. — P. 19—24.
- A18. Konstantinov S. V., Diveev A. I. A new two-step approach for solving a control system synthesis problem by symbolic regression methods // *Procedia Computer Science*. — 2021. — Vol. 186. — P. 636—645.
- A19. Konstantinov S. V., Khamidova U. K., Sofronova E. A. A Novel Hybrid Method of Global Optimization Based on the Grey Wolf Optimizer and the Bees Algorithm // *Procedia Computer Science*. — 2019. — Vol. 150. — P. 471—477.

- A20. *Konstantinov S. V., Diveev A. I. Evolutionary Algorithms for Optimal Control Problem of Mobile Robots Group Interaction // Advances in Optimization and Applications. OPTIMA 2021. Communications in Computer and Information Science. Vol. 1514. — Springer, 2021. — P. 123—136.*
- A21. *Machine Learning Control Based on Approximation of Optimal Trajectories / A. Diveev [et al.] // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, no. 3. — P. 265.*
- A22. *Optimal control system synthesis based on the approximation of extremals by symbolic regression / S. V. Konstantinov [et al.] // 2020 European Control Conference (ECC). — IEEE, 2020. — P. 2021—2026.*

Зарегистрированные программы для ЭВМ

- A23. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Решение задачи оптимального управления мобильным роботом алгоритмом роя частиц / А. И. Дивеев, С. В. Константинов, Е. А. Софронова ; ФИЦ ИУ РАН. — № 2018610518 ; заявл. 13.11.2017 ; опублик. 12.01.2018.*
- A24. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Решение задачи оптимального управления мобильным роботом эволюционным алгоритмом серых волков / А. И. Дивеев, С. В. Константинов, Е. А. Софронова ; ФИЦ ИУ РАН. — № 2018611173 ; заявл. 29.11.2017 ; опублик. 24.01.2018.*
- A25. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Решение задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями мобильным роботом градиентным методом 2-го порядка Марквардта / А. И. Дивеев, С. В. Константинов, Е. А. Софронова ; ФГАОУ ВО РУДН. — № 2017660884 ; заявл. 02.08.2017 ; опублик. 28.09.2017.*
- A26. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Решение задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями мобильным роботом классическим генетическим алгоритмом / А. И. Дивеев, С. В. Константинов, А. А. Барышников ; ФГАОУ ВО РУДН. — № 2017660891 ; заявл. 02.08.2017 ; опублик. 28.09.2017.*
- A27. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Решение задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями мобильным роботом методом летучих мышей / С. В. Константинов, А. И. Дивеев, Е. А. Софронова ; ФГАОУ ВО РУДН. — № 2017660887 ; заявл. 02.08.2017 ; опублик. 28.09.2017.*
- A28. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Решение задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями мобильным роботом стохастическим градиентным методом АДАМ / С. В. Константинов, А. И. Дивеев, А. А. Барышников ; ФГАОУ ВО РУДН. — № 2017660888 ; заявл. 02.08.2017 ; опублик. 28.09.2017.*
- A29. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Программа синтеза многомерной функции управления от состояния объекта на основе аппроксимации оптимальных траекторий методом сетевого оператора / А. И. Дивеев, Е. Ю. Шмалько, С. В. Константинов ; ФИЦ ИУ РАН. — № 2021611714 ; заявл. 25.01.2021 ; опублик. 03.02.2021.*
- A30. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Программный комплекс для решения задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями с использованием гибридного эволюционного алгоритма на*

основе пчелиного алгоритма и алгоритма серых волков / С. В. Константинов, Е. А. Софронова ; ФИЦ ИУ РАН. — № 2022615194 ; заявл. 11.02.2022 ; опубл. 30.03.2022.

В сборниках трудов конференций

- A31. Дивеев А. И., Константинов С. В. Сравнительный экспериментальный анализ эволюционных алгоритмов оптимизации // Труды 11-го международного симпозиума «Интеллектуальные системы» (INTELS'2014, Москва, 30 июня – 4 июля 2014 г.) — М. : РУДН, 2014. — С. 139–144.
- A32. Дивеев А. И., Константинов С. В. Экспериментальное сравнение алгоритмов случайного поиска и эволюционных вычислений в задаче оптимального управления группой роботов // Фундаментально-прикладные проблемы безопасности, живучести, надёжности, устойчивости и эффективности систем. Материалы III международной научно-практической конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика Н.А. Пилюгина, Елец. 3-5 июня 2019 г. — Елец, 2019. — С. 249–253.
- A33. Константинов С. В., Мишинева М. А. Обзор современных популяционных методов глобальной оптимизации // Труды VIII международной научно-практической конференции “Инженерные системы — 2015” (Москва, 20-22 апреля 2015г.) — М. : РУДН, 2015. — С. 197–203.

Список литературы

1. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. — М. : Наука, 1968.
2. Дивеев А. И., Пупков К. А., Софронова Е. А. Синтез системы управления — задача тысячелетия // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. — 2011. — № 2. — С. 113–125.
3. Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд. / Л. С. Понтрягин [и др.]. — М. : Наука, 1983. — 392 с.
4. Пестерев А. В. Синтез линеаризующего управления в задаче стабилизации движения автомобилеподобного робота вдоль криволинейного пути // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2013. — № 5. — С. 153–165.
5. Crispin Y. J. Evolutionary Computation for Discrete and Continuous Time Optimal Control Problems // Proceedings of the Second International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. Vol. 4. — INSTICC. SciTePress, 2005. — P. 45–54.
6. Diveev A. I., Sofronova E. A. Application of network operator method for synthesis of optimal structure and parameters of automatic control system // IFAC Proceedings Volumes – 17th IFAC World Congress. — 2008. — Vol. 41, no. 2. — P. 6106–6113.
7. Lopez Cruz I. L., Van Willigenburg L. G., Van Straten G. Efficient Differential Evolution algorithms for multimodal optimal control problems // Applied Soft Computing. — 2003. — Vol. 3, no. 2. — P. 97–122.

Константинов Сергей Валерьевич

Решение задачи синтеза системы управления на основе аппроксимации
множества оптимальных траекторий методом сетевого оператора

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. тех. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____

