На правах рукописи

ШМАЛЬКО Елизавета Юрьевна

Принцип синтезированного оптимального управления в робототехнических системах

Специальность 2.3.1. – «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Москва - 2024

Работа выполнена в Федеральном исследовательском центре «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН) в отделении №5

Научный консультант:	**Дивеев Асхат Ибрагимович** доктор технических наук, профессор, ФИЦ ИУ РАН
Официальные оппоненты:	**Афанасьев Валерий Николаевич** доктор технических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
	Пакшин Павел Владимирович доктор физико-математических наук, профессор, Арзамасский политехнический институт (филиал) ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева»
	Демидова Лилия Анатольевна доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «МИРЭА — Российский технологический университет»
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук»

Защита состоится 04 июня 2024 г. в 11:00 на заседании диссертационного совета 24.1.224.01 ФИЦ ИУ РАН по адресу: 117312, г. Москва, проспект 60-летия Октября, 9 (конференц-зал, 1-й этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИЦ ИУ РАН по адресу: г. Москва, ул. Вавилова, д.40 и на официальном сайте ФИЦ ИУ РАН: https://www.frccsc.ru/diss-council/00207304/diss/list/shmalko_eu

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 119333, ул. Вавилова, д.44, корп.2, ученому секретарю диссертационного совета 24.1.224.01.

Автореферат разослан «__» __________ 20__ г.
Телефон для справок: +7(499) 135-51-64

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.224.01,
канд. физ.-мат. наук, доцент Смирнов И.В. Смирнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. При создании новых автономных роботов и систем управления необходимо создавать оптимальные системы, являющиеся лучшими по заданному критерию. Для этих целей, начиная с 60х годов XX века, была сформирована мощная теория оптимального управления. В рамках теории была сформулирована основная задача оптимального управления как задача нахождения закона управления для заданной системы, обеспечивающего выполнение определенного критерия оптимальности. При этом важность прикладного характера математических исследований в области управления особо подчеркивается основоположником теории оптимального управления Л.С. Понтрягиным.

Ранее в период бурного развития аэрокосмической и авиационной техники системы управления для сложных технических объектов разрабатывались в течение длительного периода большими коллективами специалистов. Сегодня основным элементом технологического развития является робототехника. Она выделена в приоритетных направлениях научно-технического развития нашей страны: стратегии научно-технологического развития Российской Федерации (утверждена Указом Президента Российской Федерации от 1 декабря 2016 г. № 642 «О Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации») Н1 Переход к передовым цифровым, интеллектуальным производственным технологиям, роботизированным системам, новым материалам и способам конструирования, создание систем обработки больших объемов данных, машинного обучения и искусственного интеллекта. При этом системы управления для роботов могут быть даже сложнее, но требуется создавать их достаточно быстро и небольшими коллективами. В связи с большим разнообразием роботов, возможностью их быстрого создания и выведения на рынок, все очевиднее становится необходимость автоматизации подходов к созданию систем управления такими объектами. При этом важно сохранить основную идею, что все разрабатываемые системы должны быть оптимальными согласно выбранному критерию.

Сейчас большинство систем управления роботами все еще создают вручную. Основываясь на своем опыте, разработчик задает структуру системы управления, определяет каналы управления, типы регуляторов, и далее настраивает параметры заданной системы так, чтобы они удовлетворяли определенным требованиям. Для автоматизации необходимы формальные постановки задач. Задачи в робототехнике можно и нужно рассматривать как задачи оптимального управления.

Современные системы управления для роботов являются цифровыми и представляют собой компьютерные программы, реализованные на бортовых процессорах. Но сегодня эти программы все еще пишутся вручную программистами, а программы будут увеличиваться при усложнении задач и усложнении роботов. Существует объективная необходимость автоматизировать этот процесс.

На практике задачу оптимального управления робототехническими системами решают редко, потому что задачу решить сложно, а реализовать на объекте еще сложнее. В существующей практике расчет оптимального управления сложными робототехническими системами производится предварительно на основе их математической модели. При этом модель представляет собой упрощенную версию самого объекта, охватывающую только лишь его основные существенные свойства. В результате при переносе полученных расчетных оптимальных управлений на реальный объект возникают отклонения реального объекта от расчетной модели. В этом заключается основная проблема реализации получаемых оптимальных управлений. Необходимость решения данного практического противоречия требует создания новых подходов и методического инструментария в интересах поиска нового способа решения практической проблемы оптимального управления, реализуемого на объекте, что служит основой разработки диссертации.

Из сказанного следует, что задача оптимального управления и ее решение в классе реализуемых систем сегодня востребована и актуальна. Однако, сложность самой постановки задачи оптимального управления в робототехнике в виду нелинейности динамических объектов, их высокой размерности, необходимости учета различных фазовых ограничений, и дополнительная трудность реализации полученных оптимальных управлений приводят к тому, что проблема оптимального управления в ее традиционной математической постановке все меньше и меньше решается при создании новых автономных робототехнических систем. Сегодня мы наблюдаем, что математические исследования задач оптимального управления все больше отходят от практики их реализации.

Настоящее диссертационное исследование посвящено разработке и обоснованию нового подхода к решению **научно-технической проблемы** получения реализуемых на практике оптимальных управлений робототехническими системами в автоматизированном режиме с помощью методов машинного обучения управлению.

В работе предложен новый принцип синтезированного оптимального управления. Согласно толковому словарю, принцип – это основное исходное положение, которым следует руководствоваться в какой-либо деятельности. Предлагаемый принцип формулирует такое положение при разработке реализуемых оптимальных систем управления с возможностью применения современных численных методов машинного обучения.

Машинное обучение управления направлено на поиск закона управления некоторым объектом для оптимального достижения поставленных целей в терминах некоторого сформулированного критерия. Закон управления в общем случае представляет собой многомерную вектор-функцию, которую необходимо определить с помощью машинного обучения. При этом должны быть найдены как структура функции, так и ее параметры.

Рост возможностей машинного обучения, и в частности, таких методов, как методы символьной регрессии, приводит к смене парадигмы управления, когда контроллеры обучаются, и структура и параметры искомых регуляторов ищутся как решение задачи оптимизации на нечисловом пространстве структур, открывая широкие возможности для получения интеллектуальных контроллеров, способных использовать нелинейности системы для повышения эффективности управления.

Цель диссертационного исследования - разработка методов и подходов для решения проблемы автоматизированного получения реализуемых законов управления в робототехнических системах на основе применения современных технологий и алгоритмов машинного обучения.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Аналитический обзор методов решения задач оптимального управления робототехническими системами и существующих подходов к их практической реализации.
2. Разработка принципа синтезированного оптимального управления, обеспечивающего получение практически реализуемого решения задачи оптимального управления в робототехнических системах.
3. Математическая формулировка задачи оптимального управления на основе принципа синтезированного оптимального управления.
4. Разработка двухэтапного подхода синтеза систем управления на основе принципа синтезированного оптимального управления.
5. Постановка задач управления на каждом этапе двухэтапного подхода и обзор существующих методов решения поставленных задач.
6. Формализованное обоснование применения алгоритмов машинного обучения управления при разработке систем управления робототехническими системами на основе принципа синтезированного оптимального управления.
7. Разработка методов машинного обучения управления на основе символьной регрессии для реализации этапа синтеза системы стабилизации в рамках принципа синтезированного оптимального управления.
8. Разработка алгоритмов оптимизации на основе современных эволюционных и популяционных подходов для решения задачи оптимального расположения точек равновесия в рамках принципа синтезированного оптимального управления.
9. Обоснование свойства реализуемости решения задачи оптимального управления на основе применения принципа синтезированного оптимального управления.
10. Разработка программных комплексов для получения законов управления робототехническими системами на основе принципа синтезированного оптимального управления и проведение математического и имитационного моделирования движения робототехнических объектов.

Объектом исследования являются системы управления робототехническими устройствами.

Предметом исследования служат вычислительные методы для разработки оптимальных реализуемых систем управления робототехническими системами.

Методы исследования. В диссертационной работе использовались методы теории оптимального управления, математического анализа, методы численного моделирования, методы машинного обучения и вычислительные методы оптимизации.

Научная новизна.

1. Сформулирован новый принцип синтезированного оптимального управления. Согласно принципу синтезированного оптимального управления, решение задачи оптимального управления производится для объекта, стабилизированного относительно точки равновесия в пространстве состояний. Разработанный принцип синтезированного оптимального управления отвечает современным требованиям цифровой трансформации и автоматизирует процесс создания систем управления за счет внедрения универсальных технологий машинного обучения при использовании классических формулировок задач управления.
2. Разработан подход двухэтапной реализации принципа синтезированного оптимального управления в робототехнических системах. Для этой цели первоначально решается задача синтеза управления, чтобы обеспечить стабилизацию робототехнического объекта относительно точки в пространстве состояний, а затем решается задача оптимального управления. Оптимальное управление реализуется за счет оптимального изменения положения устойчивой точки равновесия. Представлены основные преимущества принципа синтезированного оптимального управления. Продемонстрирована универсальность предлагаемого подхода и его применимость к различным задачам оптимального управления робототехническими объектами.
3. Приведено обоснование применения принципа синтезированного управления для получения решения задачи оптимального управления, обладающего свойством реализуемости за счет обеспечения в каждый момент времени существования у объекта устойчивой точки равновесия.
4. Разработаны новые численные методы реализации этапов синтезированного оптимального управления средствами эволюционного машинного обучения. Разработка законов управления робототехническими объектами, согласно разработанному подходу, происходит автоматически. Для решения задачи синтеза управления и обеспечения устойчивости объекта используется машинное обучение методом символьной регрессии. Для решения задачи глобальной оптимизации при определении оптимального положения точек равновесия используются специально отобранные эволюционные алгоритмы.
5. В рамках реализации принципа синтезированного оптимального управления разработаны новые вариационные методы машинного обучения на основе символьной регрессии для структурно-параметрического синтеза системы стабилизации робототехническими объектами, предложены уникальные типы малых вариаций и способы их кодирования. Разработаны программные комплексы их реализации.

Достоверность научных результатов, приведенных в диссертационной работе, подтверждается соответствием теоретических и экспериментальных результатов, проводимых как на математических моделях, так и на опытных образцах Роботоцентра ФИЦ ИУ РАН, а также экспертизой научных статей, опубликованных в ведущих научных российских и международных изданиях, апробацией и обсуждением результатов на международных и российских научных конференциях и семинарах.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Предложенный новый принцип синтезированного оптимального управления позволяет разрабатывать законы управления для робототехнических систем на основе формализованных математических постановок с учетом критерия оптимальности и обладающие свойством реализуемости. Этап синтеза системы стабилизации является ключевой идеей подхода и обеспечивает достижение требуемых результатов в задачах с неопределенностями, которые неизбежно существуют в реальных системах. Применение алгоритмов машинного обучения позволяют автоматизировать процесс разработки законов управления, делают представленный подход универсальным и позволяют применять его к различным нелинейным моделям объектов и функционалам любой сложности. Предложенные подходы и численные методы, разрабатываемые в диссертации, имеют широкие возможности развития и исследования, как в рамках рассматриваемых задач управления робототехническими системами, так и в рамках других активно развивающихся направлений робототехники.

Основные результаты диссертации были получены в процессе выполнения работ по гранту Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № 075-15-2020-799.

Результаты работы использованы в Инжиниринговом центре «Автоматика и робототехника МГТУ им. Н.Э. Баумана», в ФАУ ЦАГИ, в ООО «Научно-производственное объединение НаукаСофт», АО «ВПК «НПО Машиностроения», что подтверждается актами о внедрении, представленными в Приложении 3.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В соответствии с формулой специальности 2.3.1 «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика» (технические науки) диссертация посвящена разработке и исследованию принципа синтезированного оптимального управления на основе методов машинного обучения для робототехнических систем, что соответствует следующим пунктам паспорта специальности: п.2 «Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта», п.4 «Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта», п.7 «Методы и алгоритмы структурно-параметрического синтеза и идентификации сложных систем».

Основные положения, выносимые на защиту:

1) Принцип синтезированного оптимального управления, реализующий управление на основе обеспечения устойчивости объекта управления относительно точки равновесия в пространстве состояний и оптимального расположения устойчивой точки равновесия. Предложенный подход автоматизирует процесс создания систем управления за счет применения технологий машинного обучения.
2) Двухэтапный подход разработки системы управления на основе принципа синтезированного оптимального управления, который обеспечивает нахождение управления как функцию от состояния объекта, но в отличие от общего синтеза является более адаптивным к изменениям условий функционирования.
3) Обоснование обеспечения свойства реализуемости, согласно которому ошибка состояния объекта по модели не увеличивается более, чем на заданную величину на интервале времени, для систем управления, полученных на основе использования принципа синтезированного оптимального управления.
4) Численные методы реализации этапов принципа синтезированного оптимального управления на основе интеллектуальных алгоритмов машинного обучения. На первом этапе решается задача синтеза системы стабилизации объекта управления с целью обеспечения его устойчивости относительно точки равновесия в пространстве состояний. Для решения этой задачи используется машинное обучение управления методами символьной регрессии. На втором этапе решается задача оптимального размещения точек равновесия. Для решения этой задачи используются эволюционные алгоритмы. Разработанные численные методы расчета синтезированного оптимального управления являются универсальными, не зависит от типа модели объекта управления и целевого функционала, что обеспечивает автоматизацию процесса построения реализуемой системы управления, причем задача оптимального размещения точек равновесия может решаться в режиме реального времени.
5) Разработанные новые вариационные методы машинного обучения на основе символьной регрессии и принципа малых вариаций для структурно-параметрического синтеза системы управления, позволяющие автоматизировать этап синтеза системы стабилизации. Методы имеют уникальные типы малых вариаций и способы их кодирования, а также специальный генетический алгоритм структурно-параметрического поиска функций, позволяющий реализовывать поиск одновременно и структуры функции управления, и ее параметров.
6) Программные комплексы, реализующие представленные в диссертационном исследовании методы машинного обучения для робототехнических объектов.

Апробация результатов. Результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на международных и всероссийских конференциях, семинарах и симпозиумах:

1. European Control Conference (ECC), 2015, Linz, Austria.
2. IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems MICNON, 2015, Saint Petersburg, Russia.
3. IFAC Symposium on Robot Control, Salvador, BA, Brazil, 2015.
4. Вторая молодежная научная конференция «Задачи современной информатики», ФИЦ ИУ РАН, Москва, 2015.
5. Байкальская Всероссийская конференция с международным участием "Информационные и математические технологии в науке и управлении",
6. 2016, Байкал, Иркутск, Россия.
7. International Conference on Control, Decision and Information Technologies, CoDIT 2022 (Istanbul, Turkey), CoDIT 2020 (Prague, Czech Republic), CoDIT 2019 (Paris, France), CoDIT-2017 (Barcelona, Spain), CoDIT-2016 (Malta).
8. International Conference Optimization and Applications OPTIMA-2020 (Moscow, Russia), OPTIMA-2017 (Petrovac, Montenegro).
9. Intelligent Systems Conference (IntelliSys), 2020, Virtual Event.
10. International Conference "Intelligent Systems": INTELS-2022 (Moscow), INTELS-2020 (Virtual), INTELS-2018 (Saint Petersburg), INTELS-2016 (Moscow), INTELS-2014 (Moscow).
11. IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications ICIEA: 2020 (Kristiansand, Norway), 2019 (Xi'an, China), 2016 (Hefei, China).
12. Всероссийская мультиконференция по проблемам управления: МКПУ-2023 (Волгоград, Россия), МКПУ-2021, МКПУ-2019, МКПУ-2017, МКПУ-2015 (с. Дивноморское, Геленджик, Россия).
13. Международный симпозиум «Надежность и качество»: 2023, 2016, Пенза, Россия.
14. Международная научно-практическая конференция «Фундаментально-прикладные проблемы безопасности, живучести, надёжности, устойчивости и эффективности систем», 2020, 2019, 2018, 2017, 2015, 2014, Елец, Россия.
15. Всероссийская конференция с международным участием «Прикладные проблемы системной безопасности», 2023, Елец, Россия.
16. Завалишинские чтения 2021: XVI международная конференция по электромеханике и робототехнике, С.-Петербург, Россия.
17. Международная научно-техническая конференция "ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ РОБОТОТЕХНИКА", 2022, Санкт-Петербург, Россия.

Публикации автора по теме диссертации. Основные результаты диссертационного и опубликованы в 90 научных публикациях, из них 1 монография, 12 публикаций в изданиях, включенных в перечень рецензируемых журналов, рекомендованных ВАК, включая 11 публикаций в изданиях, отнесенных к категориям К-1 или К-2 из Перечня ВАК, 34 – в научных изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus, включая 7 статей в изданиях Q1 и Q2 квартиля, 43 – в трудах конференций и изданиях, включенных в базу РИНЦ, получено 15 свидетельств на программы для ЭВМ.

Личный вклад соискателя в получении результатов, изложенных в диссертации. Все основные результаты диссертационной работы получены и обоснованы автором самостоятельно. В работах без соавторов [2, 3, 14, 23, 48, 49, 51, 52] представлены основные положения разработанного принципа синтезированного оптимального управления, изложены теоретические аспекты и рассмотрены методы практической реализации, приведены экспериментальные результаты. В работах [23, 48] рассмотрен вопрос реализуемости, в [57] приведены результаты исследования вопроса оптимального расположения точек равновесия при синтезированном оптимальном управлении. В [52] показаны возможности применения разработанного подхода для управления мобильным роботом с нестандартной моделью движения за счет mecanum-колес, в [51] представлена апробация подхода для управления квадрокоптером. В более ранних работах автора [79, 82] рассматривалась задача синтеза управления группой роботов, результаты исследования которой и методы ее решения легли в основу первого этапа предложенного принципа синтезированного оптимального управления, в [68] рассматривались вопросы ускорения работы вычислительных методов синтеза управления, в [73] рассмотрены вопросы возможностей применения методов эволюционных вычислений для решения сложных задач оптимизации.

Большая часть работ автора опубликована в соавторстве со своим научным консультантом и руководителем отдела, в котором уже 14 лет работает автор, профессором Дивеевым А.И. В более ранних работах [9 - 11, 13, 15, 18, 24, 31, 39 - 47, 58, 66 - 70, 72 - 80, 82 - 90], посвященных исследованиям задачи синтеза управления, Шмалько Е.Ю. участвовала в разработке вариационных методов символьной регрессии для решения задач структурно-параметрического синтеза систем управления, предложены способы реализации принципа вариаций базисного решения для различных методов символьной регрессии, предложен подход многослойной структуры для метода сетевого оператора, разработаны программные модули для реализации предложенных методов, на которые получены свидетельства о регистрации программ, проведены исследования эффективности методов для решения различных задач управления. В работах [36, 70, 81] исследовала возможности применения эволюционных алгоритмов как методов глобальной оптимизации, для решения задачи оптимального управления. Все разрабатываемые методы и алгоритмы, реализованные в виде программных комплексов и применяемые в задачах управления, вошли в единый класс методов машинного обучения управлению, систематично представленный в монографии [1] в соавторстве с руководителем, где личный вклад Шмалько Е.Ю. состоит в концептуализации идеи машинного обучения управлению методами символьной регрессии, в совместной разработке общих теоретических основ, формулировки задачи синтезированного оптимального управления, представлении вариационных методов символьной регрессии, подготовки экспериментальной части. Данные исследования легли в основу разработки методов решения двух этапов принципа синтезированного оптимального управления [4-8, 10, 13, 15-17, 19 -22, 25 – 30, 32 – 35, 37, 38, 53, 55, 59 - 63]. Предпосылки принципа синтезированного оптимального управления были предложены автором в ранних работах [38, 40, 45], и в дальнейшем был сформулирован сам подход в работах [1-8, 14, 16-20, 22, 23, 25 - 29, 32 - 35, 37, 48, 49, 51-53, 55, 57, 59 - 63], где автору принадлежит концептуализация и формализация метода, математическая постановка задач двух этапов реализации разработанного подхода, предложены и исследованы методы реализации принципа синтезированного оптимального управления, разработаны программные модули и проведены экспериментальные исследования решения задач управления различными робототехническими системами.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографического списка и приложений. Содержание работы изложено на 307 страницах, включает 5 таблиц, 69 рисунков и 3 приложения.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведены обоснования актуальности темы исследования, сформулированы цель и задачи, раскрыта научная новизна и практическая значимость работы, представлена структура диссертации, приведены защищаемые положения.

В первой главе рассмотрены предпосылки к автоматизации процесса разработки систем управления робототехническими системами, сформулированы постановки различных задач для роботов как задач оптимального управления, представлен анализ существующих подходов к решению поставленных задач.

Традиционные способы разработки систем управления, где колоссальную роль играют опыт и интуиция разработчика, оправдан при создании систем автоматического управления уникальными и дорогими по стоимости объектами, такими как ракеты, самолеты, подводные лодки и т.д. Число и разнообразие роботов растет огромными темпами и требуется автоматизация процесса создания систем автоматического управления для их быстрой разработки и широкого внедрения.

В современном мире быстрых и эффективных компьютеров каждый день появляются все новые задачи, решение которых можно доверить машине вместо использования аналитических расчетов и ручного труда. Сегодня появились возможности включить в круг таких «машинно реализуемых» задач и задачу разработки систем управления для роботов.

Сегодня роль устройства управления роботом играет компьютер, а разработка системы управления теперь заключается в программировании устройства управления. Но на практике в робототехнике большинство современных систем управления роботами программируются вручную, и инженеры даже не ставят общих задач управления, потому что нет общих методов их решения. Однако такие задачи можно и нужно ставить как задачи оптимального управления, определяя не только параметры, но и структуру системы управления оптимально и автоматически с помощью машинного обучения. Для этого необходимо формализовать условия и требования и далее доверить поиск решения машине.

<u>В разделе 1.1</u> представлены наиболее востребованные постановки задач оптимального управления для робототехнических систем в терминах, удобных для программирования и решения этих задач численными методами.

Классическая задача оптимального управления возникает в тех случаях, когда необходимо перевести одного или нескольких роботов из одного заданного состояния в другое.

Задана математическая модель объекта управления в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, записанных в форме Коши

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x}$ – вектор состояния объекта управления, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, $\mathbf{u}$ – вектор управления, все компоненты вектора управления, как правило, ограничены снизу и сверху

$$\mathbf{u}^{-} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^{+}, \tag{1.2}$$

$\mathbf{u}^{-} = [u_1^{-} \ldots u_m^{-}]^{\boldsymbol{T}}$, $\mathbf{u}^{+} = [u_1^{+} \ldots u_m^{+}]^{\boldsymbol{T}}$ – значения нижних и верхних ограничений, m – размерность вектора управления. В общем виде ограничения (1.2) записывают как принадлежность компактному множеству U

$$\mathbf{u} \in \mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}. \tag{1.3}$$

Для системы дифференциальных уравнений (1.1) или объекта управления задано начальное состояние

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 = [x_1^0 \ldots x_n^0]^T. \tag{1.4}$$

Задано терминальное состояние

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f = [x_1^f \ldots x_n^f]^T, \tag{1.5}$$

где t_f – время достижения терминального состояния.

В большинстве задач для робототехнических систем терминальное время t_f не задано, но ограничено

$$t_f \leq t^{+}, \tag{1.6}$$

где t^{+} - заданное предельное время достижения терминального состояния.

В практических задачах момент достижения терминального состояния определяем с некоторой погрешностью, величина которой задана:

$$t_f = \begin{cases} t, \text{если } t < t^{+} \text{ и } \left\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^{\boldsymbol{f}}\right\| \leq \varepsilon_1 \\ t^{+} - \text{иначе} \end{cases}, \tag{1.7}$$

где $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$ – частное решение дифференциального уравнения (1.1) из начального состояния $\mathbf{x}^0$, (1.4), ε_1 – заданная допустимая погрешность попадания в терминальное состояние,

$$\left\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^{\boldsymbol{f}}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i(t, \mathbf{x}^0) - x_i^f)^2}. \tag{1.8}$$

Задан критерий качества в интегральной форме

$$J_0 = \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0), \mathbf{u}) dt \to \min_{\mathbf{u} \in \mathrm{U}}. \tag{1.9}$$

Классическая задача оптимального управления для группы одинаковых роботов имеет приблизительно такое же описание с дополнительным условием отсутствия столкновения между роботами. В результате получаем задачу оптимального управления, но большей размерности и с динамическими фазовыми ограничениями.

Приведем описание задачи оптимального управления для группы роботов. Задана математическая модель всех объектов управления, группы роботов

$$\dot{\mathbf{x}}^j = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^j, \mathbf{u}^j\right), j = 1, \dots, N, \tag{1.10}$$

где $\mathbf{x}^j$ – вектор состояний робота j, $\mathbf{u}^j$ – вектор управлений робота j, $j = 1, \dots, N$, N – количество роботов в группе.

Для значения вектора управлений роботами заданы ограничения

$$\mathbf{u}^j \in \mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}, j = 1, \dots, N, \tag{1.11}$$

Для каждого робота задано начальное состояние

$$\mathbf{x}^j(0) = \mathbf{x}^{j,0} = [x_1^{j,0} \dots x_n^{j,0}]^T, j = 1, \dots, N, \tag{1.13}$$

и терминальное состояние

$$\mathbf{x}^j\left(t_{f,j}\right) = \mathbf{x}^{j,f} = [x_1^{j,f} \dots x_n^{j,f}]^T, j = 1, \dots, N, \tag{1.14}$$

где $t_{f,j}$ – терминальное время или время достижения терминального состояния $\mathbf{x}^{j,f}$ роботом j, $j = 1, \dots, N$. Терминальное время $t_{f,j}$ определяем из соотношения аналогичного (1.7)

$$t_{f,j} = \begin{cases} t, \text{если } t < t^+ \text{ и } \left\|\mathbf{x}^j\left(t, \mathbf{x}^{j,0}\right) - \mathbf{x}^{j,f}\right\| \leq \varepsilon_1 \\ t^+ - \text{иначе} \end{cases}, j = 1, \dots, N. \tag{1.15}$$

Заданы динамические фазовые ограничения, которые описывают условия отсутствия столкновений между роботами

$$\chi(\mathbf{x}^{j_1}, \mathbf{x}^{j_2}) \leq 0, j_1 = 1, \dots, N-1, j_2 = j_1 + 1, \dots, N, \tag{1.16}$$

где $\chi(\mathbf{x}^{j_1}, \mathbf{x}^{j_2})$ – функция, определяющая условие, чтобы расстояние между роботами в геометрическом пространстве не превышало заданную величину, поэтому при вычислении расстояния между роботами используются не все компоненты векторов состояний, а только те, которые определяют координаты центров масс роботов в геометрическом пространстве

$$\chi\left(\mathbf{x}^{j_1}, \mathbf{x}^{j_2}\right) = r_0 - \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i^{j_1}(t, \mathbf{x}^{j_1,0}) - x_i^{j_2}(t, \mathbf{x}^{j_2,0}))^2}, \tag{1.17}$$

где $j_1, j_2 \in \{1, \dots, N\}$, $j_1 \neq j_2$, r_0 - заданная положительная величина, определяющая минимальное расстояние между центрами масс роботов, в рассматриваемом геометрическом пространстве размерности $k \leq 3$.

Задан критерий качества в интегральной форме

$$J_1 = \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}^1(t, \mathbf{x}^{1,0}), \dots, \mathbf{x}^{\boldsymbol{N}}(t, \mathbf{x}^{N,0}), \mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N) dt \to \min_{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N \in \mathrm{U}}, \tag{1.18}$$

где $t_f = \max\{t_{f,1}, \dots, t_{f,N}\}$. При вычислении считаем, что, если робот j за время $t_{f,j}$ достиг терминального состояния, то он остается в этом состоянии до тех пор, пока остальные роботы не достигнут своих терминальных состояний

$$\mathbf{x}\left(t, \mathbf{x}^{j,0}\right) = \mathbf{x}^{j,f}, t_{f,j} \leq t \leq t_f. \tag{1.19}$$

В некоторых задачах оптимального управления роботами не задается терминальное состояние, например, в задаче мониторинга территории, когда робот просматривает территорию для поиска определенных предметов или для картографирования. В этом случае терминальное время определяется из дополнительных условий. Для одного робота условия окончания процесса управления имеют следующий вид:

$$t_f = \begin{cases} t, \text{если } t < t^+ \text{ и } \sigma\big(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)\big) = 0 \\ t^+ - \text{иначе} \end{cases}. \quad (1.20)$$

Для робота j из группы роботов условия остановки процесса управления имеют аналогичный вид

$$t_{f,j} = \begin{cases} t, \text{если } t < t^+ \text{ и } \sigma\left(\mathbf{x}^j\big(t, \mathbf{x}^{j,0}\big)\right) = 0 \\ t^+ - \text{иначе} \end{cases}, j \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.21)$$

В формулах (1.20), (1.21) функция $\sigma(\mathbf{x}(t))$ определяет условия завершения управляемого процесса в момент $t < t^+$, например условия полного просмотра области.

Особенностью задач оптимального управления роботами является необходимость учета фазовых ограничений, которые описывают в пространстве, где функционируют роботы, некоторые области, куда робот не должен попадать. Например, для квадрокоптера необходимо задать верхнее и нижнее ограничения высоты полета. В других случаях это могут быть препятствия, попадание в которые не желательно. В общем случае условия удовлетворения фазовых ограничений определим в виде функции

$$\varphi_i(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)) \le 0, i = 1, \dots, M, 0 \le t \le t_f, \quad (1.22)$$

где M - количество фазовых ограничений.

Для группы роботов фазовые ограничения необходимо проверять для каждого робота из группы

$$\varphi_i\big(\mathbf{x}^j(t, \mathbf{x}^{j,0})\big) \le 0, i = 1, \dots, M, 0 \le t \le t_{f,j}, j = 1, \dots, N. \quad (1.23)$$

Пусть некоторая компонента x_k, $k \in \{1, \dots, n\}$, вектора состояния робота в процессе функционирования должна иметь ограниченные снизу и сверху значения, $x_k^- \le x_k \le x_k^+$. Тогда функции таких линейных фазовых ограничений (1.22) имеют следующий вид

$$\varphi_1(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)) = x_k - x_k^+ \le 0, \varphi_2(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)) = x_k^- - x_k \le 0. \quad (1.24)$$

Если фазовые ограничения описывают ограниченную область в геометрическом пространстве и эта область может быть помещена в сферу соответствующей размерности, то для описания таких фазовых ограничений целесообразно использовать следующие функции:

$$\varphi_3(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)) = r_3 - \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i(t, \mathbf{x}^0) - y_{3,i})^2} \le 0, \quad (1.25)$$

где r_3 – радиус сферического препятствия в k-мерном геометрическом пространстве, $y_{3,i}$ – координаты центра сферического препятствия в k-мерном геометрическом пространстве, $i = 1, \dots, k$, $x_i(t, \mathbf{x}^0)$ – координаты центра масс робота, соответственно для препятствия в пространстве $k = 3$, для препятствия на плоскости $k = 2$.

Другим типом фазовых ограничений в задачах управления роботами являются зоны обязательного прохождения. Для установления факта прохождения через область определяем в процессе управления минимальное расстояние до заданной области. Если это минимальное расстояние не превышает заданную величину, то считаем, что область пройдена. Области обязательного прохождения определяем координатами точки центра этой области и заданной величиной минимального расстояния до центра области. Для определения условия выполнения таких фазовых ограничений вычисляем расстояние до области в начальный момент времени

$$d^- = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(z_i - x_i^0)^2}, \qquad (1.26)$$

где z_i – координаты центра заданной области в пространстве размерности k.

Далее вычисляем это расстояние в каждый последующий момент

$$d(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(z_i - x_i(t, \mathbf{x}^0))^2} \qquad (1.27)$$

и сравниваем его с текущим наименьшим расстоянием. Если $d(t) < d^-$, $d^- = d(t)$.

В качестве значений основных критериев в задачах оптимального управления робототехническими системами рассматриваем:

- критерий быстродействия

$$J = t_f = \int_0^{t_f} 1dt \to \min, \qquad (1.28)$$

- критерий минимальной длины траектории

$$J = \int_0^{t_f} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \dot{x}_i^2}\, dt \to \min, \qquad (1.29)$$

где $\mathbb{R}^k$ – подпространство, в котором измеряется длина пути траектории

- критерий минимальной ошибки движения по заданной траектории во времени

$$J = \int_0^{t_f} \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i^*(t) - x_i(t, \mathbf{x}^0))^2}\, dt \to \min, \qquad (1.30)$$

или

$$J = \max_{t \in \{0, t_f\}} \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i^*(t) - x_i(t, \mathbf{x}^0))^2} \to \min, \qquad (1.31)$$

- критерий минимальной ошибки движения по заданной траектории, если траектория задана в виде множества точек в подпространстве $\mathbb{R}^k$

$$J = \sum_{j=1}^{S} \min_{t \in \{0, t_f\}} \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i^{*,j} - x_i(t, \mathbf{x}^0))^2} \to \min, \qquad (1.32)$$

где S – количество точек на траектории в подпространстве $\mathbb{R}^k$,

- критерий минимального расхода управления (энергии, топлива и др.):

$$J = \int_0^{t_f} \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u} dt \to \min, \qquad (1.33)$$

где $\mathbf{C}$ – диагональная матрица весов компонент управления.

- квадратичный критерий по состоянию:

$$J = \int_0^{t_f} \mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x} dt \to \min, \qquad (1.34)$$

где $\mathbf{D}$ – диагональная матрица весов компонент состояния.

Все критерии (1.28) – (1.34) могут быть частью составного критерия оптимальности с заданными весовыми коэффициентами.

Фундаментом для решения поставленных задач является теория оптимального управления, располагающая широким набором средств и методов решения задач оптимального управления для разных классов объектов. Однако при более детальном рассмотрении задачи оптимального управления с точки зрения прикладного применения ее решения возникают трудности ее реализации.

В разделе 1.2 представлен аналитический обзор методов решения задачи оптимального управления. Некоторые задачи оптимального управления динамическими процессами можно с успехом решать с помощью классического вариационного исчисления в случаях открытого множества допустимых управлений U и предположений гладкости искомых управлений. Целое созвездие знаменитых математиков как на Западе, так и в СССР, внесли значительный вклад в эту теорию, среди которых хотелось бы особо отметить основополагающие работы Л. Эйлера, Ж.-Л. Лагранжа, Д. Гильберта, А.М. Лежандра, К. Якоби, К. Вейерштрасса, Б. Римана, Н. Лебега, Л. Тонелли, Н.Н. Боголюбова, С.Н. Бернштейна, М.А. Лаврентьева, А.Г. Сигалова, С.Ф. Морозова, В. Ритца, Л. Янга, Дж. Варги, Э. Макшейна, Р.В. Гамкрелидзе, А.Д. Иоффе, В.Ф. Кротова, В.М. Тихомирова и др.

Однако, в общем случае, ограничения на значения управления и возможность у функции управления иметь разрывы первого рода как по величине, так и по производным ограничивают возможность применения методов вариационного исчисления к задаче оптимального управления. В этой связи к решению исходной задачи оптимального управления разработаны как прямые, так и непрямые подходы.

Прямой подход заключается в сведении задачи оптимального управления к задаче нелинейного программирования через дискретизацию функции управления и состояния на временной сетке. Однако, большинство прикладных задач оптимального управления с фазовыми ограничениями в робототехнике имеют неунимодальный функционал, особенно в задачах управления группами роботов, где каждый робот является фазовым ограничением для других роботов. Пространство возможных решений в таком случае становится невыпуклым, поэтому наиболее популярными среди прямых методов решения экстремальных задач становятся современные алгоритмы глобальной оптимизации, как детерминированные, развиваемые в работах Ю.Г. Евтушенко, Р.Г. Стронгина, М.А. Посыпкина, И.Х. Сигала, Х. Туя и других российских и зарубежных ученых, так и эвристические методы, основанные на популяционном и эволюционном поиске, представленные в работах Дж. Холланда, Л. Фогеля, Д. Гольдберга, Е.С. Семенкина, А.П. Карпенко и других. В этом случае за счет параметризации управления можно получить только приближенное решение.

Основной классический подход решения задачи оптимального управления часто называют непрямым, и основан он на применении принципа максимума Понтрягина, что позволяет привести задачу оптимального управления к краевой задаче и рассматривать ее как задачу оптимизации в конечномерном пространстве. Большой вклад в развитие теории оптимального управления для задач с фазовыми ограничениями внесли А.В. Арутюнов, С.М. Асеев, Р.Б. Винтер, Р.В. Гамкрелидзе, А.В. Дмитрук, А.Я. Дубовицкий, М.И. Зеликин, Д.Ю. Карамзин, А.Б. Куржанский, А.С. Матвеев, А.А. Милютин, Н.П. Осмоловский, Е.С. Половинкин, Г.В. Смирнов, Н.Т. Тынянский, Х. Халкин и другие ученые. Но в общем случае сформулированные условия являются лишь необходимыми.

Сложность самой задачи оптимального управления в робототехнике в виду нелинейности динамических объектов, необходимости учета различных фазовых ограничений, в том числе и динамических при работе с группой роботов приводят к тому, что задача оптимального управления в ее традиционной математической постановке все меньше и меньше решается при создании новых робототехнических устройств.

Проблема заключается еще и в том, что исходя из классической постановки задачи оптимального управления, мы находим управление как функцию времени, так называемое программное управление. Мы получаем разомкнутый тип управления. Даже если удаётся преобразовать полученное оптимальное управление как функцию координат и параметров объекта, возникают существенные сложности с исследованием качественных свойств траекторий объекта управления. На практике систему управления, работающую на реальном объекте, строят по принципу обратной связи.

Обратная связь подразумевает управление по состоянию объекта. Математически такая задача формулируется как задача синтеза управления. В **разделе 1.3** приводится аналитический обзор методов решения задачи синтеза.

В 60-х годах Р. Беллман сформулировал задачу синтеза управления и представил уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, которое является дифференциальным уравнением в частных производных. Решением этого уравнения является функция Беллмана, одним из аргументов которой является вектор управления. Заметим, что уравнения в частных производных значительно сложнее обыкновенных дифференциальных уравнений и в общем случае почти никогда не имеют общего решения. Большинство попыток решить уравнение Беллмана в задаче синтеза системы управления рассматривают частные случаи и для них получают аналитическую формулу для функции Беллмана. Например, очень популярен подход, когда рассматриваются линейные системы управления с квадратичным функционалом качества, активно развиваемый А.М. Летовым, Р. Калманом, А.А. Красовским, В.Н. Афанасьевым и другими учеными. Синтез системы управления с обратной связью по состоянию объекта по квадратичному интегральному критерию дает регулятор в виде линейных обратных связей по координатам состояния объекта управления. При этом уравнение Беллмана предлагается преобразовать в более простые для решения уравнения Риккати. Однако, используемый квадратичный функционал не учитывает возможные фазовые ограничения, что является довольно актуальным при решении прикладных задач в робототехнике. Численная процедура поиска решения в виде метода динамического программирования, предложенная Беллманом, быстро приобрела популярность, но основная трудность его широкого применения состоит в так называемом «проклятии размерности».

В то время, когда разрабатывались основные аналитические подходы, вычислительная техника сильно отличалась от современной и важно было уметь строить аналитические решения, хотя бы для определенного класса задач. Тем не менее сегодня существует широкий круг прикладных задач, не имеющих точных аналитических решений, но существует объективная потребность в их решении.

Кроме того, в отличие от теоретических расчетов, где основной критерий качества содержится в функционале, практические системы управления вынуждены парировать дополнительно целый ряд возникающих трудностей, связанных с неточностями используемой в расчетах модели, помехами в состоянии системы, в том числе отклонения в исходном положении, необходимость реагировать на изменение реальных условий и иметь возможность пересчитывать траекторию движения на борту и т.д. Решение общей задачи синтеза, включая различные фазовые ограничения, является вычислительно сложным, при этом редко встречаются ситуации, когда условия функционирования объекта не изменяются и строго соответствую расчетным. Поэтому на практике, особенно в области робототехники, решение такой задачи теряет свою актуальность и требуется разработка более адаптивных вычислительных подходов к построению систем управления.

Во второй главе представлен новый принцип к построению систем управления, учитывающих обратную связь по состоянию объекта управления, и оптимальных с точки зрения заданного критерия качества, названный принципом синтезированного оптимального управления. Построение системы управления на основе данного принципа дает возможность адаптивного изменения управления в зависимости от изменения условий функционирования.

В разделе 2.1 приведены результаты исследования проблемы реализуемости расчетных управлений и введено определение свойства реализуемости модели объекта.

Расчет управления сложными робототехническими системами производится на основе их математических моделей, которые описывают объект с погрешностью. В результате при переносе полученных расчетных оптимальных управлений на реальный объект возникают отклонения реального объекта от расчетной модели. Нарастание ошибки между реальным объектом и расчетной моделью может приводить к необратимым последствиям.

Пусть $\mathbf{x}(t)$ - состояние объекта управления, полученное по его математической модели (1.1), а $\mathbf{y}(t)$ – состояние реального объекта управления, полученное в результате измерений.

Определение. Модель объекта управления является **реализуемой** на интервале $[t_0, T]$, если ее ошибка на требуемом интервале не увеличивается более, чем на некоторую заданную погрешность $\delta > 0$:

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \le \delta \qquad \forall t \in [t_0, T]. \tag{2.1}$$

На основе анализа качественных свойств дифференциальных уравнений, вводится определение, что система дифференциальных уравнений, описывающих модель объекта управления, является реализуемой, если эта система как однопараметрическое отображение обладает свойством сжимаемости в области реализации.

Рассмотрены методы реализации решения задачи оптимального управления. Показано, что для реализации решения необходимо сконструировать систему с обратной связью по состоянию, что чаще всего осуществляется за счет системы стабилизации. С математической точки зрения, вводя стабилизирующее управление в модель объекта (1.1) по состоянию $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ в обратной связи, мы изменяем дифференциальные уравнения самой системы объекта так, что вокруг некоторого частного решения системы появляется некоторая область, такая, что другие траектории, попадающие в эту область, не покидали бы ее.

Но из-за введения системы стабилизации мы можем потерять рассчитанную оптимальность по ряду причин.

- Построение системы стабилизации изменяет модель объекта, и полученное управление может не быть оптимальным для новой модели.
- Ошибка движения объекта по траектории может быть как по времени, так и по положению. Например, ошибка по положению относительно траектории движения в пространстве не учитывает ошибки по времени. Обе эти ошибки могут привести к неоптимальному движению.
- Вводимая система стабилизации должна иметь ресурс управления. Это означает, что при расчете оптимального управления необходимо учитывать, что не все ресурсы управления будут доступны. А это, как правило, в расчетах не учитывается.
- Движение объекта в окрестности программной траектории может существенно отличаться от оптимального по значению функционала.

Имеется и еще одно обстоятельство, усложняющее реализацию решения задачи оптимального управления. В классической постановке задачи оптимального управления никаких дополнительных требований к математической модели объекта управления не предъявляется. Отсюда следует, что задача решается для любого объекта, в том числе неустойчивого или обладающего особыми свойствами. В практической реализации неточности модели ведут себя по-разному в зависимости от качественных характеристик системы дифференциальных уравнений, поэтому разработчики стараются компенсировать их системой стабилизации с обратной связью, сначала делая объект устойчивым относительно точки пространства состояний, а затем располагая устойчивые точки на программной траектории. Однако такое движение не будет оптимальным, в случае, например, критерия быстродействия, когда необходимо двигаться по траектории с определенной скоростью, но при приближении к точке устойчивого равновесия скорость объекта управления стремится к нулю. Необходимо, чтобы движение по устойчивым точкам тоже исходило из решения задачи оптимального управления и соотносилось с исходным функционалом.

В разделе 2.2 представлен разработанный принцип синтезированного оптимального управления и двухэтапный численный подход его реализации.

Согласно принципу синтезированного оптимального управления, ищется такая функция управления, при которой система дифференциальных уравнений, описывающих объект, всегда будет иметь устойчивую точку равновесия в пространстве состояний. При этом функция управления содержит параметры, влияющие на положение точки равновесия и управление объектом осуществляется за счет изменения положения точки равновесия, а именно оптимального ее расположения на расчетных интервалах.

Представленный принцип является универсальным, так как не привязан к конкретным свойствам модели объекта управления или типу траектории, не требует ручного выбора каналов управления, подбора и настройки регуляторов. Разработка системы управления происходит в автоматическом режиме с использованием современных вычислительных методов.

Формально необходимо найти такую функцию управления, чтобы система всегда имела устойчивую точку равновесия в пространстве состояний. Вместе с тем в функцию управления вводится вектор параметров $\mathbf{q}^*$. Значение этого вектора параметров влияет на положение точки равновесия в пространстве состояний

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}^*), \tag{2.2}$$

где $\mathbf{q}^*$ – вектор параметров.

Функция управления (2.2) обеспечивает наличие у системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}^*)\big) \tag{2.3}$$

точки равновесия

$$\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^*(\mathbf{q}^*), \mathbf{g}(\mathbf{x}^*(\mathbf{q}^*), \mathbf{q}^*)\big) = 0, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{x}^*(\mathbf{q}^*)$ – вектор координат точки равновесия, зависящий от вектора параметров $\mathbf{q}^*$.

Алгоритмически построение системы управления, согласно принципу, реализуется последовательным решением двух задач:

- задачи синтеза системы стабилизации для обеспечения устойчивости объекта относительно точки в пространстве состояний;
- и задачи параметрической оптимизации расположения точек пространства состояний, относительно которых синтезированная на первом этапе система управления обеспечивает устойчивость. Последовательное переключение найденных точек в пространстве состояний обеспечивает движение объекта от начального состояния до конечного с учетом фазовых ограничений и с оптимальным значением заданного критерия качества.

Приведем их математические постановки.

Этап 1. Задача численного синтеза системы стабилизации.

Задана математическая модель объекта управления (1.1).

Задано множество начальных условий:

$$\mathrm{X}_0 = \{\mathbf{x}^{0,1}, \dots, \mathbf{x}^{0,K}\}, \tag{2.5}$$

где $\mathbf{x}^{0,j} \in \mathrm{X}_0^n \subseteq \mathbb{R}^n$, $\left\|\mathbf{x}^{0,i} - \mathbf{x}^{0,j}\right\| \le \delta$, $i, j \in \{1, \dots, K\}$, δ - заданная величина, определяющая размер области X_0 начальных условий.

Задано терминальное состояние в виде целевой точки стабилизации:

$$\mathbf{x}^* = [x_1^* \dots x_n^*]^T. \tag{2.6}$$

Задан критерий качества

$$J_1 = \sum_{i=1}^{K}(p_1\left\|\mathbf{x}(T_i,\mathbf{x}^{0,i}) - \mathbf{x}^*\right\| + T_i) \to \min_{\mathbf{u}\in\mathrm{U}}, \quad (2.7)$$

где p_1 - весовой коэффициент, T_i - время достижения терминального состояния (2.6) из начального положения $\mathbf{x}^{0,i}$

$$T_i = \begin{cases} t, \text{если } t < t^+ \text{ и } \left\|\mathbf{x}(t,\mathbf{x}^{0,i}) - \mathbf{x}^*\right\| \le \varepsilon, \\ t^+ - \text{ иначе}, \end{cases} \quad (2.8)$$

$i = 1, \dots, K$, ε и t^+ - заданные положительные величины.

Для решения задачи синтеза системы стабилизации необходимо найти функцию управления в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \in \mathrm{U}, \quad (2.9)$$

доставляющую минимум функционалу J_1.

Этап 2. Задача оптимизации положения точек равновесия.

На втором этапе решается следующая задача оптимального управления

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)\big), \\ \mathbf{x}^* \in \mathrm{X}_1 \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0,\ \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^f, \\ J = \int_0^T f_0\ \big(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{x}^*)\big)dt \to \min_{\mathbf{x}^*\in\mathrm{X}_0}. \end{gathered} \quad (2.10)$$

Необходимо найти функцию управления

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{v}^*(t), \quad (2.11)$$

такую, что система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\big(\mathrm{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{v}^*(t),)\big)$ будет иметь частное решение $\mathbf{x}(t,\mathbf{x}^0)$, которое из данного начального условия $\mathbf{x}^0$ достигнет заданного конечного условия $\mathbf{x}(T,\mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^f$, $T < t^+$, с оптимальным значением заданного критерия качества

$$J(\mathbf{v}^*(t)) = \int_0^T f_0\left(\mathbf{x}(t,\mathbf{x}^0), \mathbf{g}\big(\mathbf{v}^*(t), \mathbf{x}(t,\mathbf{x}^0)\big)\right)dt \to \min_{\mathbf{x}^*\in\mathrm{X}_1}. \quad (2.12)$$

В общем случае функция управления (2.11) может быть некоторая функция времени $\mathbf{x}^* = \mathbf{v}^*(t)$. Свойства этой функции исследовались в работе автора [25]. Наибольшее прикладное значение имеет управление (2.11) в форме кусочно-постоянной функции времени.

Разбиваем временной отрезок $[0; t^+]$ на равные интервалы Δt. Таким образом, в задаче оптимального управления необходимо найти значения координат точки устойчивости для каждого интервала через определение оптимального значения вектора параметров $\mathbf{q}^*$, доставляющего минимум функционалу качества (2.12)

$$\mathbf{v}^*(t) = \mathbf{q}^{*,j}, \text{если } t \in [(j-1)\Delta\, t;\ j\Delta\, t), \qquad j = 1, \dots, k, \quad (2.13)$$

где k - количество интервалов, $k = \lfloor t^+/\Delta t\rfloor + 1$.

В таком случае, на втором этапе решаем задачу оптимального управления как задачу конечномерной оптимизации вектора параметров $\mathbf{q}^* = [\mathbf{q}^{*,1}, \dots, \mathbf{q}^{*,k}]^T$.

В итоге, благодаря такому синтезированному подходу к решению задачи оптимального управления, мы, с одной стороны, обеспечиваем свойство реализуемости найденному управлению, и, с другой стороны, переводим задачу из класса задач бесконечномерной оптимизации к конечномерной.

В разделе 2.3 предложен адаптивный принцип синтезированного оптимального управления, который дополнительно в зависимости от степени неопределенности технической задачи, может учитывать на втором этапе некоторую возможную неопределенность в начальных условиях. В данном случае задача оптимизации положения точек равновесия рассматривается не из одного начального состояния, а из области начальных значений.

Пусть задано следующее множество начальных значений

$$\widetilde{X}_0 = \{\mathbf{x}^{0,1}, \dots, \mathbf{x}^{0,j}, \dots, \mathbf{x}^{0,M}\}, \quad (2.14)$$

где M - заданное количество точек начальных значений.

С учетом найденной на первом этапе функции стабилизации (2.9), множества начальных значений (2.14) и с включением в критерий качества точности попадания из разных начальных состояний в терминальное состояние, функционал для задачи оптимального расположения точек равновесия на основе адаптивного принципа синтезированного оптимального управления имеет следующий вид:

$$J_2 = \sum_{i=1}^{M} \left(\left\| \mathbf{x}\left(T_i, \mathbf{x}^{0,i}\right) - \mathbf{x}^f \right\| + \int_0^{T_i} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{q}^*))dt \right) \to \min_{\mathbf{q}^* \in Q}, \quad (2.15)$$

где Q - компакт в пространстве параметров, T_i определяется из соотношения (2.8) с заменой $\mathbf{x}^*$ на $\mathbf{x}^f$.

В разделе 2.4 показано, что применение принципа синтезированного оптимального управления позволяет решать задачу оптимального управления в расширенной постановке, предложенной профессором Дивеевым А.И. Основная идея вводимых расширенных требований к разрабатываемой системе управления в том, что получаемая в результате оптимальная траектория должна иметь непустую окрестность, обладающую свойством притяжения. Выполнение этих требований обеспечивает получение не только оптимального с точки зрения функционала управления, но и реализуемого на реальных объектах.

В разделе 2.5 в соответствии с формальной постановкой представленного двухэтапного подхода синтезированного оптимального управления приводится обзор существующих методов решения каждого из двух этапов расчета синтезированного оптимального управления.

Для решения задачи первого этапа синтеза системы стабилизации в теории управления уже накоплен большой багаж методов. Эффективные методы стабилизации по состоянию разработаны для линейных систем, среди которых наиболее популярны методы синтеза, основанные на использовании частотных методов, модальном управлении или на основе использования матричного уравнения типа Риккати. Однако, как правило, полученные алгоритмы либо преследуют решение локальной задачи, например, регулирование выхода, либо математические модели объектов должны иметь некоторую определенную структуру. Среди более общих аналитических подходов к синтезу управления нелинейными системами известны методы бэкстэппинга, аналитического конструирования агрегированных регуляторов, методы основанные на применении функции Ляпунова и др., но все известные методы аналитического синтеза подходят для определенных типов модели объекта управления. Сегодня в большинстве приложений, как правило, специалисты решают задачу синтеза управления с помощью так называемого технического синтеза, определяя каналы управления и вводя в эти каналы заданные регуляторы, чаще всего ПИД- или ПИ-регулятор, с настроенными параметрами этих регуляторов. Но это, по сути, ручной труд разработчика.

Для решения задачи структурно-параметрического синтеза для нелинейных динамических объектов различной сложности в работе применены современные численные методы машинного обучения. Исследованию, разработке и применению методов машинного обучения управления посвящена отдельная глава 3 диссертационного исследования.

На втором этапе принципа синтезированного оптимального управления осуществляется оптимизация параметров, влияющих на положение точек стабилизации. Применяемый в задаче оптимального управления функционал в общем случае не является унимодальным на пространстве искомых параметров, особенно при наличии фазовых ограничений, в связи с чем обусловлены трудности применения классических градиентных подходов. В этой связи именно эволюционные алгоритмы были выбраны в качестве средств глобальной оптимизации в рамках диссертационного исследования. Они не требуют дифференцируемости функции, а также способны широко исследовать пространство поиска и находить глобальный минимум с большой вероятностью. И хотя доказано (“no free lunch theorems”), что ни один эволюционный подход в среднем не лучше любого другого, т.е. для любого алгоритма любое повышение производительности по одному классу задач точно оплачивается в производительности по сравнению с другим классом, но ограничение класса оптимизационных задач задачами, представляющими интерес с точки зрения робототехники, позволяет выявить наиболее эффективные эволюционные подходы. В диссертации представлены и применены в вычислительных экспериментах такие эволюционные алгоритмы, как генетический алгоритм GA, алгоритм роя частиц PSO, алгоритм самоорганизующейся миграции SOMA и алгоритм серых волков GWO, а также гибридный эволюционный алгоритм, сочетающий сильные стороны нескольких эволюционных алгоритмов.

Глава 3 посвящена методам машинного обучения управления. Этот термин был предложен в 2017 году группой западных ученых (Т. Дурьез, С. Брантон, Б. Ноак) и обозначает использование методов машинного обучения для разработки эффективных законов управления сложными нелинейными динамическими системами. В связи с новизной сложившего направления в диссертации впервые вводятся основные определения и некоторые теоретические основы машинного обучения управления.

Для математической формулировки задачи машинного обучения, необходимо предположить, что в исследуемом процессе существует функциональная связь между значениями некоторых параметров этого процесса. Эта функциональная связь позволяет определять значения одних параметров, называемых выходными, исходя из значений других параметров, называемых входными. В то же время математическая формула, описывающая реализацию этой функциональной связи, неизвестна.

Определение 2. Набор вычислительных процедур, преобразующих вектор $\mathbf{x}$ из входного пространства X в вектор $\mathbf{y}$ из выходного пространства Y, и для них не существует никакого математического выражения $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, будем называть *неизвестной функцией*. Обозначим неизвестную функцию между входным вектором $\mathbf{x}$ и выходным вектором $\mathbf{y}$ как

$$\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}). \tag{3.1}$$

Неизвестная функция (3.1) может быть представлена как некое устройство или набор экспериментальных результатов. В таком случае она будет являться черным ящиком, потому что ее точное описание неизвестно.

Определение 3. *Задача машинного обучения* – это задача поиска с помощью компьютерной вычислительной процедуры неизвестной функции

$$\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{q}), \tag{3.2}$$

где $\mathbf{y}$ – вектор значений функции, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{x}$ – вектор аргументов, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{q}$ – вектор постоянных параметров, $\mathbf{q} \in Q \subseteq \mathbb{R}^p$, $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{q})\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^r$.

Поиск неизвестной функции, что является задачей машинного обучения, должен осуществляться как процесс оптимизации на основе некоторого оценочного критерия. В зависимости от типа критерия задачи машинного обучения можно разделить на два основных класса: обучение без учителя и обучение с учителем.

При обучении с учителем искомая функция аппроксимирует некоторый набор данных, который называется обучающей выборкой. Тогда функционал можно записать в следующем виде:

$$J_1 = \sum_{i=0}^{N} \left\| \hat{\mathbf{y}}^i - \alpha\left(\mathbf{x}^i, \mathbf{q}\right) \right\|, \tag{3.3}$$

где $\hat{\mathrm{Y}} = \{\hat{\mathrm{y}}^i, \dots, \hat{\mathrm{y}}^N\}$ – обучающая выборка.

При обучении без учителя эта функция используется для минимизации некоторого заданного функционала качества

$$J_2 = \int_0^T f_0(\mathbf{x}(t), \alpha(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}))\, dt \to \min, \tag{3.4}$$

где T – время достижения цели.

Определение 4. *Машинное обучение* — это оптимизационная процедура поиска решения задачи в Δ-окрестности оптимального решения.

Особенность машинного обучения в том, что процедура обучения не требует достижения точного минимума критерия (3.3) или (3.4)

$$\tilde{J} \leq \min J + \Delta, \tag{3.5}$$

где Δ – некоторое положительное значение отклонения, определяющее значение функционала, достижимое при обучении.

Исходя из введенных формулировок, методы машинного обучения можно применять в различных задачах, где требуется поиск функции. Обширной областью таких задач являются задачи управления.

Определение 5. *Машинное обучение управления* (англ. machine learning control) – это оптимизационная процедура поиска неизвестной функции управления с использованием методов машинного обучения.

Управление объектом в классическом математическом понимании заключается в качественном изменении правых частей дифференциальных уравнений за счет входящего в них вектора управления. Когда функция управления выводится аналитически, то система гарантированно обладает требуемым свойством. В случае машинного обучения управления могут происходить события, когда система не будет обладать желаемым свойством. Назовем их плохими событиями. Например, робот достигает конечного положения почти из всех начальных условий, но не достигает его из какого-либо другого начального состояния. Хотя при хорошем обучении такие события случаются редко, они могут произойти, и вероятность их возникновения неизвестна. Необходимо ввести некоторую оценку, когда мы можем считать, что вероятность плохого события мала, и можно считать обучение успешным, т. е. предположить, что система приобрела желаемое свойство. Если в результате машинного обучения найденная функция управления должна приобрести некоторые свойства, то доказательство наличия этих свойств подтверждается моделированием и статистическим обобщением результатов моделирования.

Определение 6. Если проводятся D экспериментов, и в каждом i эксперименте K_i частных решений дифференциального уравнения выполняют требуемое свойство из любых $M_i \geq K_i$ случайно выбранных начальных условий из начальной области, и

$$\lim_{D\to\infty} \sum_{i=1}^{D} \frac{K_i}{M_i} \to 1, \tag{3.6}$$

существование этого свойства для дифференциального уравнения в этой области считаем *машинно обоснованным*.

В разделе 3.2 представлены два основных подхода к поиску неизвестной функции: параметрический и структурно-параметрический.

Наиболее распространенный сегодня параметрический подход, особенно в сфере управления, в основном используется для оптимальной настройки параметров, вроде параметров нейронной сети или какого-то заданного регулятора. В результате обучения получается оценка неизвестного вектора параметров для заданной структуры.

Наибольшим успехом пользуются технологии, основанные на машинном обучении с учителем, когда есть достаточный набор обучающих данных и критерием обучения является уменьшение ошибки. Однако при разработке систем управления у инженера обычно нет необходимого набора обучающих данных, разве что получать их при ручном управлении оператором и затем аппроксимировать. Но такой подход, во-первых, скорее всего не является оптимальным, а, во-вторых, для обучения все-таки требуется значительное количество обучающих примеров управления.

Разрабатываемые в диссертационном исследовании современные методы символьной регрессии открывают новые возможности в машинном обучении, позволяя широко определить задачу машинного обучения управления как задачу структурно-параметрического поиска неизвестной функции управления, включая как оптимальную структуру управления, так и ее параметры. Дополнительным преимуществом символьной регрессии является возможность обучения без обучающей выборки, что при создании систем управления очень актуально. Также символьная регрессия позволяет получать функции, в частности функции управления, в интерпретируемом для человека виде, что позволяет лучше понимать механизмы управления.

<u>В разделе 3.3</u> представлены общие принципы построения и работы методов символьной регрессии. Методами символьной регрессии функция управления ищется в виде кода. Поиск структуры функции управления осуществляется на базе заданного алфавита примитивов. Алфавит примитивов должен включать множество элементарных функций, из которых конструируется математическое выражение и множество аргументов этого математического выражения. Множество аргументов математического выражения соответствует множеству функций без аргументов:

$$\mathrm{F}_0 = \{f_{0,1}, \dots, f_{0,n+p+k}\} = \{x_1, \dots, x_n, q_1, \dots, q_p, e_1, \dots, e_k\}, \qquad (3.7)$$

где x_1,...,x_n – переменные, q_1,...,q_p – параметры, e_1,...,e_k – единичные элементы для функций двух аргументов.

Тогда алфавит примитивов можно представить в виде:

$$\mathrm{F}_0 = \{f_{0,1}, f_{0,2}, \dots, f_{\{0,v_0\}}\}.$$
$$\mathrm{F}_1 = \{f_{1,1}(z), f_{1,2}(z), \dots, f_{1,v_1}(z)\}, \qquad (3.8)$$
$$\mathrm{F}_2 = \{f_{2,1}(z_1, z_2), f_{2,2}(z_1, z_2), \dots, f_{2,v_2}(z_1, z_2)\},$$

где v_i – количество элементов во множестве F_i.

Алфавита примитивов (3.8) достаточно для описания любого математического выражения функции управления на основании теорем Колмогорова и Арнольда о представлении (или суперпозиции) функций, в которых доказано, что любая непрерывная функция нескольких переменных может быть представлена в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения.

В диссертации определены правила составления математических выражений из элементарных функций, определено свойство достижимости множества элементарных функций. Для определения корректности записи кода, в диссертации введено понятие индекса элемента композиции, сформулирована и доказана теорема о корректности кода математического выражения.

Методы символьной регрессии используют эволюционные алгоритмы оптимизации для структурно-параметрического поиска функции управления непосредственно на основе значения функционала качества. Эволюционный генетический алгоритм хорошо подходит для решения этих задач в виду целого ряда выгодных особенностей: алгоритм не требует вычисления градиента функции, а следовательно, не требует дифференцируемости исследуемой функции; баланс между широтой и глубиной исследования пространства поиска, обеспечивающий оптимизацию в невыпуклых пространствах с многоэкстемальностью; возможность использовать знания по конкретной предметной области, например, ограничения могут быть введены в структуру решений, а известные решения могут быть внедрены в популяцию.

Задача поиска функции в закодированном виде с помощью методов машинного обучения является задачей нечисловой оптимизации. Основная сложность состоит в том, что метрика на пространстве кодов отличается от метрики пространства, в котором вычисляется значение целевого функционала. На нечисловом пространстве кодов функций может быть задана некоторая символьная метрика, например расстояние Левенштейна, Хемминга и др. Однако оценка решений при поиске производится в пространстве функций с совершенно другой метрикой. Получается, что метрика между именами функций не соответствует расстояниям между значениями функций. Для таких пространств поиска нельзя использовать ни классические градиентные алгоритмы, ни эволюционные алгоритмы с арифметическими операциями. Таким образом, генетический алгоритм является основным алгоритмом поиска в пространстве кодов, так как не использует при получении новых возможных решений арифметических операций, применяя для оптимизационного поиска такие операции как скрещивание и мутация. Эта особенность позволяет использовать его для нечисловой оптимизации.

Сложностью пространства поиска обусловлена необходимость введения дополнительных механизмов, облегчающих и ускоряющих поиск оптимальных решений на нечисловом пространстве кодов. Одним из таких механизмов в диссертационном исследовании предлагается внедрение принципа малых вариаций базисного решения для различных методов символьной регрессии.

В разделе 3.4 представлено общее формальное описание принципа малых вариаций базисного решения, который был впервые предложен в рамках метода сетевого оператора, разработанного Дивеевым А.И.

Суть этого подхода состоит в том, что поиск математического выражения можно начинать в окрестности одного заданного возможного решения. Это решение кодируется методом символьной регрессии и называется базисным решением. Для базисного решения определяется множество возможных малых вариаций. Малая вариация – это незначительное изменение в коде, которое приводит к появлению нового возможного решения. Малые вариации изменяют код так, что в результате получается правильный код нового возможного решения. Согласно этому принципу, новые возможные решения кодируются как множества малых вариаций базисного решения. Чтобы получить код нового возможного решения, необходимо применить к базисному решению вектор малых вариаций. Генетические операции применяются к вектору вариаций. Через несколько поколений базисное решение можно заменить на лучшее текущее решение.

Такой подход удобен для поиска систем управления, так как разработчик интуитивно или на основе своего опыта всегда может предложить некоторую рабочую систему управления, которая принимается как базисное решение.

В разделе 3.5 представлен разработанный специальный генетический алгоритм многокритериальной оптимизации на нечисловом пространстве кодов, который позволяет организовывать структурно-параметрический поиск функции управления.

При поиске функции управления важно вместе со структурой функции управления искать вектор параметров, который входит в функцию управления как часть аргументов. Введение параметров в структуру функции является естественным расширением класса искомых функций. Поиск структуры и параметров должен осуществляться в рамках одного и того же генетического алгоритма, но на разных структурах данных. Именно такой подход представлен в диссертационном исследовании.

Особенностью численного решения задач управления является возможное наличие нескольких критериев качества: всегда есть цель управления, которая часто формулируется в виде терминальных условий, и критерий качества управления, который формулируется в виде интегрального функционала. При численном синтезе необходимо учитывать точность достижения цели и ее влияние на оценку критерия качества. Предложенный в диссертации алгоритм реализует поиск решений в виде множества оптимальных по Парето решений.

В разделе 3.6 для организации вычислений на пространстве элементарных функций и недопущения вычислительных ошибок, таких как переполнение разрядной сетки, вводится новое пространство машинно реализуемых функций

$$\mathbb{R}_{\#}^{n} \subseteq \mathbb{R}^{n}, \tag{3.9}$$

где $\mathbb{R}_{\#}^{n}$ – машинно реализуемое пространство.

Это пространство $\mathbb{R}_{\#}^{n}$ обладает следующими свойствами. Для любого вектора $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]^T \in \mathbb{R}_{\#}^{n}$ размерности n выполняются следующие условия:

1)$|x_i| \leq B^{+} < \infty,\ i = 1, \dots, n.$ (3.10)

2) существует малое положительное значение $\delta^{-} > 0$, что

$$\text{если } |x_i| < \delta_i^{-},\ \text{ то } x = 0,\ i = 1, \dots, n. \tag{3.11}$$

3) если $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}_{\#}^{n}$, то $\dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}_{\#}^{n}$. (3.12)

4) существует значение удовлетворительной точности $\widetilde{\Delta} > \delta^{-}$, что

$$\text{если } |\alpha| < \widetilde{\Delta},\ \text{то } x_i \pm \alpha = x_i,\ \ i = 1, \dots, n. \tag{3.13}$$

Обычно в задачах с дифференциальными уравнениями значение удовлетворительной точности составляет полшага интегрирования. Производная функции в машинно реализуемом пространстве $\mathbb{R}_{\#}^{n}$ вычисляется по соотношению

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{f(z+\delta^{-}) - f(z)}{\delta^{-}}. \tag{3.14}$$

Описание наиболее часто используемых машинно реализуемых функций представлено в Приложении 1 в виде программного кода.

В разделе 3.7 представлены вариационные методы символьной регрессии, разработанные на основе применения принципа малых вариаций базисного решения и применяемые для решения задачи синтеза. Для каждого конкретного метода требовалось определение типов малых вариаций и способов их кодирования. В рамках диссертационного исследования были разработаны и представлены вариационные методы генетического программирования, аналитического программирования, Декартова генетического программирования, полного бинарного генетического программирования и многослойного сетевого оператора. Все методы апробированы для решения различных задач синтеза управления, результаты успешного их применения представлены в работах автора и в главе 4.

<u>В подразделе 3.7.1</u> представлен метод сетевого оператора, который является первым методом символьной регрессии, построенный на принципе малых вариаций базисного решения. Согласно методу, искомая функция управления кодируется целочисленной матрицей на основе соответствующего графа вычислений. Матрица сетевого оператора, задается один раз для базисного решения. Это может быть любая случайно сформированная матрица, или же определенная матрица, описывающая конкретное математическое выражение, например, П-регулятор. Далее операции оптимизационного генетического алгоритма выполняются не над матрицей сетевого оператора, а над множеством вариаций. Код возможных решений представляется в виде множества векторов малых вариаций.

В методе сетевого оператора каждый вектор малой вариации включает четыре целочисленных компоненты:

$$\mathbf{w} = [w_1 \;\; w_2 \;\; w_3 \;\; w_4]^T, \tag{3.15}$$

где w_1 - тип вариации, w_2 - номер строки матрицы сетевого оператора, w_3 - номер столбца матрицы сетевого оператора, w_4 - новое значение элемента в матрице сетевого оператора.

Для матрицы сетевого оператора используются следующие типы малых вариаций: $w_1 = 0$ - замена ненулевого недиагонального элемента, $w_1 = 1$ - замена ненулевого диагонального элемента, $w_1 = 2$ - замена нулевого недиагонального элемента ненулевым элементом, $w_1 = 3$ - замена ненулевого недиагонального элемента нулевым элементом.

Каждое возможное решение кодируется набором векторов малых вариаций:

$$\mathrm{W}_k = (\mathbf{w}^{k,1}, \dots, \mathbf{w}^{k,d}), \tag{3.16}$$

где d - количество малых вариаций или глубина вариаций.

Операция скрещивания генетического алгоритма выполняется для наборов векторов малых вариаций. Выбираются два возможных решения

$$\mathrm{W}_\alpha = (\mathbf{w}^{\alpha,1}, \dots, \mathbf{w}^{\alpha,d}), \tag{3.17}$$

$$\mathrm{W}_\beta = (\mathbf{w}^{\beta,1}, \dots, \mathbf{w}^{\beta,d}). \tag{3.18}$$

Два новых возможных решения получаются путем обмена векторами вариаций, стоящих после точки скрещивания

$$\mathrm{W}_\gamma = \left(\mathbf{w}^{\alpha,1}, \dots, \mathbf{w}^{\alpha,c}, \mathbf{w}^{\beta,c+1}, \dots, \mathbf{w}^{\beta,d}\right), \tag{3.19}$$

$$\mathrm{W}_\delta = \left(\mathbf{w}^{\beta,1}, \dots, \mathbf{w}^{\beta,c}, \mathbf{w}^{\alpha,c+1}, \dots, \mathbf{w}^{\alpha,d}\right). \tag{3.20}$$

<u>В подразделе 3.7.2</u> представлен модифицированный метод генетического программирования. Предложены следующие малые вариации кода генетического программирования: $w_1 = 1$ - изменение второй компоненты вектора кода функции, которая указывает на индекс элемента из множества, заданного первой компонентой; $w_1 = 2$ - удаление функции с одним аргументом; $w_1 = 3$ - вставка функции с одним аргументом; $w_1 = 4$ - увеличение значения первой компоненты вектора кода функции, при этом вектор кода аргумента вставляется после кода функции; $w_1 = 5$ - уменьшение значения первой компоненты вектора кода функции на единицу, при этом удаляется первый код аргумента, встречающийся после кода функции. Малая вариация для кода в генетическом программировании может быть описана следующим вектором вариации из трех компонент:

$$\mathbf{w} = [w_1\ w_2\ w_3]^T, \tag{3.21}$$

где w_1 - тип вариации, $w_1 \in \{1, \dots, 5\}$, w_2 - индекс изменяемого элемента, w_3 - значение нового элемента.

В подразделе 3.7.3 предложена модификация метода аналитического программирования. В аналитическом программировании количество аргументов функции не указывается напрямую, а определяется количеством функций, поэтому были предложены малые вариации и вектор кодирования этих вариаций аналогично методу вариационного генетического программирования, но только базисное решение имеет иную кодировку.

Метод вариационного аналитического программирования успешно применен для синтеза системы стабилизации в задаче управления квадрокоптером.

В подразделе 3.7.4 представлен вариационный метод бинарного полного генетического программирования (англ. Binary complete genetic programming BCGP). BCGP представляет математическое выражение в виде бинарного дерева и использует только функции с одним и двумя аргументами.

В бинарном полном генетическом программировании все коды функций всегда располагаются в определенных места бинарного дерева. Поэтому малые вариации кода не меняют количество аргументов функции и не меняют длину кода. Вектор малой вариации содержит только две компоненты:

$$\mathbf{w} = [w_1\ w_2]^T, \tag{3.22}$$

где w_1 – номер позиции, w_2 – новое значение элемента кода в соответствии с выбранной позицией.

В подразделе 3.7.5 представлена модификация метода Декартова генетического программирования (Cartesian Genetic Programming CGP). Метод кодирует математическое выражение в виде набора целочисленных векторов. Каждый вектор содержит все необходимые коды для расчетов – это код функции, ее аргументов и код переменной, куда следует записать результат.

Для применения принципа малых вариаций полагаем, что малая вариация кода Декартова генетического программирования – это изменение одного элемента кода. Тогда вектор малых вариаций для Декартова генетического программирования состоит из трех компонент:

$$\mathbf{w} = [w_1\ w_2\ w_3]^T, \tag{3.23}$$

где w_1 – номер вектора вызова (или номер столбца в коде), w_2 – номер изменяемого элемента в векторе вызова (номер строки в столбце w_1), w_3 – новое значение компоненты вектора вызова. Если $w_2 = 1$, то новое значение компоненты указывает номер какой-либо элементарной функции, если $w_2 > 1$, то w_3 указывает номер элемента из множества аргументов.

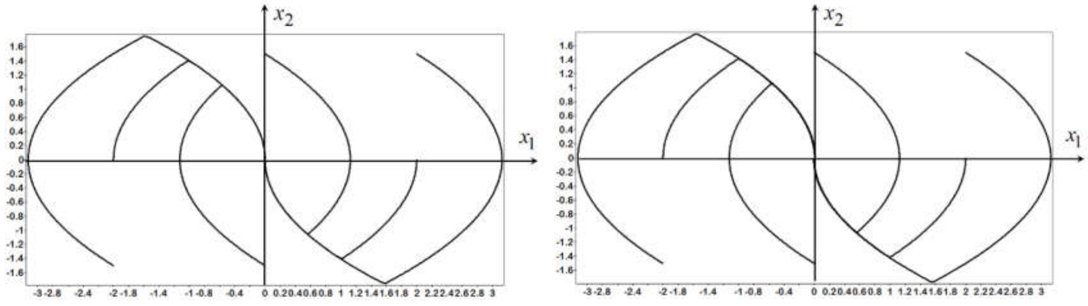
В подразделе 3.7.6 представлена разработанная многослойная конструкция метода символьной регрессии. С увеличением размерности решаемых задач, значительно увеличивается и размерность кода, поэтому перспективным направлением является переход к многослойным структурам, как и глубокого обучения в искусственных нейронных сетях.

Результат вычисления в одном слое добавляется ко множеству аргументов других слоев. В многослойных методах символьной регрессии во избежание цикличности необходимо устанавливать порядок слоев и контролировать вызовы результатов расчета в слоях. Главное правило – обеспечить порядок использования результатов вычислений по слоям. Слой с более высоким номером может использовать результаты вычислений слоев с более низким номером.

В рамках диссертационного исследования был разработан многослойный метод символьной регрессии на основе сетевого оператора. Генетические операции для многослойных структур символьной регрессии реализованы на основе принципа малых вариаций. При использовании принципа малых вариаций базисного решения для методов многослойной символьной регрессии номер варьируемого слоя добавляется в код вариации в качестве первого компонента вектора вариации. Остальные компоненты вектора вариаций сохраняют свои прежние значения.

В разделе 3.8 представлены результаты решения задач синтеза с помощью разрабатываемых методов символьной регрессии.

В подразделе 3.8.1 приведен иллюстративный пример решения задачи синтеза для объекта, описываемого системой линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Для решения задачи был применен численный метод сетевого оператора. Базисное решение было выбрано в виде пропорционального регулятора. На рис.1 А) приведены результаты моделирования объекта с функцией управления, синтезированной машинным обучением с помощью метода сетевого оператора. Для сравнения на рис. 1 Б) приведены результаты моделирования с оптимальным управлением, полученным на основе принципа максимума Понтрягина.



А) Б)

Рис.1. Фазовые траектории объекта из восьми начальных условий

Как видно, все траектории на рис.1 А и Б совпадают с высокой точностью, поэтому они представлены на отдельных графиках. Из результатов моделирования можно сделать вывод, что метод сетевого оператора синтезировал оптимальную систему управления.

В подразделе 3.8.2 рассмотрена задача пространственной стабилизации мобильного робота. Рассмотрена кинематическая модель робота, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Искомая функция управления должна обеспечить перемещение робота из любого начального состояния некоторой заданной области в целевую терминальную точку с критерием быстродействия $J = t_f \to \min$. Для численного решения задачи методом символьной регрессии диапазон начальных значений заменяется конечным набором точек начальных условий.

Для демонстрации возможностей вычислительных методов символьной регрессии данная задача была решена в диссертации несколькими вариационными методами, разработанными в диссертации. В качестве базисного решения был выбран пропорциональный регулятор.

$$u_1 = q_1(x_1^f - x_1) + q_2(x_2^f - x_2) + q_3(x_3^f - x_3),$$
$$u_2 = q_1\left(x_1^f - x_1\right) + q_2(x_2^f - x_2) + q_3(x_3^f - x_3) \quad (3.25)$$

где $\mathbf{q} = [q_1 \;\; q_2 \;\; q_3]^T$ – вектор параметров.

На рис. 2 представлены результаты моделирования системы с функцией управления и параметрами, полученными с помощью вариационного Декартова генетического программирования. Как видно, объект достигает конечного состояния из различных начальных состояний.

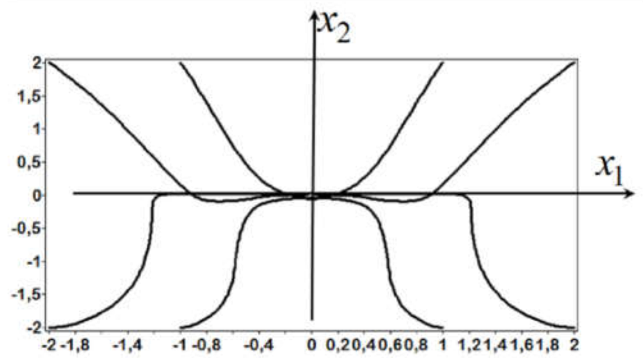


Рис.2. Траектории робота из 8 начальных условий с функцией управления, машинно синтезированной методом VCGP

В диссертации представлены решения этой же задачи и другими методами символьной регрессии. Было продемонстрировано, что различные методы символьной регрессии позволяют успешно решать данную задачу машинного обучения с хорошим качеством без трудоемкого построения обучающей выборки, основываясь только на критерии минимизации функционала качества.

В главе 4 представлены решения разных задач оптимального управления робототехническими объектами на основе принципа синтезированного оптимального управления.

В разделе 4.1 решена задача управления колесным мобильным роботом с дифференциальным приводом, представленным на рис. 3.

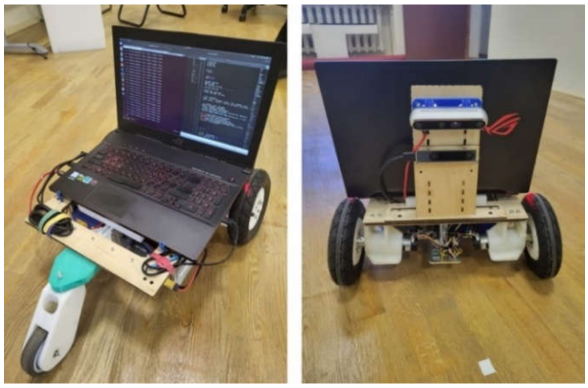


Рис.3. Колесный мобильный робот с дифференциальным приводом Робоцентра ФИЦ ИУ РАН

Рассматривалась задача управления движением мобильного робота из некоторого начального состояния в конечное целевое положение в сложной среде с фазовыми ограничениями с минимальным временем.

Сначала задача оптимального управления была решена на основе прямого подхода, когда управление искалось в виде функции времени. Функция управления для каждого интервала управления искалась в виде кусочно-линейной аппроксимации. Для нахождения оптимального вектора параметров в виду наличия фазовых ограничений был применен алгоритм оптимизации роя частиц (PSO). В результате было найдено решение, при котором значение функционала (4.1) составило $J_1 = 2.004$. Траектория движения робота представлена на рис. 4.

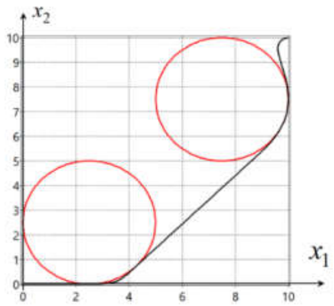


Рис.4. Траектория движения робота при прямом подходе

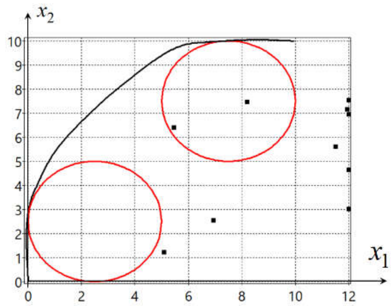


Рис.5. Траектория движения робота при синтезированном подходе

Далее та же задача была решена на основе принципа синтезированного оптимального управления.

На первом этапе была решена задача синтеза системы стабилизации. Для синтеза был применен метод сетевого оператора. Необходимо было найти такую функцию управления

$$u_i = h_i(x_1^* - x_1, x_2^* - x_2, x_3^* - x_3, r_1, r_2, r_3),$$

где r_1, r_2, r_3 – постоянные параметры, $i = 1{,}2$, чтобы робот из области начальных условий достигал заданной точки стабилизации $\mathbf{x}^*$с минимальным временем и максимальной точностью. Вычисления проводились в режиме офлайн и затем помещались на борт. В результате синтеза методом сетевого оператора найдено решение, представленное в виде матрицы сетевого оператора 24×24 и параметров. Матрица кодирует нелинейные функции двух компонент управления. Для расчета конкретных значений сигналов управления на каждом шаге матрица декодируется онлайн на бортовом компьютере в режиме реального времени. Для расчета сигналов управления на бортовой вычислительной машине алгоритм был реализован на языке C++. Синтезированный контроллер проверен на работоспособность в симуляционной среде Gazebo в задаче стабилизации виртуальным роботом ROSbot. Была продемонстрирована стабильная и предсказуемая работа контроллера. Для реализации данного эксперимента система управления была выполнена программно в виде ROS-модуля ROSbot Controller. Модуль реализует управление по принципу обратной связи на основе расчетной матрицы сетевого оператора. Узел контроллера ROSbot принимает на вход наземные координаты и цель движения робота, а на выходе формирует управляющие сигналы. Далее разработанный ROS-модуль был протестирован на реальном роботе Роботоцентра ФИЦ ИУ РАН. В результате испытаний робот стабилизируется в заданную терминальную точку из различных задаваемых положений, не входивших в обучающее множество начальных условий, что является подтверждением эффективной работы системы стабилизации.

На втором этапе, согласно принципу синтезированного оптимального управления, был найден оптимальный набор векторов $\mathbf{x}^{\{*,i\}}$ для каждого интервала времени. В качестве алгоритма оптимизации использовался алгоритм роя частиц. В результате было найдено решение, при котором значение функционала (4.1) составило $J_1 = 2.00$. Траектория на плоскости $\{x_1, x_2\}$ представлена на рис. 5, где черными малыми квадратами обозначены проекции найденных векторов $\mathbf{x}^{\{*,i\}}$ на плоскость $\{x_1, x_2\}$. Как видно из рисунка, мобильный робот достиг конечного положения без нарушения заданных фазовых ограничений.

Для оценки реализуемости полученных управлений были проведены испытания при введенных возмущениях в модели b и в начальных условиях b_0. Было проведено по десять испытаний для каждого значения b и b_0. Результаты экспериментов представлены в таблице 1. В таблице J_{dir} – среднее значение функционала (4.1), а $\sigma(J_{\mathrm{dir}})$ – его среднеквадратичное отклонение при оптимальном управлении, полученном прямым методом с помощью кусочно-линейной аппроксимации функции управления, J_{synt} и $\sigma(J_{\mathrm{synt}})$ – соответственно при синтезированном управлении.

Таблица 1. Проверка влияния неопределенностей.

b	b_0	J_{dir}	$\sigma(J_{dir})$	J_{synt}	$\sigma(J_{synt})$
0.05	0	2.2625	0.4417	2.0977	0.0630
0	0.05	2.9076	1.1029	2.4359	0.2942
0.05	0.05	3.9642	1.3065	2.312	0.2880
0.1	0	2.1824	0.2824	2.1218	0.0698
0	0.1	3.459	1.0014	2.4914	0.2993
0.1	0.1	4.4154	1.5939	2.4932	0.4659

Как видно из представленных в таблице результатов традиционное оптимальное управление очень чувствительно к возмущениям, особенно в начальных условиях. Это означает, что в таком виде оно не подходит для реализации на реальных объектах.

<u>В разделе 4.2</u> представлено решение задачи управления группой из N роботов с фазовыми ограничениями. Для задачи характерно наличие двух видов ограничений: статических и динамических. Исследование полученных управлений на чувствительность к возмущениям показало значительно меньшую чувствительность к возмущениям системы с синтезированным управлением, особенно при возмущениях в начальных условиях.

<u>В разделе 4.3</u> синтезированный подход к оптимальному управлению применен в задаче управления мобильным роботом на mecanum колесах, конструкция которых позволяет роботу двигаться под любым углом к направлению его оси без поворота.

<u>В разделе 4.4</u> решена задача оптимального управления квадрокоптером со сложными фазовыми ограничениями в виде статических препятствий в форме столбов и особых указанных зон, так называемых «окон», через которые объект должен обязательно пролететь. Пример такой среды представлен на рис.6 и является примером реальных условий с соревнований по беспилотным летательным аппаратам.

Рис.6. Пример среды полета квадрокоптера со смешанными фазовыми ограничениями

Математическая модель квадрокоптера описывается системой из 12 дифференциальных уравнений. Управление пространственным перемещением квадрокоптера осуществляется с помощью его углового положения и силы тяги: $x_7 = u_1, x_8 = u_2, x_9 = u_3, F/m = u_4$. Управление ограничено. Задано начальное положение квадрокоптера, терминальное состояние. фазовые ограничения. Функционал качества включал штрафы за невыполнение фазовых ограничений и промах попадания в терминальное состояние.

Сначала задача решалась с помощью прямого подхода. В результате было получено следующее решение, при котором значение критерия составило $J = 5.7191$.

Далее задача решается на основе принципа синтезированного оптимального управления. Для большей адаптивности разрабатываемой системы управления к возможным отклонениям начальных условий, что довольно часто случается с такими объектами, как квадрокоптер, на втором этапе использовался адаптивный принцип синтезированного оптимального управления, дополнительно учитывались возможные неопределенности начальных условий. Поэтому при поиске параметров критерий качества учитывал набор начальных состояний, который определялся вариациями первых трех координат вектора состояния $x_i(0) = x_i^0 \pm 0.2, \quad i = 1,2,3.$

На рис.7 представлены проекции восьми траекторий квадрокоптера из восьми начальных состояний на горизонтальную плоскость. Черными квадратиками изображены проекции найденных управляющих точек равновесия. В таблице 2 представлены экспериментальные результаты применения полученных законов управления в условиях наличия неопределенностей начальных условий, представленных в виде аддитивных возмущений. Возмущения представляли собой случайные изменения начальных условий из диапазона $\pm 0{,}2$. Посчитано среднее значение функционала по проведенным испытаниям, а также среднеквадратичное отклонение.

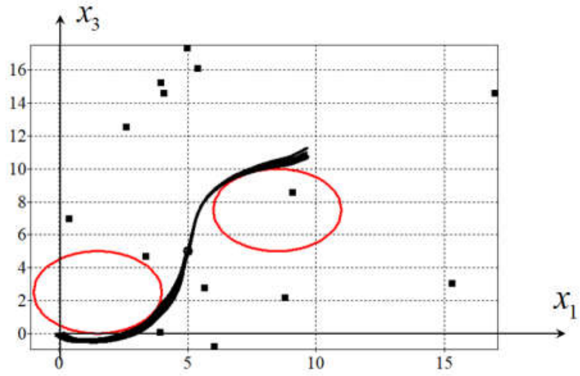


Рис.7. Проекция движения квадрокоптера на горизонтальную плоскость из разных начальных условий

Таблица 2. Значения функционала качества для полученных решений в присутствии возмущений в начальных условиях

№ эксперимента	Синтезированное управление	Кусочно-линейная аппроксимация
Среднее	6.7106	12.3948
Ср.кв.откл.	0.19031	2.61878

Как видно из таблицы, управление, рассчитанное на основе принципа адаптивного синтезированного управления значительно менее чувствительно к возмущениям, чем на основе прямого подхода.

В разделе 4.5 представлено решение задачи оптимального управления групповым взаимодействием квадрокоптеров при выполнении общей задачи в пространстве с фазовыми ограничениями. Задача состояла в нахождении такого управления, которое обеспечит перемещение квадрокоптерами груза на гибких тягах из одной точки пространства в другую, не задев препятствий, при этом вес груза не позволяет выполнить задачу одним квадрокоптером. На пути перемещения груза размещались некоторые препятствия, положение которых известно заранее.

В разделе 4.6 проведено экспериментальное сравнительное исследование различных эволюционных алгоритмов в задаче управления группой мобильных роботов с фазовыми ограничениями.

В заключении приведены основные результаты диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

Представлены формальные постановки задач в терминах функционала качества, решаемые в робототехнике. Проведен анализ существующих методов решения задач оптимального управления робототехническими системами и существующих подходов к их практической реализации. Показаны трудности применения разомкнутых типов управлений, получаемых в результате решения задач оптимального управления и необходимость учета реального состояния объекта управления. Показана необходимость и актуальность разработки современных универсальных численных подходов, позволяющих автоматизировать решение строгих математических задач управления.

Сформулирован принцип синтезированного оптимального управления. Согласно введенному принципу, решение задачи оптимального управления производится для объекта, стабилизированного относительно точки равновесия в пространстве состояний. Разработанный принцип, обеспечивающий получение реализуемого решения задачи оптимального управления, автоматизирует процесс создания систем управления за счет внедрения универсальных технологий машинного обучения при использовании классических формулировок задач управления.

Разработан двухэтапный подход реализации принципа синтезированного оптимального управления. Первоначально решается задача синтеза управления, чтобы обеспечить устойчивость объекта относительно точки в пространстве состояний. Далее оптимальное управление реализуется за счет оптимального изменения положения устойчивой точки равновесия. Представлены основные преимущества принципа синтезированного оптимального управления. Экспериментально для различных робототехнических объектов продемонстрирована универсальность предлагаемого подхода и его применимость к различным задачам управления.

Введено и формализовано обоснование применения принципа синтезированного управления для получения решения задачи оптимального управления, обладающего свойством реализуемости. Применение принципа оптимального синтезированного управления обеспечивает в каждый момент времени существование устойчивой точки равновесия. Сжимаемость траекторий в окрестности устойчивой точки равновесия обеспечивает уменьшение расхождений между реальным объектом и его моделью при приближении к точке устойчивости.

Разработаны новые численные методы реализации этапов синтезированного оптимального управления. На первом этапе для решения задачи синтеза системы стабилизации объекта управления используется машинное обучение управления методами символьной регрессии. На втором этапе решается задача оптимального размещения точек равновесия. Для решения этой задачи используются эволюционные алгоритмы. Представленные подходы позволяют гарантированно получать решения, близкие к оптимальным, даже в задачах со сложным пространством поиска при отсутствии условий унимодальности и выпуклости функционала. Разработанные численные методы расчета синтезированного оптимального управления являются универсальными, не зависят от типа модели объекта управления и целевого функционала, что обеспечивает автоматизацию процесса построения реализуемой системы управления, причем задача оптимального размещения точек равновесия может решаться в режиме реального времени.

Разработаны новые вариационные методы машинного обучения управления на основе символьной регрессии для реализации этапа синтеза системы стабилизации в рамках принципа синтезированного оптимального управления. Методы позволяют находить и структуру, и параметры математического выражения функции управления, в отличие от известных подходов, когда структура функции задана и определяются только параметры. Разработанные методы символьной регрессии реализуют поиск математических выражений функции управления в виде определенного кода, в зависимости от метода, с помощью специального генетического алгоритма. Предложены уникальные типы малых вариаций и способы их кодирования. Разработаны программные комплексы их реализации.

Введено формальное представление машинного обучения управления как поиска неизвестной функции управления, предложена методика машинного обоснования существования определенных свойств математической модели. Для организации вычислений на пространстве элементарных функций и избегания вычислительных ошибок, таких как переполнение разрядной сетки, в работе вводится новое пространство машинно реализуемых функций.

Разработаны программные комплексы расчета синтезированного оптимального управления.

Решены различные задачи управления робототехническими системами, такие как управление мобильным роботом в условиях фазовых ограничений, группой мобильных роботов, где в постановку задачи добавляются динамические фазовые ограничения, задача управления для мобильного робота с меканум-колесами, задача управления движением квадрокоптера и группы квадрокоптеров в задаче совместного взаимодействия. Представленные решения задач демонстрируют эффективность предложенного подхода к автоматической разработке систем управления. Преимущества разработанного подхода состоят в том, что все этапы разработки реализуются автоматически на ЭВМ, исходя из сформулированной математической постановки задачи. Подход является универсальным и не привязан к типу модели или функционала качества. При этом за счет синтеза системы стабилизации на первом этапе удается нивелировать некоторые неопределенности моделей и начальных условий. Вычислительные эксперименты показали, что для систем управления, полученных на основе принципа синтезированного оптимального управления, возмущения модели и начальных условий влияют на ухудшение функционала в пределах 25%, а для систем оптимального управления, полученных на основе прямого подхода, для того уже уровня возмущений превышает 100%, при этом значение среднеквадратичного отклонения для синтезированного управления меньше в 3 раза, чем для прямого.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монография

1. *Diveev A., Shmalko E.* Machine Learning Control by Symbolic Regression. Springer, Cham, 2021. – 155 p. **(Scopus)**

В изданиях из списка ВАК РФ

2. *Шмалько Е.Ю.* Машинно синтезированное управление нелинейным динамическим объектом на основе оптимального расположения точек равновесия // Информатика и автоматизация (Труды СПИИРАН). – 2023. – Т. 22. – № 1. – С. 87-109. **(К-1, RSCI)**
3. *Шмалько Е.Ю.* Машинное обучение систем управления с обратной связью на базе принципа синтезированного оптимального управления // Надежность и качество сложных систем. – 2023. – № 3 (43). – С. 38-49. **(К-1)**
4. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю, Хуссейн О.* Синтезированное оптимальное управление групповым взаимодействием квадрокоптеров на основе многоточечной стабилизации // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, Серия Приборостроение. – 2020. – № 4. – Т.133. – С. 114-133. **(К-1, RSCI)**
5. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю., Хуссейн О.* Управление квадрокоптером методом сетевого оператора на основе многоточечной стабилизации // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2020. – № 7. – Т.21. – С. 428-438. **(К-1, RSCI)**
6. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Исследование синтезированного оптимального управления группой роботов при наличии неопределенностей // Надежность и качество сложных систем. – 2020. – № 2. – Т.30. – С. 10-18. **(К-1)**
7. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* К практической реализации решения задачи оптимального управления // Надежность и качество сложных систем. – 2020. – № 2. – Т.30. – С. 37-45. **(К-1)**
8. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Метод синтезированного оптимального управления для группы роботов // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 4 (24). – С.40-47. **(К-1)**
9. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Численные методы синтеза синергетического управления групповым взаимодействием роботов // «Известия ЮФУ. Технические науки». – 2017. – № 9. – С.6-21. **(К-2)**
10. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Эволюционные методы вычислений для синтеза управления группой роботов и поиска оптимальных траекторий их движения // Cloud of Science. – 2017. – Т. 4. – № 3. – С. 395-414. **(К-1)**
11. *А.И. Дивеев, Е.Ю. Шмалько* Численный синтез системы управления группой роботов методом символьной регрессии // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2015 – № 10 (171). – С.29-45. **(К-2)**
12. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Двухэтапный синтез системы управления методом сетевого оператора // Вестник Российского университета дружбы народов, серия Инженерные исследования. – 2015. – №1. – С.91-100. **(К-3)**
13. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Синтез системы автоматического управления мобильным роботом методом сетевого оператора и алгоритмом интеллектуальной эволюции // Нелинейный мир, ЗАО «Издательство «Радиотехника» – 2014. – №7. – т.12. – С.42-48. **(К-2)**

В изданиях, входящих в базы цитирования Scopus и Web of Science

14. *Shmalko E.* Computational Approach to Optimal Control in Applied Robotics // In: Ronzhin, A., Pshikhopov, V. (eds) Frontiers in Robotics and Electromechanics. Smart Innovation, Systems and Technologies. Springer, Singapore – 2023. – vol. 329. – pp. 387-401. **(Scopus)**

15. *Shmalko E., Diveev A.* Machine Learning Control Synthesis by Symbolic Regression for Avoidance of Arbitrary Positioned Obstacles // 2023 9th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), Rome, Italy – 2023. – pp. 668-673. **(Scopus)**
16. *Diveev, A., Shmalko, E.* Adaptive Synthesized Control for Solving the Optimal Control Problem // Mathematics. – 2023. – 11, 4035. **(Scopus, WoS)**
17. *Shmalko E., Diveev A.* Additional Requirement in the Formulation of the Optimal Control Problem for Applied Technical Systems. // Engineering Proceedings. – 2023. – 33(1):7. **(Scopus)**
18. *Diveev A. I., Shmalko E. Y.* Machine-Made Synthesis of Stabilization System by Modified Cartesian Genetic Programming. // IEEE Transactions on Cybernetics. – July 2022. – vol. 52. – no. 7. – pp. 6627-6637. **(Scopus, WoS)**
19. *Shmalko E., Diveev A.* Extended Statement of the Optimal Control Problem and Machine Learning Approach to Its Solution // Mathematical Problems in Engineering. – 2022. – vol. 2022. – Article ID 1932520. **(Scopus, WoS)**
20. *Diveev A., Shmalko E.* Machine Learning Feedback Control Approach Based on Symbolic Regression for Robotic Systems // Mathematics. – 2022. – 10(21), 4100. **(Scopus, WoS)**
21. *Diveev A. Shmalko E.* Stability of the Optimal Control Problem Solution // Proceedings 8th International Conference on Control, Decision and Information Technologies, CoDIT 2022, Istanbul, Turkey. – 2022. – pp. 33-38. **(Scopus, WoS)**
22. *Shmalko E., Diveev A.* Synthesized Optimal Control for Mecanum-wheeled Robot // Proceedings 8th International Conference on Control, Decision and Information Technologies, CoDIT 2022, Istanbul, Turkey. – 2022. – pp. 599-604. **(Scopus, WoS)**
23. *Shmalko E.* Feasibility of Synthesized Optimal Control Approach on Model of Robotic System with Uncertainties. // In: Ronzhin A., Shishlakov V. (eds) Electromechanics and Robotics. Smart Innovation, Systems and Technologies. – Springer, Singapore. – 2022. – vol 232. – pp.131-143. **(Scopus)**
24. *Shmalko E., Diveev A.* Control Synthesis as Machine Learning Control by Symbolic Regression Methods // Applied Sciences. – 2021. – 11(12): 5468. **(Scopus, WoS)**
25. *Diveev A, Shmalko E.* Research of Trajectory Optimization Approaches in Synthesized Optimal Control // Symmetry. – 2021. – 13(2): 336. **(Scopus, WoS)**
26. *Diveev A., Shmalko E.* Synthesized optimal control based on machine learning // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – 1727(1). – 012006. **(Scopus)**
27. *Diveev A., Shmalko E.* Comparative study of numerical solutions for the optimal control problem in the presence of uncertainties // Procedia Computer Science. – 2021. – 186. – pp. 279-286. **(Scopus, WoS)**
28. *Diveev A., Shmalko E., Serebrenny V., Zentay P.* Fundamentals of synthesized optimal control // Mathematics. – 2021. – 9(1). – pp. 1–18. **(Scopus, WoS)**
29. *Diveev A., Shmalko E.* Multi-point Stabilization Approach to the Optimal Control Problem with Uncertainties // Advances in Optimization and Applications. 11th International Conference, OPTIMA 2020 Moscow, Russia. – Springer Nature Switzerland AG, CCIS. – 2020. – 1340. – pp. 129-142. **(Scopus)**
30. *Diveev A., Shmalko E.* Optimal Control Design for a Group of Mobile Robots with Uncertainties // Proceedings of 2020 15th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA). – Kristiansand, Norway. – 2020. – pp.308-313. **(Scopus, WoS)**
31. *Diveev A., Hussein O., Shmalko E., Sofronova E.* Synthesis of Control System for Quad-Rotor Helicopter by the Network Operator Method // Intelligent Systems and Applications Proceedings of the 2020 Intelligent Systems Conference (IntelliSys), Volume 1, Springer

Nature Switzerland AG 2021. Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2021. – 1250 AISC. – pp.246-263. **(Scopus)**

32. *Diveev A., Shmalko E.* Optimal Feedback Control through Numerical Synthesis of Stabilization System // Proc. 7th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT'20). Prague, Czech Republic, June 29 - July 2, 2020. – pp. 112-117. **(Scopus, WoS)**
33. *Diveev, A., Shmalko, E.* Comparison of Direct and Indirect Approaches for Numerical Solution of the Optimal Control Problem by Evolutionary Methods // In: Optimization and Applications. OPTIMA 2019. Communications in Computer and Information Science. – Springer, Cham. – 2020. – vol. 1145. **(Scopus, WoS)**
34. *Diveev, A.I., Sofronova, E.A., Shmalko, E.Y.* Modified SOMA for Optimal Control Problem. 2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC). – 2019. – pp. 2894–2899. **(Scopus, WoS)**
35. *Diveev A., Sofronova E., Shmalko E.* A solution of synthesized optimal control problem for interaction of robots by evolutionary computations // Proceedings of the 14th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, ICIEA. – 2019. – 14. – pp. 756–761. **(Scopus, WoS)**
36. *Diveev A.I., Shmalko E.Y., Sofronova E.A.* Theoretical fundamentals for unimodality estimation of an objective functional in the optimal control problem // 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies, CoDIT 2019. – 6. – pp. 767–772. **(Scopus, WoS)**
37. *Diveev A., Shmalko E.* Hybrid evolutionary algorithm for synthesized optimal control problem for group of interacting robots // 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies, CoDIT 2019. – 6. – pp.876–881. **(Scopus, WoS)**
38. *Diveev A.I., Shmalko E.Yu.* Evolutionary computations for synthesis of control system of group of robots and the optimum choice of trajectories for their movement // CEUR Workshop Proceedings of the VIII International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA-2017), Petrovac, Montenegro, October 2-7, 2017. – pp. 158–165. **(Scopus)**
39. *Diveev A., Shmalko E.* Complete binary variational analytic programming for synthesis of control at dynamic constraints // ITM Web of Conferences. –2017. – T. 10. – 02004. **(Scopus, WoS)**
40. *Diveev A., Shmalko E.* Automatic approach to stabilization and control for multi robot teams by multilayer network operator // ITM Web of Conferences. – 2016. – Vol. 6. – 02004. **(Scopus, WoS)**
41. *Diveev A.I., Shmalko E.Yu.* Optimal Motion Control for Multi-Robot System by Multilayer Network Operator // Proceedings of the 11th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA 2016), 5 - 7 June 2016, Hefei, China. – pp. 2168–2173. **(Scopus, WoS)**
42. *Diveev A. I., Shmalko E.Yu.* Optimal Control Synthesis for Group of Robots by Multilayer Network Operator // Proceedings of the International conference on Control, Decision and Information technologies 2016, CoDIT-2016, Malta, 6-8 April 2016. – pp.077–082. **(Scopus, WoS)**
43. *Diveev A.I., Ibadulla S.I., Konyrbaev N.B., Shmalko E.Yu.* Variational Analytic Programming for Synthesis of Optimal Control for Flying Robot // IFAC-PapersOnLine. – 2015. – Volume 48. – Issue 19. – pp. 75-80. **(Scopus, WoS)**

44. *A.I. Diveev, S.I. Ibadulla, N.B. Konyrbaev, E.Yu. Shmalko* Variational Genetic Programming for Optimal Control System Synthesis of Mobile Robots // IFAC-PapersOnLine. – 2015. – Volume 48. – Issue 19. – pp. 106-111. **(Scopus, WoS)**
45. *A.I. Diveev, E.Yu. Shmalko* Self-adjusting Control for Multi Robot Team by the Network Operator Method // 2015 European Control Conference (ECC) –July 15-17, 2015. Linz, Austria. – pp. 709-714. **(Scopus, WoS)**
46. *A.I. Diveev, E.Yu. Shmalko* Automatic Synthesis of Control for Multi-Agent Systems with Dynamic Constraints // IFAC-PapersOnLine. – 2015. – Volume 48. – Issue 11. – pp. 384-389. **(Scopus, WoS)**
47. *Diveev A., Khamadiyarov D., Shmalko E., Sofronova E.* Intellectual Evolution Method for Synthesis of Mobile Robot Control System // 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation, June 20-23, Cancun, Mexico. – pp. 24-31. **(Scopus, WoS)**

В трудах конференций и изданиях, входящих в РИНЦ

48. *Шмалько Е.Ю.* Проблема реализуемости решения задачи оптимального управления и принцип синтезированного управления к ее преодолению // В сборнике: XVI Всероссийская мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2023). Волгоград, 2023. – С. 100-101.
49. *Шмалько Е.Ю.* Учет неопределенности начального состояния при расчетах синтезированного оптимального управления в робототехнических системах // Прикладные проблемы системной безопасности: материалы Всероссийской конференции с межд. участием. Елец, 2023. – С.114-117.
50. *Шмалько Е.Ю., Ямшанов К.Л.* Реализация системы пространственной стабилизации как ROS-модуля для малогабаритного мобильного робота // Труды международного симпозиума «Надежность и качество». – 2023. – Т. 1. – С. 153-156.
51. *Шмалько Е.Ю.* Система управления квадрокоптером на основе принципа синтезированного оптимального управления // Труды международного симпозиума «Надежность и качество». – 2023. – Т. 1. – С. 81-84.
52. *Шмалько Е.Ю.* Синтезированное оптимальное управление для мобильного робота с mecanum-колесами // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – 2022. – № 24. – С. 83-97.
53. *Шмалько Е.Ю., Серебренный В.В.* Применение методов машинного обучения для расчета синтезированного оптимального управления мобильным роботом // Труды 33-й международной научно-технической конференции "Экстремальная робототехника", Санкт-Петербург, 2022. – С.340-347.
54. *Румянцев Ю.А., Шмалько Е.Ю., Ямшанов К.Л.* Синтез контроллера обратной связи методом сетевого оператора для мобильного робота rosbot в иммитационной среде gazebo // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – 2022. – № 24. – С. 98-109.
55. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Синтезированное управление для меканум робота // Труды международного симпозиума «Надежность и качество». – 2022. – т.1. – С. 27-29.
56. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* К задаче машинного обучения управлению и методы ее решения // В сборнике: XIV Всероссийская мультиконференция по проблемам управления МКПУ-2021. Ростов-на-Дону, 2021. – С. 14-16.
57. *Шмалько Е.Ю.* Исследование вопроса оптимального расположения точек равновесия при синтезированном оптимальном управлении // Вопросы безопасности и устойчивости систем. – 2021. – № 23. – С. 29-39.

58. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Машинное обучение на основе символьной регрессии // В сборнике: Фундаментально-прикладные проблемы безопасности, живучести, надёжности, устойчивости и эффективности систем. материалы IV международной научно-практической конференции. Елец, 2020. – С. 191-195.
59. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Решение задачи оптимального управления для модели с возмущениями методом синтезированного оптимального управления // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – 2020. – № 22. – С. 99-108.
60. *Дивеев А.И., Софронова Е.А., Шмалько Е.Ю.* Метод синтезированного оптимального управления групповым взаимодействием роботов. // Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности. – 2020. – 1(3). – С. 166-175.
61. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Синтезированное оптимальное управление для группы роботов // Материалы XII мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2019), 2019. – С. 138-140.
62. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Численное решение задачи оптимального управления группой роботов через синтез системы стабилизации // Фундаментально-прикладные проблемы безопасности, живучести, надежности, устойчивости и эффективности систем. Материалы III международной научно-практической конференции, 2019. – С. 259-264.
63. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Решение задачи группового управления с фазовыми ограничениями методом синтезированного оптимального управления // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – 2019. – № 21. – С. 85-96.
64. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Классические методы символьной регрессии для поиска структур математических выражений (обзор) // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. Изд. ФИЦ "Информатика и управление" РАН Москва. – 2018. – № 20 (20). – С. 100-132.
65. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Современные методы символьной регрессии и их модификации (обзор) // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. Изд. ФИЦ "Информатика и управление" РАН Москва. – 2018. – № 20 (20). – С. 133-158.
66. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Метод бинарного генетического программирования для автоматизации поиска решения задачи синтеза управления // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – 2017. – № 19. – С. 23-39.
67. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Двухэтапный синтез систем управления групповым взаимодействием роботов методом символьной регрессии // Труды 10-й Всероссийской мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2017), 11 – 16 сентября 2017 г., с. Дивноморское, Геленджик, Россия. – С.276-278.
68. *Шмалько Е.Ю.* Синтез управления группой роботов численными методами с использованием MPI кластеров // Фундаментальные проблемы системной безопасности: материалы школы-семинара молодых ученых. – 2017. – С. 46-49.
69. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Синтез управления для автономной группы роботов с фазовыми ограничениями методом многослойного сетевого оператора с расстановкой приоритетов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. – 2017. – Т. 18. – № 1. – С. 115-124.
70. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю., Рындин Д.А.* Решение задачи оптимального управления группой роботов эволюционными алгоритмами // Информационные и математические технологии в науке и управлении. – 2017. – № 3. – С. 109-121.
71. *Дивеев А.И., Софронова Е.А., Шмалько Е.Ю.* Эволюционные численные методы решения задачи синтеза системы управления группой роботов // Информационные

и математические технологии в науке и управлении. –Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2016. – №3. – С. 11- 24.
72. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю*. Синтез генератора оптимальных траекторий движения группы мобильных роботов методом многослойного сетевого оператора // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – 2016. –№ 18. – С. 32-41.
73. *Шмалько Е.Ю.* Методы эволюционных вычислений для решения сложных числовых и нечисловых задач // Фундаментальные проблемы системной безопасности: материалы III школы-семинара молодых ученых: в 2 частях. 2016. – С. 74-79.
74. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Повышение надежности систем управления группой объектов за счет автоматизации процесса их синтеза // Труды межд. симпозиума Надежность и качество. – 2016. – № 1. – С. 160-163.
75. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Методы генетического программирования для решения задачи синтеза оптимального управления // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – 2015. – № 17. – С. 38-63.
76. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Метод многослойного сетевого оператора в задаче синтеза системы управления группой роботов // Труды Второй молодежной научной конференции «Задачи современной информатики». – М.: ФИЦ ИУ РАН. – 2015. – С.241-247.
77. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Численный синтез системы управления группой роботов // Материалы 8-й Всероссийской мульти-конференции по проблемам управления, Геленджик, Россия. – 2015. – С.168-171.
78. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Многослойный сетевой оператор для численного синтеза системы управления группой роботов // Фундаментальные проблемы системной безопасности: Материалы школы-семинара молодых ученых, 2-4 июня 2015. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина. – С.47-52.
79. *Шмалько Е.Ю.* О задаче синтеза системы управления группой роботов // Фундаментальные проблемы системной безопасности: Материалы школы-семинара молодых ученых, 2-4 июня 2015. – Елец: ЕГУ им. И.А.Бунина. – С.148-156.
80. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Многослойный сетевой оператор в задаче управления группой роботов // Труды VIII международ. научно-практической конференции «Инженерные системы – 2015», 20-22 апреля 2015. – С.172-177.
81. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Численное решение задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями методом вариационного генетического алгоритма // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – М.: ВЦ РАН, 2014. – Вып.16. – С.99-106
82. *Шмалько Е.Ю.* Синтез управления в задаче координации безопасного движения группой роботов // Фундаментальные проблемы системной безопасности: материалы школы-семинара молодых ученых, 20-22 ноября 2014. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2014. – С. 123-128.
83. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Оценка оптимальности численного решения задачи синтеза системы управления // Фундаментальные проблемы системной безопасности: материалы V Международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика В.Ф. Уткина. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2014. – С. 478-482.
84. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Формализация проблемы численного синтеза структур и параметров систем управления // Фундаментальные проблемы системной

безопасности: материалы V Международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика В.Ф. Уткина. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2014. – С.30-35.

85. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Численные методы символьной регрессии для решения задачи синтеза управления // Фундаментальные проблемы системной безопасности: материалы V Международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика В.Ф. Уткина. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2014. – С.473-478.
86. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Синтез системы управления группой роботов методом сетевого оператора // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 4.
87. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Эволюционный метод синтеза системы управления мобильным роботом // Труды VI международной научно-практической конференции «Инженерные системы – 2013», посвященной столетнему юбилею первого ректора РУДН С.В. Румянцева. – С.127-132.
88. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Алгоритм интеллектуальной эволюции в задаче синтеза безопасной системы управления мобильным роботом // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – М.: ВЦ РАН, 2013. – Вып.15. – С.23-35
89. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю.* Метод символьной регрессии на основе сетевого оператора в задаче синтеза управления // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – №3.
90. *Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю., Юрков Н.К.* Синтез управления движением мобильного робота по траектории методом интеллектуальной эволюции // Труды Международного симпозиума Надежность и качество 2013. – Пенза: Изд-во ПГУ. 27 мая -03 июня 2013. – С.188-190.

Зарегистрированные программы для ЭВМ

1. Шмалько Е.Ю., Дивеев А.И. Программа расчета синтезированного оптимального управления для группы нелинейных динамических объектов: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022681267 от 10.11.2022
2. Шмалько Е.Ю., Дивеев А.И. Программа расчета синтезированного оптимального управления для задач с неопределенностями начальных условий: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022681059 от 09.11.2022
3. Шмалько Е.Ю., Дивеев А.И. Программа расчета синтезированного оптимального управления генетическим алгоритмом оптимизации: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022681057 от 09.11.2022
4. Шмалько Е.Ю., Дивеев А.И. Программа расчета синтезированного оптимального управления методом роя частиц для объекта управления с системой стабилизации: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022664577 от 21.07.2022
5. Шмалько Е.Ю., Дивеев А.И. Программа расчета синтезированного оптимального управления популяционным алгоритмом оптимизации серых волков: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022681183 от 10.11.2022
6. Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю. Программа для синтеза системы стабилизации на основе Вариационного Декартового Генетического Программирования: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2021611899 от 08.02.2021.
7. Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю. Программа автоматического синтеза генератора оптимальных траекторий для группы роботов методом многослойного сетевого

оператора: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017662485 от 09.11.2017.
8. Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю. Программный комплекс для решения задачи стабилизации роботов методом бинарного вариационного генетического программирования: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017662486 от 09.11.2017.
9. Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю. Программный комплекс для решения задачи стабилизации методом многослойного сетевого оператора: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016619672 от 30.06.2016.
10. Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю. Программа расчета математического выражения с помощью многослойного сетевого оператора: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015617591 от 15.07.2015.
11. Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю. Интерпретатор программной записи математического выражения в матрицу сетевого оператора: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015617366 от 08.07.2015.
12. Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю. Программный комплекс для решения задачи синтеза управления методом вариационного генетического программирования: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015617366 от 08.07.2015.
13. Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю. Метод вариационного аналитического программирование для синтеза системы управления: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014615476. От 27.05.2014.
14. Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю. Вариационный генетический алгоритм для решения задачи оптимального управления: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014610171 от 09.01.2014.
15. Дивеев А.И., Шмалько Е.Ю. Метод интеллектуальной эволюции для синтеза систем управления: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012661004 от 05.12.2012.