

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



КАБАНОВ Алексей Александрович

**МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ АВТОНОМНЫМИ  
ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ НА ОСНОВЕ СТРУКТУРНО-  
ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА**

Специальность: 2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка  
информации, статистика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени доктора технических наук

Научный консультант:  
доктор технических наук, профессор  
Дубовик Сергей Андреевич

Севастополь – 2026

## Оглавление

Введение.....	5
Глава 1. Теоретические основы структурно-параметрического синтеза функционально устойчивых систем управления АПО .....	25
1.1. Исполнительный уровень: анализ методов синтеза управления	28
1.1.1. Методы управления с прогнозирующей моделью .....	28
1.1.2. Методы синтеза оптимальных регуляторов для нелинейных систем в SDC-представлении.....	35
1.2. Информационный уровень: методы оценивания состояния и возмущений.....	43
1.2.1. Методы оценивания состояния .....	44
1.2.2. Методы оценивания возмущений .....	47
1.3. Методы преобразования нелинейных систем.....	50
1.3.1. Декомпозиция сингулярно возмущенных систем .....	54
1.4. Стратегический уровень: ситуационное прогнозирование и анализ рисков .....	56
1.4.1. Теория больших уклонений как инструмент анализа редких событий .....	57
1.4.2. Сценарный подход и ситуационное прогнозирование .....	64
1.5. Общая постановка задачи синтеза функционально устойчивой системы управления АПО .....	66
1.6. Выводы по главе .....	71
Глава 2. Канонические преобразования нелинейных систем в SDC-представлении для задач управления и оценивания .....	74
2.1. Канонические преобразования нелинейных систем в SDC-представлении.....	74
2.1.1. Каноническое преобразование невозмущенных нелинейных систем с векторным управлением .....	74
2.1.2. Каноническое преобразование сингулярно возмущенных систем .....	78
2.2. Канонические преобразования нелинейных систем в SDC-представлении с аддитивными возмущениями.....	88
2.3. Демонстрационные примеры.....	92
2.3.1. Управление траекторным движением мобильного робота ..	92
2.3.2. Стабилизация композитной ЛОС перевернутого маятника, управляемого двигателем постоянного тока.....	97
2.4. Выводы по главе .....	100

Глава 3. Развитие SDC-методов и их применение в задачах нелинейного оптимального управления на конечном интервале времени.....	101
3.1. Задача точного терминального управления выходом нелинейной системы в SDC-представлении.....	101
3.1.1. Приближенное решение задачи на основе метода АПУР ..	107
3.1.2. Приближенное решение задачи на основе МУР .....	108
3.1.3. Решение терминальным методом обратного интегрирования .....	110
3.2. Задача оптимального следящего управления выходом нелинейной системы в SDC-представлении.....	113
3.3. Нелинейная зависимость от управления и астатические регуляторы .....	118
3.4. Зависимость SDC-методов от параметризации .....	120
3.5. Примеры применения разработанных методов .....	127
3.5.1. Пример задачи точного терминального управления.....	127
3.5.2. Пример задачи оптимального следящего управления на конечном интервале времени.....	131
3.5.3. Пример применения разработанных SDC-методов с оптимальной параметризацией.....	134
3.6. Выводы по главе .....	138
Глава 4. Методы оценивания состояния и возмущений .....	140
4.1. Оценивание состояния нелинейной системы при неопределенности в начальных условиях .....	140
4.2. Оценивание возмущений нелинейных систем на основе методов оптимального управления .....	146
4.2.1. Нелинейная зависимость от возмущения и астатические наблюдатели .....	152
4.2.2. Редуцированные наблюдатели возмущений.....	154
4.3. Примеры применения разработанных методов .....	156
4.3.1. Пример оценивания состояния.....	156
4.3.2. Примеры оценивания возмущений .....	159
4.4. Выводы по главе .....	168
Глава 5. Методы и алгоритмы прогнозирующего управления и ситуационное прогнозирование.....	170
5.1. Интеграция теории больших уклонений и прогнозирующего управления .....	171
5.1.1. Определение горизонта прогнозирования на основе ТБУ .....	173

5.1.2. Преобразование вероятностных ограничений .....	178
5.2. Адаптивный алгоритм MPC.....	181
5.3. Сценарный подход к ситуационному прогнозированию.....	184
5.4. Примеры построения А-профилей.....	194
5.4.1. А-профили в задаче контроля качки судна .....	194
5.4.2. А-профиль столкновения двух подводных аппаратов .....	198
5.5. Выводы по главе .....	201
Глава 6. Синтез функционально устойчивой системы управления движением АНПА .....	203
6.1. Описание объекта управления.....	203
6.1.1. Описание математической модели АНПА .....	205
6.1.2. Модели внешних возмущений.....	208
6.2. Постановка и решение задачи функционально устойчивого управления движением АНПА .....	210
6.2.1. Задача номинального управления $P(t, x, t_f, r)$ .....	212
6.2.2. Задача управления отклонениями $P\delta(t, \delta, t + T_{MPC}, r)$ .....	215
6.2.3. Активная компенсация внешних возмущений .....	217
6.2.4. Наблюдатель состояния .....	218
6.2.5. Наблюдатель внешних возмущений .....	221
6.3. Моделирование системы.....	223
6.3.1. Описание модельного эксперимента .....	223
6.3.2. Результаты моделирования.....	225
6.4. Натурный эксперимент.....	245
6.5. Выводы по главе .....	251
Заключение .....	253
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ .....	257
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	259
ПРИЛОЖЕНИЕ А Копии актов о внедрении .....	289
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Описание комплекса программ моделирования функционально устойчивой системы управления АНПА .....	294
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Зарегистрированные патенты и свидетельства ....	302

## Введение

**Актуальность темы исследования.** В современном мире автономные подвижные объекты (автономные беспилотные аппараты, работающие в различных средах) становятся неотъемлемой частью многих аспектов человеческой деятельности, поскольку способствуют повышению производительности труда, минимизации человеческого фактора и связанных с ним рисков, а также создают новые перспективы развития во множестве отраслей. Так, например, автономные подводные роботы применяются в морской сфере деятельности в задачах мониторинга и обслуживания подводных коммуникаций, осмотра подводных объектов, в реализации поисковых и спасательных операций, в морских исследованиях и т.д. [2, 244, 250, 251]; беспилотные летательные аппараты применяются в логистических и мониторинговых задачах на суше (контроль и диагностика линий электропередач, строительных объектов и т.п.), в задачах обеспечения безопасности и многих других. Для решения такого рода задач необходимо обеспечение высокой степени автономности этих подвижных объектов с реализацией функций перемещения по сложным пространственным траекториям в условиях слабоструктурированных сред, где на динамику объекта воздействуют возмущения различной физической природы, а также возможны непрогнозируемые изменения внутренних параметров вследствие деградации оборудования или отказов [90, 136, 202, 216].

В современной теории управления существуют устоявшиеся понятия, характеризующие способность системы функционировать в нештатных условиях. Согласно терминологическим стандартам [1]:

- робастность определяется как сохранение системой желаемых свойств (например, устойчивости) при всех допустимых значениях неопределенности в ее описании;
- адаптация – это процесс поддержания приспособленности системы к изменению условий внешней и внутренней среды; адаптивные системы

изменяют свои параметры или структуру в ответ на уже произошедшие изменения.

Различные аспекты управления автономными подвижными объектами (АПО) в условиях неопределённости и возмущений получили развитие в работах многих отечественных и зарубежных учёных. Управление различными автономными подвижными объектами исследовано в трудах В.Х. Пшихопова и М.Ю. Медведева [74, 75], Р.Г. Теплухина и М.П. Фархадова [76], В.Ф. Филаретова [77], Т. Fossen [120, 121] и др. Однако для АПО, выполняющих миссии в сложных условиях окружающей среды, применение только адаптивных или робастных методов может оказаться недостаточным. Критические события могут развиваться быстрее, чем адаптивный контур успеет настроить параметры. Возникает проблема обеспечения гарантированного выполнения миссий АПО в условиях неопределённости, возмущений и риска редких, но критических событий. Для решения этой проблемы в диссертации используется свойство функциональной устойчивости – интегральное свойство системы, объединяющее робастность, адаптивность и способность к предотвращению опасных состояний через прогнозирование и реконфигурацию системы на этой основе [26].

Концепция функциональной устойчивости сформировалась из критики традиционного подхода монолитного регулятора в теории автоматического управления. В 2006 г. E. Hollnagel предложил парадигму «Resilience Engineering» [142], выделив четыре способности системы: реагирование, мониторинг, прогнозирование и обучение, а D. Woods затем ввел понятие адаптивной емкости как способности системы расширять свои функциональные возможности в ответ на новые или непредвиденные обстоятельства, отличая её от обычной устойчивости и подчеркивая важность активной адаптации к изменяющимся условиям [249]. Параллельно в начале 2000-х годов Ю.В. Бородакий, А.А. Тарасов формализовали функциональную устойчивость информационно-вычислительных систем [4], которая затем была расширена Королевым А.Н. на навигационно-информационные системы.

В 2011 г. Ю.М. Монахов определил функциональную устойчивость информационных систем, предназначенных для автоматизации управления, как интегральное свойство, объединяющее надежность, живучесть и безопасность [68]. Немного позже С.А. Дубовик перенёс акцент на управление динамическими системами через идею синтеза, где функциональная устойчивость системы, как способность гарантированного выполнения задачи, достигается за счет построения параметризованного семейства регуляторов и их реконфигурации в зависимости от текущего состояния и прогноза управляемого процесса [14, 26]. Общая эволюция этих идей говорит о необходимости предвосхищающего контроля и опережающего отражении угроз через прогнозирование и иерархическую организацию управления в условиях неопределенности и неизвестных возмущений.

Таким образом, функциональная устойчивость объединяет классические свойства робастности и адаптивности с принципами «Resilience Engineering», включая способность к упреждающему прогнозированию (прогнозирование, встроенное в контур управления и служащее основой для упреждающей реконфигурации системы) и обучению. Реализация этих аспектов требует выделения в системе управления трех функциональных уровней:

1. Исполнительный уровень (структурная декомпозиция и редукция моделей системы, нелинейный синтез оптимальных управлений, управление с прогнозирующей моделью, компенсация возмущений).

2. Информационный уровень (оценка состояния системы и неизмеряемых возмущений).

3. Стратегический уровень (ситуационное прогнозирование с распознаванием сценариев развития управляемого процесса, оценка риска выхода в критические состояния и выбор режимов управления исполнительного уровня для упреждающей адаптации системы, а также обучение – уточнение сценариев на основе опыта).

Разработка структуры с выделением указанных уровней, структуры самих уровней и методов определения их параметров составляет задачу

структурно-параметрического синтеза системы управления АПО для обеспечения гарантированного выполнения миссии.

Поскольку функциональная устойчивость предполагает предотвращение выхода системы в критические состояния, соответствующие нарушению функциональности АПО (например, превышение допустимых углов крена подводного аппарата, угла атаки летательного аппарата, потеря управляемости, столкновение с препятствиями) через упреждающее прогнозирование, то для реализации исполнительного уровня рациональным представляется использовать концепцию управления с прогнозирующей моделью (англ. Model Predictive Control, MPC), которая эффективно применяется как для детерминированных, так и для стохастических систем [95, 127, 187, 222, 245]. Существенный вклад в развитие теории и практики MPC внесли E. Camacho, B. Kouvaritakis, J. Rawlings, D. Mayne, M. Cannon и др. Здесь стоит выделить так называемое MPC на основе «трубок» (англ. tube-based MPC), где прогнозирующая модель разделяется на номинальную модель и модель отклонений, а «трубка» – это область пространства состояний вокруг номинальной траектории, внутри которой должна находиться реальная траектория системы. Соответственно, управление разделяется на номинальное и компенсирующее, чтобы гарантировать нахождение состояния системы внутри заданной трубки [127, 187, 222]. Такое разделение определяет структуру исполнительного уровня и естественно согласуется с прогнозированием для стратегического уровня.

Для номинального контура базовым является синтез оптимального управления. Поскольку нелинейная динамика АПО делает неприменимыми классические линейные методы, то эффективными могут оказаться методы управления, основанные на линеаризации уравнений динамики, как в классическом понимании – линеаризация в окрестности состояния равновесия или траектории, так и внешняя линеаризация или линеаризация с помощью обратной связи [67, 137, 143, 176, 235]. Кроме линеаризации практическое применение получили методы, основанные на представлении нелинейной

динамики в форме пространства состояний с коэффициентами, зависящими от состояния (англ. state-dependent coefficients, SDC) [98, 212, 261, 262], позволяющее точно описать нелинейную систему и использовать мощный инструментарий линейной теории, что приводит к уравнениям Риккати с зависящими от состояния коэффициентами (англ. state-dependent Riccati equation, SDRE), применение которых развито в работах J.R. Cloutier, T. Çimen, M.H. Korayem, A. Heydari, S.R. Nekeo и др. Такой подход позволяет строить нелинейную обратную связь, аналогичную линейно-квадратичному регулятору с поточечной проверкой управляемости и наблюдаемости. Однако для задач на конечном интервале времени требуется решение дифференциального уравнения Риккати с зависящими от состояния коэффициентами (англ. state-dependent differential Riccati equation, SDDRE) в обратном времени при неизвестном векторе состояния, что создаёт вычислительные трудности.

Информационный уровень (оценивание состояния и возмущений) также может использовать SDC-представление, методы оптимизации и сингулярных возмущений, редукции и преобразования моделей для построения наблюдателей, что обеспечивает единообразие подхода. Однако стандартная техника SDC для синтеза наблюдателя состояния не рассматривает случай неизвестных начальных условий, что может часто иметь место в задачах оценивания состояния АПО. Этот пробел решается в диссертации на основе диффузной инициализации.

Наряду с этим, задачи оценивания неизмеряемых возмущений и диагностики нелинейных систем успешно решаются методами, основанными на скользящих режимах и каскадных наблюдателях, развитыми в трудах С.А. Красновой, В.А. Уткина и их коллег [64, 192], а также логико-динамическим подходом А.Н. Жирабка, А.Е. Шумского и др. [28, 29, 31, 32]. Эти подходы обеспечивают эффективное обнаружение и изоляцию дефектов. Предлагаемый в диссертации метод синтеза наблюдателей возмущений, сводящий задачу оценивания к вспомогательной задаче оптимального

слежения, не требует выполнения жёстких структурных условий согласования и тем самым может расширить набор средств, доступных для построения наблюдателей в АПО.

Разнотемповость динамики АПО (медленное траекторное движение и быстрая угловая стабилизация) делает теорию сингулярных возмущений, вклад в развитие которой внесли отечественные исследователи А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, М.Г. Дмитриев, С.А. Дубовик, В.Г. Козырев, а также зарубежные ученые P.V. Kokotovic, D.S. Naidu, J. O'Reilly, R.E. O'Malley, Z. Gajic и др., эффективным инструментом для упрощения синтеза. Она позволяет разделить исходную систему на подсистемы для медленных и быстрых движений и строить регуляторы и наблюдатели отдельно для этих подсистем [6, 9, 123, 181, 208]. Также для упрощения синтеза можно использовать преобразования нелинейных систем, в т.ч. в канонические формы. Для нелинейных аффинных по управлению систем в общем виде здесь широко используется метод нормальной формы [137, 143]. Существуют методы преобразования и для систем в SDC-представлении, которые по сравнению с методом нормальной формы позволяют работать без явно выделенного выхода и предлагают более простую процедуру обратного перехода от преобразованных координат к исходным [36, 257]. Однако существующие результаты получены для SDC-систем со скалярным управлением, их расширение на системы с векторным управлением, к которым относятся большинство АПО, а также на сингулярно возмущенные системы является актуальной задачей.

Для векторных нелинейных систем альтернативу методам точной линеаризации составляет блочный и каскадный подход, развиваемый в работах С.А. Красновой, В.А. Уткина, А.В. Уткина и др., в котором законы управления и наблюдатели синтезируются последовательно без обращения к точной линеаризации обратной связью. Этот подход близок по идеологии к композиционному синтезу на основе сингулярных возмущений,

используемому в настоящей работе, и хорошо зарекомендовал себя в задачах управления роботами-манипуляторами [62, 63].

В компенсирующем канале tube-based MPC для подавления отклонений используются стохастические варианты MPC, опирающиеся на анализ моментов распределения. Теоретический фундамент этих методов составляют работы Я.З. Цыпкина и Б.Т. Поляка (в области стохастической оптимизации и адаптивных систем), В.С. Пугачёва (стохастическая теория управляемых систем), Ю.С. Попкова (идентификация и моделирование сложных стохастических систем) и других отечественных учёных, заложивших основы стохастической теории управления и смежных направлений. Вместе с тем опора исключительно на моменты распределения не позволяет явно анализировать траектории редких, но критических событий и может вести к недооценке вероятности больших отклонений, возникающих даже при малых гауссовских возмущениях за счёт нелинейной динамики системы и конечного времени наблюдения. Не менее значимой проблемой MPC является определение горизонта прогнозирования, который представляет собой компромисс между точностью работы и численной сложностью реализации.

Эти проблемы указывают на необходимость развития методов MPC с использованием математического аппарата, способного явно анализировать траектории редких, но опасных движений. Теория больших отклонений (ТБУ) предоставляет строгий математический аппарат для анализа таких редких событий. Большой вклад в развитие этой теории вложили А.Д. Вентцель и М.И. Фрейдлин [7, 78, 122], M.D. Donsker и S.R.S. Varadhan [103–106], А.А. Пухальский [73]. Согласно ТБУ, существует единственная наиболее вероятная траектория, ведущая к каждому критическому событию, и анализ этой траектории позволяет судить о близости события и принять превентивные меры управления. На стыке MPC и ТБУ возникает конструктивная идея – использовать оценку времени первого выхода траектории отклонения на границу трубки вокруг номинальной траектории для выбора обоснованного горизонта прогнозирования. Сама эта траектория

уклонения называется А-профилем и является наиболее вероятным путём уклонения, приводящим к выходу управляемого процесса на границу с наименьшими затратами «энергии» возмущений.

Параллельно с аналитическим методом ТБУ как основу логики работы стратегического уровня целесообразно использовать сценарный подход для МРС [85, 86], который бы определял соответствующий режим управления в зависимости от распознанного сценария. При этом для учета редких событий классический сценарный подход требуется дополнить формированием редких сценариев, которые вытекают из анализа больших уклонений и могут быть построены на базе А-профилей. Однако существует фундаментальный разрыв между оффлайн анализом ТБУ, проводимым на этапе проектирования, и онлайн-МРС управлением в реальном времени.

Таким образом, научно-техническая проблема, решаемая в диссертации, заключается в том, что существующие методы синтеза систем управления не гарантируют выполнение миссий АПО с заданной вероятностью в условиях малых случайных возмущений, когда даже низкоинтенсивный шум может за счёт динамики системы и конечного времени наблюдения приводить к редким, но критическим уклонениям траектории. Классические стохастические методы, опирающиеся на моменты распределения, недооценивают вероятность таких больших уклонений, тогда как ТБУ позволяет получать асимптотически точные оценки вероятности таких редких событий.

**Целью диссертационной работы** является разработка теоретических основ, методов и алгоритмов для структурно-параметрического синтеза систем управления автономными подвижными объектами, обеспечивающих гарантированное выполнение миссии с заданной вероятностью в условиях малых случайных возмущений и риска редких критических событий.

**Задачи исследования:**

1. Разработка теоретических основ структурно-параметрического синтеза систем управления АПО, обеспечивающих гарантированное выполнение миссии с заданной вероятностью, формализующих единый

математический аппарат на базе SDC-представления нелинейных систем, на котором строятся методы и алгоритмы для трёх функциональных уровней системы (исполнительный, информационный, стратегический), а также принципы их организации и взаимодействия.

2. Разработка методов преобразования нелинейных динамических систем в SDC-представлении в канонические формы для выделения явной структуры, обеспечивающей упрощенный синтез регуляторов и наблюдателей. Методы должны быть применимы к разнотемповым системам, включая сингулярно возмущённые системы, и обеспечивать возможность редукции систем для выделения отдельных компонентов возмущений.

3. Разработка методов решения задач оптимального управления на конечных интервалах времени для нелинейных систем в SDC-представлении: точного терминального и следящего управления выходом системы.

4. Разработка методов синтеза наблюдателей в SDC-представлении для оценивания состояния нелинейных систем при полной неопределённости в начальных условиях и для оценивания неизмеряемых возмущений, включая синтез редуцированных наблюдателей для оценивания отдельных компонентов возмущений.

5. Разработка метода синтеза управления с прогнозирующей моделью с адаптивным выбором горизонта прогнозирования на основе оценки времени первого выхода траектории возмущенной системы на границу допустимой области через анализ больших уклонений.

6. Разработка метода ситуационного прогнозирования, основанного на распознавании типовых и редких сценариев развития управляемого процесса, полученных через анализ больших уклонений, с последующей оценкой риска выхода в критические состояния и выбором режимов управления для упреждающей адаптации.

**Объектом исследования** являются АПО, динамика которых описывается стохастическими системами нелинейных дифференциальных

уравнений, функционирующие в условиях действия возмущений и риска наступления редких, но критических событий.

**Предметом исследования** являются теоретические основы, методы и алгоритмы структурно-параметрического синтеза систем управления АПО, обеспечивающие их функциональную устойчивость, т.е. способность гарантированного выполнения миссии при действии возмущений.

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач в диссертации используется многоуровневый подход к синтезу систем управления, применяются методы нелинейной теории управления, SDC-представление нелинейных систем, методы оптимального управления, методы теории оценивания, теория сингулярных возмущений, методы анализа больших отклонений, методы управления с прогнозирующей моделью, методы сопоставления шаблонов, численные методы решения дифференциальных уравнений, метод Монте-Карло для статистического анализа и оценки эффективности системы.

**Научная новизна** диссертационной работы заключается в следующем:

1. Разработаны теоретические основы структурно-параметрического синтеза систем управления АПО, обеспечивающие гарантированное выполнение миссии с заданной вероятностью через функциональную устойчивость в условиях малых случайных возмущений и риска редких критических событий через интеграцию контуров управления, оценивания и прогнозирования на базе единого формализма. Предложена и формализована структура системы, состоящая из трех функциональных уровней, определены информационные потоки и логические условия переключения режимов на основе оценок риска выхода системы на границу допустимой области.

2. Разработаны новые методы синтеза канонических преобразований нелинейных динамических систем в SDC-представлении, включая случай сингулярно возмущённых систем, позволяющие приводить такие системы к канонической форме с Фробениусовой структурой, обеспечивающей упрощенный синтез регуляторов и наблюдателей. Методы позволяют

выполнять линеаризацию обратной связью, явно выделять динамику, чувствительную к отдельным компонентам возмущений.

3. Разработаны новые методы решения задач оптимального управления на конечных интервалах времени для нелинейных систем в SDC-представлении, включающие: метод синтеза точного терминального управления выходом на базе обратного интегрирования дифференциальных уравнений оптимального управления, отличающийся использованием терминального закона регулирования при движении в обратном времени вместо классического стабилизирующего регулятора; метод синтеза оптимального следящего управления на базе одноэтапной процедуры прямого интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений оптимального управления, отличающийся однозначным заданием начальных условий.

4. Разработаны новые методы оценивания состояния и возмущений, включающие: метод оценивания состояния нелинейных систем на основе диффузного фильтра Калмана в SDC-представлении, позволяющий восстанавливать состояние системы при полной неопределённости в начальных условиях; метод оценивания неизмеряемых возмущений в динамических системах, основанный на решении вспомогательной задачи оптимального следящего управления для синтеза наблюдателя возмущений, который формируется так, чтобы минимизировать функционал невязки.

5. Разработан новый метод управления с прогнозирующей моделью, отличающийся адаптивным выбором горизонта прогнозирования на основе оценки времени первого выхода траектории возмущенной системы на границу допустимой области, полученной из анализа больших уклонений путем минимизации функционала действия Вентцеля-Фрейдлина. Предложенный метод преобразует процедуру классического MPC, обеспечивая обоснованный выбор горизонта прогнозирования.

6. Разработан новый метод ситуационного прогнозирования, основанный на распознавании сценариев развития управляемого процесса путем сопоставления оценок с эталонными траекториями из сценарной базы

знаний, с последующей оценкой риска выхода в критические состояния и выбором режимов управления для упреждающей адаптации системы. Особенностью метода является учет не только типовых, но и редких сценариев для наиболее вероятных траекторий выхода системы в критические состояния, определяемых из анализа больших уклонений путем минимизации функционала действия Вентцеля-Фрейдлина.

**Теоретическая и практическая значимость работы** заключается в разработке теоретических основ структурно-параметрического синтеза функционально устойчивых систем управления АПО, включающих структуру из трех функциональных уровней с формальным описанием информационных потоков и условий переключения режимов управления на основе оценок риска. В рамках этих основ предложено общее математическое обеспечение указанных трех уровней на базе SDC-представления нелинейных систем, что позволяет строить регуляторы, наблюдатели и прогнозирующие модели в едином формализме. Разработанный подход вносит вклад в теорию больших уклонений Вентцеля-Фрейдлина, устанавливая процедуру определения наиболее вероятных траекторий выхода в критические состояния для построения сценарной базы знаний и обоснованного выбора горизонта прогнозирования в системах управления с прогнозирующей моделью.

Разработанные методы имеют практическую ценность и могут быть использованы при проектировании и синтезе систем управления автономными беспилотными аппаратами, функционирующими в различных средах (надводных, подводных, наземных, воздушных), особенно в приложениях с жесткими требованиями к безопасности и автономности функционирования.

Результаты, представленные в диссертации, использованы в:

1) ФГБУН «Институт автоматике и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук» (г. Владивосток) при выполнении научно-исследовательских работ по созданию систем управления электроприводами робототехнических комплексов;

2) АО «НПП ПТ «Океанос» (г. Санкт-Петербург) при разработке алгоритмов управления автономным необитаемым подводным аппаратом;

3) ПАО «Дальприбор» (г. Владивосток) при решении задач обработки гидроакустической информации для отслеживания объектов;

4) ООО «РОБОКОРП» (г. Севастополь) при построении информационно-управляющей системы автономного необитаемого подводного аппарата МХ-1;

5) АНО «Институт морского приборостроения и робототехники» (г. Севастополь) при реализации совместного проекта с АО «НПО «Аврора» по разработке систем автономного необитаемого подводного аппарата «РИФ».

Часть представленных в диссертации результатов получена при проведении научных исследований в Севастопольском государственном университете и ФИЦ ИУ РАН по проектам в рамках выполнения государственного задания по науке, грантов Российского научного фонда и других научных программ, в которых автор выступал в качестве руководителя и ответственного исполнителя:

1) Федеральная целевая программа «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы»:

- проект № RFMEFI57817X0259 «Создание маломерного научно-исследовательского судна для комплексных исследований морской прибрежной акватории с применением инновационной методологии проектирования, разработкой системы управления жизненным циклом изделия (судна) и внедрением режима безэкипажного управления движением», 2017-2019 гг.;

- проект № RFMEFI57818X0264 «Разработка и исследование робототехнического комплекса для выполнения подводно-технических работ в условиях ограниченной видимости с использованием комплексной системы 3D зрения высокого разрешения», 2018-2020 гг.;

2) гранты РФФИ и РНФ:

- проект РФФИ № 15-08-06859\_А «Композиционный синтез робастных и адаптивных систем управления на основе асимптотических методов», 2015-2016 гг.;

- проект РНФ № 17-11-01220 «Численно-аналитические методы в нелинейных системах управления», 2017-2019 гг.;

- проект РФФИ № 18-48-920022 «Разработка математических основ создания системы согласованного управления многозвенными манипуляторами антропоморфного типа подводного робототехнического комплекса», 2018-2019 гг.;

- проект РНФ № 21-11-00202 «Разработка и исследование вычислительно эффективных алгоритмов управления нелинейными детерминированными и стохастическими системами на основе асимптотического анализа.», 2021-2023 гг.;

- проект РНФ № 22-19-00392 «Создание теоретической базы для построения подводных робототехнических комплексов, способных в полностью автономном режиме автоматически выполнять сложные технологические операции в глубинах океана», 2022-2024 гг.;

- проект РНФ № 25-29-00634 «Разработка методов синтеза интеллектуальных информационно-управляющих систем робототехнических комплексов на основе диагностирования возмущений, неисправностей и отказов с их последующим парированием», 2025-2026 гг.;

3) проекты в рамках государственного задания по науке:

- проект № АААА-А16-116081910041-0 «Разработка алгоритмической части системы контроля мореходности», 2016 г.;

- проект № 2.8629.2017 «Исследование методов синтеза интеллектуальных систем управления беспилотными объектами», 2017 г.;

- проект № 121111600136-3 «Фундаментальные основы и разработка новых методов анализа и синтеза информационно-управляющих систем автономных морских робототехнических комплексов различного вида и назначения», 2022-2024 гг.;

- проект № 124022000008-5 «Разработка интеллектуальных информационно-управляющих систем управления групп кооперирующих автономных морских робототехнических комплексов на основе применения перспективных (вновь создаваемых) средств навигации и связи», 2022-2024 гг.

### **Соответствие диссертации паспорту научной специальности.**

По тематике, предложенным новым научным положениям диссертация соответствует паспорту специальности 2.3.1 «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика», а именно:

– пункту 1 «Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта»;

– пункту 4 «Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта»;

– пункту 7 «Методы и алгоритмы структурно-параметрического синтеза и идентификации сложных систем»;

– пункту 11 «Методы и алгоритмы прогнозирования и оценки эффективности, качества, надежности функционирования сложных систем управления и их элементов».

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Теоретические основы структурно-параметрического синтеза систем управления АПО, обеспечивающие их функциональную устойчивость через определение структуры системы в виде трех функциональных уровней с формализацией информационных потоков и логических условий переключения режимов на основе оценок риска.

2. Методы синтеза канонических преобразований нелинейных динамических систем в SDC-представлении, включая случай сингулярно возмущённых систем, позволяющие приводить такие системы к канонической форме с Фробениусовой структурой, обеспечивающей упрощенный синтез регуляторов и наблюдателей.

3. Методы и алгоритмы решения нелинейных задач оптимального управления на конечных интервалах времени в SDC-представлении, включающие: метод синтеза точного терминального управления выходом на базе обратного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений оптимального управления с использованием терминального закона регулирования при движении в обратном времени; метод синтеза оптимального следящего управления выходом на базе одноэтапной процедуры прямого интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений для управления с однозначным заданием начальных условий на левом конце интервала времени.

4. Методы оценивания состояния и возмущений, включающие: метод оценивания состояния нелинейных систем при полной неопределённости в начальных условиях на основе диффузного фильтра Калмана в SDC-представлении; метод оценивания неизмеряемых возмущений в динамических системах, основанный на решении вспомогательной задачи оптимального следящего управления для синтеза наблюдателя возмущений, который формируется так, чтобы минимизировать функционал невязки.

5. Метод и алгоритм управления с прогнозирующей моделью, отличающийся адаптивным горизонтом прогнозирования на основе оценки времени первого выхода траектории возмущённой системы на границу допустимой области, полученной из анализа больших уклонений путем минимизации функционала действия Вентцеля-Фрейдлина.

6. Метод ситуационного прогнозирования, основанный на распознавании типовых и редких сценариев путем сопоставления оценок траектории возмущенной системы с эталонными траекториями из сценарной базы знаний, с последующей оценкой риска выхода в критические состояния и выбором режимов управления для упреждающей адаптации системы.

**Степень достоверности и апробация результатов** подтверждается применением общепринятых численных методов, использованием математически корректных методов, корректным выполнением

математических выкладок и преобразований, строгим доказательством основных теоретических выводов и результатов, сравнением результатов со статистическими данными и истинными значениями.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на научных семинарах и конференциях: X Международная конференция «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'15 (Москва, 2015); International Symposium Automated Systems and Technologies AST2015 (Санкт-Петербург, 2015); Всероссийская конференция по проблемам управления в технических системах (Санкт-Петербург, 2015); International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON) (Москва, 2016); Всероссийская НПК «Перспективные системы и задачи управления» (п.Домбай, 2016, 2017, 2022, 2023); Мультиконференция по проблемам управления (МКПУ 2017, 2018, 2022); Всероссийская конференция «Управление в морских и аэрокосмических системах» (УМАС-2016) (Санкт-Петербург, 2016 г.); International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM) (Сочи, 2017, 2022-2025); Second International Scientific Conference “Intelligent Information Technologies for Industry” (ИТИ'17), 2017; International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment (ICMTMTE 2017, 2018), Sevastopol; Международная научно-техн. конф. «Системы контроля окружающей среды (СКОС-2017)» (Севастополь, 2017, 2019); International Russian Automation Conference (RusAutoCon) (Sochi, 2018, 2020-2025); 3rd International Conference on Control in Technical Systems; Всероссийская научная конференция по проблемам управления в технических системах (г. Москва, 2019); International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD), Lisbon, Portugal, Jul. 2022; Международная научно-техническая конференция «ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ РОБОТОТЕХНИКА» (г. Санкт-Петербург, 2023, 2024).

Кроме того, результаты диссертации были заслушаны на научных семинарах в АГТУ, ИПУ В.А. Трапезникова РАН, на научно-техническом совете Международного академико-индустриального сетевого консорциума

«Синергия», в составе которого на системной основе принимают участие ведущие специалисты в области мехатроники, автоматизации и управления из БГТУ Военмех имени Д.Ф. Устинова, ОмГТУ, МЭИ, ДВФУ, КарГТУ, НовГТУ, ВлГУ, СПбПУ, УрФУ.

**Публикации автора по теме диссертации.** Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 70 научных публикациях, из них 1 монография, 29 публикаций в изданиях из перечня ВАК и приравненных к ним (в т.ч. по категориям ВАК 13 – К1, 2 – К2, 1 – К3; по квартилям Scopus 2 – Q1, 8 – Q2, 2 – Q3, 1 – Q4), 24 статьи в сборниках трудов международных конференций, индексируемых базой Scopus, 13 докладов на конференциях всероссийского уровня. Получен 1 патент на полезную модель и 2 свидетельства о регистрации программ для ЭВМ.

**Личный вклад.** Все результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. В работах без соавторов [55, 57, 158, 160] представлены разработанные методы оптимального управления для нелинейных систем в SDC-представлении на конечном интервале времени, в [39, 165] рассмотрен вопрос выбора оптимальной параметризации матриц системы при SDC-представлении. В статьях [47, 152, 153, 157-159, 161] рассмотрены задачи синтеза канонических преобразования подобия и линеаризации обратной связью на их основе. В [46, 52, 151] эти задачи рассматриваются для сингулярно возмущенных систем. В публикациях с соавторами личный вклад соискателя характеризуется следующим образом: в монографии [26] автору принадлежат главы 4, 5, посвященные синтезу сингулярно возмущенных систем, материалы главы 6 в части алгоритма прогноза, а также решение практических примеров в главах 7, 8 по композиционному синтезу; идея построения верхнего уровня на основе ситуационного прогноза дана в [13, 15, 24, 108], где также рассмотрены примеры А-профилей для осциллятора, а в публикациях [12, 58, 112, 162, 167, 168] соискателем предложен подход к анализу больших отклонений через решение задачи точного терминального управления в форме обратной связи,

в т.ч. для нелинейных систем в SDC-представлении; построение А-профилей и численное моделирование примеров применения предложенного подхода в задачах контроля столкновения подводных аппаратов выполнено автором в [10, 11, 19, 20]; решение задач контроля и прогнозирования качки судна представлено в [21, 38, 110, 111], где автором получены А-профили, а в [22, 25] соискателем предложена математическая модель, алгоритм работы имитатора качки судна для исследования алгоритмов контроля крена через анализ больших уклонений. В работах [16, 17] вклад автора сделан в алгоритмизацию композиционного синтеза управления подвижным объектом и численное моделирование рассматриваемых примеров. В работах по теме оценивания возмущений и дефектов автору принадлежит идея решения задачи оценивания через задачу оптимального слежения, в частности, формализация и решение задачи синтеза наблюдателя в линейной постановке [42, 50, 53, 164, 169], в нелинейной постановке [33, 43, 171, 255]. Применение предложенного метода к задаче оценки дефектов в электроприводах показано в [30, 41, 44, 45], где автором выполнен синтез наблюдателя и численное моделирование решения, а в [40, 170, 171] автором предложена концепция астатических наблюдателей возмущений. В [172] автору принадлежит идея диффузного фильтра Калмана в SDC-представлении. В [148, 156, 188, 191] соискателем получены математические модели рассматриваемых подводных аппаратов, к которым применялись разработанные на базе SDC-представления методы (SDC-методы) управления и оценивания, предложенные автором. В работах [149, 189, 190] автором выполнен синтез контуров оптимальной стабилизации объекта, а в [147, 155, 166] SDC-методы управления применены автором для синтеза управления подводным манипуляторным комплексом. В совместных публикациях по теме канонических преобразований и линеаризации обратной связью [48, 154, 173] автору принадлежит постановка задачи, синтез преобразований, решение некоторых численных примеров.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, библиографического списка и приложений. Работа

изложена на 304 страницах, содержит 18 таблиц и 56 иллюстраций. Библиография включает 263 наименования.

В первой главе рассматриваются теоретические основы синтеза функционально устойчивых систем управления, вводится структура системы и формализуется постановка задачи. Во второй главе рассмотрены методы преобразования нелинейных систем к каноническим формам. Третья глава посвящена решению нелинейных задач терминального и следящего управления на конечном интервале в SDC-представлении. В четвёртой главе приводятся методы оценки неизмеряемых возмущений на основе оптимальных наблюдателей, а также метод оценки состояния на основе диффузного фильтра Калмана в SDC-представлении. Пятая глава содержит методы ситуационного прогнозирования на базе анализа больших отклонений через решение задачи точного терминального управления, а также сценарного анализа в комбинации с прогнозирующим управлением. Шестая глава представляет практический пример синтеза функционально устойчивой системы управления автономным необитаемым подводным аппаратом. В заключении приведены основные выводы. В приложении А даны копии актов внедрения, приложение Б содержит информацию о разработанном программном комплексе, в приложении В даны копии свидетельств и патентов.

## Глава 1. Теоретические основы структурно-параметрического синтеза функционально устойчивых систем управления АПО

Динамика АПО описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в аффинной форме относительно управления:

$$\dot{x}_\xi(t) = f(x_\xi) + g(x_\xi)u_\xi(t) + \sum_{i=1}^{n_d} G_i \xi_i(t), \quad x_\xi(t_0) = x_0, t \in [t_0, t_f], \quad (1.1)$$

$$y_\xi(t) = Cx_\xi + \eta(t), \quad (1.2)$$

где  $x_\xi \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния (индекс « $\xi$ » указывает на учёт возмущений),  $u_\xi \in \mathbb{R}^r$  – вектор управляющих воздействий,  $y_\xi(t) \in \mathbb{R}^m$  – вектор измеряемых выходов,  $\xi_i(t)$  – скалярное возмущение (характеризует внешние возмущения или внутренние дефекты, неточности и т.п.),  $\eta(t) \in \mathbb{R}^m$  – вектор возмущений в измерениях (шумы, вероятностные характеристики которых будут уточнены в разделе 1.5 при постановке задачи синтеза),  $G_i$  – вектор размера  $n \times 1$  распределения возмущений  $\xi_i$ . Возмущения  $\xi_i$  могут быть объединены в единый вектор обобщенных возмущений  $\xi(t) = (\xi_1 \dots \xi_{n_d})^T$  с матрицей распределения  $G = (G_1 \dots G_{n_d})$ ,  $C$  – постоянная матрица размера  $n \times m$ , функции  $f(x_\xi): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $g(x_\xi): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$  непрерывно дифференцируемы на  $\mathbb{R}^n$ , их первые производные ограничены на любых компактных подмножествах и  $f(0) = 0$ .

Для построения эффективных алгоритмов синтеза управления используется SDC-представление нелинейной функции  $f(x_\xi) = A(x_\xi)x_\xi$  с матричной функцией  $A(x_\xi): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ , которая также предполагается непрерывно дифференцируемой и имеющей ограниченные на компактных подмножествах производные. Тогда система (1.1), (1.2) записывается в SDC-представлении

$$\dot{x}_\xi = A(x_\xi)x_\xi + B(x_\xi)u_\xi + G\xi(t), \quad (1.3)$$

$$y_\xi = Cx_\xi + \eta(t), \quad (1.4)$$

где  $B(x_\xi) = g(x_\xi)$ .

**Замечание 1.1.** SDC-представление (1.3), (1.4) неединственно. Одна и та же нелинейная система может быть представлена различными способами. Выбор оптимальной параметризации (с целью минимизации численной ошибки или для обеспечения управляемости/наблюдаемости системы в каждой точке) является дополнительной степенью свободы при выборе параметров системы управления.

Для АПО выделим отдельный класс терминальных миссий, характеризующихся следующими основными элементами: начальным состоянием (может быть неопределённым, поскольку точное начальное состояние бывает неизвестно); целевым значением выхода (например, достижение заданной позиции, причаливание, стыковка или слежение за задающим сигналом); конечным моментом времени завершения миссии; гипотеза относительно модели возмущений и условий внешней среды; ограничения безопасности на состояние АПО. Эта структура терминальной миссии определяет задачу управления – перевод системы из начального состояния, содержащего неопределенность, в целевое состояние за конечное время при соблюдении заданных ограничений.

Задача управления для системы (1.3), (1.4) заключается в выполнении целевых условий миссии, которые могут быть заданы либо в терминальный момент времени  $t_f$ , либо на всем интервале:

$$y_\xi(t_f) = y_{target}(t_f) \text{ или } \|y_\xi(t) - y_{target}(t)\| \leq \varepsilon_y \forall t \in [t_0, t_f], \quad (1.5)$$

при соблюдении ограничений безопасности:

$$x_\xi(t) \in \mathbb{X}_{safe} \forall t \in [t_0, t_f], \quad (1.6)$$

$$u_\xi(t) \in \mathbb{U}_{feasible} \forall t \in [t_0, t_f], \|u_\xi(t)\|_\infty \leq u_{max}. \quad (1.7)$$

В приведённой постановке (1.3) – (1.7) целевые условия и ограничения записаны в детерминированной форме. В реальности, при наличии стохастических возмущений, они должны иметь вероятностный характер;

строгая постановка задачи синтеза с учётом случайных факторов будет приведена в разделе 1.5.

Реализация принципа опережающего отражения и функциональной устойчивости требует иерархической структуры системы управления, реализующей процессы управления, оценивания и ситуационного прогнозирования. В диссертации предлагается трехуровневая структура, представленная на рисунке 1.1.

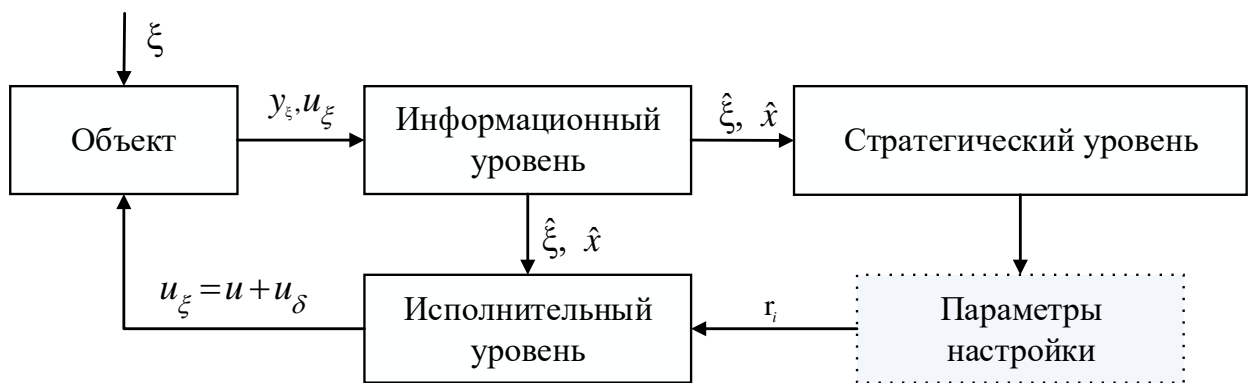


Рисунок 1.1. Трехуровневая структура функционально устойчивой системы управления.

Система включает три функциональных уровня:

1. Исполнительный уровень обеспечивает непосредственную реализацию управляющих воздействий  $u_\xi(t)$ , формируя несколько каналов управления для обеспечения целевых условий миссии согласно заданной стратегии на верхнем уровне.

2. Информационный уровень (наблюдатели состояния и возмущений) обеспечивает формирование оценки  $\hat{x}_\xi(t)$  текущего состояния системы и оценки неизмеряемых возмущений  $\hat{\xi}(t)$ .

3. Стратегический уровень реализует принцип опережающего отражения, его задача предсказывать будущее поведение системы. В качестве инструмента тут используется сценарный анализ развития управляемого процесса. При этом для анализа редких критических ситуаций (больших

уклонений возмущенного движения) используется аппарат теории больших уклонений, который позволяет оценивать вероятность выхода системы из безопасного множества  $X_{safe}$  на заданном горизонте через минимизацию функционала действия для наиболее вероятной траектории уклонений.

Таким образом, задача создания функционально устойчивой системы сводится к совместному синтезу методов и алгоритмов для указанных трех уровней.

### **1.1. Исполнительный уровень: анализ методов синтеза управления**

Исполнительный уровень функционально устойчивой системы управления отвечает за непосредственное формирование и реализацию управляющих воздействий, обеспечивающих как стабилизацию движения объекта, так и слежение за заданной опорной траекторией в реальном времени. Специфика АПО – существенная нелинейность динамики, сильная многосвязность (взаимовлияние каналов управления) и возможная неопределенность параметров – накладывает жесткие ограничения на применимость классических методов линейной теории управления.

В данном подразделе проводится критический анализ основных подходов к синтезу регуляторов для нелинейных систем с точки зрения их соответствия требованиям функциональной устойчивости и способности гарантировать надежное управление.

#### **1.1.1. Методы управления с прогнозирующей моделью**

Концепция управления с прогнозирующей моделью (MPC) эффективно применяется как для детерминированных, так и для стохастических систем [95, 127, 187, 222, 245].

Классическое детерминированное MPC представляет собой стандартный инструмент современной теории управления. На каждом

временном шаге  $t_i = t_0 + i\Delta t$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\Delta t > 0$  – шаг дискретизации интервала  $[t_0, t_f]$ , решается задача оптимизации на горизонте прогнозирования длительностью  $\tau$ :

$$\min_{u_\xi} \frac{1}{2} \left[ S_f \left( t_i + \tau, x_\xi(t_i + \tau) \right) + \int_{t_i}^{t_i + \tau} L \left( s, x_\xi(s), u_\xi(s) \right) ds \right] \quad (1.8)$$

при ограничениях (1.3) – (1.7).

Затем к системе применяется только первый управляющий сигнал  $u_\xi(t_i)$  и выполняется переход на один шаг вперед, затем процесс повторяется.

Для линейных систем с выпуклыми ограничениями MPC сводится к решению выпуклой задачи квадратичного программирования на каждом шаге, что позволяет гарантировать оптимальность решения.

Дополнительно для борьбы с возмущениями  $\xi$  в системах типа (1.3) было разработано так называемое прогнозирующее управление на основе «трубок» (tube-based MPC), идея которого состоит в прогнозировании целого множества возможных возмущенных траекторий – трубки вокруг номинальной траектории [222, 245]. В таком случае на каждом шаге синтезируется номинальная траектория  $x(t)$  (не зависит от возмущений)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x)x + B(x)u, \\ y(t) &= Cx, \end{aligned} \quad (1.9)$$

и вычисляется радиус трубки  $K_{dev}(t)$ , такой что множество состояний  $\mathbb{X}_{safe}(t) = \{x_\xi: \|x_\xi(t) - x(t)\| \leq K_{dev}(t)\}$  остается в допустимой области. Радиус  $K_{dev}(t)$  вычисляется на основе среднеквадратичных оценок ошибки прогнозирования  $K_{dev}(t) \sim \rho\sigma(t)$ , где  $\sigma(t)$  – стандартное отклонение ошибки в момент  $t$ , а  $\rho$  – коэффициент запаса (часто  $\rho = 3$ ).

Tube-based MPC использует двухканальную схему управления

$$u_\xi(t) = u(t) + u_\delta(t),$$

где  $u(t)$  – номинальное управление, которое определяется через решение задачи оптимального управления

$$\min_u J(u) = \min_u \frac{1}{2} \left[ S_f(t_f, y(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(s, x(s), u(s)) ds \right], \quad (1.10)$$

для номинальной системы (1.9), а  $u_\delta(t)$  – управление, компенсирующее отклонения возмущенной системы от номинальной через решение задачи MPC управления

$$\min_{u_\delta} J_\delta(u_\delta), \quad J_\delta(u_\delta) = \frac{1}{2} \left[ S_{f\delta}(t_i + \tau, \delta(t_i + \tau)) + \int_{t_i}^{t_i + \tau} L_\delta(s, \delta(s), u_\delta(s)) ds \right] \quad (1.11)$$

с ограничениями  $\|\delta(t)\| \leq K_{dev}(t), \forall \xi \in \Xi$ , для модели, характеризующей отклонения  $\delta(t)$  возмущенной системы от номинальной

$$\dot{\delta} = A_\delta(t)\delta + B_\delta(t)u_\delta + G_\delta\xi, \delta(0) = 0, y_\delta = C\delta, \quad (1.12)$$

где матрицы  $A_\delta(t)$ ,  $B_\delta(t)$ ,  $G_\delta$  определяются при вычислении этой модели (далее будем называть ее моделью уклонений, а величину  $\delta$  – уклонением) путем вычитания номинальной системы (1.9) из исходной (1.3).

Таким образом, в tube-based MPC состояние определяется как  $x_\xi(t) = x(t) + \delta(t)$ . Разделение ответственности между номинальной траекторией  $x(t)$  и уклонением  $\delta(t)$  имеет практический смысл: номинальное управление  $u(t)$  решает задачу формирования нужного номинального движения системы, тогда как  $u_\delta(t)$  компенсирует уклонения, удерживая их внутри трубки.

Классический MPC (в т.ч. tube-based MPC) опирается на детерминированный анализ: для любого возмущения  $\xi \in \Xi$  траектория должна остаться в  $\mathbb{X}_{safe}$ . Это консервативно, так как требует защиты от наихудшего случая. Стохастический MPC предполагает, что возмущения являются случайными процессами с известным распределением вероятностей, и целью становится минимизировать математическое ожидание функционала качества при условии, что вероятность нарушения ограничений не превышает некоторый допустимый уровень  $\beta$ :

$$\min_{u_\delta} J_\delta(u_\delta), \quad (1.13)$$

$$J_\delta(u_\delta) = \mathbb{E} \frac{1}{2} \left[ S_{f\delta}(t_i + \tau, \delta(t_i + \tau)) + \int_{t_i}^{t_i + \tau} L_\delta(s, \delta(s), u_\delta(s)) ds \right]$$

на движениях системы (1.12) при  $\xi(t) \sim P_\xi$  ( $P_\xi$  – распределение возмущений) и ограничениях  $\mathbb{P} \left( \|x_\xi(t) - x(t)\| \leq K_{dev}(t) \right) \geq 1 - \beta \quad \forall t$ , где  $\beta$  – допустимый уровень риска.

Прямое решение этой задачи со стохастическими ограничениями вычислительно неразрешимо. Стандартный подход – аппроксимировать вероятностные ограничения через детерминированные эквиваленты, либо использование сценарного подхода [222, 245].

**Гауссова аппроксимация.** Если возмущения гауссовы ( $\xi(t) \sim \mathcal{N}(\mu_\xi, \Sigma_\xi)$ ) и ограничения линейны ( $x_\xi(t) \in \mathbb{X}_{safe}: c_i^T x - b_i \leq 0$ ), то вероятностное ограничение  $\mathbb{P}(c_i^T x \leq b_i) \geq 1 - \beta_i$  эквивалентно детерминированному  $\mathbb{E}[c_i^T x] + \Phi^{-1}(1 - \beta_i) \sqrt{\mathbb{V}[c_i^T x]} \leq b_i$ , где  $\Phi^{-1}$  – обратная функция стандартного нормального распределения. Например, для типичного  $\beta_i = 0.05$  получаем  $\Phi^{-1}(0.95) \approx 1.645$ , т.е. требуется смещение ограничения на 1.645 величины стандартного отклонения.

**Сценарный подход.** Основная идея состоит в следующем: вместо оптимизации по отношению к бесконечному или очень большому множеству возможных реализаций неопределённостей, генерируют конечное число  $N$  сценариев возмущений  $\xi^{(i)}$  из распределения  $P_\xi$  и решают полученную детерминированную выпуклую задачу оптимизации. Найденное решение, полученное для конечного набора сценариев, с высокой вероятностью удовлетворяет также большинство неучтённых ограничений. Это свойство вытекает из фундаментальных результатов выпуклой геометрии и концентрации меры [93, 94, 96].

Рассмотрим классическую постановку задачи робастной выпуклой оптимизации:

$$\begin{aligned} \min_{\theta} J(\theta), \quad J(\theta) &= c^T \theta, \\ f(\theta, \mu) &\leq 0, \forall \mu \in \Delta, \end{aligned}$$

где  $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  – вектор переменных проектирования, содержащий параметры регулятора и другие переменные, подлежащие оптимизации;  $c \in \mathbb{R}^{n_\theta}$  – вектор коэффициентов целевой функции, определяющий критерий качества;  $\mu \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^{n_\mu}$  – вектор неопределённостей, принадлежащих замкнутому множеству  $\Delta$ ;  $f(\theta, \mu)$  – функция ограничений, предполагаемая выпуклой по  $\theta$  для каждого фиксированного  $\mu$ . Несмотря на выпуклость функции  $f$  по  $\theta$ , эта задача NP-сложна, так как требует выполнения ограничения для каждого элемента потенциально бесконечного множества  $\Delta$ .

Сценарный подход заменяет эту задачу конечной аппроксимацией. Генерируя  $N$  независимых выборок  $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(N)}$  из множества  $\Delta$  (сценарии), переходят к решению стандартной выпуклой задачи:

$$\begin{aligned} \min_{\theta} J(\theta), \quad J(\theta) &= c^T \theta, \\ f(\theta, \mu^{(i)}) &\leq 0, i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Эта задача содержит конечное число ограничений и может быть решена методами выпуклой оптимизации. Обозначим её оптимальное решение как  $\hat{\theta}_N$ .

Центральный результат сценарного подхода отвечает на вопрос: насколько хорошо решение  $\hat{\theta}_N$ , полученное для конечного набора  $N$  независимых выборок  $\mu^{(i)}$ , аппроксимирует решение исходной задачи?

**Теорема о сложности выборки** [94]. Пусть  $\varepsilon \in (0,1)$  и  $\beta \in (0,1)$  – произвольные параметры, определяющие требуемый уровень допустимости и приемлемый риск, соответственно. Если число сценариев выбрать не менее

$$N \geq N^*(\varepsilon, \beta) = \left\lceil \frac{2n_\theta}{\varepsilon} \ln \left( \frac{1}{\beta} \right) + 2n_\theta + \frac{2n_\theta}{\varepsilon} \ln \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) \right\rceil, \quad (1.14)$$

где  $\lceil \cdot \rceil$  обозначает округление в большую сторону, то с вероятностью не менее  $1 - \beta$  оптимальное решение  $\hat{\theta}_N$  удовлетворяет свойству  $\varepsilon$ -уровня робастной

допустимости, т.е.  $\text{Prob}_{\Delta} \mu \in \Delta: f(\hat{\theta}_N, \mu) > 0 \leq \varepsilon$ . Вероятность берётся по отношению ко всем возможным выборкам независимых сценариев.

Если решить сценарную задачу с  $N \geq N^*(\varepsilon, \beta)$  сценариями, то найденное решение  $\hat{\theta}_N$  будет нарушать исходные ограничения максимум на доле  $\varepsilon$  всех возможных реализаций неопределённостей, и эта гарантия справедлива с вероятностью не менее  $1 - \beta$ . Параметр  $\varepsilon$  называют уровнем допустимости – максимально допустимая вероятность нарушения ограничений; параметр  $\beta$  называют уровнем риска – вероятность того, что при конкретной выборке сценариев гарантия не будет достигнута.

Выражение для числа сценариев  $N$  состоит из трёх слагаемых, каждое из которых имеет определённый математический смысл. Первое слагаемое  $\frac{2n_{\theta}}{\varepsilon} \ln\left(\frac{1}{\beta}\right)$  отражает логарифмическую зависимость от уровня надёжности. Например, даже при выборе  $\beta = 10^{-12}$  (практически невозможный отказ), число сценариев увеличивается только на множитель  $\ln(10^{12}) \approx 28$ . Второе слагаемое  $2n_{\theta}$  – геометрический фактор, происходящий из леммы Хелли (Helly) выпуклой геометрии: оптимальное решение выпуклой задачи определяется не более чем  $n_{\theta}$  активными ограничениями, поэтому даже при  $N = 10^6$  сценариев, эффективно работают только около  $n_{\theta}$  из них. Третье слагаемое  $\frac{2n_{\theta}}{\varepsilon} \ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$  – основное слагаемое, определяющее масштабирование по требуемому уровню допустимости; оно растёт линейно по  $1/\varepsilon$  [94].

Важное свойство формулы (1.14) – она не зависит от распределения  $P_{\xi}$ . Вероятностная мера, из которой генерируются выборки, не требуется ни для вычисления  $N^*(\varepsilon, \beta)$ , ни для получения гарантий. Результат справедлив для любого распределения на множестве  $\Delta$ , что делает сценарный подход применимым при неизвестном распределении неопределённостей [94, 194].

Сценарный подход эффективно применяется в МРС управлении. Метод состоит в генерировании  $N$  сценариев возмущений  $\xi^{(i)}$  из распределения  $P_{\xi}$  и требования, чтобы ограничения выполнялись на всех сценариях. Т.е.

сценарный подход заменяет исходную задачу с бесконечным числом возможных значений параметра  $\xi$  задачей с конечным числом выборок  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(N)}$ , которые называются сценариями. При достаточно большом  $N = f(n, r, \beta, \varepsilon)$  это гарантирует, что с вероятностью не меньше  $1 - \varepsilon$  (здесь  $\varepsilon$  – это уровень доверия к самой вероятностной гарантии) полученное решение будет иметь вероятность нарушения ограничений не более  $\beta$ .

Указанная идея tube-based MPC о разделении управления на два канала соответствует идеологии функциональной устойчивости и наиболее близко подходит в качестве структурной основы реализации исполнительного уровня. Однако этот подход содержит ряд недостатков.

Во-первых, горизонт  $\tau$ , как правило, является статическим параметром, заданным на этапе проектирования. При коротком горизонте система может «не видеть» опасности, которая проявится позже. При длинном горизонте  $\tau$  вычислительная сложность становится непосильной для бортовых вычислителей АПО, работающих в режиме реального времени. Известны способы адаптации горизонта прогнозирования, предложенные, например, Крёнером [193] и развитые в работах [205, 240]. В них горизонт изменяется в зависимости от близости текущего состояния к терминальной области, что позволяет сократить вычисления вдали от ограничений. Однако такие подходы основаны на эвристических критериях, которые сложно построить для нелинейных систем общего вида. Кроме того, они не учитывают вероятностную природу возможных нарушений ограничений при наличии случайных возмущений.

Во-вторых, использование детерминированного или гауссова прогноза означает, что редкие события (выход за три стандартных отклонения) игнорируются до момента, когда они уже произошли. Даже при малых гауссовских возмущениях нелинейная динамика и конечное время наблюдения могут приводить к большим отклонениям траектории, вероятность которых недооценивается при использовании гауссовой аппроксимации, ориентированной на типовые отклонения. Если выбрать коэффициент  $\rho$

слишком большим (например,  $5\sigma(t)$ ), система станет неоправданно консервативной и неспособной выполнять полезные маневры. Если выбрать  $\rho$  слишком малым, редкие события не будут охвачены, и система выйдет за границы допустимой области с вероятностью, превышающей допустимый уровень риска  $\beta$ . Кроме того, коэффициент  $\rho$  обычно фиксирован на этапе проектирования, т.е. при изменении характера возмущений система не адаптируется.

С учетом принятого разделения каналов управления далее рассмотрим методы синтеза, применимые для номинального движения системы.

### **1.1.2. Методы синтеза оптимальных регуляторов для нелинейных систем в SDC-представлении**

Для нелинейных систем методы линейного синтеза (например, линейно-квадратичный регулятор, англ. linear quadratic regulator, LQR) далеко не всегда применимы. Это ограничение способствовало разработке и развитию различных методов нелинейного оптимального управления [67, 83, 88, 137, 143, 176, 235]. Причем ввиду сложной практической реализуемости нелинейных методов часто предлагаются итерационные численные схемы, где выполняется некоторая форма приближения к решению. Примером таких приближенных методов являются метод уравнения Риккати, зависящего от состояния [98, 212, 260-262] и метод аппроксимирующей последовательности уравнений Риккати [241, 242, 258, 259]. Каждый из этих методов имеет преимущества и недостатки, а их применимость зависит от различных факторов, таких как сложность реализации, производительность и оптимальность.

Уравнение Риккати с зависящими от состояния коэффициентами (англ. state-dependent Riccati equation, SDRE) было введено Дж.Д. Пирсоном (J.D. Pearson) в 60-х годах для приближенного субоптимального решения нелинейной задачи оптимального управления [218]. С того момента началось теоретическое развитие этого подхода, который получил активное развитие не

только с теоретической, но и с практической точек зрения. По сути, SDRE повторяет конструкцию LQR регулятора в форме обратной связи по состоянию для задач на бесконечном интервале времени, где в линейном случае используется соответствующее алгебраическое уравнение Риккати. В терминальных задачах с заданием граничных условий на конечном интервале времени возникает дифференциальное уравнение Риккати, которое в нелинейном случае также зависит от состояния (англ. state-dependent Riccati differential equation, SDDRE) и используется для построения оптимального или субоптимального решения задачи управления.

Метод SDRE является достаточно простым и эффективным особенно для задач на бесконечном интервале времени [262]. Этот метод рассматривает исходную нелинейную задачу оптимального управления поточечно в виде LQR задачи. В постановке этой задачи рассматривается нелинейная система в SDC-представлении (1.9), задача оптимального управления которой на конечном интервале времени заключается в минимизации критерия качества

$$J(u) = \frac{1}{2} y^T(t_f) S_f y(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q(x) x + u^T R(x) u) dt, \quad (1.15)$$

$$Q(x) \geq 0, R(x) > 0.$$

Решение задачи (1.9), (1.15) в форме обратной связи можно записать в виде:

$$u(x, t) = -R^{-1}(x) B^T(x) P(x) x(t), \quad (1.16)$$

где матрица  $P(x)$  удовлетворяет задаче Коши для SDDRE

$$\dot{P}(x) = -P(x) A(x) - A^T(x) P(x) + P(x) B(x) R^{-1}(x) B^T(x) P(x) - Q(x), \quad (1.17)$$

$$P(t_f) = C^T S_f C.$$

Технологические возможности численного решения SDDRE (1.17), появившиеся в последнее время, сделали его популярным инструментом для построения систем управления различными сложными подвижными объектами. В [209] SDDRE применялся для управления роботизированным манипулятором, для подводного аппарата с манипулятором [147], для задачи

перехвата маневрирующей цели [200], для управления беспилотным летательным аппаратом при транспортировке полезной нагрузки [129], для управления летающим роботом с машущим крылом [211], для управления движением колесного мобильного робота [3, 203], для управления синхронизацией направления космического аппарата [146] и многих других задачах, описанных в литературе, что подтверждает эффективность и практическую применимость SDDRE в системах управления.

Распространенными методами решения SDDRE являются метод обратного интегрирования [183 - 186], метод на основе уравнения Ляпунова [138 - 141, 183] и метод переходной матрицы состояний [183, 185].

Метод на основе уравнения Ляпунова (МУР) является косвенным решением, которое дает ответ в замкнутой форме для SDDRE (1.17). Этот метод использует дифференциальное уравнение Ляпунова. Решение стационарного уравнения Риккати является частью процедуры, которая формирует матрицу обратной связи, используемую в дифференциальном уравнении Ляпунова. Для решения задачи могут использоваться как положительные, так и отрицательные корни стационарного уравнения Риккати. При этом положительно определенное решение обладает вычислительными сложностями [185, 212]. Этот недостаток проявляется, когда конечное время установлено более чем достаточно или выбор весовых матриц делает положительно определенное решение большим.

Другой подход к решению SDDRE заключается в использовании метода переходной матрицы (МПМ). В этом подходе также используется одноэтапная процедура, что является преимуществом этого метода. Значение конечного времени должно быть разумным, чтобы избежать численных трудностей из-за инверсии почти сингулярной матрицы в уравнении, которая обеспечивает оптимальный коэффициент усиления регулятора. Этот момент показывает, что такое большое увеличение конечного времени создает вычислительную сложность, что приводит к проблеме сингулярности.

МУР и МПМ дают одноэтапное прямое решение SDDRE и соответствующего субоптимального управления, что и определяет их более широкое распространение, по сравнению с методом обратного интегрирования с его двухэтапным решением: первый этап – интегрирование SDDRE в обратном направлении и определение матрицы регулятора обратной связи; второй этап – решение в прямом направлении времени для вычисления оптимального (или субоптимального) управления. В линейном случае матрицы системы не содержат переменных состояния или управляющих входов, и информация о состоянии не является необходимой для интегрирования дифференциального уравнения Риккати в обратном направлении. Напротив, нелинейный случай требует знания обоих, чтобы реализовать интегрирование SDDRE от конечного состояния к начальному. При этом оптимальное решение тут достигается без упрощений при решении, так называемого, нелинейного дифференциального уравнения оптимального управления (НДУОУ), что возможно только с помощью обратного интегрирования. НДУОУ содержит две части: первая часть имеет форму SDDRE, вторая называется дополнительным условием оптимальности [212]. Таким образом можно использовать решение SDDRE для получения субоптимального управления или решить НДУОУ, чтобы получить оптимальное управление. Этот момент подчеркивает независимость метода обратного интегрирования относительно формы решаемого уравнения в отличие от методов МПМ и МУР.

Однако для интегрирования SDDRE (или НДУОУ) в обратном направлении от конечного момента времени к начальному требуется информация о переменных состояния системы и управлении, которая без применения дополнительных мер не доступна. Таким образом, необходим закон управления для регулирования состояния системы при движении в обратном направлении от условий в конечный момент времени к начальному. Тип этого закона управления может быть разным. Это обстоятельство приводит к вопросам о приемлемости этого подхода, т.к. в задачах управления

имеет место отклонение траектории обратного движения от прямого (в отличие от задач отслеживания траектории, где прямое и обратное движения совпадают). Но практический опыт реализации и моделирования для различных задач показывает, что отклонения траектории при обратном движении почти не влияют на основной результат. Основываясь на этом опыте, чаще всего в качестве закона управления для регулирования состояния системы при движении в обратном направлении рассматривается обычный SDRE регулятор [212], что противоречит терминальному характеру задачи. В настоящей работе в главе 3 предложена модификация метода обратного интегрирования при использовании терминального закона для регулирования состояния при движении в обратном направлении.

Решение с двухэтапной процедурой может показаться недостатком метода обратного интегрирования, но оно оказывает важное положительное влияние на величину сигнала управления. Прямые решения начинаются с некоторого начального положения и движутся к значениям устойчивого состояния. При этом вероятные скачки могут происходить в большинстве случаев в начале движения, когда ошибка имеет наибольшее значение и умножается на коэффициент усиления регулятора. Это приводит к скачку в сигнале управления, что часто возникает при использовании МПМ и МУР. В методе обратного интегрирования ожидаемый скачок происходит вблизи конечного состояния, где ошибка близка к нулю, в результате сигнал управления остается низким. Указанная особенность метода обратного интегрирования делает его более эффективным для систем, которые должны работать с одинаковым законом управления для повторяющихся движений или циклов с ограниченным потреблением энергии [212].

Кроме вышеописанных методов в качестве общего подхода к решению SDDRE в [258, 259] был предложен метод аппроксимирующей последовательности уравнения Риккати (АПУР) для синтеза глобального оптимального управления с обратной связью для нелинейных систем общего вида, включая нелинейность по управлению. Этот метод преобразует задачу в

эквивалентную линейно-квадратичную нестационарную задачу путем введения линейно-изменяющейся во времени последовательности, т.е. метод АПУР предполагает итерационное решение ряда LQR задач.

Первая итерация состоит в решении задачи 0, определенной в виде:

$$\dot{x}^{(0)} = A^{(0)}x^{(0)} + B^{(0)}u^{(0)}, y(t_f) = Cx^{(0)}(t_f), \quad (1.18)$$

$$J^{(0)}(u) = \frac{1}{2}y^{(0)T}(t_f)S_f y^{(0)}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left( x^{(0)T} Q^{(0)} x^{(0)} + u^{(0)T} R^{(0)}(x) u^{(0)} \right) dt,$$

$$A^{(0)} = A(x_0), B^{(0)} = B(x_0), Q^{(0)} = Q(x_0), R^{(0)} = R(x_0).$$

Задача (1.18) является линейной стационарной, так как все аргументы матриц заданы и являются постоянными. Решение этой задачи хорошо известно [5, 27, 60, 70, 79, 197, 207]. В общем случае для некоторой итерации  $k$  задача формулируется так

$$\dot{x}^{(k)} = A^{(k)}x^{(k)} + B^{(k)}u^{(k)}, \quad (1.19)$$

$$J^{(k)}(u) = \frac{1}{2}y^{(k)T}(t_f)S_f y^{(k)}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left( x^{(k)T} Q^{(k)} x^{(k)} + u^{(k)T} R^{(k)}(x) u^{(k)} \right) dt,$$

$$A^{(k)} = A(x^{(k-1)}), B^{(k)} = B(x^{(k-1)}), Q^{(k)} = Q(x^{(k-1)}), R^{(k)} = R(x^{(k-1)}).$$

По сути, (1.19) это нестационарная линейная задача (где  $x^{(k-1)}(t)$  и  $u^{(k-1)}(t)$  являются решениями задачи на шаге  $k - 1$ ). Ее решение также хорошо известно [5, 27, 60, 70, 79, 197].

Итерации в АПУР продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости с заданной нормой ошибки между последовательностью решений  $\delta = \|x^{(k)}(t) - x^{(k-1)}(t)\| \leq \mu$ , где  $\mu > 0$  – некоторая константа. Это обосновано в [258], где показано, что последовательность решений  $x^{(k)}(t)$ ,  $u^{(k)}(t)$  сходится к решению исходной задачи (1.9),(1.15) при условии, что  $A(x)$  и  $B(x)$  непрерывны по Липшицу по своим аргументам, пара  $(A(x), B(x))$  поточечно управляема  $\forall x(t), t \in [t_0, t_f]$ .

Таким образом в методе АПУР для каждой текущей LQR задачи матрицы системы оцениваются с помощью решения на предыдущей итерации. Эффективность АПУР как метода решения SDDRE была показана с помощью

численных примеров в области аэрокосмической техники [215] и для кулоновских образований космических аппаратов [125, 126].

Вероятно, для задач на конечном интервале времени АПУР превосходит SDRE с точки зрения оптимальности решения (см., например, [258]). Ясно, что главным недостатком SDC-подхода для задач на конечном интервале времени является необходимость интегрирования SDDRE в обратном времени. Потому практически все предлагаемые методы и их развитие заключаются в попытках найти численно-аналитическое решение SDDRE и соответствующее ему оптимальное управление в прямом времени.

Проблема поиска решения в прямом времени актуальная и для задач слежения на конечном интервале времени за заданным сигналом: для системы (1.9) ставится задача слежения за сигналом  $r(t)$  на конечном интервале в соответствии с критерием качества

$$J(u) = \frac{1}{2} (y(t_f) - r(t_f))^T S_f (y(t_f) - r(t_f)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} ((y - r)^T Q(x)(y - r) + u^T R(x)u) dt, \quad (1.20)$$

$$Q(x) \geq 0, R(x) > 0.$$

Решение задачи (1.9), (1.20) в полностью линейной постановке представлено в множестве работ, например, [5, 27, 60, 70, 79, 197]. В постановке для систем в SDC-представлении решение, в частности, представлено в [186, 212]. Общая черта во всех этих работах в том, что следящее управление имеет две составляющие вида

$$u(t) = K_x(x)x(t) + K_g(x)g(t).$$

Первый член управления представляет собой часть с обратной связью, которая зависит от состояния системы (1.9), а второй член представляет собой часть управления с прямой связью, которая зависит от опорной траектории  $r(t)$ . Часть управления с прямой связью в целом изменяется во времени, и поскольку в классическом решении задачи линейно-квадратичного слежения начальные условия для вектора  $g(t)$  задаются на правом конце временного

интервала  $t = t_f$ , то возникает трудность при решении задачи в SDC-представлении, связанная как и в задачах терминального управления с отсутствием информации о состоянии системы при обратном интегрировании. По сути, тут применяют все те же приемы, что и в задачах регулирования.

В постановке задачи линейно-квадратичного следящего управления (англ. Linear Quadratic Tracking, LQT) сложность возникает и при рассмотрении на бесконечном горизонте времени  $t_f \rightarrow \infty$ . Для решения этой проблемы в работах [82, 87] приводятся методы для вычисления  $g_{SS} = \lim_{t_f \rightarrow \infty} g(t, t_f)$  в реальном времени. Эти методы выполняются в автономном режиме и требуют полного знания динамики системы.

Очевидным направлением решения указанной проблемы в задачах оптимального слежения является поиск способа, который позволит однозначно задать начальные условия для матрицы Риккати и вектора прямой связи  $g(t)$  в начальный момент времени  $t = t_0$ . Это позволит рассчитать управление интегрированием соответствующих дифференциальных уравнений в прямом времени. Такой подход к решению нелинейной задачи оптимального слежения на конечном горизонте времени предложен в настоящей работе и рассмотрен в главе 3.

Важным нюансом в применении SDC-методов, влияющим на качество их работы, является параметризация исходной нелинейной системы с целью приведения ее к SDC-представлению. Сложность состоит в том, что для многомерного случая всегда существует бесконечное число SDC-параметризаций [98]. Этой теме посвящен ряд исследований, в которых авторы предлагают некоторые пути по выбору лучшей SDC-параметризации с позиции некоторого заданного критерия. Так, в [131] вводится категория родительских матриц для параметризации системы параметром альфа. В [210] представлен случай для  $k$  параметризаций в общем виде. В [226] предложен еще один частный вариант параметризации, который гарантирует, что все отношения между состоянием и входными переменными в нелинейной

системе также представлены в линеаризованной системе с помощью равной факторизации членов произведения. Алгоритм равномерно распределяет многомерные полиномиальные члены по каждой переменной, оставляя неполиномиальные члены в их исходной форме. Этот подход удобно применить для генерации родительских параметризованных матриц, с помощью которых можно генерировать другие параметризации согласно предложениям из [131].

Кроме выбора способа параметризации важным является вопрос какую из бесконечного множества параметризаций выбрать. В качестве критериев в разных исследованиях рассматривались такие варианты как максимизация минимального сингулярного числа грамиана управляемости [233], минимизация критерия качества [131], обеспечение условия разрешимости SDRE [199, 201]. Исследование различных критериев параметризации также рассматривается в главе 3.

SDC-подход является наиболее перспективной базой для методов синтеза исполнительного уровня, учитывая нелинейность модели АПО и возможность адаптации. Однако требуется развитие методов синтеза терминального и следящего управления на конечном интервале времени учитывающих обозначенные выше недостатки.

## **1.2. Информационный уровень: методы оценивания состояния и возмущений**

Реализация функциональной устойчивости АПО невозможна без достаточно полной и достоверной информации о текущем состоянии системы и действующих на нее возмущений. Информационный уровень системы (см. рис. 1.1) решает задачи «ситуационной осведомленности», включающие восстановление вектора состояния по зашумленным и неполным измерениям, оценку действующих на систему возмущений (внешних и внутренних).

### 1.2.1. Методы оценивания состояния

В отличие от классических задач навигации (оценка координат и скоростей при известной начальной позиции), функциональная устойчивость требует решения расширенного спектра задач оценивания в условиях высокой априорной неопределенности. Особый акцент при этом делается на работоспособность системы при так называемом «холодном старте», когда информация о начальном состоянии либо отсутствует, либо задана с низкой достоверностью.

На информационном уровне для общей модели динамики АПО (1.3), (1.4), где предполагается, что  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  представляют собой некоррелированные гауссовские процессы типа белого шума с интенсивностями  $\Sigma$  и  $\mathbf{H}$ , а начальное условие  $x_\xi(t_0)$  – гауссовский случайный вектор, независимый от  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$ :

$$E[x_\xi(t_0)x_\xi^T(t_0)] = P_0,$$

$$E[x_\xi(t_0)\xi^T(t)] = E[x_\xi(t_0)\eta^T(t)] = 0.$$

требуется построить оценку  $\hat{x}_\xi(t)$  вектора состояния, минимизирующую ошибку оценивания в среднеквадратичном смысле:

$$\hat{x}_\xi(t) = E[\hat{x}_\xi(t)|Y_{1:t}] = \arg \min_{\hat{x}_\xi} E[\|x_\xi(t) - \hat{x}_\xi(t)\|_P^2 | Y_{1:t}], \quad (1.21)$$

где  $Y_{1:t} = y(\tau): \tau \leq t$  – последовательность всех измерений до момента  $t$ ,  $\|\cdot\|_P^2 = (\cdot)^T P(\cdot)$  — взвешенная норма.

Эта задача решается наблюдателем (фильтром), который в реальном времени обрабатывает поступающие измерения и формирует оценку состояния.

Наилучшая линейная оценка  $\hat{x}_\xi(t)$  в смысле критерия (1.21) имеет форму линейного фильтра Калмана [60, 197]:

$$\frac{d\hat{x}_\xi(t)}{dt} = A\hat{x}_\xi + Bu_\xi + K(t)[y(t) - C\hat{x}_\xi], \hat{x}_\xi(t_0) = 0, \quad (1.22)$$

где  $K = P(t)C^T H^{-1}$ , а матрица ковариации ошибки оценивания  $P(t)$  удовлетворяет

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T H^{-1}CP(t) + \Sigma, P(t_0) = P_0.$$

Линейный фильтр Калмана (ФК) (1.22) дает оптимальные оценки состояния в предположениях о гауссовском белом шуме и линейной наблюдаемой системе. Конструирование ФК связано с важными проблемами, которые могут приводить к неприемлемости полученных результатов. Прежде всего, очень часто нет точной информации относительно статистики шумов, входящих в описание моделей объектов, которые, в свою очередь, могут быть сами неизвестны. В частности, использование ФК в задачах оценивания состояния системы предполагает, что задана априорная информация о начальных условиях вектора состояния в виде математических ожиданий и ковариаций компонент вектора состояния. Однако априорная информация о начальных условиях может быть неточной, неполной или отсутствовать вовсе. Обычно следствием этого является то, что необходимая точность оценивания не будет достигнута к требуемому моменту времени.

В работе [238] предложен метод диффузной инициализации ФК. Показано, что диффузная инициализация приводит к идентичным соотношениям, полученным путем решения специальной задачи оптимизации в предположении, что априорная информация о начальном состоянии линейной системы является неполной или отсутствует. В работе [233] исследуется эффект некорректного задания ковариации шума на характеристики ФК. В работах [213, 233] проведен анализ асимптотического поведения ФК при негауссовских начальных условиях.

Для нелинейных систем расширенный ФК (РФК) является наиболее широко применяемым алгоритмом оценивания состояния. Устойчивость и сходимость РФК была доказана в работе J. Jouffroy и T. Fossen а в предположении, что ковариационная матрица ограничена снизу и сверху [145]. В [238] представлен диффузный аналог РФК, позволяющий учитывать

неопределенность в начальных условиях. Однако теоретический анализ показывает, что РФК гарантированно сходится только при малой начальной ошибке  $\|x_\xi(t_0) - \hat{x}_\xi(t_0)\| < \varepsilon$ . При большой неопределенности в начальных условиях эта гарантия теряется. В основе РФК лежит линеаризация нелинейной системы с использованием разложения в ряд Тейлора вблизи рабочей точки [224]. Следовательно, РФК будет эффективен только в небольшой окрестности с рабочими точками, и точность этого метода будет снижаться для большого рабочего диапазона нелинейных систем.

Сигма-точечный ФК (СТФК) преодолевает недостатки линеаризации в РФК, используя детерминированную выборку специально выбранных сигма-точек для аппроксимации нелинейного преобразования моментов распределения. Основное преимущество СТФК в том, что он сохраняет нелинейные эффекты более полно, чем РФК (ошибка аппроксимации  $O(\|\Delta x_\xi\|^3)$  против  $O(\|\Delta x_\xi\|^2)$  у РФК). Но при этом имеет место проблема размерности: число сигма-точек равно  $2n + 1$ . Для систем высокой размерности вычислительная нагрузка становится недопустимой. Кроме того, при  $P_0 \rightarrow \infty$  разброс сигма-точек становится чрезмерным, нарушая предположение о том, что они адекватно представляют апостериорное распределение. В связи с этим возникает необходимость разработки других модификаций ФК, учитывающих данные недостатки.

Использование SDC-представления нелинейной динамики открывает естественный путь к построению наблюдателей, объединяющих достоинства линейной теории фильтрации и способность к описанию полной нелинейности системы. В [214] для нелинейной системы в SDC-представлении показан наблюдатель уменьшенного порядка для оценивания только неизмеряемых состояний, которые косвенно зависят от доступных. Проблема построения наблюдателя для нелинейной системы на основе решения SDRE рассматривалась в [84]. В частности, были показаны результаты локальной сходимости для нелинейного наблюдателя на базе SDRE. Контроллер на

основе рекурсивного наблюдателя для нелинейных динамических систем с дискретным временем был представлен в [133]. В [177] получен фильтр Калмана в SDC-представлении. Аналогичная задача слежения для одного класса слабо нелинейных систем с зависящими от состояния коэффициентами рассматривается на конечном интервале времени в [204].

Поскольку в нелинейном случае корректное задание априорной информации является решающим фактором, который при ненадлежащем его обеспечении может приводить к расходимости фильтра, перспективным направлением здесь может быть разработка метода на основе комбинации техники SDC-представления и диффузной инициализации, позволяющих строить алгоритмы оценивания в нелинейных системах при большой априорной неопределенности в задании начальных условий вектора состояния, что также рассматривается в главе 4.

### 1.2.2. Методы оценивания возмущений

Параллельно с восстановлением состояния необходимо оценить вектор действующих на систему возмущений:

$$\hat{\xi}(t) = \arg \min_d E[\|\xi(t) - \hat{\xi}(t)\|^2 | Y_{1:t}],$$

где вектор обобщенных возмущений  $\xi(t) = [\xi_{ext}^T(t), \xi_f^T(t)]^T$  объединяет внешние возмущения (например, ветер, течение) и внутренние дефекты (отказы, деградация, изменение параметров).

Оценка  $\hat{\xi}(t)$  может использоваться для активной компенсации возмущений в исполнительном контуре (обратная связь по возмущениям) в качестве добавочного корректирующего управления.

Классический подход к оцениванию возмущений использует так называемые расширенные наблюдатели возмущений, которые оценивают одновременно состояние и возмущение [124, 130, 132]. Основная проблема здесь в том, что требуется знать явную модель динамики возмущения, что не всегда доступно.

Концептуальное развитие идеи компенсации возмущений произошло с введением методов управления с активной компенсацией возмущений (англ. Active Disturbance Rejection Control), предложенных Ханом Цзинцином (Han Jingqing) [132]. Основная идея этого подхода – трактовать совокупность всех неизвестных возмущений и неопределенностей модели как единое полное возмущение и оценивать его в реальном времени с помощью расширенного наблюдателя состояния. В линейной формулировке этой задачи используется линейный расширенный наблюдатель состояния (англ. Linear Extended State Observer, LESO), который включает возмущение в вектор состояния как дополнительную переменную, т.е. математически линейный расширенный наблюдатель состояния эквивалентен классическому наблюдателю возмущений. Ограничение у указанных методов общее – оценка полного возмущения содержит скрытую информацию о неопределенностях модели, не все компоненты этого полного возмущения можно физически интерпретировать, т.е. наблюдатель не различает природу возмущений.

Один из распространенных способов разделения возмущений (например, выделение внешних воздействий и внутренних дефектов) основан на методах направленных невязок, где вектор невязок проецируется на специально выбранные направления, избирательные по отношению к разным типам возмущений. Вероятностный подход реализуется через так называемую концепцию многомодельного оценивания [102, 198, 239], где параллельно работает банк наблюдателей, каждый из которых настроен на свою гипотезу о возмущении, и вероятности этих гипотез вычисляются по правдоподобию невязок. Вычислительным ограничением этой концепции является экспоненциальный рост сложности – при наличии  $m$  независимых возможных дефектов число гипотез  $N = 2^m$ , но при этом развязка возмущений является только приближенной.

Альтернативный и теоретически более строгий подход к этой проблеме предложен Жирабком А.Н. и коллегами в основополагающих работах [32, 34] и развит в ряде других. Вместо того, чтобы пытаться минимизировать влияние

одних возмущений на сигналы обнаружения других, указанный подход позволяет полностью исключить это влияние через геометрическое преобразование координат, основанное на инвариантных свойствах системы.

Основная идея этого логико-динамического метода состоит в поиске нелинейного преобразования координат  $z = T(x_\xi)$ , которое приводит систему к специальной канонической форме, в которой выделяется подсистема, содержащая информацию о внутренних возмущениях (дефектах), но полностью инвариантная к влиянию внешних возмущений. Такое преобразование существует, если выполнены условия наблюдаемости с инвариантностью. Наблюдатель, построенный в инвариантных координатах, генерирует сигнал невязки независимо от любого возмущения. В отличие от приближенных методов, где влияние возмущения на невязку лишь снижается, здесь оно полностью устраняется.

Логико-динамический подход требует более сложного математического аппарата (дифференциальная геометрия, алгебра функций) и тщательного анализа геометрии системы. Кроме того, в классических работах синтез диагностического наблюдателя часто опирается на наблюдатели скользящего режима для поддержания динамики ошибки в инвариантном подпространстве [246, 247, 253, 254]. Это приносит известные недостатки: высокочастотное переключение, жесткие условия согласования, что затруднительно для систем с ограниченным быстродействием исполнительных органов.

Другое направление связано с синтезом каскадных наблюдателей смешанных переменных по блочному принципу, развитым в работах С.А. Красновой, А.В. Уткина и др. [64, 192]. Этот подход позволяет оценивать как состояние, так и внешние возмущения без явной модели последних, однако для его применения также требуется выполнение структурных условий, в частности условий согласования.

В рамках настоящей работы в главе 4 предлагаются два направления, объединяющие сильные стороны обоих подходов. Во-первых, использовать канонические преобразования подобия в SDC-представлении для

развязывания возмущений и дефектов. Это позволит алгоритмизировать процесс поиска преобразования координат и избежать сложных символьных вычислений, требуемых для классического логико-динамического подхода. Во-вторых, замена наблюдателей скользящих режимов на оптимальные следящие наблюдатели в SDC-представлении, синтезируемые на основе решения вспомогательной задачи оптимального слежения. Такой подход обеспечит гладкую динамику ошибки оценивания, устранив эффект переключения и сохранив свойство инвариантности к возмущениям, гарантируемое логико-динамическим подходом.

### 1.3. Методы преобразования нелинейных систем

Сначала приведем основные определения [67, 235]. Пусть  $\phi(x)$  – скалярная гладкая функция и  $f(x)$  – гладкое векторное поле на множестве  $x \in R^n$ . Скалярная функция, определенная как  $L_f \phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x)$ , называется производной Ли от скалярной функции вдоль векторного поля  $f$ .

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  – гладкие векторные поля на множестве  $x$ . Векторное поле вида  $L_f g(x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$ , называется производной Ли от вектора вдоль векторного поля  $f$  или скобкой Ли  $[f(x), g(x)] = L_f g(x)$ .

Также используются обозначения для производной Ли порядка  $k$ :

$$L_f^0 \phi(x) = \phi(x), L_f^0 g(x) = g(x), L_g L_f = L_g(L_f),$$

$$L_f^k = L_f(L_f^{k-1}), k = 2, 3, \dots$$

Проведем анализ нелинейной системы (1.1), (1.2). Введём функцию  $h(x_\xi) = Cx_\xi$  и для упрощения изложения будем считать  $f(x_\xi) = f(x)$ ,  $g(x_\xi) = g(x)$  и  $h(x_\xi) = h(x)$  аналитическими, а  $G = 0$  (возмущения отсутствуют). Существенное же усложнение будет состоять в том, что анализ может быть только локальным, например, в окрестности какого-либо

состояния равновесия однородной системы, соответствующей (1.1). Введем понятие относительной степени – число  $\gamma \leq n$  называется относительной степенью системы в точке  $x_*$ , если для любых  $x \in \mathcal{E}(x_*)$  выполняется  $L_g L_f^0 h(x) = L_g L_f^1 h(x) = \dots = L_g L_f^{\gamma-2} h(x) = 0$ ,  $L_g L_f^{\gamma-1} h(x) \neq 0$ .

Если относительная степень системы  $\gamma = n$ , то при условии существования скалярной непрерывно дифференцируемой функции  $h(x)$  существует диффеоморфизм  $z = T_{FL}(x)$  [143]

$$T_{FL}(x) = \left( h(x) \quad L_f^1 h(x) \quad \dots \quad L_f^{n-1} h(x) \right)^T \quad (1.23)$$

преобразующий систему (1.1) к канонической форме Бруновского:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= L_f^n h(x) + L_g L_f^{n-1} h(x)u. \end{aligned}$$

Если относительная степень  $\gamma < n$ , то в этом случае преобразование координат (1.23) дополняется функциями  $\psi_k(x)$ ,  $k = 1, \dots, n - \gamma$ , удовлетворяющими условию  $L_g \psi_k(x) = 0$ . В новых координатах система распадается на две подсистемы (нормальная форма) [137, 143]:

1. Подсистема:  $\dot{z}_i = z_{i+1}$ ,  $\dot{z}_\gamma = a(z, \eta) + b(z, \eta)u$ , где  $i = 1, \dots, \gamma - 1$ ,  $a(z, \eta) = L_f^\gamma h(x)$  и  $b(z, \eta) = L_g L_f^{\gamma-1} h(x)$ ;

2. Нелинейная подсистема (нулевая динамика):  $\dot{\eta} = q(z, \eta)$ .

Другой подход, предложенный в [36], заключается в применении специальных преобразований подобия, позволяющих привести систему в SDC-представлении к каноническому виду. Соответствующие результаты по синтезу канонического преобразования для систем со скалярным управлением даны в [36, 257]. Преобразование имеет вид

$$z = T(x)x, \quad x = T^{-1}(x)z, \quad (1.24)$$

где

$$T(x) = \{T_i(x)\}, i = \overline{1, n},$$

$$T_{i+1}(x) = \frac{d^i}{dt^i}(\bar{G}) + C_i^1 \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \bar{G} L_1(x) + \dots + \bar{G} L_i(x),$$

$$\bar{G} = e_n^T G^{-1}(x), G(x) = (g_1, g_2, \dots, g_n), k = \overline{0, n-1},$$

$$g_{k+1}(x) = L_k(x)B(x) - C_k^1 \frac{d}{dt} (L_{k-1}(x)B(x)) +$$

$$C_k^2 \frac{d^2}{dt^2} (L_{k-2}(x)B(x)) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} B(x),$$

где  $C_k^j$  – биномиальные коэффициенты  $(k, j)$ ,  $L_i(x)$  – матрица  $i$ -й производной вектора состояния в силу системы  $\dot{x}(t) = A(x)x$  [36].

Преобразование (1.24) существует тогда и только тогда, когда матрица управляемости  $W(x) = (B(x) \quad L_1(x)B(x) \quad \dots \quad L_{n-1}(x)B(x))$  системы (1.9) невырожденная для всех  $x \in R^n, t \geq t_0$  [36]. Это преобразование приводит систему (1.9) к виду

$$\dot{z}(t) = A_c(z)z + B_c u,$$

$$A_c(z) = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ a_1(z) & a_2(z) \dots a_n(z) \end{pmatrix}, B_c = e_n,$$

где  $I_{n-1}$  является  $(n-1) \times (n-1)$  единичной матрицей;  $e_n$  – вектор-столбец размера  $n$ ,  $n$ -ый элемент которого равен 1, и все остальные – 0.

Преимущество данного подхода по сравнению с методом нормальной формы заключается в возможности работы с системами без явно выделенного выхода и в более простой процедуре обратного перехода к исходным координатам. Важно заметить, что такого рода канонические преобразования часто используются именно для упрощения системы и перехода к редуцированным моделям с канонической формой динамики. Это позволяет существенно упростить решение многих задач на исполнительской и информационном уровнях. Например, в [28, 29, 31] инструмент преобразований нелинейных систем с возмущениями позволяет перейти к редуцированным моделям, не подверженным влиянию возмущений, что позволяет отдельно рассматривать влияние различных возмущающих

факторов. Оба рассмотренных способа приведения нелинейной системы к цепочке интеграторов с последним функциональным уравнением позволяют за счет применения специального управления привести систему к линейному виду. Например, применяя к преобразованной системе в канонической форме Бруновского управление  $u = \frac{1}{L_g L_f^{\gamma-1} h(x)} (-L_f^\gamma h(x) + v)$ , получаем линейную систему  $\gamma$ -го порядка. Указанная процедура приведения к линейной системе называется линеаризацией обратной связью (ЛОС). Эта линеаризация является не приближенным, а эквивалентным преобразованием, т.к. в результате получается линейная система, эквивалентная исходной нелинейной. При ЛОС исходное управление  $u$  заменяется новым псевдоуправлением  $v$ , для которого используются методы линейного синтеза.

Несмотря на теоретическую строгость, методы точной ЛОС обладают недостатком в контексте функциональной устойчивости – отсутствие робастности. Линеаризующее управление базируется на точной компенсации нелинейностей. Любая параметрическая неопределенность или внешнее возмущение приводят к появлению некомпенсированных нелинейных членов в замкнутой системе, которые могут нарушить устойчивость. В такой ситуации используют методы приближенной линеаризации обратной связью (ПЛОС), суть которых заключается в линеаризации не всей системы целиком, а только некоторой ее части [128, 174]. В этом смысле подход к синтезу сопоставим с методами теории сингулярных возмущений, использующими разделение системы на подсистемы меньшей размерности [181, 208].

Указанные в этом подразделе результаты справедливы для систем со скалярным управлением, их расширение для АПО, большинство из которых описываются нелинейными моделями с векторным управлением, является актуальной задачей и рассматривается в главе 2.

### 1.3.1. Декомпозиция сингулярно возмущенных систем

Методы, представленные в предыдущих подразделах, ограничены условиями, которые не всегда просто установить. Альтернативой этому являются асимптотические методы, которые не являются точными, но проще по условиям применения. Преимущество асимптотических методов можно видеть и в более широких возможностях применения. Задачи управления терминальными миссиями АПО, для которых существенно рассмотрение на конечном интервале времени, могут формулироваться как задачи минимизации некоторых квадратичных критериев при динамических ограничениях сингулярно возмущенного характера, когда уравнения динамики содержат малый параметр при старшей производной.

В общем случае здесь рассматривается система вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u, t), \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u, t), \end{aligned} \quad (1.25)$$

где  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$  – вектор медленных переменных,  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$  – вектор быстрых переменных,  $0 \leq \varepsilon \ll 1$  – малый параметр.

Физический смысл малого параметра заключается в существенном различии скоростей протекания переходных процессов в системе (1.25). Для АПО типично разделение на:

- медленные движения центра масс (траекторное движение);
- быстрые движения вокруг центра масс (угловая стабилизация; переходные процессы в исполнительных приводах).

Полагая  $\varepsilon = 0$ , получают вырожденную систему на многообразии  $f_2(x_1, x_2, u, t) = 0$ :

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2^*(x_1, u, t), u, t), \quad (1.26)$$

где  $x_2^*(x_1, u, t)$  – решение алгебраического уравнения  $f_2(x_1, x_2^*, u, t) = 0$ .

Уравнение (1.26) описывает медленную подсистему размерности  $n_1$ , для которой можно применить методы синтеза из предыдущих подразделов.

Алгоритм синтеза при этом разделяется на две задачи: отдельно синтез управления медленными движениями (решается задача управления для системы (1.26)), и синтез управления быстрыми движениями (как правило, синтезируется регулятор для быстрой подсистемы, обеспечивающий стабилизацию  $x_2(t)$ ). Результирующее управление строится как композиция решений для медленной и быстрой подсистем [6, 9, 123, 181, 208].

Сингулярно возмущенный подход позволяет выполнить декомпозицию сложной оптимизационной задачи на две более простых. Однако применимость ограничена требованием наличия явной иерархии временных масштабов и отсутствием гарантий при больших возмущениях, выводящих систему из пограничного слоя.

**Замечание 1.2.** Композитное управление, построенное по методам теории сингулярных возмущений, не зависит от параметра  $\varepsilon$ . А сам этот параметр  $\varepsilon$  может рассматриваться в роли неопределенности в системе [49, 56], и в этом смысле система с композитным регулятором будет обладать робастными свойствами при условии устойчивости медленной и быстрой подсистем, чего можно достичь соответствующим выбором быстрых и медленных управлений.

При соответствующем выборе параметров этих регуляторов, в частности, можно добиться полной робастной устойчивости к параметру сингулярных возмущений ( $\varepsilon^* = \infty$ ) [150], что можно использовать при синтезе управления для невозмущенных систем путем фиктивного введения параметра возмущений  $\varepsilon$ . Кроме того, для случая систем с  $\varepsilon > 1$  (или с фиктивным параметром) построение асимптотики композиционного регулятора можно реализовать на основе Паде-аппроксимации, которая позволяет получить асимптотические приближения как при больших, так и при малых значениях параметра возмущений [99, 100].

В рамках настоящей работы методы теории сингулярных возмущений предлагаются как инструмент декомпозиции исходной задачи управления АПО на подсистемы с различными временными масштабами (например,

разделение траекторного движения и угловой стабилизации). После декомпозиции к каждой из подсистем могут быть применены разработанные методы и алгоритмы исполнительного и информационного уровней, что позволяет снизить вычислительную сложность и повысить робастность. Таким образом, асимптотические методы сингулярных возмущений дополняют предлагаемые алгоритмы, обеспечивая их применимость к системам с разнотемповыми процессами. Близкая идеология декомпозиции и композиционного синтеза, но на основе блочного подхода с использованием гладких законов управления, развивается в работах [62, 63] применительно к роботам-манипуляторам, что подтверждает универсальность принципа разделения движений для сложных механических систем.

#### **1.4. Стратегический уровень: ситуационное прогнозирование и анализ рисков**

Стратегический уровень функционально устойчивой системы управления решает задачу предварительного анализа рисков и адаптивной настройки системы с гарантией нахождения состояния в допустимой области.

Ключевое отличие от классических подходов теории управления состоит в том, что даже в условиях малых гауссовских возмущений нелинейная динамика и конечное время наблюдения могут приводить к редким, но критическим отклонениям траектории, вероятность которых асимптотически описывается теорией больших отклонений (ТБУ). Классическая теория управления, основанная на среднеквадратичных критериях, может быть слепа к таким редким сценариям до момента, когда они уже произошли. Здесь инструментом анализа выступает ТБУ.

### 1.4.1. Теория больших уклонений как инструмент анализа редких событий

Классические подходы к управлению стохастическими системами берут начало в работах Р. Калмана (R. Kalman) и Р. Бьюси (R. Bucy) по фильтрации и управлению линейными системами с квадратичным функционалом качества. Метод LQG (линейно-квадратично-гауссовского) управления, основанный на минимизации математического ожидания квадратичного функционала, долгое время оставался основным инструментом для широкого класса приложений. Однако его принципиальное ограничение связано с игнорированием высших моментов распределения затрат, что в ряде случаев приводит к недопустимо рискованным стратегиям управления. Для преодоления этого недостатка Сэйном был разработан метод управления с минимальной дисперсией затрат (англ. minimum cost variance control), минимизирующий дисперсию затрат при ограничении на математическое ожидание, получивший развитие во многих последующих работах, например, [220, 230, 231], где было показано его применение для линейных систем с квадратичными функционалами.

Параллельно развивались методы чувствительного к рискам (англ. risk-sensitive) управления, впервые предложенного Д. Джекобсоном (D. Jacobson) и получившего развитие в работах П. Уайтла (P. Whittle), Т. Рунолфссона (T. Runolfsson) и др., где минимизируется математическое ожидание экспоненциальной функции от затрат [117, 144, 227, 248]. Этот подход позволяет учитывать все кумулянты распределения и обладает свойством робастности по отношению к неопределённостям, имеет связь с дифференциальными играми и  $H_\infty$ -управлением.

Значительный вклад в развитие методов стохастического управления внесён работами Ю.С. Попкова и его научной школы. В отличие от подходов, ориентированных на анализ рисков, Ю.С. Попковым была разработана методология, решающая взаимосвязанные задачи идентификации и оптимизации для нелинейных стохастических систем на единой основе. В [71]

для представления нелинейной динамики используются функциональные ряды Вольтерра. Центральное место в этом подходе занимает принцип максимума энтропии (ПМЭ): из всех распределений вероятностей, удовлетворяющих известным ограничениям (например, заданным моментам), наиболее вероятным является то, которое максимизирует энтропию. Такой выбор обеспечивает максимальную непредвзятость и даёт робастные оценки в условиях малых объёмов данных. В зависимости от вида ограничений ПМЭ приводит к распределениям экспоненциального класса (нормальному, экспоненциальному, гамма и др.). Впоследствии этот подход был развит в энтропийно-робастном направлении для оценивания характеристик рандомизированных динамических моделей [72].

Существенным шагом в развитии методов управления стохастическими системами стало применение ТБУ. Пионерские работы М.И. Фрейдлина и А.Д. Вентцеля [7, 80] заложили основы анализа асимптотического поведения траекторий стохастических систем и синтеза управления [118]. Эти фундаментальные результаты были использованы для прогнозирования критических состояний динамических систем в [58, 112, 167]. В [236] на базе ТБУ предложен метод управления, минимизирующего большие отклонения (англ. *minimum large deviations, MLD*), в котором минимизируется вероятность выхода больших отклонений за пределы «трубки» вокруг траектории номинальной системы. В классическом методе MLD оптимальное управление может быть неединственным, так как поведение системы после момента времени первого выхода за пределы «трубки» уже не влияет на функционал качества управления. Для преодоления этого в [236] предложено итеративное применение MLD управления (последовательное MLD управление) на временных подынтервалах, где каждый этап соответствует моменту первого выхода траектории отклонения за пределы «трубки» вокруг номинальной траектории.

ТБУ позволяет оценить вероятность выхода траектории системы

$$\dot{x}_\xi = A(x_\xi)x_\xi(t) + B(x_\xi)u_\xi + \varepsilon G(x_\xi)\dot{W}(t), x_\xi(0) = x_0$$

на некоторую границу  $K_{dev}$  через функционал действия. Согласно теореме Вентцеля-Фрейдлина [7], асимптотическая вероятность уклонения удовлетворяет

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln P \left( \sup_{t \in [0, t_f]} \|x_\xi(t) - x(t)\| \geq K_{dev} \right) = - \inf_{w \in S_{u_\xi}} I(w),$$

где  $S_{u_\xi} = \{w \in C_{x_0}[0, t_f] : \sup_{t \in [0, t_f]} \|w(t) - x(t)\| \geq K_{dev}, w(0) = x_0\}$  – множество

траекторий  $w(t)$ , отклоняющихся от номинальной  $x(t)$  не менее чем на  $K_{dev}$  в супремум-норме;  $C[0, t_f]$  – пространство непрерывных функций;  $I(w)$  – функционал действия Вентцеля-Фрейдлина, определяемый как (здесь  $\|\cdot\|_{Q^{-1}}^2$  – норма, взвешенная матрицей  $Q^{-1}$ ,  $\|\alpha\|_{Q^{-1}}^2 = \alpha^T Q^{-1} \alpha$ )

$$I(w) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \|\dot{w}(t) - A(w)w(t) - B(w)u_\xi\|_{(GG^T)^{-1}}^2 dt,$$

при условии, что интеграл конечен (для сингулярных путей  $I(w) = \infty$ ).

Таким образом, вероятность уклонения является экспоненциально малой, т.е.  $P \sim e^{-\frac{I(w)}{\varepsilon^2}}$ . А максимизация  $I(w)$  снижает вероятность уклонения, так как экспонента  $e^{-\frac{I(w)}{\varepsilon^2}}$  при этом уменьшается.

Инфимум  $\inf_{w \in S_{u_\xi}[0, t_f]} I(w)$  соответствует минимальной «энергии»

уклонения, требуемой для достижения  $S_{u_\xi}$  (т.е. для выхода траектории  $w(t)$  за пределы  $K_{dev}$ -трубки от  $x(t)$ ). Чем больше  $\inf_{w \in S_{u_\xi}} I^{u_\xi}(w)$ , тем меньше

вероятность уклонения. Инфимум по  $S_{u_\xi}[0, t_f]$  может быть найден как минимум по моментам времени  $\tau$  первого достижения границы  $K_{dev}$ , а затем по траекториям, достигающим границы в момент  $\tau$ :

$$\inf_{w \in S_{u_\xi}[0, t_f]} I(w) = \inf_{\tau \in [0, t_f]} \inf_{w \in S_{u_\xi}^\tau} I(w), \quad (1.27)$$

$$S_{u_\xi}^\tau = \{w: w(0) = x_0, \|w(\tau) - x(\tau)\| = K_{dev}, \\ \|w(t) - x(t)\| < K_{dev} \forall t \in [0, \tau)\} \cup \{w: \|w(\tau) - x(\tau)\| = K_{dev}\}.$$

На практике условие строгого неравенства на  $[0, \tau)$  заменяется на условие, что  $\tau$  – момент первого достижения границы  $K_{dev}$ , тогда в задаче минимизации можно опустить условие строгого неравенства.

Для фиксированных  $u_\xi$  и  $\tau$  можно определить траекторию  $w(t)$ , достигающую  $\|w(\tau) - x(\tau)\| = K_{dev}$  с минимальным действием  $\min_{w \in S_{u_\xi}^\tau} I(w)$ , где  $S_{u_\xi}^\tau = \{w: \|w(\tau) - x(\tau)\| = K_{dev}\}$  – множество траекторий, достигающих уклонения  $K_{dev}$  в момент  $\tau$ . Физически  $w(t) \in S_{u_\xi}^\tau$  представляет собой путь с наименьшей «энергией» для уклонения на  $K_{dev}$  к моменту  $\tau$ . Задача поиска наиболее вероятного пути уклонения сводится к минимизации  $I(w)$  при граничных условиях, что является реализацией принципа минимального действия в пространстве траекторий.

Отметим, что принцип минимального действия в ТБУ можно рассматривать как динамический аналог принципа максимума энтропии для статических задач идентификации. В обоих случаях вариационный принцип позволяет выбрать наиболее вероятный сценарий: в статике – распределение состояний, в динамике – траекторию уклонения. При этом энтропия играет роль меры неопределённости, а функционал действия играет роль «стоимости» пути. Далее на основе минимизации функционала действия можно определить момент  $\tau^*$ , где «стоимость» уклонения минимальна, т.е. в этот момент времени система имеет наибольшую уязвимость к возмущениям:

$$\tau^* = \arg \min_{\tau} \left( \min_{w \in S_{u_\xi}^\tau} I(w) \right). \quad (1.28)$$

Задача (1.28) имеет два уровня оптимизации. На внутреннем уровне для каждого фиксированного момента времени  $\tau$  определяется траектория  $w(t)$ , достигающая границы  $\|w(\tau) - x(\tau)\| = K_{dev}$  с минимальным значением функционала действия  $I(w)$ . Эта траектория называется А-профилем и

является наиболее вероятным путём уклонения, приводящим к выходу на границу именно в момент  $\tau$  [14,108]. На внешнем уровне из всех возможных моментов  $\tau$  выбирается тот, для которого полученная минимальная «стоимость» уклонения оказывается наименьшей. Момент  $\tau^*$ , определяемый условием (1.28), соответствует наибольшей уязвимости системы: он указывает время, когда для достижения границы  $K_{dev}$  требуется наименьшая «энергия» возмущений, и, следовательно, вероятность выхода на границу в окрестности этого момента максимальна.

На практике решение задачи оптимизации (1.28) является сложным в вычислительном плане, однако существует несколько конструктивных подходов. Классический метод состоит в решении уравнения в частных производных, которое позволяет найти квазипотенциал – скалярную функцию  $V(x)$ , такую что минимальный функционал действия для выхода из состояния  $x$  равен  $V(x)$  [7]. Альтернативный подход использует численные методы Монте-Карло, позволяя оценивать низкие вероятности выхода и верифицировать результаты аналитического анализа [113].

Дополнительно к задаче (1.28) на интервале  $[0, \tau^*]$  можно найти такое управление, которое будет смещать номинальную траекторию  $x(t)$  в область, где «стоимость» уклонений будет максимальной, тем самым уменьшая асимптотическую вероятность уклонения (или максимизируя экспоненциальную скорость ее убывания). На основе этого суждения, формулируется цель MLD управления – минимизировать асимптотическую вероятность уклонения траектории  $x_\xi(t)$  от номинальной  $x(t)$  на величину  $K_{dev}$  в супремум-норме:

$$\min_{u_\xi} \left( - \inf_{w \in S_{u_\xi}[0, t_f]} I(w) \right) = \max_{u_\xi} \inf_{w \in S_{u_\xi}[0, t_f]} I(w).$$

С учетом (1.28), задача MLD управления переписывается как:

$$\max_{u_\xi} \min_{\tau \in [0, t_f]} \min_{w \in S_{u_\xi}^\tau} I(w). \quad (1.29)$$

**Замечание 1.3.** Использование функционала действия в (1.27) на самом деле дает дополнительное преимущество, заключающееся в том, что это позволяет ставить и решать задачи оценивания больших отклонений как задачи оптимального управления [175], а точнее точного терминального управления. Связь между возмущенной динамической системой и соответствующей задачей Лагранжа-Понтрягина для так называемой системы путей (см. [108]) означает то, что траектории этой системы путей с оптимальным управлением представляют интерес как большие отклонения рассматриваемой возмущенной динамической системы. При этом сама система путей с управлением, соответствующим оптимальному закону, дает возможность провести оценку асимптотики больших отклонений, определяя профиль развития критической ситуации (А-профиль) и вероятность ее наступления. Т.е. задача анализа больших отклонений сводится к задаче точного терминального управления, решение которой при анализе больших отклонений обычно ищется в форме программного управления. В рамках настоящей работы предлагается использовать аналогичный подход к анализу больших отклонений через решение задачи точного терминального управления, но в форме обратной связи, что упрощает решение задачи Лагранжа-Понтрягина, т.к. исключает необходимость вычисления граничных значений для сопряженных переменных.

Таким образом ТБУ Вентцеля-Фрейдлина предоставляет строгий математический аппарат для анализа вероятности редких событий на основе А-профилей больших отклонений, позволяет количественно оценить вероятность выхода из безопасного множества на заданном горизонте прогнозирования, определить время первого выхода в критическое состояние при наихудшем развитии возмущений и в конечном счете синтезировать упреждающие управления, действующие именно в направлениях, соответствующих опасным траекториям.

Упомянутая выше идея последовательного MLD управления схожа в определенном смысле с концепцией MPC управления. Но в отличие от

классического MPC управления, которое оперирует гауссовыми доверительными интервалами и среднеквадратичными мерами, анализ ТБУ позволяет учитывать асимптотическую вероятность больших отклонений, которая может быть недооценена при стандартном подходе. Проводя последующие аналогии, стоит обратить внимание на tube-based MPC, где прогнозирующая модель декомпозируется на номинальную модель и модель ошибки. Однако как показано в 1.1.1 одной из проблем любого MPC остается выбор горизонта прогнозирования  $\tau$ , который представляет собой компромисс между точностью работы и численной сложностью онлайн реализации.

На стыке MPC и последовательного MLD управления возникает конструктивная идея синтеза управления со структурой по типу tube-based MPC, в основе которой лежит декомпозиция системы на номинальную и модель отклонения, но именно в постановке ТБУ и с использованием оценки времени первого выхода траектории отклонения на границу «трубки» вокруг номинальной траектории для обоснованного выбора горизонта прогнозирования. При таком подходе функционал действия становится реальным инструментом онлайн анализа и управления. Оценивая функционал действия в реальном времени на основе наблюдаемого состояния  $\hat{x}_\xi$ , через (1.28) вычисляется ожидаемое время выхода  $\tau^*$ . На основе этой оценки предлагается адаптивно выбирать горизонт прогнозирования в MPC, например, в виде  $\tau(t) = \alpha \cdot \tau^*(t)$ ,  $\alpha \in (0,1)$ , где  $\alpha$  – коэффициент безопасности (например,  $\alpha = 0.5$  означает, что горизонт составляет половину от ожидаемого времени выхода). Эта формулировка обеспечивает системе достаточно времени для корректирующего маневра, прежде чем выход из области станет неминуемым.

Преимущества такого подхода очевидны: горизонт автоматически расширяется в безопасных областях (большое  $\tau^*$ ), позволяя системе «видеть» дальние угрозы, и сжимается при приближении к границе (малый  $\tau^*$ ), экономя вычислительные ресурсы.

### 1.4.2. Сценарный подход и ситуационное прогнозирование

Параллельно с аналитическим методом ТБУ целесообразно использовать сценарный подход, описанный в 1.1.1. В соответствии со сценарным подходом в момент времени  $t_i$  MPC генерирует дерево из  $N$  сценариев, каждый из которых описывает одну возможную траекторию на горизонте  $[t_i, t_i + \tau]$ . Далее используется техника, основанная на рекурсивном байесовском взвешивании. Вместо фиксированных весов  $p_k^{(t)} = 1/N$  для всех сценариев, веса динамически настраиваются в зависимости от того, насколько хорошо сценарий соответствует наблюдаемой траектории [85, 86, 196]:

$$p_k^{(t)} = \frac{p_k^{(t-1)} \cdot p(y_t | s_k)}{\sum_{j=1}^N p_j^{(t-1)} \cdot p(y_t | s_j)},$$

где  $p(y_t | s_k)$  – вероятность того, что оцененное значение  $y_t$  совместимо с предсказанием сценария  $s_k$ , вычисляемая, например, как гауссово распределение вокруг предсказанного значения с дисперсией, отражающей погрешность моделирования [86, 196]. Сценарии, хорошо объясняющие оцененную траекторию, получают высокие веса; сценарии, которые не соответствуют наблюдениям, получают низкие веса. На следующем шаге оптимизации сценарии с высокими весами оказывают большее влияние на выбор управления.

Сопоставление сценариев и управляемого процесса можно использовать как основу логики работы стратегического уровня, который определяет соответствующий режим управления в зависимости от сценария. Чтобы использовать этот механизм, дополнительно требуется определить для каждого сценария соответствующую вероятностную меру риска, характеризующую возможность наступления критической ситуации в будущем. Тогда в зависимости от вероятности риска в будущем, на стратегическом уровне система может управлять режимами работы  $\Gamma$  исполнительного уровня. Например, базовый режим при малом риске, осторожный – при среднем риске, антикризисный – при высоком риске. При

этом каждый режим соответствует своему набору параметров исполнительного уровня: штрафы в функционале качества и ограничения могут становиться более жесткими или наоборот, горизонт прогнозирования может быть сокращен для ускорения вычислений или увеличен для более дальнего прогнозирования. При этом, поскольку ни классический MPC, ни tube-based MPC не являются полностью удовлетворительными инструментами для достижения функциональной устойчивости системы в условиях редких событий, то в настоящей работе предлагается дополнить сценарный подход формированием редких сценариев, которые вытекают из анализа больших отклонений. Однако существует фундаментальный разрыв между оффлайн анализом ТБУ, проводимым на этапе проектирования, и онлайн-MPC управлением в реальном времени.

Основной проблемой, которая является предметом главы 5 диссертации, является разработка методов интеграции функционала действия в сценарный MPC. Эта задача требует сочетания численно-аналитических результатов ТБУ с быстрыми вычислительными методами сценарного подхода.

Альтернативный подход к анализу рисков сложных систем основан на построении деревьев рисков и вычислении структурных функций, позволяющих оценить время наступления событий и выделить наиболее опасные пути развития ситуации. Такой подход применён в работе [229] для системы мониторинга подводного газопровода, где исследована чувствительность характеристик риска к виду распределений времени наступления исходных событий. Результаты могут быть полезны при формировании сценарной базы знаний для АПО, дополняя предлагаемый в диссертации сценарный подход на основе A-профилей.

Таким образом стратегический уровень замыкает петлю функциональной устойчивости: информационный уровень обеспечивает надежные оценки состояния и возмущений, исполнительный уровень реализует адаптивное управление, согласованное с текущей динамикой системы, а стратегический уровень предвидит угрозы и координирует

реакцию системы в целом. Такая интегрированная структура системы управления позволяет автономным подвижным объектам функционировать надежно и безопасно в неструктурированных и динамичных окружающих средах.

### 1.5. Общая постановка задачи синтеза функционально устойчивой системы управления АПО

На основе анализа методов синтеза исполнительного, информационного и стратегического уровней сформулируем общую постановку задачи синтеза функционально устойчивой системы управления движением АПО.

Рассматриваем динамическую модель движения АПО в виде системы дифференциальных уравнений в SDC-представлении (1.3), (1.4):

$$\begin{aligned} \dot{x}_\xi(t) &= A(x_\xi)x_\xi + B(x_\xi)u_\xi + G\xi(t), \quad x_\xi(t_0) = x_0, \\ y_\xi(t) &= Cx_\xi + \eta(t), \end{aligned} \quad (1.30)$$

где  $\eta(t) \in \mathbb{R}^m$  – вектор шумов при измерениях (некоррелированный случайный процесс с нулевым средним и ковариационной матрицей  $R_y(t) > 0$ ), вектор возмущений  $\xi$  содержит аддитивный шум  $\dot{W}$  – вектор стандартных независимых белых шумов с единичной ковариационной матрицей и матрицей интенсивности шумов  $\varepsilon \Sigma_v$  ( $\varepsilon > 0$  – малый параметр), определяющей, как шум распределяется по компонентам состояния и корреляции между ними, остальные обозначения соответствуют принятым ранее.

Задача управления формализуется как задача выполнения целевых условий миссии, которые задаются для номинальной (невозмущенной) системы (1.9) либо в терминальный момент времени  $t_f$ , либо на всем интервале:

$$y(t_f) = y_{target}(t_f) \text{ или } \|y(t) - y_{target}(t)\| \leq \varepsilon_y \quad \forall t \in [t_0, t_f]. \quad (1.31)$$

Ограничения безопасности для реальной возмущенной системы с учётом стохастических возмущений формулируются как вероятностные:

$$P(x_{\xi}(t) \in \mathbb{X}_{\text{safe}} \quad \forall t \in [t_0, t_f]) \geq 1 - \beta, \quad (1.32)$$

где  $\beta \in (0,1)$  – заданный уровень допустимого риска.

Множество допустимых состояний  $\mathbb{X}_{\text{safe}}$  в рамках двухканальной структуры управления формализуется как трубка вокруг номинальной траектории выхода:

$$\mathbb{X}_{\text{safe}} = \{x_{\xi}(t) \in \mathbb{R}^n: \|C(x_{\xi}(t) - x(t))\| < K_{\text{dev}}\}, \quad (1.33)$$

где  $K_{\text{dev}} > 0$  – радиус трубки.

Ограничение на управление является детерминированным:

$$u_{\xi}(t) \in \mathbb{U}_{\text{feasible}}, \quad \mathbb{U}_{\text{feasible}} = \{u_{\xi} \in \mathbb{R}^r: \|u_{\xi}(t)\|_{\infty} \leq u_{\text{max}}\}. \quad (1.34)$$

Требуется построить функционально устойчивую систему управления для гарантированного выполнения миссии (1.31) АПО, заданного моделью (1.30), при ограничениях на управление (1.34) и вероятностных ограничениях на состояние (1.32), (1.33), которые должны выполняться в т.ч. в условиях действия малых гауссовских возмущений, способных приводить к редким, но большим отклонениям траектории.

Как уже было сказано на исполнительном уровне для решения применяется декомпозиция, основанная на подходе tube-based MPC: состояние разделяется на номинальную траекторию и отклонение  $x_{\xi}(t) = x(t) + \delta(t)$ , а вместо одного робастного регулятора используется двухканальная схема управления  $u_{\xi}(t) = u(t) + u_{\delta}(t)$ .

Номинальное управление  $u(t)$  находится как решение детерминированной задачи оптимального управления  $P(t, x, t_f, r)$  с критерием качества (1.10) на движениях номинальной системы (1.9). Ее решение дает управление в форме обратной связи  $u(t) = K_{\text{nom}}(x, t, r)x(t)$ , которое может

быть получено в том числе на основе композиционного синтеза теории сингулярных возмущений.

Компенсирующее управление  $u_\delta(t) = u_\xi(t) - u(t)$  строится через решение задачи  $P_\delta(t, \delta, t + \tau, r)$  для модели (1.12) динамики отклонения  $\delta(t)$  реальной траектории  $x_\xi(t)$  от номинальной  $x(t)$ , где, пренебрегая членами высшего порядка  $O(\varepsilon\|\delta\|, \|\delta^2\|)$ , для матриц системы получим

$$A_\delta(t) = A(x) + \tilde{A}(x, u), \quad B_\delta(t) = B(x), \quad G_\delta = G, \\ \tilde{A}_{ij}(x, u) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial A_{il}(x)}{\partial x_{\varepsilon j}} x_l + \sum_{l=1}^r \frac{\partial B_{il}(x)}{\partial x_{\varepsilon j}} u_l.$$

Задача  $P_\delta(t, \delta, t + \tau, r)$  компенсации отклонений для системы (1.12) формулируется как задача MPC управления (1.13) при ограничении (1.32) на вероятность выхода на заданную границу, которое переопределим в терминах отклонения

$$P(\|C\delta(s)\| < K_{dev}) \geq 1 - \beta_\delta \quad \forall s \in [t_i, t_i + \tau], \quad (1.35)$$

и ограничении на управление, которое обеспечивает (1.34)

$$u_\delta(t_i + s) + u(t_i + s) \in \mathbb{U}_{feasible}, \quad \forall s \in [t_i, t_i + \tau], \\ \mathbb{U}_{feasible} = \{u_\delta \in \mathbb{R}^r : \|u_\delta(t_i + s) + u(t_i + s)\|_\infty \leq u_{max}\} \quad (1.36)$$

при начальном условии  $\delta(t_i) = 0$  и горизонте прогнозирования  $\tau > 0$ .

Поскольку исходное вероятностное ограничение (1.32) должно выполняться на всем непрерывном интервале времени  $[t_0, t_f]$ , а задача MPC решается в дискретные моменты, необходимо установить связь между заданным уровнем риска  $\beta$  и поточечными уровнями  $\beta_\delta$  на каждом подынтервале прогнозирования. Обозначим через  $A_k$  событие, состоящее в нарушении условия  $\|C\delta(s)\| \geq K_{dev}$  хотя бы в одной точке  $s$  внутри  $k$ -го подынтервала  $[t_k, t_k + \tau]$ . Тогда событие нарушения на всем интервале  $[t_0, t_f]$  является подмножеством объединения событий  $A_k$  по всем  $N$  подынтервалам:

$$P\left(\sup_{t \in [t_0, t_f]} \|C\delta(t)\| \geq K_{dev}\right) \leq P\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) \leq \sum_{k=1}^N P(A_k).$$

Если для каждого  $k$  обеспечить выполнение условия  $P(A_k) < \beta_\delta$ , причём выбрать  $\beta_\delta = \beta/N$ , то из приведённого неравенства следует:

$$\sum_{k=1}^N P(A_k) < N \cdot (\beta/N) = \beta,$$

что гарантирует выполнение исходного требования (1.32). Таким образом, ограничение (1.35) с уровнем  $\beta_\delta = \beta/N$  является достаточным условием, сводящим исходную интервальную вероятностную задачу к набору задач с поточечными вероятностными ограничениями на каждом шаге МРС. Данный переход основан на неравенстве Буля и не учитывает возможную зависимость событий  $A_k$ , однако вполне приемлем для практического синтеза, поскольку обеспечивает запас по надёжности. Более точные оценки могут быть получены с привлечением методов теории экстремальных значений, но выходят за рамки настоящей работы.

Таким образом на исполнительном уровне мы приходим к подзадачам:

1. Задача  $P(t, x, t_f, r)$  – оптимальное детерминированное управление номинальным движением.
2. Задача  $P_\delta(t, \delta, t + \tau, r)$  – стохастическое управление отклонениями на горизонте прогнозирования  $\tau$ .

На информационном уровне требуется решить задачи оценивания состояния  $\hat{x}_\xi(t)$  (в т.ч. в случаях полной неопределенности в начальных условиях и неизмеряемых возмущений  $\hat{\xi}(t)$ ). Заметим, что канал управления исполнительного уровня может быть дополнен активной компенсацией возмущений на основе оценки  $\hat{\xi}(t)$  для того, чтобы снизить нагрузку с корректирующего МРС канала.

На стратегическом уровне реализуется система выбора стратегии управления на основе ситуационного прогнозирования. Основное место здесь занимает сценарная база знаний, которая содержит информацию о типичном поведении системы при различных возмущениях. База должна быть построена комбинированно, т.е. содержать сценарии для типовых возмущений, а также

A-профили больших уклонений, синтезируемые из решения задач точного оптимального управления с функционалом действия Вентцеля-Фрейдлина. Каждый A-профиль показывает наиболее опасную траекторию уклонения от номинального режима и время первого выхода  $\tau^*$  из безопасной области. При этом оценка времени  $\tau^*$  используется для определения горизонта прогнозирования  $\tau$  на исполнительном уровне в задаче  $P_\delta(t, \delta, t + \tau, r)$ .

На каждом временном шаге алгоритм распознавания сценариев сопоставляет наблюдаемую историю управляемого процесса в окне наблюдения со сценариями из базы. Затем по выбранному сценарию вычисляется так называемый индекс риска (более подробно рассмотрено в главе 5), на основе которого стратегический уровень выбирает режим управления  $r$  и переконфигурирует параметры исполнительного уровня, например, вид и параметры критериев в задачах  $P(t, x, t_f, r)$  и  $P_\delta(t, \delta, t + \tau, r)$  в зависимости от текущего режима управления  $r$  (например, базовый, осторожный или антикризисный). Особенность структуры такой функционально устойчивой системы управления состоит в том, что стратегический уровень не добавляет третий независимый контур управления, а переконфигурирует параметры исполнительного уровня.

Исходя из постановки проблемы, дадим формальное определение функционально устойчивой системы управления

**Определение 1.1 [14].** Функционально устойчивой называется система управления, в которой обеспечены:

а) устойчивость (будем говорить также о локальной устойчивости) состояния равновесия  $\delta = 0$  системы уклонений (1.12) при отсутствии возмущений ( $\xi(t) \equiv 0$ ) и  $u_\delta(t) \equiv 0$  с заданными показателями качества;

б) выполнение на заданном вероятностном уровне  $1 - \beta$  условий принадлежности текущего состояния эксплуатационной области  $X_{\text{safe}}$ , формализованной в виде трубки (1.33), т.е. выполнение вероятностного

ограничения (1.32) для возмущённой системы (1.30) при использовании полного управления  $u_{\xi}(t) = u(t) + u_{\delta}(t)$  с ограничением (1.34).

Данное определение фиксирует требования, которым должна удовлетворять функционально устойчивая система. Сами по себе эти требования не являются новыми: условие (а) традиционно обеспечивается методами теории устойчивости и оптимального управления, а условие (б) может быть выполнено, например, средствами стохастического tube-based MPC с вероятностными ограничениями. Принципиальное отличие предлагаемого в диссертации подхода состоит в способе совместного выполнения условий (а) и (б), который базируется на интеграции в контур управления механизмов упреждающего прогнозирования редких событий на основе ТБУ. В классическом стохастическом MPC гарантия (б) опирается на предположение о гауссовости или экспоненциальном убывании хвостов распределения отклонений; при этом редкие события (большие отклонения) могут не учитываться. В отличие от этого, в предлагаемой структуре стратегический уровень по данным наблюдателей формирует оценку риска выхода на границу эксплуатационной области  $X_{\text{safe}}$ , вычисляя наиболее вероятный сценарий нарушения (А-профиль) и критическое время, что позволяет упреждающе перестраивать параметры исполнительного уровня и тем самым обеспечивать выполнение ограничения (1.32) без неоправданного консерватизма. Таким образом, функциональная устойчивость в данной работе достигается не фиксированными запасами робастности, а активным предвидением угроз и целенаправленной реконфигурацией управления.

## 1.6. Выводы по главе

Анализ показывает, что SDC-подход, являясь первоначально инструментом для синтеза оптимального управления, обладает потенциалом стать единым математическим аппаратом для синтеза всех уровней

функциональной устойчивой системы управления. Это основано на следующих свойствах SDC-представления:

1. Для любой гладкой многомерной нелинейной системы существует бесконечное множество SDC-представлений [98], каждое из которых является точным на всей области определения. Свобода выбора конкретной параметризации матриц  $\{A(x), B(x), C(x)\}$  может опираться на обеспечение лучших свойств управляемости, наблюдаемости и численной устойчивости разрабатываемых алгоритмов.

2. Использование моделей в SDC-представлении на всех уровнях функционально устойчивой системы управления исключает необходимость согласования моделей при передаче данных между уровнями.

3. Ядром многих вычислений в SDC-подходе является решение уравнения Риккати. Это позволяет унифицировать программную реализацию – один оптимизированный решатель уравнения Риккати используется для синтеза управления, наблюдателей, А-профилей.

Опираясь на эти свойства, в настоящей работе SDC-подход предлагается в качестве единого математического аппарата для разработки методов синтеза систем управления АПО. Совокупность этих методов формируется через решение взаимосвязанных научно-технических задач, каждая из которых рассматривается в соответствующей главе диссертации. Ниже приведены краткие формулировки этих задач:

1. Развитие методов преобразования нелинейных динамических систем в SDC-представлении в канонические формы для выделения явной структуры, обеспечивающей упрощенный синтез регуляторов и наблюдателей. Решение этой задачи приводится в главе 2, оно используется для синтеза управления и наблюдателей в последующих главах.

2. Разработка методов синтеза точного терминального управления и слежения за заданным сигналом на конечном интервале времени для нелинейных систем в SDC-представлении (задача  $P(t, x, t_f, r)$ ). Эти задачи рассматриваются в главе 3.

3. Разработка методов синтеза диффузного ФК в SDC-представлении для оценивания состояния нелинейной системы при полной неопределенности в начальных условиях, а также наблюдателей для оценивания неизмеряемых возмущений. Синтез последних основан на решении вспомогательных задач оптимального следящего управления и переходе к редуцированным каноническим моделям, обеспечивающем развязку влияния разных компонентов возмущений. Решение этих задач приводится в главе 4.

4. Разработка метода синтеза MPC управления с адаптивным горизонтом прогнозирования (задача  $P_{\delta}(t, \delta, t + \tau, r)$ ) на основе оценки времени первого выхода траектории возмущений на границу допустимой области, полученной через анализ больших уклонений.

5. Разработка метода ситуационного прогнозирования, основанного на распознавании типовых и редких сценариев возмущений, полученных через анализ больших уклонений, с последующей оценкой риска выхода системы в критические состояния и адаптивным выбором режимов управления. Решение задач 4, 5 представлено в главе 5.

## **Глава 2. Канонические преобразования нелинейных систем в SDC-представлении для задач управления и оценивания**

Канонические преобразования обычно используются именно для упрощения систем и перехода к моделям (в т.ч. редуцированным) с канонической формой динамики. Это позволяет существенно упростить решение многих задач. Например, приводя систему к канонической форме управляемости, достаточно просто обеспечить ее стабилизацию через модальное управление, что показано в [35, 36, 92, 256, 257] и многих других работах. Собирая все нелинейные члены в функциональных строках матрицы преобразованной системы, которые затем можно явным образом компенсировать в управлении, т.е. решить задачу линеаризации обратной связью, позволяет в конечном счете упростить синтез управления. В [28, 29, 31] показано как инструмент преобразований нелинейных систем с возмущениями позволяет перейти к редуцированным моделям, не подверженным влиянию отдельных компонентов возмущений. Это позволяет отдельно рассматривать влияние различных возмущающих факторов на систему и оценивать их для последующего учета.

В данной главе рассматриваются несколько постановок задач синтеза преобразований нелинейных динамических систем в канонические формы, которые упрощают синтез управлений на основе линеаризации обратной связью и наблюдателей на основе развязки возмущений.

### **2.1. Канонические преобразования нелинейных систем в SDC-представлении**

#### **2.1.1. Каноническое преобразование невозмущенных нелинейных систем с векторным управлением**

Рассматривается нелинейная аффинная система в SDC-представлении:

$$\dot{x}(t) = A(x)x + B(x)u, \quad (2.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния;  $u \in \mathbb{R}^r$  – вектор управления. Матрицы  $A(x)$  –  $(n \times n)$  и  $B(x)$  –  $(n \times r)$  непрерывны и дифференцируемы имеют ограниченные производные.

Предположим, что система (2.1) равномерно управляема, т.е. матрица управляемости  $W(x) = (B(x) \quad L_1(x)B(x) \quad \dots \quad L_{n-1}(x)B(x))$  имеет ранг  $n$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n, t \geq t_0$ . Здесь  $L_i(x)$  – матрица  $i$ -й Ли производной вектора состояния в силу системы  $\dot{x}(t) = A(x)x$ , т.е.  $L_0(x) = I$ ,  $L_1(x) = A(x)$ ,  $L_{i+1}(x) = \frac{dL_i}{dt} + L_i(x)A(x), i \geq 1$  [35].

Для управляемой системы (2.1) требуется найти каноническое преобразование подобия

$$z = T(x)x, x = T^{-1}(x)z, \quad (2.2)$$

которое приводит ее к блочному каноническому виду.

Преобразование подобия  $T(x)$  строится из независимых столбцов матрицы управляемости  $W(x)$ . Первым шагом в построении данного преобразования подобия является выбор  $n$  линейно независимых векторов из  $n \times r$  столбцов матрицы управляемости  $W(x)$ .

С системой (2.1) будем ассоциировать  $n$  чисел  $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$  [84] (здесь зависимость от  $x$  опустим для сокращения записи):

$$r_0 = \text{rank } B, 1 \leq j \leq n - 1, \\ r_j = \text{rank}(B, AB, \dots, A^j B) - \text{rank}(B, AB, \dots, A^{j-1} B),$$

Кроме того,  $0 \leq r_j \leq r$  для  $0 \leq j \leq n - 1$  и  $\sum_{j=0}^{n-1} r_j = n, r_0 \geq r_1 \geq \dots \geq r_{n-1}$ .

С каждым столбцом  $B(x)$  можно связать числа  $p_i$  ( $p_i$  – это число  $r_j \geq i$ ,  $i = \overline{1, r_0}$ ), такие что  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{r_0} > 0, \sum_{i=1}^{r_0} p_i = n$ .

На их основе можно выбрать  $n$  линейно независимых векторов, которые содержат столбцы матрицы  $G(x)$  с  $r_0$  группами столбцов, т.е. вектора  $g_{ip_i}$ :

$$G(x) = (g_{11}, \dots, g_{1p_1}, \dots, g_{r_0 1}, \dots, g_{r_0 p_{r_0}}),$$

$$g_{i(k+1)}(x) = L_k(x)b_i(x) - C_k^1 \frac{d}{dt} (L_{k-1}(x)b_i(x)) + \\ C_k^2 \frac{d^2}{dt^2} (L_{k-2}(x)b_i(x)) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} b_i(x), i = \overline{1, r_0}, k = \overline{0, p_i}.$$

где  $C_k^j$  – биномиальные коэффициенты  $(k, j)$ .

Тогда матрица преобразования определяется из

$$T(x) = (t_{11}^T, \dots, t_{1p_1}^T, \dots, t_{r_0 1}^T, \dots, t_{r_0 p_i}^T)^T, \\ t_{i(k+1)} = \frac{d^k}{dt^k} (\bar{G}) + C_k^1 \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \bar{G} L_1(x) + \dots + \bar{G} L_k(x), \quad (2.3) \\ i = \overline{1, r_0}, k = \overline{0, p_i}, \bar{G} = e_{in}^T G^{-1}(x),$$

где  $e_{in}$  –  $n$ -вектор,  $i$ -ый элемент которого равен 1, а все остальные – 0 (частный случай  $e_n$  –  $n$ -вектор  $n$ ,  $n$ -ый элемент которого равен 1, и все остальные – 0).

Применяя к системе (2.1) преобразование (2.2), (2.3), получим

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}(z)z + \tilde{B}(z)u, \quad (2.4) \\ \tilde{A}(z) = T(x)A(x)T^{-1}(x) + \dot{T}(x)T^{-1}(x), \tilde{B}(z) = T(x)B(x),$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} J_{r_0} & E_{r_0 r_1} & \dots & E_{r_0(r_{n-1})} \\ E_{r_1 r_0} & J_{r_1} & E_{r_1 r_2} & \dots & E_{r_1(r_{n-1})} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ E_{(r_{n-2})r_0} & \dots & J_{(r_{n-2})} & E_{(r_{n-2})(r_{n-1})} \\ E_{(r_{n-1})r_0} & \dots & E_{(r_{n-1})(r_{n-2})} & J_{(r_{n-1})} \end{pmatrix}, \\ \tilde{B} = \begin{pmatrix} e_{p_1 p_1} & B_{12} & \dots & B_{1r} \\ 0 & e_{p_2 p_2} & \dots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{p_{r_0} p_{r_0}} \end{pmatrix}, J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{k1}(x) & a_{k2}(x) & \dots & a_{kk}(x) \end{pmatrix}, \\ E_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{k1}(x) & \dots & a_{kl}(x) \end{pmatrix}, B_{km} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Размеры матриц из последнего выражения приведены ниже:

$$J_k - (k \times k), E_{kl} - (k \times l), B_{km} - (k \times 1),$$

$$k = r_0, r_1, \dots, r_{n-1}; l = r_0, r_1, \dots, r_{n-1}; m = 2, 3, \dots, r.$$

Полученный результат можно представить в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.1.** Предположим, что матрица  $G(x)$  в (2.3) невырожденная, и система (2.1) является полностью равномерно управляемой, т.е.  $\text{rank } W(x) = n$  для  $x \in \mathbb{R}^n$ . Тогда матрица  $T(x)$  преобразования подобия (2.2), (2.3) преобразует систему (2.1) к каноническому виду (2.4).

**Доказательство.** Условие полной равномерной управляемости  $\text{rank } W(x) = n$  гарантирует существование  $n$  линейно независимых столбцов в матрице  $W(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ . Эти столбцы образуют матрицу  $G(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , которая по условию теоремы невырождена.

Для доказательства невырожденности  $T(x)$  рассмотрим вспомогательную матрицу  $V(x) = T(x)G(x)$ . Используя рекуррентные формулы (2.3) и определение векторов  $g_{ji}$ , можно показать, что  $V(x)$  является блочно-верхнетреугольной с единичными блоками на диагонали. Следовательно,  $\det V(x) = 1$ , откуда следует, что  $\det T(x) \neq 0$  для всех  $x$ , т.е.  $T(x)$  обратима.

Применим преобразование  $z = T(x)x$ . Дифференцируя, получим:

$$\dot{z} = \dot{T}(x)x + T(x)\dot{x} = \dot{T}(x)x + T(x)(A(x)x + B(x)u) = (\dot{T}(x) + T(x)A(x))x + T(x)B(x)u.$$

Подставляя  $x = T^{-1}z$ , получаем:

$$\dot{z} = (\dot{T}(x)T^{-1}(x) + T(x)A(x)T^{-1}(x))z + T(x)B(x)u = \tilde{A}(z)z + \tilde{B}(z)u,$$

где  $\tilde{A}(z) = \dot{T}(x)T^{-1}(x) + T(x)A(x)T^{-1}(x)$ ,  $\tilde{B}(z) = T(x)B(x)$ .

В силу построения строк  $t_{i(k+1)}$  по формулам (2.3) и свойств операторов  $L_k(x)$ , матрица  $\tilde{A}(z)$  приобретает блочную форму с блоками  $J_k$  и внедиагональными блоками  $E_{kl}$ , а матрица  $\tilde{B}(z)$  становится блочно-верхнетреугольной с единичными блоками  $e_{p_i}$  на диагонали. Это непосредственно следует из группировки строк и столбцов в соответствии с числами  $p_i$  и структуры производных Ли. Таким образом, преобразованная система имеет в точности вид (2.4), что и требовалось доказать.

**Замечание 2.1.** Теорема 2.1 требует  $\det G(x) \neq 0$  для всех  $x$ . В практических задачах это условие может нарушаться в отдельных точках. В таких случаях возможно использовать следующие подходы: переключаемый регулятор, использующий другой закон управления в особой точке; гладкое продолжение – построение нового преобразования, невырожденного всюду; применение метода только вдоль траекторий, избегающих особых точек.

Матрица  $\tilde{B}(x)$  может быть представлена в виде

$$\tilde{B}(x) = \hat{B}\hat{C}, \hat{C} = (r \times r),$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} e_{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_{p_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{p_{r_0}} \end{pmatrix}, \hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $\hat{C}$  не вырождена, то можно предложить новую систему ввода управления  $\hat{u} = \hat{C}u$ . С учетом этого можно сформировать линеаризующую обратную связь (ЛОС) для канонической системы (2.4) в виде

$$u(z) = \hat{C}^{-1}\hat{u} = \hat{C}^{-1}(u_{FL}(z) + v(z)),$$

$$u_{FL}(z) = K(z)z, K = - \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1(n-1)} & k_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \dots & k_{r(n-1)} & k_{rn} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Вместо элементов  $k_{ij}$  в (2.5) необходимо взять соответствующие элементы матриц  $J_k, E_{kl}$ .

### 2.1.2. Каноническое преобразование сингулярно возмущенных систем

В постановке задачи рассматривается непрерывная сингулярно возмущенная система в SDC-представлении:

$$E(\varepsilon)\dot{x}(t) = A(x)x + B(x)u, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^1,$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, E(\varepsilon) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon I_2 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1(x) \\ B_2(x) \end{pmatrix},$$

где  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $n_1 + n_2 = n$ ;  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$  – матрицы соответствующих размеров, зависящие от состояния;  $I_1, I_2$  – единичные матрицы соответствующих размеров;  $\varepsilon > 0$  – малый параметр.

Ставится задача найти такое невырожденное преобразование подобия

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T(x)x = \begin{pmatrix} T_1(x_1) & 0 \\ 0 & T_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

с помощью которого систему (2.6) можно преобразовать к сингулярно возмущенному каноническому виду

$$E(\varepsilon)\dot{z} = \tilde{A}_C(z)z + B_C(z)u, \quad (2.8)$$

где

$$\tilde{A}_C(z) = \begin{pmatrix} T_1 A_{11} T_1^{-1} + \dot{T}_1 T_1^{-1} & T_1 A_{12} T_2^{-1} \\ T_2 A_{21} T_1^{-1} & T_2 A_{22} T_2^{-1} + \varepsilon \dot{T}_2 T_2^{-1} \end{pmatrix}, B_C(z) = \begin{pmatrix} T_1 B_1 \\ T_2 B_2 \end{pmatrix}.$$

Преобразование (2.8) будем строить так, чтобы выполнялись два условия:

У.1.  $\tilde{A}_C(z) = A_C(z) + \varepsilon A_D(z)$ , где  $A_C(z)$  есть матрица Фробениуса с последней функциональной строкой, т.е.

$$A_C = \begin{pmatrix} J_1 & E_{12} \\ E_{21} & J_2 \end{pmatrix}, J_1 = \begin{pmatrix} 0 & I_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n_2} \end{pmatrix}, E_{12} = e_{n_1} e_{1n_2}^T, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{11} \dots a_{1n_1} \end{pmatrix}.$$

У.2. Матрица  $B_C = T(x)B(x) = (0 \quad e_{n_2}^T)^T$ .

Исходя из данных условий, перейдем к определению преобразования (2.8) и к синтезу ЛОС, которую, следуя технологии композиционного синтеза для сингулярно возмущенных систем [181, 208], представим в виде композиции для медленной и быстрой подсистем:

$$u = u_f + C_S u_S, \quad (2.9)$$

где  $u_f, u_S$  – соответственно ЛОС для быстрой и медленной подсистем;  $C_S \neq 0$  – корректирующий коэффициент, позволяет сделать независимым определение  $u_S$ .

**Предположение 2.1.** Часть системы (2.6), описывающая быстрые движения, представима в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x}_2(t) &= \bar{A}_{22}(x)x_2 + B_2(x)u, \\ \bar{A}_{22}(x)x_2 &= A_{21}(x)x_1 + A_{22}(x)x_2,\end{aligned}\quad (2.10)$$

и матрицы  $\bar{A}_{22}(x)$  и  $B_2(x)$  непрерывны, дифференцируемы и имеют ограниченные производные. Пара  $(\bar{A}_{22}(x), B_2(x))$  является управляемой поточечно по  $x$ , т.е.  $\exists \mu > 0$ , такое что  $|\det(W_2(x))| > \mu > 0$ , где  $W_2(x)$  – матрица управляемости для пары  $\bar{A}_{22}(x), B_2(x)$  [36].

Введем в рассмотрение производящий вектор  $T_2(x)$  для быстрых переменных состояния и обозначим (здесь нижний индекс в квадратных скобках показывает номер элемента вектора, зависимость от  $x$  также будем опускать для сокращения записи, где это необходимо)

$$\begin{aligned}z_{2[1]} &= T_{2[1]}x_2, \quad z_{2[2]} = T_{2[1]}\bar{A}_{22}x_2, \dots, z_{2[n_2]} = T_{2[1]}\bar{A}_{22}^{n_2-1}x_2, \\ \dot{z}_{2[1]} &= \varepsilon^{-1}(z_{2[2]} + T_{2[1]}B_2u) + \dot{T}_{2[1]}x_2, \\ \dot{z}_{2[2]} &= \varepsilon^{-1}(z_{2[3]} + T_{2[1]}\bar{A}_{22}B_2u) + \dot{T}_{2[1]}\bar{A}_{22}x_2 + T_{2[1]}\dot{\bar{A}}_{22}x_2, \\ &\quad \vdots \\ \dot{z}_{2[n_2]} &= \varepsilon^{-1}(T_{2[1]}\bar{A}_{22}^{n_2}x_2 + T_{2[1]}\bar{A}_{22}^{n_2-1}B_2u) + \dot{T}_{2[1]}\bar{A}_{22}^{n_2-1}x_2 + T_{2[1]}\dot{\bar{A}}_{22}^{n_2-1}x_2.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Предположим также

$$T_{2[1]}(x)\bar{A}_{22}^i(x)B_2(x) \equiv 0, i = \overline{0, n_2 - 2}, T_{2[1]}(x)\bar{A}_{22}^{n_2-1}(x)B_2(x) \equiv 1. \quad (2.12)$$

Учитывая (2.12), соотношения (2.11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{z}_{2[1]} &= z_{2[2]} + \varepsilon \dot{T}_{2[1]}x_2, \\ \varepsilon \dot{z}_{2[2]} &= z_{2[3]} + \varepsilon(\dot{T}_{2[1]}\bar{A}_{22}x_2 + T_{2[1]}\dot{\bar{A}}_{22}x_2), \\ &\quad \vdots \\ \varepsilon \dot{z}_{2[n_2]} &= T_{2[1]}\bar{A}_{22}^{n_2}x_2 + T_{2[1]}\bar{A}_{22}^{n_2-1}B_2u + \\ &\quad \varepsilon(\dot{T}_{2[1]}\bar{A}_{22}^{n_2-1}x_2 + T_{2[1]}\dot{\bar{A}}_{22}^{n_2-1}x_2).\end{aligned}\quad (2.13)$$

Из (2.13) получаем матрицу преобразования подобия  $z_2 = T_2(x)x_2$ ,  $x_2 = T_2^{-1}(x)z_2$ :

$$T_2(x) = \begin{pmatrix} T_{2[1]}(x) \\ T_{2[1]}(x)\bar{A}_{22} \\ \dots \\ T_{2[1]}(x)\bar{A}_{22}^{n_2-1} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Применяя (2.14) к (2.10), получим:

$$\varepsilon \dot{z}_2(t) = (A_{2C} + A_{2F}(x))z_2 + \varepsilon \dot{T}_2(x)T_2^{-1}(x) + B_{2C}u, \quad (2.15)$$

где  $A_{2C} = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_{2F}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ T_{2[1]}(x)\bar{A}_{22}^{n_2}(x)T_2^{-1}(x) \end{pmatrix}$ ,  $B_{2C} = e_{n_2}$ .

Заметим, что условие (2.12) приводит к  $B_{2C} = T_2 B_2 = e_{n_2}$ , откуда можно найти  $T_{2[1]}$ :

$$T_{2[1]} = e_{n_2}^T W_2^{-1}(x), \quad (2.16)$$

где  $W_2(x)$  является невырожденной для всех  $x$  в силу предположения 2.1.

Условия (2.12) можно переписать в матричной форме как  $T_2 B_2 = e_{n_2}$ , где  $T_2$  определена в (2.14). Действительно, поскольку  $T_2$  имеет блочную структуру, её умножение на  $B_2$  даёт столбец, в котором первые  $n_2 - 1$  элементов равны нулю в силу (2.12), а последний равен единице. Отсюда с учётом (2.14) и определения  $W_2(x)$  получаем явное выражение (2.16).

В преобразованной системе (2.15) малый параметр  $\varepsilon$  возникает при  $\dot{T}_2 T_2^{-1}$ , следовательно при вырождении производная матрицы преобразования не будет оказывать влияния. Тогда для расчета  $T_2$  можно вместо (2.14), (2.16) воспользоваться формулой  $T_2(x) = W_2^{-1}(x)W_{2C}(z)$ , где  $W_{2C}(z)$  определяется через характеристическое уравнение для  $\bar{A}_{22}$ .

Композитная ЛОС (2.9) для системы (2.15) будет иметь вид

$$\begin{aligned} u &= u_f + C_S u_S = (G_{2FL} + G_{2ST})z_2 - G_{2ST[1]}u_S, \\ G_{2FL} &= -T_{2[1]}(x)\bar{A}_{22}^{n_2}(x)T_2^{-1}(x), C_S = -G_{2ST[1]}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $G_{2ST}$  выбирается так, чтобы  $Re \lambda (A_{2C} + B_{2C}G_{2ST}) < 0$  ( $\lambda$  – собственные числа матрицы) и  $G_{2ST[1]} \neq 0$ .

**Предположение 2.2.** Коэффициенты матриц  $B_1(x_1, x_2)|_{x_2=T_2^{-1}z_2}$ ,  $A_{11}(x_1, x_2)|_{x_2=T_2^{-1}z_2}$  и  $\bar{A}_{12}(x_1, x_2)|_{x_2=T_2^{-1}z_2}$  не зависят от  $z_{2[1]}$  и имеет место представление  $A_{12}(x_1, x_2)x_2 = \bar{A}_{12}(x_1, x_2)T_{2[1]}(x_1, x_2)x_2$ . Для типовых АПО, где кинематика линейна по скоростям ( $\dot{x}_1 = f(x_1)x_2$ ), это условие выполняется автоматически и является естественным.

В условиях предположения 2.2, применяя (2.17), (2.7) к системе (2.8), получим:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_{11}(x_1, z_2)x_1 + \bar{A}_{12}(x_1, z_2)z_{2[1]} + \\ &+ B_1(x_1, z_2)((G_{2FL} + G_{2ST})z_2 - G_{2ST[1]}u_S), \\ \varepsilon \dot{z}_2(t) &= (A_{2C} + B_{2C}G_{2ST})z_2 - B_{2C}G_{2ST[1]}u_S + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

Из последнего выражения при  $\varepsilon = 0$  получаем медленную подсистему:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_S(x_1)x_1 + B_S(x_1)u_S, \\ z_2 &= (u_S \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T = e_{1n_2}u_S,\end{aligned}\tag{2.18}$$

где

$$\begin{aligned}A_S(x_1) &= A_{11}(x_1, 0), \\ B_S(x_1) &= \bar{A}_{12}(x_1, 0) + B_1(x_1, 0) \left( (G_{2FL} + G_{2ST})e_{1n_2} - G_{2ST[1]} \right) = \\ &= \bar{A}_{12}(x_1, 0) + B_1(x_1, 0)G_{2FL[1]}.\end{aligned}$$

**Предположение 2.3.** Матрицы  $A_S(x)$  и  $B_S(x)$  непрерывны, дифференцируемы и имеют ограниченные производные, и система (2.18) управляемой поточечно по  $x_1$ , т.е.  $\exists \mu > 0$ , такое что  $|\det(W_S(x_1))| > \mu > 0$ , где  $W_S(x_1)$  – матрица управляемости для пары  $A_S(x), B_S(x)$  [36].

В условиях предположения 2.3 существует преобразование подобия  $z_1 = T_1(x_1)x_1$ , применяя которое к (2.18), получаем систему

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= A_{1C}(z_1)z_1 + B_{1C}u_S, \\ A_{1C} &= \begin{pmatrix} 0 & I_1 \\ a_{11} & a_{12} \dots a_{1n_1} \end{pmatrix}, B_{1C} = e_{n_1}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Каноническое преобразование  $z_1 = T_1(x_1)x_1$  подробно представлено в главе 1, приведем итоговый результат:

$$\begin{aligned} T_1(x_1) &= T_{1[i]}(x_1), i = \overline{1, n_1}, T_{1[1]}(x_1) = e_{n_1} W_S^{-1}(x_1), \\ T_{1[i+1]}(x_1) &= \frac{d^i}{dt^i} \left( T_{1[1]}(x_1) \right) + C_i^1 \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} T_{1[1]}(x_1) L_1 + \dots + T_{1[1]}(x_1) L_i. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Для удобства синтеза ЛОС для медленной подсистемы (2.19) представим матрицу  $A_{1C}(z)$  в форме  $A_{1C}(z_1) = \bar{A}_{1C} + B_{1C}P_{1C}(z_1)$ , где

$$\bar{A}_{1C} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_1-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_{1C}(z_1) = (a_{11}(z_1) \quad a_{12}(z_1) \quad \dots \quad a_{1n_1}(z_1)).$$

ЛОС для преобразованной системы (2.19) примет вид

$$u_S = (G_{1FL}(z_1) + G_{1ST})z_1 = G_1(z_1)z_1, \quad (2.21)$$

где  $G_{1FL}(z_1) = -P_{1C}(z_1)$  – составляющая ЛОС для системы (2.19);  $G_{1ST}$  выбирается так, чтобы  $Re \lambda(\bar{A}_{1C} + B_{1C}G_{1ST}) < 0$ .

Зная матрицу преобразования  $z_1 = T_1(x_1)x_1$ , из (2.21) можно определить ЛОС в переменных исходной медленной подсистемы (2.18):

$$u_S = (G_{1FL}(z_1)|_{z_1=T_1(x_1)x_1} + G_{1ST})T_1(x_1)x_1.$$

Объединяя соотношения (2.9), (2.17) и (2.20), получаем выражение для композитной стабилизирующей ЛОС в переменных исходной системы (2.6):

$$\begin{aligned} u &= (G_{2FL}(z_2)|_{z_2=T_2(x)x_2} + G_{2ST})T_2(x)x_2 - \\ &G_{2ST[1]}[(G_{1FL}(z_1)|_{z_1=T_1(x_1)x_1} + G_{1ST})T_1(x_1)x_1], \end{aligned} \quad (2.22)$$

или в обозначениях преобразованной системы (2.8):

$$u = (G_{2FL}(z_2) + G_{2ST})z_2 - G_{2ST[1]}(G_{1FL}(z_1) + G_{1ST})z_1, \quad (2.23)$$

Для анализа устойчивости сингулярно возмущенной системы (2.6), замкнутой композитной стабилизирующей ЛОС (2.23) рассмотрим систему (2.6) с учетом предположений 2.1 и 2.2:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}(x)x_1 + \bar{A}_{12}(x)T_{2[1]}(x)x_2 + B_1(x)u, \\ \varepsilon \dot{x}_2(t) &= \bar{A}_{22}(x)x_2 + B_2(x)u, \end{aligned}$$

к которой применим преобразование (2.7):

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= (T_1 A_{11} T_1^{-1} + \dot{T}_1 T_1^{-1})z_1 + T_1 \bar{A}_{12} T_{2[1]} T_2^{-1} z_2 + T_1 B_1 u, \\ \varepsilon \dot{z}_2(t) &= T_2 \bar{A}_{22} T_2^{-1} z_2 + T_2 B_2 u + \varepsilon \dot{T}_2 T_2^{-1} z_2. \end{aligned}$$

С учетом (2.18), (2.19) и  $T_{2[1]}T_2^{-1} = e_{n_2 1}^T$  последние выражения можно переписать

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= (T_1 A_{11} T_1^{-1} + \dot{T}_1 T_1^{-1}) z_1 + T_1 \bar{A}_{12} e_{n_2 1}^T z_2 + T_1 B_1 u, \\ \varepsilon \dot{z}_2(t) &= (A_{2C} + A_{2F}) z_2 + B_{2C} u + \varepsilon \dot{T}_2 T_2^{-1} z_2.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Замкнем систему (2.24) композитным управлением (2.23):

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= [T_1 A_{11} T_1^{-1} + \dot{T}_1 T_1^{-1} - T_1 B_1 G_{2ST[1]} (G_{1FL}(z_1) + G_{1ST})] z_1 + \\ &\quad [T_1 \bar{A}_{12} e_{n_2 1}^T + T_1 B_1 (\tilde{G}_{2FL}(z_2) + G_{2ST})] z_2, \\ \varepsilon \dot{z}_2(t) &= [A_{2C} + A_{2F} + B_{2C} (G_{2FL}(z_2) + G_{2ST})] z_2 - \\ &\quad B_{2C} G_{2ST[1]} (G_{1FL}(z_1) + G_{1ST}) z_1 + \varepsilon \dot{T}_2 T_2^{-1} z_2.\end{aligned}\quad (2.25)$$

Согласно [181, 208] замкнутая сингулярно возмущенная система (2.25) будет устойчивой  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ ,  $\varepsilon^* > 0$ , если устойчивы быстрая и медленная подсистемы.

**Теорема 2.2.** Пусть для сингулярно возмущенной системы (2.6) выполнены предположения 2.1, 2.2 и 2.3. Тогда существуют:

- невырожденное преобразование подобия  $T(x)$  вида (2.7), определяемое формулами (2.14) и (2.20);
- линеаризующее управление  $u$  вида (2.9), определяемое формулами (2.17) и (2.21);

такие, что преобразованная система принимает вид (2.8) и выполняются условия У1 и У2. При этом существует  $\varepsilon^* > 0$ , такое что  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$  система (2.7) с композитной стабилизирующей ЛОС (2.22) является асимптотически устойчивой.

**Доказательство.** Из предположения 2.1 следует, что пара  $(\bar{A}_{22}(x), B_2(x))$  равномерно управляема, а матрица управляемости  $W_2(x)$  невырождена при всех  $x$ . Это гарантирует существование и невырожденность матрицы  $T_{2[1]}$ , определяемой формулой (2.16). Тогда преобразование  $T_2(x)$ , заданное соотношением (2.14), корректно определено и обратимо.

Соотношения (2.12), вытекающие из построения, обеспечивают специфическую структуру матрицы  $B_{2c} = e_{n_2}$  в преобразованной быстрой подсистеме (2.15).

В силу предположения 2.2 представление  $A_{12}x_2 = \bar{A}_{12}T_2x_2$  и независимость коэффициентов от  $z_2$  позволяют разделить переменные и перейти к анализу медленной подсистемы. При  $\varepsilon = 0$  из (2.15) получаем алгебраическую связь  $\bar{z}_2 = e_{n_2}u_S$ , что приводит к медленной подсистеме (2.18).

Далее, предположение 2.3 о равномерной управляемости пары  $(A_S(x_1), B_S(x_1))$  и невырожденности матрицы  $W_S(x_1)$  позволяет по (2.20), построить невырожденное преобразование  $T_1(x_1)$ , приводящее медленную подсистему к каноническому виду (2.19).

ЛОС для быстрой и медленной подсистем задаются формулами (2.17) и (2.21) соответственно. Матрицы  $G_{2ST}$  и  $G_{1ST}$  могут быть выбраны так, чтобы спектры матриц  $[A_{2c} + B_{2c}G_{2ST}]$  и  $[\bar{A}_{1c} + B_{1c}G_{1ST}]$  располагались в левой комплексной полуплоскости, что обеспечивает асимптотическую устойчивость быстрой и медленной подсистем.

Композиция управлений (2.17) и (2.21) даёт полное управление (2.22) для исходной системы. Подстановка преобразований  $T_1(x_1)$  и  $T_2(x)$  и управления (2.22) в систему (2.6) приводит к замкнутой сингулярно возмущённой системе (2.25). Согласно [181, 208] если замкнутые быстрая и медленная подсистемы асимптотически устойчивы, то существует такое  $\varepsilon^* > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$  полная замкнутая система также будет асимптотически устойчивой. Устойчивость быстрой подсистемы следует из выбора  $G_{2ST}$ , а устойчивость медленной подсистемы – из выбора  $G_{1ST}$ , что завершает доказательство.

**Замечание 2.2.** Композитный подход к ЛОС аналогичным образом можно применить и для систем не в SDC-представлении. Приведем тут кратко основные выкладки для системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= F(x_1, x_2, u), \quad x_1(0) = x_1^0, \quad y = \phi(x_1), \\ \varepsilon \cdot \dot{x}_2(t) &= f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u, \quad x_2(0) = x_2^0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$  – переменные состояния;  $y, u \in \mathbb{R}^1$  – выход и управление, соответственно;  $F, f$  и  $g$  – равномерно непрерывные и ограниченные гладкие векторные функции с достаточным числом производных по всем аргументам;  $\varepsilon > 0$  – малый параметр (сингулярное возмущение).

Требуется найти управление  $u$  и преобразование  $T(x_1, x_2)$ , не зависящие от параметра  $\varepsilon$  и такие, что при достаточно малом  $\varepsilon$  система (2.26) может быть с точностью до  $O(\varepsilon)$  преобразована к линейному виду относительно скалярного выхода  $y = \phi(x_1)$ .

Предполагая существование функции  $T_{f_1}(x_1, x_2)$ :

$$L_g L_f^{i-1} T_{f_1}(x_1, x_2) = 0, \quad i = \overline{1, n_2 - 1}; \quad L_g L_f^{n_2-1} T_{f_1}(x_1, x_2) \neq 0,$$

где  $L_f \phi(x_1, x_2) = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x_1, x_2)$ , можно показать, что существует диффеоморфизм

$$z_2 = T_f(x_1, x_2) = \text{col}(T_{f_1}(x_1, x_2), \dots, L_f^{n_2-1} T_{f_1}(x_1, x_2)), \quad (2.27)$$

который преобразует второе уравнение системы (2.26) к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot \dot{z}_2(t) &= A_{fc} z_2 + B_{fc} a_f(x_1, x_2) (u - b_f(x_1, x_2)) + \\ &\quad \varepsilon \cdot \frac{\partial T_f(x_1, x_2)}{\partial x} F(x_1, x_2, u), \end{aligned} \quad (2.28)$$

где  $(A_{fc}, B_{fc})$  – каноническая пара в форме Бруновского и

$$a_f(x_1, x_2) = L_g L_f^{n_2-1} T_{f_1}(x_1, x_2), \quad b_f(x_1, x_2) = \frac{-L_f^{n_2} T_{f_1}(x_1, x_2)}{a_f(x_1, x_2)}.$$

Из (2.28), следуя стандартной методике ЛОС, определим

$$u(x_1, x_2) = b_f(x_1, x_2) + a_f^{-1}(x_1, x_2) (G_f z_2 - G_{f_1} u_s(x_1)). \quad (2.29)$$

Медленная подсистема получается из исходной при  $\varepsilon = 0$ :

$$\begin{aligned} \bar{z}_2 &= (G_{f1}u_s(x_1) \quad 0 \quad \dots \quad 0), \\ \dot{x}_s(t) &= F_s(x_s, u_s) = F(x_s, \bar{z}_2, u_s), x_s(0) = x^0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

В предположении, что система (2.30) имеет относительную степень  $r = n_1$  в точке  $(x_1^0, u_s^0)$ , т.е. существует диффеоморфизм

$$z_1 = T_s(x_s) = \{T_s^k(x_s)\}, k = 1, 2, \dots, r, T_s^k(x_s) = L_{F_s}^{k-1}\phi(x_s), 1 \leq k \leq n_1.$$

Пусть уравнение  $\vartheta(z_1, u_s) = L_{F_s}^{n_1}\phi(T_s^{-1}(z_1), u_s)$  имеет аналитическое решение  $u_s = \psi(z_1, v_s)$ . С учетом этого и соотношения (2.29) получаем ЛОС

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= b_f(x_1, x_2) + \\ & a_f^{-1}(x_1, x_2) \left( G_f z_2 - G_{f1} \psi(z_1, v_s) \right) \Big|_{z_1=T_s(x_1), z_2=T_f(x_1, x_2)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Аналог теоремы 2.2. для системы (2.26) с композитной ЛОС (2.31) доказан автором в [52]. Композитное управление (2.31) не зависит от малого параметра  $\varepsilon$ , который может рассматриваться в роли неопределенности в системе [49], и в этом смысле система (2.26) с регулятором (2.31) будет обладать робастными свойствами при условии устойчивости медленной и быстрой подсистем, чего можно достичь соответствующим выбором  $u_f$  и  $u_s$ . Также при соответствующем выборе коэффициентов регулятора можно добиться полной робастной устойчивости к параметру сингулярных возмущений ( $\varepsilon^* = \infty$ ) [56], что можно использовать при синтезе управления для невозмущённых систем путем фиктивного введения параметра  $\varepsilon$ . Кроме того, для случая систем с  $\varepsilon > 1$  (или с фиктивным параметром) построение асимптотики композитного регулятора можно реализовать на основе Паде-аппроксимации, которая позволяет получить асимптотические приближения как при больших, так и при малых значениях параметра возмущений [99, 100].

**Замечание 2.3.** Каноническое преобразование нелинейной SDC-системы (2.1) с выходом  $y = C(x)x \in \mathbb{R}^m$  к наблюдаемой форме можно выполнить, воспользовавшись принципом дуальности. Для этого рассмотрим дуальную систему:

$$\dot{\eta} = -A^T(x)\eta + C(x)^T v, \quad \psi = B^T(x)\eta,$$

где  $\eta \in \mathbb{R}^n$  – вектор дуальных переменных состояния,  $v \in \mathbb{R}^m$  – новое управление,  $\psi \in \mathbb{R}^r$  – выход дуальной системы. Эта система имеет ту же структуру, что и (2.1), но с матрицами  $\tilde{A}(\psi) = -A^T(x)$ ,  $\tilde{B}(\psi) = C(x)^T$ .

Пусть матрица преобразования  $T_{\text{dual}}$  строится по правилам раздела 2.1 для дуальной системы. Тогда для исходной системы преобразование  $z = T_{\text{dual}}^T(x)x$  является невырожденным и приводит её к наблюдаемой форме, где матрица динамики имеет форму Фробениуса, а выход выражается через новые координаты. Таким образом, задача построения наблюдаемой формы полностью сводится к уже решённой задаче построения формы управляемости для дуальной системы.

## 2.2. Канонические преобразования нелинейных систем в SDC-представлении с аддитивными возмущениями

Рассматривается нелинейная динамическая система с двумя типами внешних воздействий:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(x)x(t) + B(x)u(t) + G_1\xi_1(t) + G_2\xi_2(t), \\ y(t) &= h(x),\end{aligned}\tag{2.32}$$

где входные сигналы возмущения  $\xi_1(t) \in \mathbb{R}^q$  (подлежит оценке)  $\xi_2(t) \in \mathbb{R}^p$  (должен быть исключен) предполагаются ограниченными и неизвестными; матрицы  $G_1 \in \mathbb{R}^{n \times q}$  и  $G_2 \in \mathbb{R}^{n \times p}$  – постоянные матрицы при возмущениях;  $y = h(x)$  – скалярная функция выхода, которая в преобразованной модели будет линеаризована или переопределена; остальные обозначения соответствуют принятым ранее.

Цель – построить редуцированную динамическую модель порядка  $k \leq n$ , которая обладает следующими свойствами:

1. Вектор  $\xi_2(t)$  полностью исключён из уравнений модели;
2. Вектор  $\xi_1(t)$  сохранён в модели и входит линейным образом;

3. Каноническая форма: матрица динамики объекта приведена к форме Фробениуса с последней функциональной строкой;

4. Преобразованная система позволяет восстановить возмущение  $\xi_1$  из измеряемого выхода  $u$ .

В указанных требованиях важную роль играют первые два, которые, по сути, реализуют логико-динамический подход [32, 34], т.е. позволяют получить модель, нечувствительную к определенным возмущениям, тем самым разделяя их. Ниже представлено несколько подходов к синтезу указанного преобразования.

Первоначально анализируется матрица  $G_2$  возмущения  $\xi_2$ . Вычисляется её ранг:  $l = \text{rank}(G_2)$ . Если  $l = n$  (полный ранг), то возмущение действует по всем направлениям пространства состояний. В этом случае полное исключение  $\xi_2$  посредством преобразования невырожденных координат невозможно – любое преобразование  $T(x)$  сохранит влияние  $\xi_2$ . Если  $l < n$  (неполный ранг), существуют направления в пространстве состояний, которые не возбуждаются возмущением  $\xi_2$ . Размер таких направлений:  $k = n - l > 0$ . В этом случае редуцирование возможно.

Поскольку  $l < n$ , вводится подпространство, ортогональное подпространству действия возмущения:  $\mathcal{L}^\perp = \ker(G_2^T) = \{v \in \mathbb{R}^n : G_2^T v = 0\}$ . Это подпространство имеет размерность  $n - l = k$ .

Строится матрица  $Q \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , столбцы которой образуют ортонормированный базис подпространства  $\mathcal{L}^\perp$ . Матрица  $Q$  удовлетворяет условиям:

$$G_2^T Q = 0_{p \times k}, Q^T Q = I_k, \quad (2.33)$$

где  $0_{p \times k}$  – нулевая матрица  $p \times k$ ,  $I_k$  – единичная матрица  $k \times k$ .

Затем определяются новые переменные, инвариантные относительно возмущения  $\xi_2$ :  $\eta = Q^T x \in \mathbb{R}^k$ . Дифференцируя  $\eta$ , имеем

$$\dot{\eta} = Q^T \dot{x} = Q^T [A(x)x + B(x)u + G_1 \xi_1 + G_2 \xi_2].$$

Далее, применяя свойство  $Q^T G_2 = 0$ , получаем

$$\dot{\eta} = Q^T A(x)x + Q^T B(x)u + Q^T G_1 \xi_1.$$

Таким образом, в уравнении для  $\eta$  возмущение  $\xi_2$  полностью исключено. Однако, уравнение для  $\eta$  содержит  $x$ , которое необходимо выразить через  $\eta$  и дополнительные координаты, т.е. выполнить замыкание уравнений.

Для получения замкнутой системы относительно  $\eta$ , выбирается дополнительная матрица  $P \in \mathbb{R}^{n \times l}$  так, чтобы матрица  $T_0 = [Q \ P]$  была ортогональной, т.е.  $T_0^T T_0 = I$ . Тогда полный вектор состояния можно выразить  $x = T_0 \begin{pmatrix} \eta \\ \mu \end{pmatrix} = Q\eta + P\mu$ , где  $\mu(t) \in \mathbb{R}^l$  – дополнительные координаты, соответствующие направлениям, возбуждаемым возмущением  $\xi_2$ .

Подставляя это разложение в уравнение для  $\eta$ , имеем

$$\dot{\eta} = Q^T A(x)Q\eta + Q^T A(x)P\mu + Q^T B(x)u + Q^T G_1 \xi_1.$$

Чтобы система не зависела от  $\mu$  (автономность системы по  $\eta$ ), необходимо выполнение условия  $Q^T A(x)P = 0_{k \times l} \forall x$ . Оно означает, что направления, определяемые столбцами  $P$ , ортогональны к образам столбцов  $A(x)Q$  в смысле проекции на строки  $Q^T$ . Это условие является дополнительным структурным условием, а не универсальным свойством. Для постоянной матрицы  $P$  достаточным критерием существования является

$$\dim(\bigcap_{x \in \mathcal{D}} \ker(Q^T A(x))) \geq n - l,$$

где  $\mathcal{D}$  – рабочая область. Если требуется найти  $P(x)$ , зависящую от состояния, можно выбрать  $P(x) \in \ker(Q^T A(x))$  поточечно (если размерность ядра не меньше  $n-l$ ). Если это условие не выполняется, то точная редукция невозможна, тогда возможно решить задачу приближённо (например, через минимизацию  $\|Q^T A(x)P\|$  по  $x$  в рабочей области). В дальнейшем предполагаем, что условие автономности по  $\eta$  выполнено, тогда уравнение для  $\eta$  принимает вид:

$$\dot{\eta} = Q^T A(x)Q\eta + Q^T B(x)u + Q^T G_1 \xi_1.$$

Матрицы  $A(x)$  и  $B(x)$  все еще зависят от полного вектора  $x$ . Для замкнутости нужно, чтобы они зависели только от  $\eta$ , следовательно должны быть соблюдены условия  $\tilde{A}(\eta) = Q^T A(Q\eta)Q$ ,  $\tilde{B}(\eta) = Q^T B(Q\eta)$ ,  $\tilde{D} = Q^T G_1$ . Тогда после редуцирования получим замкнутую  $k$ -мерную систему

$$\dot{\eta} = \tilde{A}(\eta)\eta + \tilde{B}(\eta)u + \tilde{G}\xi_1. \quad (2.34)$$

Исходный выход должен выражаться только через  $\eta$  (не зависеть от  $\mu$ ), что требует выполнения условия для выхода  $y = h(x) = h(Q\eta + P\mu)$ :  $\frac{\partial h}{\partial \mu} = 0$ .

Далее нужно привести редуцированную систему (2.34) к канонической форме наблюдаемости, что можно выполнить одним из рассмотренных выше методов с помощью дуального подхода (замечание 2.3).

**Теорема 2.3.** Рассмотрим систему (2.32) с аддитивными возмущениями. Пусть  $\text{rank } G_2 = l < n$ , и пусть  $Q \in \mathbb{R}^{n \times k}$  ( $k = n - l$ ) – матрица, столбцы которой образуют ортонормированный базис подпространства  $\ker G_2^T$ . Предположим, что существует матрица  $P \in \mathbb{R}^{n \times l}$  такая, что матрица  $T_0 = [Q \ P]$  ортогональная, и выполнены условия:  $Q^T A(x)P = 0_{k \times l} \forall x$ ; матрицы  $Q^T A(x)Q$  и  $Q^T B(x)$  зависят только от  $\eta = Q^T x$ ; выход  $h(x)$  не зависит от  $\mu$ , где  $x = Q\eta + P\mu$ .

Тогда преобразование  $\eta = Q^T x$  приводит к редуцированной системе (2.34), не содержащей  $\xi_2$ , которая может быть далее преобразована к канонической форме.

**Доказательство.** Условие  $\text{rank}(G_2) = l < n$  гарантирует существование подпространства  $\ker G_2^T$  ненулевой размерности  $k = n - l$ . Выбор ортонормированного базиса этого подпространства в виде столбцов матрицы  $Q$  обеспечивает выполнение условия  $Q^T G_2 = 0$ . Определение новых переменных  $\eta = Q^T x$  и их дифференцирование с учётом (2.33) приводит к уравнению

$$\dot{\eta} = Q^T A(x)x + Q^T B(x)u + Q^T G_1 \xi_1.$$

В силу свойства  $Q^T G_2 = 0$  возмущение  $\xi_2$  исключается из этого уравнения. Для замыкания уравнений относительно  $\eta$  необходимо выразить полный вектор состояния  $x$  через новые координаты. Введение дополнительной матрицы  $P$  такой, что  $T_0 = [Q \ P]$  ортогональная, позволяет представить  $x = Q\eta + P\mu$ . Подстановка этого представления в уравнение для  $\dot{\eta}$  даёт

$$\dot{\eta} = Q^T A(x)Q\eta + Q^T A(x)P\mu + Q^T B(x)u + Q^T G_1 \xi_1.$$

Условие  $Q^T A(x)P = 0$  устраняет зависимость от  $\mu$ , обеспечивая автономность уравнения для  $\eta$ . Условия независимости матриц  $Q^T A(x)Q$  и  $Q^T B(x)$  от  $\mu$  позволяет записать замкнутую редуцированную систему (2.34). Условие независимости выхода от  $\mu$  обеспечивает наблюдаемость в новых координатах. Полученная система (2.34) представляет собой редуцированную модель порядка  $k$ , инвариантную к возмущению  $\xi_2$ , что завершает доказательство.

**Замечание 2.4.** Если рассматривать невырожденное преобразование  $T(x)$  из раздела 2.1, то для исключения  $\xi_2$  из первых  $k$  уравнений системы необходимо  $T_{i+1}(x)G_2 = 0$ . Это позволяет получить редуцированную модель порядка  $k$ , которая не содержит  $\xi_2$  и имеет каноническую структуру Фробениуса.

## 2.3. Демонстрационные примеры

### 2.3.1. Управление траекторным движением мобильного робота

Объектом управления является мобильный робот (MP) Rover5 (рис.2.1а) [56]. Силовая часть робота включает в себя два электропривода на основе двигателей постоянного тока. В качестве блока управления используется контроллер Arduino UNO. Для управления двигателями используется плата Rover5 Explorer PCB. Интерфейс беспроводной связи реализуется через USB-программируемый беспроводной модуль Wixel.

Основные параметры Rover5: длина гусеницы  $l = 0,245$ , м; радиус ведущего колеса  $r_w = 0,03$ , м; масса робота  $m = 0,83$ , кг; расстояние между гусеницами  $d = 0,19$ , м. Для измерения скорости вращения двигателей МР Rover5 оснащен двумя квадратурными энкодерами (рис.2.1б). Разрешение энкодеров составляет 1000 импульсов на 3 оборота ведущего колеса.

Кинематическая модель движения МР Rover5 в горизонтальной плоскости (рис. 2.2) имеет вид [237]:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= V \cos \phi = \frac{1}{2} \cdot \cos \phi (V_1 + V_2), \\ \dot{Y} &= V \sin \phi = \frac{1}{2} \cdot \sin \phi (V_1 + V_2), \\ \dot{\phi} &= \omega = \frac{1}{2d} \cdot (V_2 - V_1),\end{aligned}\quad (2.35)$$

где  $X, Y$  являются координатами положения МР в земной системе координат;  $V_1, V_2, V$  - линейные скорости левого и правого колес и скорость МР;  $\omega$  - угловая скорость МР;  $\phi$  - угол между вектором  $V$  и осью  $OX$ .

Пусть задана траектория МР  $p_{ref}(t) = (X_{ref}(t), Y_{ref}(t), \phi_{ref}(t))$ . Ошибки отслеживания этой траектории МР определяются как [228]

$$\begin{aligned}e_x &= X_{ref} - X, \quad e_y = Y_{ref} - Y, \quad e_\phi = \phi_{ref} - \phi, \\ e_1 &= e_x \cos \phi + e_y \sin \phi, \quad e_2 = e_y \cos \phi - e_x \sin \phi, \quad e_3 = e_\phi.\end{aligned}$$

Дифференцируя последние выражения, получаем динамическую модель ошибки отслеживания траектории МР:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= \omega_{ref} \cdot e_2 + u_1, \quad \dot{e}_2 = -\omega_{ref} \cdot e_1 + V_{ref} \cdot \sin e_3, \\ \dot{e}_3 &= u_2, \quad u_1 = V_{ref} \cdot \cos e_3 - V, \quad u_2 = \omega_{ref} - \omega.\end{aligned}\quad (2.36)$$

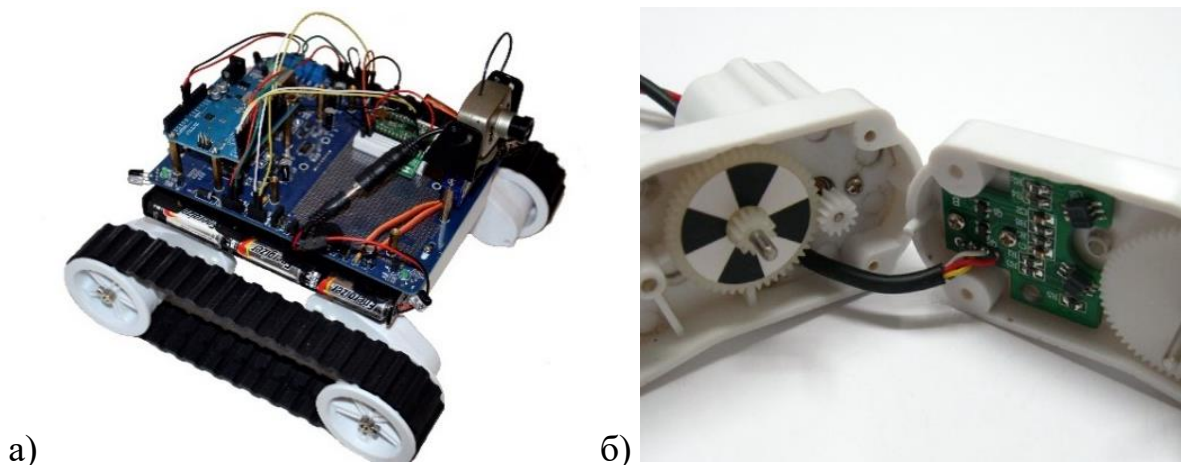


Рисунок 2.1. МР Rover5 (а); квадратурный энкодер МР Rover5 (б).

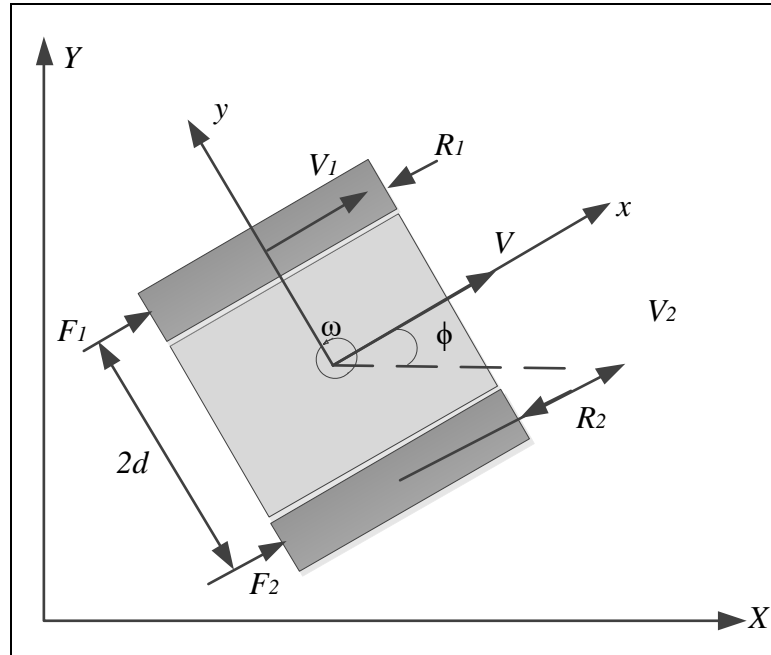


Рисунок 2.2. Постановка задачи управления траекторным движением МР

Задача состоит в том, чтобы найти управляющие входы  $u_1$  и  $u_2$ , такие, что система (2.36) будет асимптотически устойчивой, т.е.  $e_i \rightarrow 0, i = 1, 2, 3$  при  $t \rightarrow \infty$ . Контур траекторного управления спроектируем на основе преобразования из теоремы 2.1 и соответствующей ЛОС для динамической системы ошибки слежения (2.36), которая может быть записана в виде:

$$\dot{e} = A(e)e + Bu, \quad (2.37)$$

где

$$e = (e_1 \quad e_2 \quad e_3)^T, u_K = (u_1 \quad u_2)^T, \\ A(e) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{ref} & 0 \\ -\omega_{ref} & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a_{23} = V_{ref} e_3^{-1} \sin e_3.$$

Преобразование подобия (2.3) для системы (2.37) при условии управляемости пары матриц  $(A(e), B)$  (выполняется для всех  $V_{ref}, \omega_{ref}$ , кроме  $V_{ref} = 0, \omega_{ref} = 0$ ) имеет вид

$$\tilde{e} = T(e)e, T(e) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{ref}^{-1} & 0 \\ 1 & \dot{\omega}_{ref} \omega_{ref}^{-2} & a_{23} \omega_{ref}^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Применяя преобразование (2.38) к системе (2.37), получим

$$\dot{e} = \tilde{A}(e)\tilde{e} + \tilde{B}\bar{u}, u = C^{-1}\bar{u},$$

где

$$\tilde{A}(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{b}_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{a}_{21} = -\frac{\omega_{ref}\dot{\omega}_{ref} - \dot{\omega}_{ref}^2 + \omega_{ref}^4}{\omega_{ref}^2}, \tilde{a}_{22} = -\frac{\dot{\omega}_{ref}}{\omega_{ref}}, \tilde{b}_{22} = \frac{V_{ref} \sin e_3}{\omega_{ref} e_3},$$

$$\tilde{a}_{23} = \frac{\sin(e_3)(\dot{\omega}_{ref}V_{ref} - \dot{V}_{ref}\omega_{ref})}{e_3\omega_{ref}^2}.$$

Получаем результирующий закон управления

$$u = C^{-1}(K_{FL} + G_{ST})T(e)e,$$

$$K_{FL} = -\begin{pmatrix} \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G_{ST} = -\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ 0 & 0 & g_{23} \end{pmatrix}, g_{11}, g_{12}, g_{23} > 0. \quad (2.39)$$

Численные значения коэффициентов  $g_{11}, g_{12}, g_{23}$  могут быть рассчитаны методом размещения полюсов. При  $V_{ref} = const$ ,  $\omega_{ref} = const \neq 0$  имеем специальный случай:

$$T(e) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{ref}^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & a_{23}\omega_{ref}^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

и управление

$$u_2 = -g_{23}e_3, \quad u_1 = \omega_{ref}e_2 - g_{12}e_1 + \frac{g_{11}e_2 + g_{12}V_{ref} \sin(e_3) - g_{23}V_{ref} \sin(e_3)}{\omega_{ref}}.$$

Этот закон управления и преобразование (2.40) неприменимы, когда  $\omega_{ref} = 0$ . Поэтому на основе этого закона невозможно осуществить управление движением по прямой траектории. Чтобы преодолеть этот недостаток, можно умножить преобразование подобия (2.40) на  $\omega_{ref}$ , что приводит к преобразованной системе  $\dot{e} = \tilde{A}(e)\tilde{e} + \tilde{B}C^{-1}\bar{u}$ , где

$$\tilde{A}(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tilde{a}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{ref} & \tilde{b}_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_{ref} & -\tilde{b}_{22} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{a}_{21} = -\omega_{ref}^2, \tilde{b}_{22} = -a_{23}.$$

В этом случае результирующий закон управления имеет вид (2.39), где  $\tilde{a}_{22} = \tilde{a}_{23} = 0$ . Его можно записать в скалярном виде

$$u_1 = \omega_{ref}(e_2 + g_{11}e_2 + g_{12}V_{ref} \sin(e_3)) - g_{12}e_1\omega_{ref}^2 - g_{23}V_{ref} \sin(e_3),$$

$$u_2 = -g_{23}e_3.$$

Наконец, для искомым значений линейных и угловых скоростей МР имеем  $V_{req} = V_{ref} \cos(e_3) - u_1$ ,  $\omega_{req} = \omega_{ref} - u_2$ .

В качестве тестовой траектории была выбрана траектория в форме «восьмерки». В начальный момент времени робот находится в точке с координатами (0,25; -0,25), траектория начинает двигаться от точки (0,0). Частота гармонических сигналов  $X_{ref}(t)$  and  $Y_{ref}(t)$  устанавливается так, что траектория  $p_{ref}(t)$  образует «восьмерку» в течение 40 секунд.

Результаты эксперимента на реальном роботе Rover5 показаны на рисунке 2.3 – заданные и реальные траектории Rover5, требуемая линейная скорость  $V_{req}$  и реальная скорость  $V$ , требуемая угловая скорость  $\omega_{req}$  и реальная угловая скорость  $\omega$  робота. Результаты показывают, что система имеет приемлемое качество. Робот выходит на заданную траекторию за 5 секунд, затем отклонения составляют  $|e_x| \leq 0.015$ , м,  $|e_y| \leq 0.01$ , м,  $|e_\varphi| \leq 0.05$ , рад, относительная ошибка слежения не превышает 2% после достижения заданной траектории робота.

Закон управления траекторией основан на решении задачи ЛОС для модели ошибки слежения. Коэффициенты обратной связи зависят от заданных скоростей робота; при их постоянстве задача становится стационарной. Эксперимент на мобильном роботе Rover5 подтвердил приемлемое качество управления.

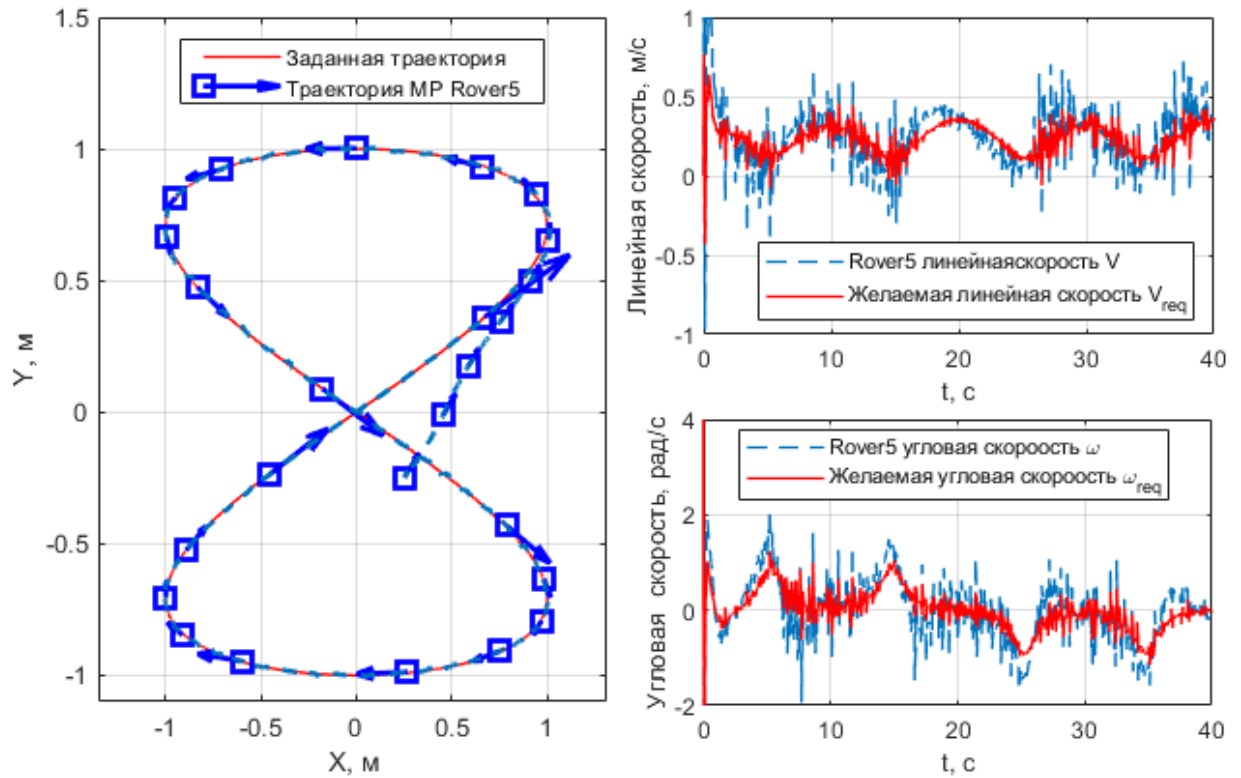


Рисунок 2.3. Результаты эксперимента: заданная и реальная траектории MP Rover5; требуемая и реальная линейная и угловая скорости

### 2.3.2. Стабилизация композитной ЛОС перевернутого маятника, управляемого двигателем постоянного тока

Рассматриваем задачу стабилизации перевернутого маятника, управляемого двигателем постоянного тока (рис.2.4) [178]. Динамические уравнения для рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned} U &= L \frac{dI}{dt} + RI + k_b \frac{d\theta}{dt}, \\ ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -mgl \sin(\theta) - k_m I, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где  $U$  – управляющее напряжение,  $L$  – индуктивность обмотки двигателя,  $I$  – ток в обмотке двигателя,  $R$  – сопротивление обмотки двигателя,  $k_b$  – электромагнитная постоянная двигателя,  $\theta$  – угол отклонения маятника,  $m$  – масса маятника,  $l$  – длина маятника,  $g$  – ускорение свободного падения,  $k_m$  – коэффициент затухания.

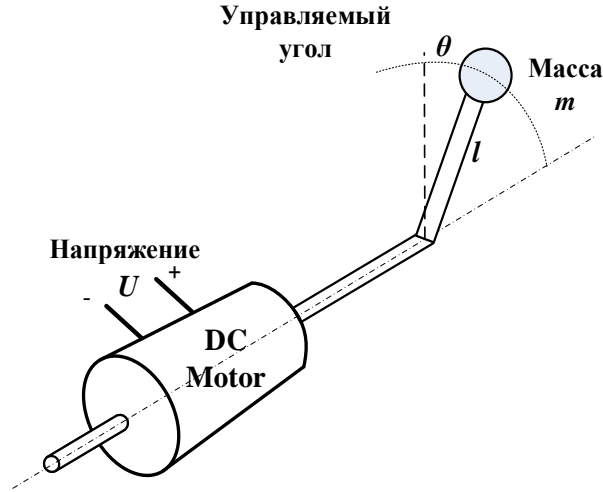


Рисунок 2.4. Перевернутый маятник, управляемый двигателем постоянного тока.

Система (2.41) представима в сингулярно возмущенном SDC-представлении (2.6) с такими параметрами

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g \sin(x_{1[1]})}{lx_{1[1]}} & 0 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k_m}{ml^2} \end{pmatrix}, A_{21} = (0 \quad -k_b), A_{22} = -R, \quad (2.42)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B_2 = 1, \varepsilon = L, x_{1[1]} = \theta, x_{1[2]} = \dot{\theta}, x_{2[1]} = I, u = U.$$

Построим для системы (2.6), (2.42) композитную ЛОС на основе теоремы 2.2. Быстрая подсистема согласно предположению 2.2 имеет вид:

$$\varepsilon \dot{x}_{2[1]} = \bar{A}_{22} x_{2[1]} + B_2 u, \bar{A}_{22} = -R - k_b x_{1[2]} x_{2[1]}^{-1}.$$

Следовательно,  $T_2 = T_{2[1]} = 1$ , и композиционная ЛОС примет вид:

$$u = (G_{2FL} + G_{2ST})z_2 - G_{2ST}u_S, z_2 = x_{2[1]}, \\ G_{2FL} = k_b x_{1[2]} x_{2[1]}^{-1} + R, G_{2ST} = -K_3, K_3 > 0. \quad (2.43)$$

Медленная подсистема с управлением (2.43):

$$\dot{x}_1(t) = A_S(x_1)x_1 + B_S u_S, A_S = A_{11}, B_S = A_{12}. \quad (2.44)$$

Матрицы управляемости и канонического преобразования для системы (2.44):

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k_m}{l^2 m} \\ -\frac{k_m}{l^2 m} & 0 \end{pmatrix}, T_1 = \begin{pmatrix} -\frac{l^2 m}{k_m} & \mathbf{0} \\ 0 & -\frac{l^2 m}{k_m} \end{pmatrix}.$$

Преобразованная медленная подсистема:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \bar{A}_{1c}(x_1)z_1 + B_{1c}u_s, \\ \bar{A}_{1c}(z_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-gl \sin(x_{1[1]})x_{1[1]}^{-1} & 0). \end{aligned} \quad (2.45)$$

ЛОС для системы (2.45) примет вид  $u_s = (G_{1FL} + G_{1ST})z_1$ , где  $G_{1FL}(z_1) = (gl \sin(x_{1[1]})x_{1[1]}^{-1} \quad 0)$ ,  $G_{1ST} = -(K_1 \quad K_2)$ ,  $K_1 > 0, K_2 > 0$ .

Объединяя последние соотношения и (2.43), получаем выражение для композитной ЛОС в обозначениях исходной системы:

$$u = k_b x_{1[2]} + R x_{2[1]} - K_3 x_{2[1]} + K_3 \left( \frac{l^2 m}{k_m} (K_1 x_{1[1]} + K_2 x_{1[2]} - gl \sin(x_{1[1]})) \right), K_1 > 0, K_2 > 0, K_3 > 0.$$

Моделирование проводилось в течение 6 секунд, а полученные траектории углов показаны на рис. 2.5, где пунктирная линия обозначает траекторию опорного угла, а сплошная линия – фактический угол. Для этой задачи моделирования коэффициенты стабилизации контроллера равны  $K_1 = 30, K_2 = 10, K_3 = 0.5$  (случай 1) и  $K_1 = 10^4, K_2 = 10, K_3 = 0.5$  (случай 2). Сравнивая эти траектории на рис.2.5, становится ясно, что предложенный метод дает хорошие результаты, поскольку реальный угол обеспечивает хорошее отслеживание задающего сигнала. Качество отслеживания можно регулировать путем изменения параметров регулятора.

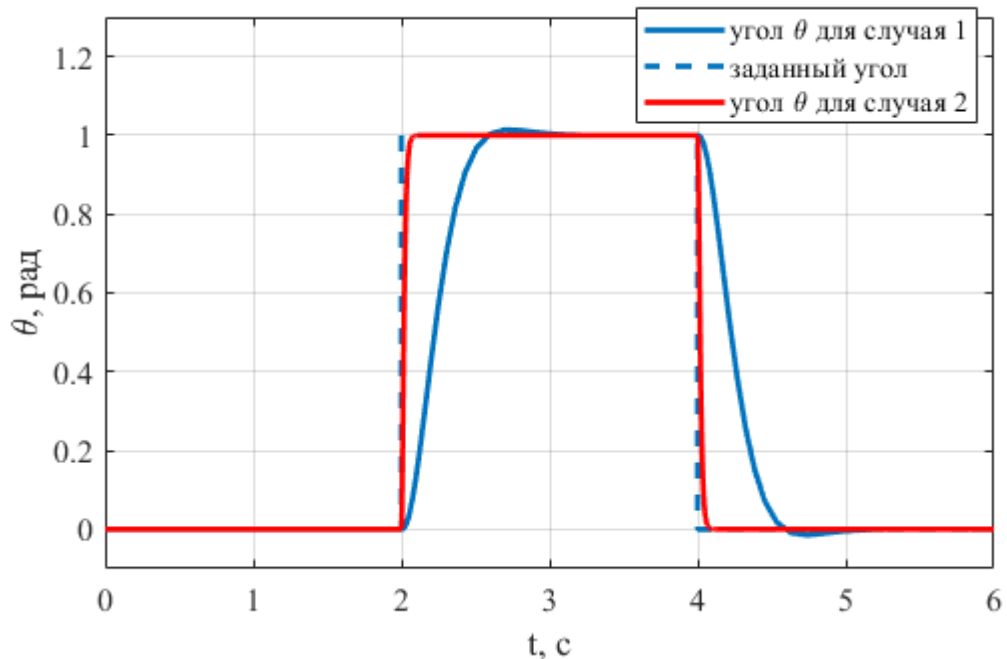


Рисунок 2.5. Угловые траектории перевернутого маятника.

## 2.4. Выводы по главе

1. В настоящей главе предложен метод канонического преобразования подобия нелинейной системы в SDC-представлении с векторным управлением. Полученное преобразование приводит систему к каноническому виду, который позволяет выполнить ЛОС преобразованной системы без расчета вспомогательного виртуального выхода (как это требуется для метода нормальной формы). Другое преимущество данного подхода заключается в явной технике перехода от фазовых координат преобразованной системы к переменным состояния исходной системы, что позволяет использовать ЛОС для управления ею.

2. Предложен метод канонического преобразования подобия для нелинейных сингулярно возмущенных систем в SDC-представлении. Для расчета преобразования подобия был предложен подход, в котором используются матрицы управляемости (исходных и преобразованных систем) и коэффициенты характеристического полинома. Это преобразование позволяет выполнить ЛОС для нелинейной системы без расчета формирующего вектора (первая строка матрицы преобразования) и виртуального выхода (как это требуется для метода нормальной формы).

3. Предложен метод канонических преобразований нелинейных систем в SDC-представлении с аддитивными возмущениями, основанный на использовании ортогонального дополнения. Метод позволяет строить редуцированные модели, инвариантные к одним возмущениям и сохраняющие сигналы других возмущений, что упрощает решение задач оценивания.

Результаты настоящей главы, а также предварительных исследований автора по данной теме опубликованы в [46, 47, 52, 151-154, 157-159, 161, 173].

### Глава 3. Развитие SDC-методов и их применение в задачах нелинейного оптимального управления на конечном интервале времени

Настоящая глава посвящена вопросам развития приближенных SDC-методов и их применению в задачах нелинейного оптимального управления и оценивания на конечном интервале времени.

#### 3.1. Задача точного терминального управления выходом нелинейной системы в SDC-представлении

Рассматриваем нелинейную систему в SDC-представлении

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, x(t_0) = x_0, \quad (3.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^r$  – вектор управления,  $A(x), B(x)$  – гладкие матричные функции, с коэффициентами, зависящими от состояния.

Сформулируем задачу оптимального управления на конечном интервале времени с целью минимизации критерия качества

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q(x)x + u^T R(x)u) dt, \quad (3.2)$$

$$Q(x) \geq 0, R(x) > 0.$$

для нелинейной системы (3.1) с заданным конечным состоянием

$$y(t_f) = Cx(t_f) = y_f, \quad (3.3)$$

где  $y \in \mathbb{R}^m$  – вектор выхода;  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  – матрица постоянных коэффициентов;  $x(t_f)$  – вектор конечных состояний.

Для задачи (3.1) - (3.3) запишем Гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} (x^T Q(x)x + u^T R(x)u) + \lambda^T (A(x)x + B(x)u),$$

и определим оптимальное управление из необходимого условия оптимальности

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow R(x)u + B^T(x)\lambda = 0 \Rightarrow u = -R^{-1}(x)B^T(x)\lambda, \quad (3.4)$$

а также составим уравнения для сопряженной переменной и переменной состояния

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x - B(x)R^{-1}(x)B^T(x)\lambda, \quad x(t_0) = x_0, \\ \dot{\lambda} &= -A^T(x)\lambda - Q(x)x - \frac{1}{2}x^T \frac{\partial Q(x)}{\partial x} x \\ &\quad - \frac{1}{2}u^T \frac{\partial R(x)}{\partial x} u - \left[ \frac{\partial A(x)}{\partial x} x \right]^T \lambda - \left[ \frac{\partial B(x)}{\partial x} u \right]^T \lambda. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Положим, что граничные значения для сопряженной переменной определены соотношением

$$\lambda(t_f) = C^T v, \quad v = \{v_i\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.6)$$

где  $v_i$  – некоторые числа. Для сопряженной переменной зададим преобразование:

$$\lambda(t) = K(x, t)x(t) + S(x, t)v, \quad (3.7)$$

откуда с учетом (3.6) получаем  $K(t_f) = 0, S(t_f) = C^T$ .

Положим также, что граничные значения  $y_f$  являются линейными функциями начальных условий  $x_0$  и вектора множителей  $v = \{v_i\}, i = \overline{1, m}$ :

$$y_f = W(x, t_0)x_0 - M(x, t_0)v.$$

Поскольку любой момент времени  $t \leq t_f$  может быть принят за начальный, из последнего выражения получаем

$$y_f = W(x, t)x(t) - M(x, t)v, \quad M(t_f) = 0. \quad (3.8)$$

Продифференцируем (3.7) и получим с учетом (3.5)

$$\begin{aligned} &\left( \dot{K} + K(x)A(x) + A^T(x)K(x) - K(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)K(x) + Q(x) \right) x \\ &+ \left( \dot{S}(x) + A^T(x)S(x) - K(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)S(x) \right) v + \frac{1}{2}x^T \frac{\partial Q(x)}{\partial x} x \\ &+ \frac{1}{2}u^T \frac{\partial R(x)}{\partial x} u + \left( \left[ \frac{\partial A(x)}{\partial x} x \right]^T + \left[ \frac{\partial B(x)}{\partial x} u \right]^T \right) (K(x)x + S(x)v) = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A(x)}{\partial x} x &= \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{1:}(x)}{\partial x_1} x & \cdots & \frac{\partial A_{1:}(x)}{\partial x_n} x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A_{n:}(x)}{\partial x_1} x & \cdots & \frac{\partial A_{n:}(x)}{\partial x_n} x \end{bmatrix}, \frac{\partial B(x)}{\partial x} u = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_{1:}(x)}{\partial x_1} u & \cdots & \frac{\partial B_{1:}(x)}{\partial x_n} u \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial B_{n:}(x)}{\partial x_1} u & \cdots & \frac{\partial B_{n:}(x)}{\partial x_n} u \end{bmatrix}, \\
\frac{\partial Q(x)}{\partial x} x &= \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_{1:}(x)}{\partial x_1} x & \cdots & \frac{\partial Q_{1:}(x)}{\partial x_n} x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_{n:}(x)}{\partial x_1} x & \cdots & \frac{\partial Q_{n:}(x)}{\partial x_n} x \end{bmatrix}, \frac{\partial R(x)}{\partial x} u = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1:}(x)}{\partial x_1} u & \cdots & \frac{\partial R_{1:}(x)}{\partial x_n} u \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_{r:}(x)}{\partial x_1} u & \cdots & \frac{\partial R_{r:}(x)}{\partial x_n} u \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Продифференцируем также (3.8) и получим с учетом (3.5)

$$\begin{aligned}
0 &= (\dot{W}(x) + W(x)(A(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x)K(x)))x(t) \\
&\quad - (\dot{M}(x) + W(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)W^T(x))v.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Поскольку соотношения (3.9) и (3.11) должны выполняться при любых значениях  $x(t), v$ , то коэффициенты при них должны тождественно обращаться в нуль. Тогда получаем следующий набор уравнений:

$$\begin{aligned}
-\dot{K} &= K(x)A(x) + A^T(x)K(x) - K(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)K(x) + Q(x) + \\
&\quad \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial Q(x)}{\partial x} x \right]^T + \left( \left[ \frac{\partial A(x)}{\partial x} x \right]^T + \left[ \frac{\partial B(x)}{\partial x} u \right]^T + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial R(x)}{\partial x} u \right]^T R^{-1}(x)B^T(x) \right) K(x), \\
\dot{S} &= -(A^T(x) - K(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x))S(x) \\
&\quad - \left( \left[ \frac{\partial A(x)}{\partial x} x \right]^T + \left[ \frac{\partial B(x)}{\partial x} u \right]^T + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial R(x)}{\partial x} u \right]^T R^{-1}(x)B^T(x) \right) S(x), \\
\dot{W} &= -W(x)(A(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x)K(x)), \\
\dot{M} &= -W(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)W^T(x), \\
K(t_f) &= 0, S(t_f) = C^T, W(t_f) = C, M(t_f) = 0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Система (3.12) представляет собой нелинейные дифференциальные уравнения оптимального управления (НДУОУ). Она содержит члены, зависящие от частных производных матриц  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  по состоянию, что затрудняет её непосредственное численное решение в реальном времени. Для получения конструктивного вычислительного алгоритма потребуем, чтобы указанные члены обратились в нуль. С этой целью вводятся дополнительные условия субоптимальности:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial Q(x)}{\partial x} x \right]^T + \left( \left[ \frac{\partial A(x)}{\partial x} x \right]^T + \left[ \frac{\partial B(x)}{\partial x} u \right]^T + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial R(x)}{\partial x} u \right]^T R^{-1}(x) B^T(x) \right) K = 0, \\ \left( \left[ \frac{\partial A(x)}{\partial x} x \right]^T + \left[ \frac{\partial B(x)}{\partial x} u \right]^T + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial R(x)}{\partial x} u \right]^T R^{-1}(x) B^T(x) \right) S = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

Тогда из (3.12) получим следующие матричные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} -\dot{K} &= K(x)A(x) + A^T(x)K(x) - K(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)K(x) + Q(x), \\ \dot{S} &= -(A^T(x) - K(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x))S(x), \\ \dot{W} &= -W(x)(A(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x)K(x)), \\ \dot{M} &= -W(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)W^T(x), \\ K(t_f) &= 0, S(t_f) = C^T, W(t_f) = C, M(t_f) = 0. \end{aligned}$$

Анализ последних выражений показывает, что при условии (3.13)  $S(x) \equiv W^T(x)$ , тогда получим результирующее соотношение для матриц  $K(x), W(x), M(x)$ :

$$\begin{aligned} -\dot{K} &= K(x)A(x) + A^T(x)K(x) - K(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)K(x) + Q(x), \\ \dot{W} &= -W(x)(A(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x)K(x)), \\ \dot{M} &= -W(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)W^T(x), \\ K(t_f) &= 0, W(t_f) = C, M(t_f) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Условия (3.13) являются достаточными для того, чтобы решение уравнений (3.14) совпадало с решением полного уравнения НДУОУ (3.12). В общем случае они не выполняются автоматически, однако для широкого класса нелинейных систем, описывающих движение АПО, невязка от их невыполнения мала, что подтверждается численным моделированием. При выполнении (3.13) система (3.12) редуцируется к более простым матричным дифференциальным уравнениям (3.14), которые и составляют основу предлагаемых алгоритмов.

В результате из (3.4), (3.7) получим управление

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)K(x)x(t) - R^{-1}(x)B^T(x)S(x)v,$$

подставляя сюда соотношение для  $v$  из (3.9) и  $S(x) \equiv W^T(x)$ , в итоге имеем

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)K(x)x(t) - G_M(x)(W(x)x(t) - y_f), \quad (3.15)$$

$$G_M(x) = R^{-1}(x)B^T(x)W^T(x)M^{-1}(x).$$

При выполнении (3.13) получаем оптимальное решение задачи (3.1) - (3.3) точного терминального приведения выхода в заданную точку в форме (3.15), где используются решения SDDRE для матрицы  $K(x)$  и дифференциальных уравнений  $W(x)$  и  $M(x)$ , с начальными условиями на правом конце. Полученный результат может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

**Теорема 3.1.** Пусть для системы (3.1) выполнены условия:

1. Матричные функции  $A(x)$ ,  $B(x)$  непрерывно дифференцируемы и имеют производные, ограниченные на любых компактных подмножествах области допустимых состояний, а  $Q(x) \geq 0$ ,  $R(x) > 0$  – непрерывно дифференцируемые и ограниченные матричные функции.

2. Пара  $(A(x), B(x))$  является поточечно управляемой для всех  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , т.е. матрица управляемости  $[B(x), A(x)B(x), \dots, A^{n-1}(x)B(x)]$  имеет полный ранг  $n$  для каждого  $x$ .

3. Заданное конечное состояние  $y_f$  достижимо.

4. Выполнены дополнительные условия оптимальности (3.13).

Тогда оптимальное управление, минимизирующее критерий (3.2) и обеспечивающее терминальное условие (3.3), существует на полуинтервале  $[t_0, t_f)$  и имеет вид обратной связи (3.15), где матрицы  $K(x)$ ,  $W(x)$  и  $M(x)$  определяются системой (3.14).

**Доказательство** теоремы непосредственно следует из вывода соотношений (3.14)–(3.15), приведённого выше.

**Замечание 3.1.** Следует сказать, что оптимальное управление (3.15) имеет особенность в момент  $t = t_f$ , т.к.  $M^{-1}(x, t_f)$  вырождена. При этом в некоторой малой окрестности  $t < t_f$   $M^{-1}(x, t)$  и оптимальное управление существуют и ограничены. В такой ситуации для решения задачи на всем интервале можно использовать так называемый способ «замораживания» [18].

Для этого введем в рассмотрение следующие моменты времени:  $t_T$  – терминальный момент,  $t_f \geq t_T \geq t_0$ ,  $t_S \geq t_f$  – момент остановки.

Суть метода «замораживания» заключается в определении матрицы  $G_M(x, t)$  в регуляторе (3.15) следующим образом

$$G_M(x, t) = \begin{cases} G_M(x, t), & t \leq t_T, \\ G_M(x, t_T), & t_T < t \leq t_S. \end{cases}$$

То есть до терминального момента реализуется закон (3.15), а после него – стабилизация. Преимущество такого способа устранения особенности состоит в том, что он позволяет сколь угодно долго продолжать управляемый процесс при устойчивой стабилизации на интервале  $[t_T, t_S]$ ,  $t_S > t_f$ . По сути, этот переход времени в (3.15) ослабляет дифференциальные свойства уравнений и приближает результаты к форме SDRE (чем больше расширено время, тем меньше дифференциальных свойств будет получено).

**Замечание 3.2.** Из (3.14), (3.15) видно, что при стремлении  $t \rightarrow t_f$  значения коэффициентов усиления в цепи обратной связи должны неограниченно возрастать. Это неосуществимо, и на практике коэффициенты усиления, в соответствии с законом (3.15), нужно делать как можно большими, что тоже не очень хорошо, так как тогда система будет очень чувствительной к различного рода помехам. Кроме того, неясно насколько большими необходимо сделать коэффициенты в цепи обратной связи для удовлетворительного выполнения цели управления. Удовлетворительным считается управление, приводящее выход системы достаточно близко к нулю.

Таким образом, более естественной, с практической точки зрения, представляется задача терминального приведения объекта в нулевое состояние с заданной точностью. Математически эту задачу можно сформулировать как задачу управления системой (3.1), для которой минимизируется другой функционал [51, 54, 61]:

$$J(u) = \frac{1}{2\lambda_f} x^T(t_f) C^T F C x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q(x) x + u^T R(x) u) dt.$$

Величина  $\lambda_f > 0$  определяет порядок штрафа. Малый параметр  $\lambda_f$  есть конкретное выражение достаточной для данной задачи точности приведения. Можно показать, что решение будет иметь вид аналогичный с (3.15), но с матрицей  $G_M(x) = R^{-1}(x)B^T(x)W^T(x)(M(x) + \lambda_f F)^{-1}$ .

**Замечание 3.3.** Решение задачи (3.1) - (3.3) в форме обратной связи на основе SDDRE (3.14) можно записать в альтернативном виде, явно включив граничное значение для матрицы  $W$  в управление:

$$\begin{aligned} u &= -R^{-1}(x)B^T(x)K(x)x(t) - G_M(x)(CW(x)x(t) - y_f), \\ G_M(x) &= R^{-1}(x)B^T(x)W^T(x)C^T M^{-1}(x). \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$\dot{W} = -W(x)(A(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x)K(x)), W(t_f) = I, \quad (3.17)$$

$$\dot{M} = -CW(x)B(x)R(x)^{-1}B(x)^T W(x)^T C^T, M(t_f, x_f) = 0. \quad (3.18)$$

Также возможно использовать альтернативные соотношения для  $M$ :

$$\dot{M}(x) = -W(x)B(x)R(x)^{-1}B(x)^T W(x)^T, M(t_f, x_f) = 0, \quad (3.19)$$

при использовании которых управление записывается в виде (3.16) с матрицей

$$G_M(x) = R^{-1}(x)B^T(x)W^T(x)C^T(CM(x)C^T)^{-1}. \quad (3.20)$$

Представленное решение задачи (3.1) - (3.3) требуется каким-либо способом численно реализовать, и как уже говорилось выше, основная сложность возникает в отсутствии информации о состоянии системы при обратном интегрировании уравнения (3.14). Далее представлен ряд подходов к численному решению на базе метода аппроксимирующей последовательности уравнения Риккати (АПУР), метода на основе уравнения Ляпунова (МУР) и метода обратного интегрирования.

### 3.1.1. Приближенное решение задачи на основе метода АПУР

Численное решение задачи (3.1) - (3.3) методом АПУР состоит в итерационном решении задач типа (1.18), (1.19). Первая итерация для задачи

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(0)} &= A^{(0)}x^{(0)} + B^{(0)}u^{(0)}, \quad y(t_f) = Cx^{(0)}(t_f), \\ \min_u J^{(0)}(u^{(0)}), \quad J^{(0)}(u^{(0)}) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^{(0)T} Q^{(0)} x^{(0)} + u^{(0)T} R^{(0)}(x) u^{(0)}) dt, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где  $A^{(0)} = A(x_0)$ ,  $B^{(0)} = B(x_0)$ ,  $Q^{(0)} = Q(x_0)$ ,  $R^{(0)} = R(x_0)$ .

Решение задачи (3.21) имеет вид (3.14), (3.15) с соответствующей заменой матриц.

Для итерации  $k$  задача формулируется так

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(k)} &= A^{(k)}x^{(k)} + B^{(k)}u^{(k)}, \\ \min_{u^{(k)}} J^{(k)}(u^{(k)}), \quad J^{(k)}(u^{(k)}) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^{(k)T} Q^{(k)} x^{(k)} + u^{(k)T} R^{(k)}(x) u^{(k)}) dt, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где  $A^{(k)} = A(x^{(k-1)})$ ,  $B^{(k)} = B(x^{(k-1)})$ ,  $Q^{(k)} = Q(x^{(k-1)})$ ,  $R^{(k)} = R(x^{(k-1)})$ .

Решение (3.22) также имеет вид (3.14), (3.15). Решая задачу  $k$ , получим  $x^{(k)}(t)$  и  $u^{(k)}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ . Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено условие  $\delta = \|x^{(k)}(t) - x^{(k-1)}(t)\| \leq \mu$ , где  $\mu > 0$  – некоторая константа. В [249] показано, что последовательность решений  $x^{(k)}(t)$ ,  $u^{(k)}(t)$  сходится к решению исходной задачи (3.1)-(3.3) при условии, что  $A(x)$  и  $B(x)$  непрерывны по Липшицу по своим аргументам, пара  $(A(x), B(x))$  поточечно управляема  $\forall x(t), t \in [t_0, t_f]$ .

### Алгоритм 3.1. Метод АПУР

Шаг 1: задать  $k = 0$ , параметр сходимости  $\mu$ ,  $A^{(0)} = A(x_0)$ ,  $B^{(0)} = B(x_0)$  и решить задачу (3.21), определив  $x^{(0)}$ .

Шаг 2: увеличить  $k = k + 1$  и задать  $A^{(k)} = A(x^{(k-1)})$ ,  $B^{(k)} = B(x^{(k-1)})$  и решить задачу  $k$ , используя (3.14), (3.15) с соответствующей заменой матриц.

Шаг 3: определить ошибку  $\delta = \|x^{(k)}(t) - x^{(k-1)}(t)\|$ . Если  $\delta > \mu$ , то перейти к шагу 2, иначе  $x(t) \approx x^{(k)}(t)$ ,  $u(t) \approx u^{(k)}(t)$  и завершить работу.

### 3.1.2. Приближенное решение задачи на основе МУР

Для вычисления оптимального управления (3.15) необходимо выполнить интегрирование в обратном времени уравнений (3.14) (или их

альтернативные представления (3.17) - (3.19)). Основная трудность при этом заключается в том, что значения матриц  $A(x), B(x)$  системы (3.1) неизвестны при интегрировании справа налево. Общепринятым здесь подходом стало применение гипотезы «замороженных» коэффициентов [139], и фиксации значений матриц  $A, B, Q, R$  для каждого  $x(t), t \in [t_0, t_f]$ .

Обозначим через нижний индекс «s» значения матриц системы и критерия для текущего значения вектора состояния  $x$ :

$$A_S \equiv A(x)|_{x=x(t)}, B_S \equiv B(x)|_{x=x(t)}, Q_S \equiv Q(x)|_{x=x(t)}, R_S \equiv R(x)|_{x=x(t)},$$

и будем считать их постоянными для текущей численной итерации. Тогда для матрицы  $K$  решения первого уравнения из (3.14) имеем [139]

$$\begin{aligned} K(x, t) &= P^{-1}(x, t) + P_{SS}, \\ P(x, t) &= e^{A_{SS}(t-t_f)}(-P_{SS}^{-1}(t_f) - D_{SS})e^{A_{SS}^T(t-t_f)} + D_{SS}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где матрица  $D_{SS}$  является решением алгебраического уравнения Ляпунова

$$A_{SS}D_{SS} + D_{SS}A_{SS}^T - B_S R_S^{-1} B_S^T = 0, A_{SS} = A_S - B_S R_S^{-1} B_S^T P_{SS}, \quad (3.24)$$

матрица  $P_{SS}$  – решение SDRE

$$A(x)^T P_{SS}(x) + P_{SS}(x)A(x) + Q(x) - P_{SS}(x)B(x)R(x)^{-1}B(x)^T P_{SS}(x) = 0. \quad (3.25)$$

Для матрицы  $W$  будем иметь

$$W(x, t) = e^{A_{cl}(t_f-t)}, A_{cl} = A_S - B_S R_S^{-1} B_S^T K(x, t). \quad (3.26)$$

Для матрицы  $M$  имеем такие соотношения

$$M(x, t) = - \int_{t_f}^t W(x)B(x)R(x)^{-1}B^T(x)W(x)^T d\tau, M(t_f) = 0.$$

Подынтегральное выражение в последнем выражении можно представить так

$$W(x)B(x)R(x)^{-1}B^T(x)W(x)^T = W(x)B_S R_S^{-1} B_S^T W(x)^T = \frac{d}{dt} W(x)D W(x)^T,$$

что следует из соотношения

$$\frac{d}{dt} W D W^T = \frac{d}{dt} W \cdot D W^T + W D \cdot \frac{d}{dt} W^T =$$

$$-W(A_{cl}D + DA_{cl}^T)W^T = -WB_S R_S^{-1} B_S^T W^T,$$

где  $D$  является решением алгебраического уравнения Ляпунова (3.24), где вместо  $A_{SS}$  нужно использовать  $A_{cl}$ .

Тогда окончательно для матрицы  $M$  получим:

$$M(x, t) = - \int_{t_f}^t \frac{d}{d\tau} (W(x, \tau) D W(x, \tau)^T) d\tau = e^{A_{cl}(t_f-t)} D e^{A_{cl}^T(t_f-t)} - D. \quad (3.27)$$

**Алгоритм 3.2.** Метод на основе уравнения Ляпунова.

На каждом временном шаге  $t = t_0, t_0 + dt, \dots, t_f$  повторить

Шаг 1: измерить  $x(t)$  и оценить  $A(x)$  и  $B(x)$ .

Шаг 2: решить уравнение (3.24) для  $D$  с  $A_{cl}$  вместо  $A_{SS}$ .

Шаг 3: вычислить  $K(t, x)$ ,  $W(t, x)$  и  $M(t, x)$  через (3.23), (3.26), (3.27).

Шаг 4: вычислить управление  $u$  через (3.15) (или (3.16)).

Шаг 5: применяя управление  $u$  к системе, определить  $x(t)$ .

**Замечание 3.4.** Рассмотрим еще один частный случай, который достаточно часто встречается в практических задачах, когда в критерии качества (3.2) отсутствует штраф на состояние, т.е. матрица  $Q = 0$ :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^T R(x) u dt, R(x) > 0. \quad (3.28)$$

В этом случае получаем

$$\begin{aligned} u &= -R(x)^{-1} B(x)^T W(x, t)^T C^T (C M(x) C^T)^{-1} (C W(x, t) x - y_f), \\ W(t) &= e^{A_S(t_f-t)}, M(x) = e^{A_S(t_f-t)} D e^{A_S^T(t_f-t)} - D. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Условие существования этого решения – поточечная управляемость пары  $(A(x), B(x)) \forall x(t), t \in [t_0, t_f]$ .

### 3.1.3. Решение терминальным методом обратного интегрирования

Для интегрирования НДУОУ (3.14) (или (3.13)) в обратном направлении от конечного момента времени к начальному требуется информация о переменных состояния системы и управления. Это достигается введением закона управления для регулирования состояния системы при движении в

обратном направлении. В отличие от общепринятой практики применения в качестве такого закона управления стандартного SDRE регулятора, в настоящей работе предлагается регуляризацию выполнить через решение терминальной задачи управления для системы (3.1), но при движении в обратном времени от точки  $x_P(\bar{t}_0) = x(t_f) = x_f$  к  $x_P(\bar{t}_f) = x(t_0) = x_0$ . Для этого введём обратное время  $\tau = t_f - t$  и обозначим  $x_P(\tau) = x(t_f - \tau)$ ,  $u_P(\tau) = u(t_f - \tau)$ . Тогда  $\frac{d}{d\tau} = -\frac{d}{dt}$ , и исходная система в обратном времени запишется как  $\dot{x}_P(\tau) = -A(x_P(\tau))x_P(\tau) - B(x_P(\tau))u_P(\tau)$ ,  $\tau \in [0, t_f - t_0]$ , с начальным условием  $x_P(0) = x_f$  и терминальным  $x_P(t_f - t_0) = x_0$ .

Сформулируем вспомогательную задачу оптимального управления в прямом времени  $\tau$  для этой преобразованной системы:

$$\min_{u_P} J_P(u_P) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f - t_0} (x_P^T Q(x_P) x_P + u_P^T R(x_P) u_P) d\tau \quad (3.30)$$

с граничными условиями, указанными выше. Эта задача является терминальной задачей с матрицами  $-A$  и  $-B$  вместо  $A$  и  $B$ . Её решение имеет вид (3.14)–(3.15) с соответствующей заменой.

В предложенном решении возникает та же проблема – неизвестное состояние системы при интегрировании дифференциальных уравнений (3.14) от  $\bar{t}_f = t_0$  до  $\bar{t}_0 = t_f$ . Здесь решение (3.14) можно найти через МУР (алгоритм 3.2). Преимущество предлагаемого терминального закона для регулирования в обратном времени по сравнению со стандартным SDRE в том, что траектория вектора состояния носит терминальный характер (это не SDRE стабилизация на бесконечном интервале времени), что соответствует природе движения состояния системы в прямом времени.

Поскольку в задаче точного терминального управления непосредственно задан только выход  $y(t_f) = Cx(t_f)$ , а полный вектор конечного состояния не определён однозначно, для инициализации обратного прохода необходимо тем или иным способом выбрать конкретное значение  $x(t_f)$ . В качестве конструктивного способа получения начального

приближения  $x(t_f)$  непосредственно по заданному терминальному условию предлагается использовать псевдообратную матрицу:  $x_f^{(0)} = C^T(CC^T)^{-1}y_f$ , где предполагается, что матрица  $C$  имеет полный строчный ранг. Полученное значение используется в качестве начального для первого обратного прохода. После выполнения прямого прохода (этап 2) вычисляется фактически достигнутое конечное состояние  $x(t_f)$ . Если разность  $y(t_f) - Cx(t_f)$  превышает заданный допуск, процедура повторяется с обновлённой оценкой  $x_f^{(1)} = x(t_f)$ . Таким образом, выбор конечного состояния не является произвольным и полностью определяется исходными данными задачи.

**Алгоритм 3.3.** Метод обратного интегрирования с терминальным законом регулирования в обратном времени

Этап 1. Движение в обратном направлении, предварительные вычисления

Шаг 1: вычислить начальное приближение  $x_f^{(0)} = C^T(CC^T)^{-1}y_f$ , установить  $t = t_f$ , шаг  $dt$  и начальное значение  $x_p(\bar{t}_0) = x_f^{(0)}$ , конечное  $x_p(\bar{t}_f) = x(t_0)$ .

Шаг 2: вычислить и зафиксировать  $A(x_p)$  и  $B(x_p)$ .

Шаг 3: вычислить  $K_p(t, x)$ ,  $W_p(t, x)$  и  $M_p(t, x)$ , используя алгоритм 3.2 (МУР), рассчитать управление  $u_p(t)$  и вычислить  $x_p(t)$  (решение терминальной задачи (3.30)).

Шаг 4: вычислить для текущего  $x_p(t)$  матрицы  $K(t, x)$ ,  $W(t, x)$  и  $M(t, x)$  путем интегрирования (3.14) и передать их значения на шаг 2 Этапа 2.

Шаг 5: применить управление  $u_p(t)$  к вспомогательной системе (3.30), и перейти к следующему моменту времени  $t = t - dt$ , пока  $t \neq t_0$ .

Шаг 6: установить состояние  $x_p(t) = x(t)$  и перейти к шагу 2 этапа 1.

Этап 2. Движение в прямом направлении.

Шаг 1: установить  $t = t_0$ , шаг  $dt$  и начальное значение  $x(t) = x(t_0)$ .

Шаг 2: вычислить и зафиксировать  $A(x)$  и  $B(x)$ .

Шаг 3: зная матрицы  $K(t, x)$ ,  $W(t, x)$  и  $M(t, x)$ , рассчитать управление по

формуле (3.15).

Шаг 4: применить управление  $u(t)$  к исходной системе (3.1) и вычислить  $x(t)$ , перейти к следующему моменту времени  $t = t + dt$ , пока  $t \neq t_f$ .

### 3.2. Задача оптимального следящего управления выходом нелинейной системы в SDC-представлении

Для нелинейной аффинной системы в SDC-представлении (3.1) ставится задача слежения за некоторым заданным сигналом  $r(t)$  на конечном интервале в соответствии с критерием качества

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} ((y - r)^T Q(x)(y - r) + u^T R(x)u) dt, \quad (3.31)$$

$$Q(x) \geq 0, R(x) > 0,$$

где  $y(t) = Cx(t)$  – выход системы (3.1).

Для задачи (3.1), (3.31) запишем Гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} ((y - r)^T Q(x)(y - r) + u^T R(x)u) + \lambda^T (A(x)x + B(x)u),$$

определим оптимальное управление из необходимого условия оптимальности

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow R(x)u + B^T(x)\lambda = 0 \Rightarrow u = -R^{-1}(x)B^T(x)\lambda, \quad (3.32)$$

а также составим уравнения для сопряженной переменной и переменной состояния

$$\dot{\lambda} = -A^T(x)\lambda - \left[ \frac{\partial A(x)}{\partial x} x \right]^T \lambda - \left[ \frac{\partial B(x)}{\partial x} u \right]^T \lambda - \frac{1}{2} u^T \frac{\partial R(x)}{\partial x} u - C^T Q(x)Cx - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Q(x)}{\partial x} (Cx - r) \right)^T Cx + C^T Q(x)r + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Q(x)}{\partial x} (Cx - r) \right)^T r. \quad (3.33)$$

Используем далее преобразование Риккати [198]

$$x = M(x)\lambda + g(x), \quad \lambda = M^{-1}(x)(x - g(x)). \quad (3.34)$$

Подставляя (3.34) в (3.32), для управления  $u$  имеем:

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)M^{-1}(x)(x - g(x)) = -G(x)(x - g(x)). \quad (3.35)$$

Теперь продифференцируем (3.34) и выполним ряд преобразований с использованием (3.32), (3.33) и (3.35), получим (для сокращения записи зависимость от  $x$  опустим в следующих громоздких выкладках)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{M} - MA^T - AM + BR^{-1}B^T - MC^TQCM \\ -M \left[ \frac{\partial A}{\partial x} x \right]^T - M \left[ \frac{\partial B}{\partial x} u \right]^T - \frac{1}{2} M \left( \frac{\partial Q}{\partial x} (Cx - r) \right)^T CM \end{array} \right\} \lambda + \left\{ \begin{array}{l} \dot{g} - Ag - MC^TQCg + MC^TQr \\ -\frac{1}{2} Mu^T \frac{\partial R}{\partial x} u + \frac{1}{2} M \left( \frac{\partial Q}{\partial x} (Cx - r) \right)^T Cg + \frac{1}{2} M \left( \frac{\partial Q}{\partial x} (Cx - r) \right)^T r \end{array} \right\} = 0. \quad (3.36)$$

В (3.36) можно выделить две части: уравнение для матрицы  $M(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{M} - MA^T - AM + BR^{-1}B^T - MC^TQCM \\ -M \left[ \frac{\partial A}{\partial x} x \right]^T - M \left[ \frac{\partial B}{\partial x} u \right]^T - \frac{1}{2} M \left( \frac{\partial Q}{\partial x} (Cx - r) \right)^T CM \end{array} \right\} = 0 \quad (3.37)$$

и уравнение для вектора  $g(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{g} - Ag - MC^TQCg + MC^TQr \\ -\frac{1}{2} Mu^T \frac{\partial R}{\partial x} u + \frac{1}{2} M \left( \frac{\partial Q}{\partial x} (Cx - r) \right)^T Cg + \frac{1}{2} M \left( \frac{\partial Q}{\partial x} (Cx - r) \right)^T r \end{array} \right\} = 0. \quad (3.38)$$

При  $t = t_0$  из (3.34) имеем  $x(t_0) = M(t_0)\lambda(t_0) + g(t_0)$ , а поскольку  $\lambda(t_0)$  не известна, то для удовлетворения начальных условий нужно принять  $M(t_0) = 0$ ,  $g(t_0) = x(t_0)$ . Аналогично при  $t = t_f$  из (3.34) имеем  $x(t_f) = M(t_f)\lambda(t_f) + g(t_f)$ , а поскольку  $\lambda(t_f)$  также является неизвестным, то для удовлетворения граничных условий также следует принять  $M(t_f) = 0$ ,  $g(t_f) = x(t_f)$ .

Выражения (3.36) - (3.38) являются НДУОУ. Рассмотрим отдельно уравнения (3.37), (3.38). Если в них пренебречь слагаемыми с частными производными, то получим дифференциальное уравнение Риккати (SDDRE)

$$\begin{aligned} \dot{M} = M(x)A^T(x) + A(x)M(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x) \\ + M(x)C^TQ(x)CM(x). \end{aligned} \quad (3.39)$$

и уравнение прямой связи для вектора  $g(x)$

$$\dot{g}(x) = (A(x) + M(x)C^T Q(x)C)g(x) - M(x)C^T Q(x)r. \quad (3.40)$$

Практика исследований различных решений нелинейных задач оптимального управления показывает, что несмотря на то, что НДУОУ дает оптимальное решение, незначительная разница между результатами НДУОУ и SDDRE позволяет использовать более простые выражения (3.39), (3.40).

**Замечание 3.5.** В отличие от классического решения задачи оптимального слежения за заданной траекторией в предложенном решении граничные условия для  $M(x)$  и  $g(x)$  в (3.39), (3.40) можно задать как в начальный момент времени  $t_0$ , так и в конечный  $t_f$ . Это позволяет интегрировать эти уравнения как в обратном направлении (что требуется в классическом решении), так и в прямом направлении. При движении в прямом направлении естественно не возникает проблемы с недостатком информации о состоянии системы – типичная проблема в SDC задачах оптимального управления, которые требуют обратного интегрирования.

**Замечание 3.6.** Чтобы уйти от решения дифференциального уравнения Риккати (3.39) можно потребовать выполнения условия

$$\begin{aligned} \dot{M} - M \left\{ \left[ \frac{\partial A}{\partial x} x \right]^T - \left[ \frac{\partial B}{\partial x} u \right]^T - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} (Cx - r) \right)^T CM \right. \\ \left. - \frac{1}{2} u^T \frac{\partial R}{\partial x} u + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} (Cx - r) \right)^T Cg + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} (Cx - r) \right)^T r \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Уравнение (3.41) называют дополнительным условием оптимальности [212].

Предположим, что условие (3.41) выполнено, тогда из (3.37) приходим к SDRE

$$0 = \bar{M}(x)A^T(x) + A(x)\bar{M}(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x) + \bar{M}(x)C^T Q(x)C\bar{M}(x). \quad (3.42)$$

Уравнение (3.42) представляет собой алгебраическое уравнение Риккати с коэффициентами, зависящими от состояния. В отличие от традиционного использования в задачах управления, здесь его решение естественно искать в двух вариантах. При поточечной управляемости пары матриц  $(A(x), B(x))$  и наблюдаемости пары  $(A(x), C)$  оно имеет единственное положительно

определённое решение  $\bar{M}(x) > 0$ . Действительно, вводя обозначение  $P(x) = \bar{M}^{-1}(x)$  и подставляя его в (3.42), после преобразований получаем:

$$\bar{P}(x)A(x) + A^T(x)\bar{P}(x) - \bar{P}(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)\bar{P}(x) + C^T Q(x)C = 0,$$

решение которого положительно определено. Следовательно,  $\bar{M}(x) > 0$ . Тогда, применяя закон управления (3.35), получаем матрицу замкнутой системы  $A(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x)\bar{M}^{-1}(x)$  является поточечно гурвицевой.

Отрицательно определённое решение  $\bar{M}_g(x) < 0$  используется в (3.43) для обеспечения поточечной гурвицевости матрицы  $(\bar{A}(x) + \bar{M}_g(x)C^T Q(x)C)$ . Умножая слева и справа (3.42) на (-1) и обозначая  $\bar{M}_g(x) = -\bar{P}_g(x)$ , приходим к алгебраическому уравнению Риккати

$$A(x)\bar{P}_g(x) + \bar{P}_g(x)A^T(x) + B(x)R^{-1}(x)B^T(x) - \bar{P}_g(x)C^T Q(x)C\bar{P}_g(x) = 0,$$

которое обычно возникает в задачах оптимального оценивания (см. например, [59]). При поточечной управляемости пары матриц  $(A(x), B(x))$  и наблюдаемости пары  $(A(x), C)$  оно имеет единственное положительно определённое решение  $\bar{P}(x) > 0$ . Тогда  $\bar{M}_g(x) = -\bar{P}(x) < 0$ , и при этом матрица  $(\bar{A}(x) + \bar{M}_g(x)C^T Q(x)C)$  является поточечно гурвицевой  $\forall x$ . Учитывая это, а также то, что функция  $r(t)$  является ограниченной, получаем ограниченность решения  $\bar{g}(t)$  из уравнения

$$\dot{\bar{g}}(x) = (A(x) + \bar{M}_g(x)C^T Q(x)C)\bar{g}(x) - \bar{M}_g(x)C^T Q(x)r. \quad (3.43)$$

Уравнения (3.42), (3.43), благодаря выполнению условия (3.41), существенно проще исходных, решаются в прямом времени, но при этом дают оптимальное решение. Предложенный метод будем называть методом НДУОУ в прямом времени (НДУОУ ПВ). Полученный результат может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

**Теорема 3.2.** Пусть для системы (3.1) с критерием качества (3.31) выполнены следующие условия:

1. Матричные функции  $A(x)$ ,  $B(x)$  непрерывно дифференцируемы и имеют производные, ограниченные на любых компактных подмножествах области допустимых состояний, а  $Q(x) \geq 0$ ,  $R(x) > 0$  – непрерывно дифференцируемые и ограниченные матричные функции.

2. Пара  $(A(x), B(x))$  поточечно управляема, а пара  $(A(x), C)$  поточечно наблюдаема для всех  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ .

3. Задающий сигнал  $r(t)$  является ограниченной кусочно-непрерывной функцией на  $[t_0, t_f]$ .

4. Выполнено дополнительное условие оптимальности (3.41).

Тогда решение задачи оптимального слежения, минимизирующее (3.31), существует на всём интервале  $[t_0, t_f]$  и даётся в виде:

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)\bar{M}^{-1}(x)(x - \bar{g}(x))$$

где  $\bar{M}(x)$  – положительно определённое решение алгебраического уравнения Риккати (3.42), а  $\bar{g}(x)$  – решение дифференциального уравнения (3.43) с начальным условием  $\bar{g}(t_0) = x(t_0)$  с матрицей  $\bar{M}_g(x) < 0$ .

**Доказательство** теоремы непосредственно следует из вывода соотношений (3.42) – (3.43) и обоснования сходимости, приведённого выше.

Ключевое преимущество предлагаемого метода НДУОУ ПВ оптимального следящего управления для нелинейных аффинных систем на конечном интервале времени заключается в одноэтапности процедуры за счет использования интегрирования в прямом времени соответствующих дифференциальных уравнений для компонентов регулятора, начальные условия для которых однозначно определяются на основе преобразования (3.34) из начальных условий для системы (3.1), тогда как существующие методы, базирующиеся на интегрировании в прямом времени аналогичных дифференциальных уравнений для компонентов регулятора, не дают информации о начальных условиях этих уравнений и требуют их подбора каким-либо способом. Кроме того, выполнение условий оптимальности (3.41), позволяет для синтеза следящего управления ограничиться

дифференцированием в прямом времени только уравнения (3.43) для  $\bar{g}(x)$ , а значение  $\bar{M}_g(x)$  найти как отрицательно определенное решение алгебраического уравнения (3.42).

**Замечание 3.7.** При расчете управления можно использовать установившееся значение вектора  $\bar{g}(x)$ , которое определяется из (3.43) при  $\dot{g}(x) = 0$ :  $\bar{g}(x) = (A(x) + \bar{M}_g(x)C^T Q(x)C)^{-1} \bar{M}_g(x)C^T Q(x)r$ .

### 3.3. Нелинейная зависимость от управления и астатические регуляторы

Рассматривается нелинейная по состоянию и по управлению система

$$\dot{x} = A(x)x + B(x, u)u, x(t_0) = x_0. \quad (3.44)$$

Задачи типа (3.2) или (3.31) для системы (3.44) имеют более сложную постановку по сравнению с аффинным случаем. Наиболее простой способ их решения состоит в приведении системы (3.44) к требуемой структуре, заданной в уравнении (3.1), путем введения интеграла управления. Итак, пусть в системе (3.44) переменная  $u$  представляет собой интеграл от некоторого управления  $U$ , то есть

$$\dot{u} = A_u u + B_u U, \quad u_0 = 0. \quad (3.45)$$

Предполагая управляемость системы (3.45), дополним вектор  $x$  переменной  $u$ . Обозначим полученный составной вектор  $X = \text{col}(x, u)$ . Объединяя (3.45) и (3.44) получим систему с блочной структурой

$$\dot{X} = \tilde{A}(X)X + \tilde{B}(X)U, \quad (3.46)$$

где  $\tilde{A}(X) = \begin{bmatrix} A(x) & B(x, u) \\ 0 & A_u \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_u \end{bmatrix}$ .

В простейшей форме  $A_u = 0$  и  $B_u = I_u$ . Расширенная система (3.46) соответствует требуемой структуре, будучи аффинной по  $U$ .

Аналогичным образом преобразуется критерий качества. Например, для задачи управления преобразованный критерий (3.2) с учетом нового управления  $U$  примет вид:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (X^T \tilde{Q} X + U^T \tilde{R} U) dt \rightarrow \min_U, \quad (3.47)$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q(x) & 0 \\ 0 & R(x) \end{bmatrix}, \tilde{R} > 0.$$

Решение задачи (3.46), (3.47) можно выполнить одним из приведенных выше методов с учетом замены матриц  $A, B, Q, R$  на  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, \tilde{R}$ .

**Замечание 3.8.** Вес матрицы штрафа  $\tilde{R}$  для нового управления  $U$  следует брать близким к нулю, чтобы новый критерий качества был близок к исходному. При этом слишком малое значение  $\tilde{R}$  может привести к сложностям в вычислениях из-за необходимости рассчитывать обратную матрицу  $\tilde{R}^{-1}$ . Здесь для упрощения численного решения можно использовать методы для задач с «дешевым» управлением (cheap control problem) [181, 234].

**Замечание 3.9.** Для сложных объектов управление в окрестности особой точки как правило происходит с некоторой постоянной или медленно меняющейся ошибкой. Такими же будут последствия изменения условий функционирования системы и параметров внешней среды. Все эти и подобные явления приводят к тому, что ошибка терминального управления или слежения может оказаться совсем не малой. Такая ситуация является вполне обычной для классической теории управления и типичным решением в таком случае является свойство астатизма системы, т. е. способность системы обеспечивать нулевую статическую ошибку при воздействии постоянных внешних возмущений [113]. В результате введение интеграла управления позволяет не только уйти от нелинейной зависимости от управления в постановке задачи, но и придает системе свойство астатизма.

Покажем это на примере задачи слежения (3.1), (3.31). Итак, в результате синтеза для нового управления  $U$  из (3.35) имеем

$$U = \tilde{G}(x)(X(t) - \tilde{g}(t)) = [G_x(t) \quad G_u(t)] \begin{bmatrix} x - g_x \\ u - g_u \end{bmatrix} = \\ G_x(x)(x - g_x) + G_u(x)(u - g_u).$$

Подставляя это в (3.46) и объединяя с (3.44), получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x + B(x, u)u, & x(t_0) &= x_0, \\ \dot{u} &= B_u G_x(x)(x - g_x) + B_u G_u(x)(u - g_u), & u(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

По предположению существует  $i = 1, 2, \dots, (k + q)$ , при котором

$$B^T(x, u)e_i \neq 0. \quad (3.49)$$

где  $e_i$  -  $(k + q)$ -вектор,  $i$ -тый элемент которого равен 1, а все остальные - 0.

Умножим первое уравнение системы (3.48) слева на  $e_i^T$

$$e_i^T \dot{x} = e_i^T A(x)x + e_i^T B(x, u)u,$$

и, в силу (3.49), разрешим полученное уравнение относительно  $u$

$$u = (e_i^T B(x, u))^{-1} e_i^T (\dot{x} - A(x)x). \quad (3.50)$$

Подставляя теперь (3.50) в (3.48) для  $u$ , получим астатический закон управления

$$\dot{u} = B_u G_x(x)(x - g_x) + B_u G_u(x)(S(\dot{x} - A(x)x) - g_u), \quad (3.51)$$

$$S = (e_i^T B(x, u))^{-1} e_i^T, \quad u(t_0) = 0.$$

Действительно, переменная  $u$  является интегралом от вектора  $x$ . Для того, чтобы убедиться в этом, остается проинтегрировать (3.51) от  $t_0$  до  $t_f$ , используя формулу интегрирования по частям и конкретные выражения для компонент матрицы  $\tilde{G}$  обратной связи (учитывая их гладкость).

### 3.4. Зависимость SDC-методов от параметризации

Важным нюансом в применении SDC-методов, влияющим на качество их работы, является параметризация исходной нелинейной системы (3.1) с

целью приведения ее к псевдолинейному виду (3.2) с зависящими от состояния матрицами. Сложность состоит в том, что для многомерного случая всегда существует бесконечное число SDC-параметризаций [98].

В многомерном случае вектор состояния по определению имеет по крайней мере две компоненты (обозначим их  $x_1$  и  $x_2$ ). Предположим, что в одном из уравнений состояния существует нелинейный скалярный член  $f_i(x)$ . Тогда в этом уравнении состояния можно найти по крайней мере два представления, соответствующие  $f_i(x)/x_1$  и  $f_i(x)/x_2$ . Используя любые два допустимых SDC-представления  $A_1(x)$  и  $A_2(x)$ , можно построить бесконечное число SDC-параметризаций из выпуклого множества

$$A(x, \alpha) = \alpha A_1(x) + (1 - \alpha) A_2(x), \alpha \in [0, 1].$$

В общем случае для  $k$  параметризаций имеем [210]

$$A(x, \alpha) = \prod_{j=1}^k (1 - \alpha_j) A_1(x) + \sum_{i=2}^k \alpha_{i-1} \left[ \prod_{j=1}^k (1 - \alpha_j) \right] A_i(x) + \alpha_k A_{k+1}(x),$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)^T, \|\alpha\|_1 = \sum_{j=1}^k |\alpha_j| \leq 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, k. \quad (3.52)$$

Альтернативная параметризация может быть также представлена через конечный вектор параметров  $\alpha_k$  в предположении, что система (3.1) имеет набор из  $k$  динамических моделей с коэффициентами, зависящими от состояния, которые определяются следующим образом [131]:

$$f(x) = A_i(x)x, i = 1, \dots, k.$$

В таком случае множество моделей системы (3.1) в SDC-представлении может быть параметризовано множеством скаляров  $\{\alpha_i\}$ . Для этого используем вектор  $\alpha$ , для которого  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ .

Тогда любое представление вида  $A(x, \alpha) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A_i(x)$  также является допустимым SDC-представлением той же системы, т.к.

$$A(x, \alpha)x = \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i A_i(x) \right) x = \sum_{i=1}^k \alpha_i (A_i(x)x) = \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \right) f(x) = f(x).$$

В обоих представленных подходах к SDC-параметризации возникает категория так называемых «родительских» матриц, которые используются для

параметризации системы параметром  $\alpha$ . Вопрос выбора этих матриц также является частью задачи параметризации.

В [226] представлен один частный случай параметризации, который вполне можно использовать для формирования родительских матриц. Предлагаемый алгоритм равномерно распределяет многомерные полиномиальные члены по каждой переменной, оставляя неполиномиальные члены в их исходной форме. Такой подход гарантирует, что все отношения между состоянием и входными переменными в нелинейной системе также будут представлены в SDC-представлении.

Обобщая вышесказанное, введем понятие параметризованной системы в SDC-представлении

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x, \alpha)x + B(x)u, \quad x(t_0) = x_0, \\ \|\alpha\| &\leq 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Поскольку различные SDC-представления матриц приводят к различному поведению SDC-методов, то параметризация и выбор матрицы  $A(x, \alpha)$  представляет собой дополнительную степень свободы.

По сути задача параметризации сводится к оптимизационной задаче выбора некоторого представления матриц системы, параметризованных значением параметров  $\alpha_i$  в соответствии с некоторым критерием.

В настоящей работе предлагается несколько метрик, которые можно использовать в качестве критерия для выбора конкретной параметризации матрицы состояния. Так в качестве альтернативы грамиану управляемости предлагается использовать сингулярные значения некоторой матрицы, о невырожденности которой также можно судить об управляемости системы [67]. Как дополнительный критерий предлагается рассмотреть не сингулярные значения матрицы, а ее число обусловленности. Кроме того, предлагается анализировать и саму матрицу состояния системы, поскольку ее обусловленность влияет на возможность разрешения возникающих матричных уравнений Ляпунова.

Число обусловленности как одна из количественных характеристик квадратных матриц является одним из матричных инвариантов, т.е. существенным образом зависит от базиса представления матрицы. Это обстоятельство обнаружило возможность использования чисел обусловленности матриц для решения большого круга алгебраических задач, связанных с оценкой чувствительности матричных процедур к погрешностям представления компонентов этих процедур. В настоящей работе рассматриваются возможности использования числа обусловленности как критерия выбора SDC-параметризации матриц нелинейной системы. Оценки обусловленности матриц можно отнести к классу экспресс-оценок, они должны конструироваться на каждом шаге процесса синтеза регулятора нелинейной системы.

Число обусловленности  $C\{N\}$  матрицы  $N$ , задаваемое соотношением  $C\{N\} = \|N\| \|N^{-1}\|$ , численно зависит от выбранной матричной нормы, но при любой норме минимальное его значение равно 1, что соответствует случаю идеальной обусловленности матрицы  $N$ , а максимальное его значение равно бесконечности, что соответствует случаю вырожденности матрицы  $N$  [69].

Если в качестве матричных норм при вычислении числа обусловленности используются спектральные нормы матриц  $N$  и  $N^{-1}$ , то соотношение для числа обусловленности принимает вид  $C\{N\} = \sigma_M(N) \sigma_m^{-1}(N)$ , где  $\sigma_M(N), \sigma_m(N)$  – соответственно наибольшее и наименьшее сингулярные числа матрицы  $N$ .

Если матрица  $N$  является не квадратной, а прямоугольной, то для нее может быть введено обобщенное число обусловленности, задаваемое в форме  $C\{N\} = \|N\| \|N^+\|$ , где  $N^+$  – матрица, псевдообратная к исходной матрице  $N$ .

Одной из областей применения аппарата чисел обусловленности является построение хорошо обусловленных модельных представлений объектов и систем управления, обладающих матричными компонентами с минимальными числами обусловленности, а, следовательно, являющихся модельно робастными. Проблемы модельной робастности заметно возрастают

с ростом размерности системы. Уже системы четвертого порядка требуют повышенного внимания к обусловленности матричных компонентов модели состояния, при размерностях системы 6–8 и выше проблема требует сверхвысокого внимания, особенно если алгоритмическое обеспечение задач синтеза опирается на решение матричных уравнений.

Так, если в процессе синтеза закона управления приходится решать линейное матричное уравнение вида

$$FL + LV = S \quad (3.54)$$

относительно матрицы  $L$ , то в качестве оценки обусловленности этого уравнения с помощью числа обусловленности используется значение, вычисленное в силу соотношения [65]

$$C_{ME}\{F, V\} = \max_{i,j} \{\sigma_i(F) + \sigma_j(V)\} \left[ \min_{i,j} \{\sigma_i(F) + \sigma_j(V)\} \right]^{-1}, \quad (3.55)$$

где  $C_{ME}\{F\}$  – число обусловленности матричного уравнения вида (3.54), к которым относится и уравнение Ляпунова (3.24).

Помимо чисел обусловленности матриц можно использовать и более сложные критерии. Так в [69] для случая реализуемости полной задачи обобщенного модального управления был предложен следующий критерий

$$\min_{\alpha} \{J_u = C^{1/2} \{H(\alpha)\} \sigma_M^{1/2}(H(\alpha))\}, \quad (3.56)$$

где  $H(\alpha)$  – грамиан затрат на управление;  $\sigma_M^{1/2}(H)$  – максимальное сингулярное число грамиана,  $C^{1/2}\{H\}$  – его число обусловленности. Таким образом, функционал в (3.56) контролирует затраты на управление и обусловленность их распределения.

Поскольку более высокая управляемость обеспечивает меньшие усилия по управлению, основное внимание уделяется выбору параметризации, которая максимизирует управляемость. При этом вместо грамиана управляемости в настоящей работе предлагается использовать матрицу  $M$  из (3.19) (или (3.27)), поскольку в линейной постановке задачи известно [5], что

динамическая система называется частично неуправляемой если матрица  $M$  вырождена для любого значения  $t$  на рассматриваемом интервале. В нашем случае решение задачи возможно только если  $M$  не вырождена, что можно использовать как критерий для параметризации, т.е. параметризация должна обеспечивать более высокую управляемость (матрица близка к сингулярности, когда ее наименьшее собственное значение близко к нулю). При этом, чтобы уйти от бинарного критерия (управляема или неуправляема) предлагается использовать некоторые оценки степени управляемости через сингулярные значения и числа обусловленности. Если число обусловленности матрицы  $M$  намного больше 1, то матрица чувствительна к обратному вычислению. С учетом того, что для расчета управления (3.15) (или (3.16)) необходимо выполнять обращение матрицы  $M$ , выбор числа обусловленности в качестве критерия является обоснованным.

Таким образом, в настоящей работе предлагается использовать минимизацию числа обусловленности некоторых матриц и критерии типа (3.55), (3.56). В качестве исследуемых критериев выбора SDC-параметризации матриц системы (3.1) предлагаются:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\alpha} \text{tr}\{P(\alpha_i)\}, \\
 & \min_{\alpha} C\{M(\alpha)\}, \\
 & \min_{\alpha} C\{A(\alpha)\}, \\
 & \min_{\alpha} \left\{ C^{1/2}\{M(\alpha)\} \sigma_M^{1/2}(M(\alpha)) \right\}, \\
 & \min_{\alpha} \{J(u, \alpha) = 1/2 x^T P(\alpha) x\}, \\
 & \|\alpha\| \leq 1, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, k, P(\alpha) = K(\alpha) - W(\alpha)^T C^T M(\alpha)^{-1} C W(\alpha).
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Предложенные критерии (3.57) носят эвристический характер и направлены на улучшение различных аспектов численной устойчивости и качества управления. В частности, минимизация числа обусловленности матриц  $A(\alpha)$  и  $M(\alpha)$  снижает чувствительность к погрешностям, а критерий  $J(u, \alpha)$  оценивает непосредственно затраты на управление. Для одномерной параметризации оптимальное значение  $\alpha$  может быть найдено простым

перебором, что и было продемонстрировано в примерах. В многомерном случае задача сводится к нелинейному программированию, что может быть выполнено, например, градиентными методами. Разработка специализированных алгоритмов оптимизации параметризации выходит за рамки данной работы и составляет предмет дальнейших исследований. Результаты моделирования показывают, что даже простейшая параметризация способна улучшить характеристики системы, что подтверждает перспективность данного направления.

Перейдем непосредственно к задаче управления параметризацией. Выражение (3.53) можно использовать для модификации SDC-методов, чтобы реализовать лучшую параметризацию. Это требует задания динамики в виде (3.53), что достигается заданием значений  $\alpha$  в (3.52). Таким образом, веса  $\alpha_j$  должны быть выбраны так, чтобы оптимизировать один из критериев (3.57). Например, матрица  $M$  должна быть не вырождена, и ее минимальное сингулярное число должно быть максимальным. Это достигается путем решения на каждой итерации соответствующей задачи нелинейного программирования.

Учитывая изложенную выше идею, представим обобщенный алгоритм метода SDDRE с оптимальной параметризацией матриц системы по одному из критериев (3.57).

**Алгоритм 3.4.** Оптимальная SDC-параметризация матриц системы.

На каждом временном шаге повторять:

Шаг 1: измерить  $x$  и оценить  $A(x)$  и  $B(x)$ .

Шаг 2: выбрать родительские матрицы  $A_1(x), A_2(x), \dots, A_k(x)$ .

Шаг 3: определить параметризацию  $A(x, \alpha)$  на основе решения оптимизационной задачи согласно выбранному критерию из (3.57).  
Определить оптимальные значения параметров  $\alpha$ .

Шаг 4: применить один из алгоритмов 3.1-3.3.

### 3.5. Примеры применения разработанных методов

#### 3.5.1. Пример задачи точного терминального управления

В качестве тестового случая для оценки эффективности предлагаемых методов выбрана эталонная нелинейная задача, осциллятор Ван дер Поля с нелинейностями в управлении. Динамика системы для этой задачи задается моделью [185]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu(1 - x_1^2) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + \gamma e^{-u^2} \end{bmatrix} u, \\ y &= [1 \ 0]x. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Начальные условия выбраны равными  $x(0) = [5 \ 0]^T$ . Время моделирования  $t_f = 1$  с,  $y(t_f) = 1$ . Параметры матриц штрафов взяты с относительно малыми значениями  $R = 1$ ,  $Q = 1$ , чтобы выявить различия между методами. Сначала промоделируем более простой случай, когда  $V(u) = [0 \ 1]^T$ . Для решения задачи использовались алгоритмы 3.1, 3.2 и 3.3, а также алгоритм обратного интегрирования аналогичный 3.3, но где при обратном интегрировании использован не терминальный закон управления, а классический SDRE (такой алгоритм решения SDDRE методом обратного интегрирования предложен в [183]). Результаты моделирования представлены на рис.3.1, на рис. 3.2 показаны результаты в увеличенном масштабе в терминальный момент времени для оценки точности приведения выхода.

Из результатов видно, что алгоритм 3.1 (метод АПУР) сходится к точному решению за  $k=4$  шагов со среднеквадратичной ошибкой 0.0205. При этом нулевая итерация практически совпадает с решением на основе алгоритма 3.2 (МУР). Алгоритм 3.3 с терминальным вычислением вектора состояния при обратном интегрировании практически совпадает с алгоритмом 3.3, где вектор состояния вычисляется на основе классического SDRE регулятора. Терминальная точность приведения лучше у алгоритма 3.2. Сравнительные данные приведены в таблице 3.1 (здесь индекс «i» обозначает номер строки в таблице, соответствующей одному из используемых методов).

Таблица 3.1. Результат сравнения методов

№	Метод	Среднеквадратичная ошибка	Терминальная ошибка $e(t_f) =  x_f(t_f) - x_i(t_f) $
1	Алгоритм 3.1 (АПУР, k=0)	0.9410	$6.0837 \cdot 10^{-5}$
2	Алгоритм 3.1 (АПУР, k=1)	0.1350	$6.716510^{-7}$
3	Алгоритм 3.1 (АПУР, k=2)	0.0862	$4.7035 \cdot 10^{-7}$
4	Алгоритм 3.1 (АПУР, k=3)	0.0461	$7.3434 \cdot 10^{-7}$
5	Алгоритм 3.1 (АПУР, k=4)	0.0205	$3.6693 \cdot 10^{-7}$
6	Алгоритм 3.2 (МУР)	0.9704	$1.9429 \cdot 10^{-6}$
7	Алгоритм 3.3	0.5250	0.0050
8	Обратное интегрирование с SDRE	0.5382	0.0080

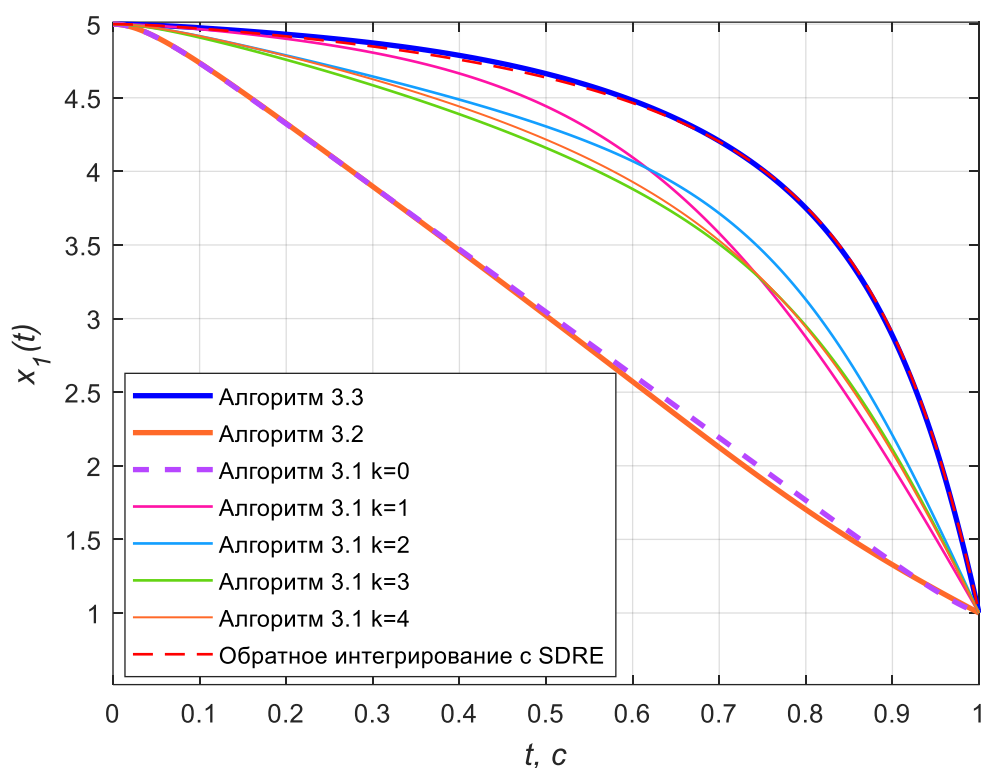


Рисунок 3.1. Результаты моделирования системы (3.58)

при  $\gamma = 0$ , т.е.  $B(x, u) = [0 \ 1]^T$ .

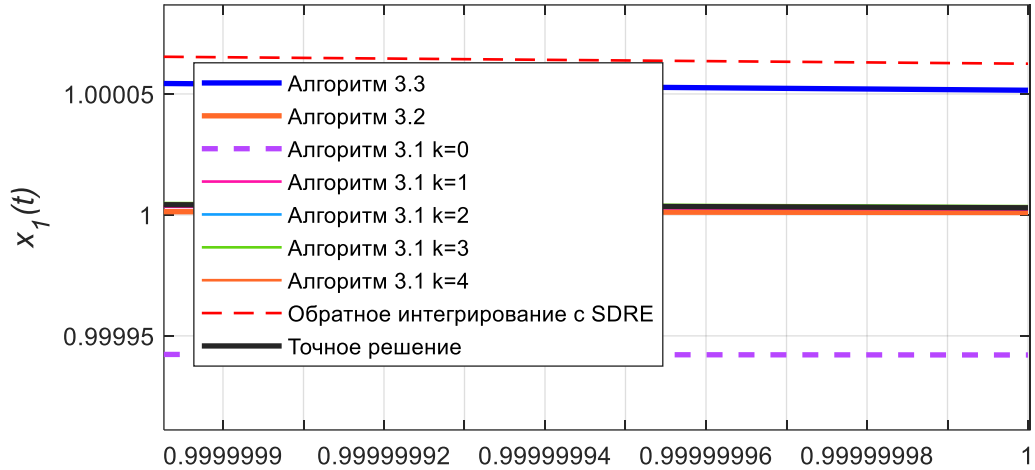


Рисунок 3.2. Результаты моделирования системы (3.58) при  $B(u) = [0 \ 1]^T$  в терминальный момент времени

Аналогичным образом выполнено моделирование для системы с нелинейностями в управлении. Результаты показаны на рис.3.3, 3.4. В случае нелинейности управления алгоритм 3.1 (метод АПУР) сходится к точному решению за  $k=4$  шагов со среднеквадратичной ошибкой 0.0230. Нулевая итерация уже отличается от решения на основе алгоритма 3.2 (МУР).

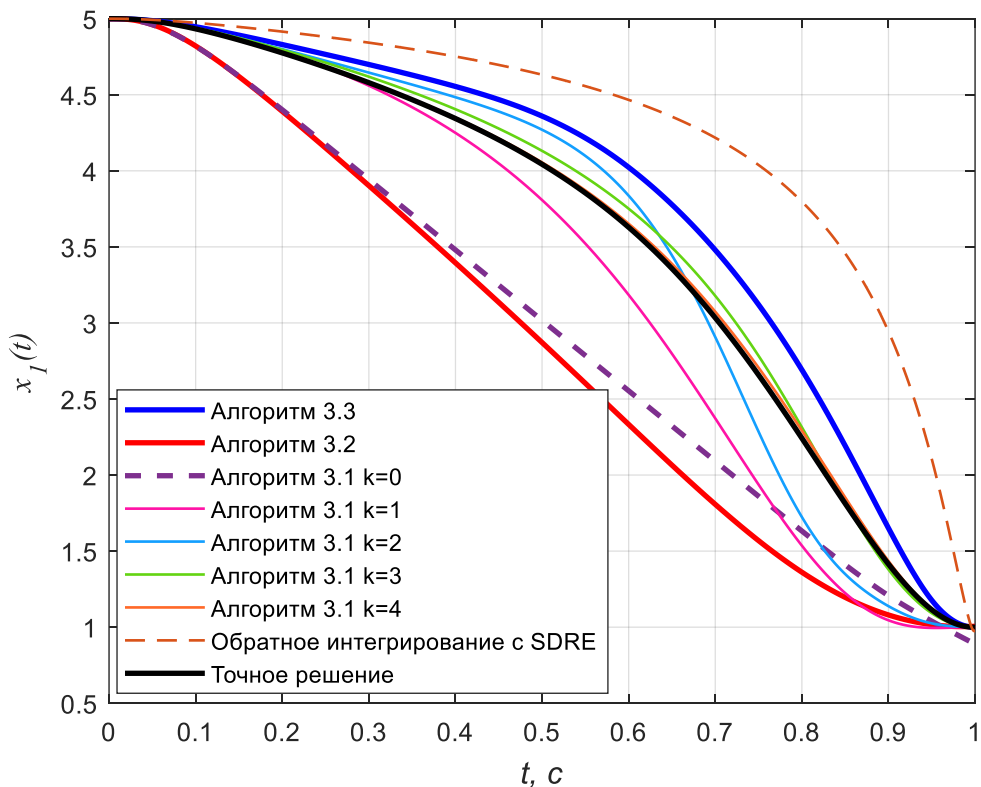


Рисунок 3.3. Результаты моделирования системы (3.58) при  $\gamma = 1$ .

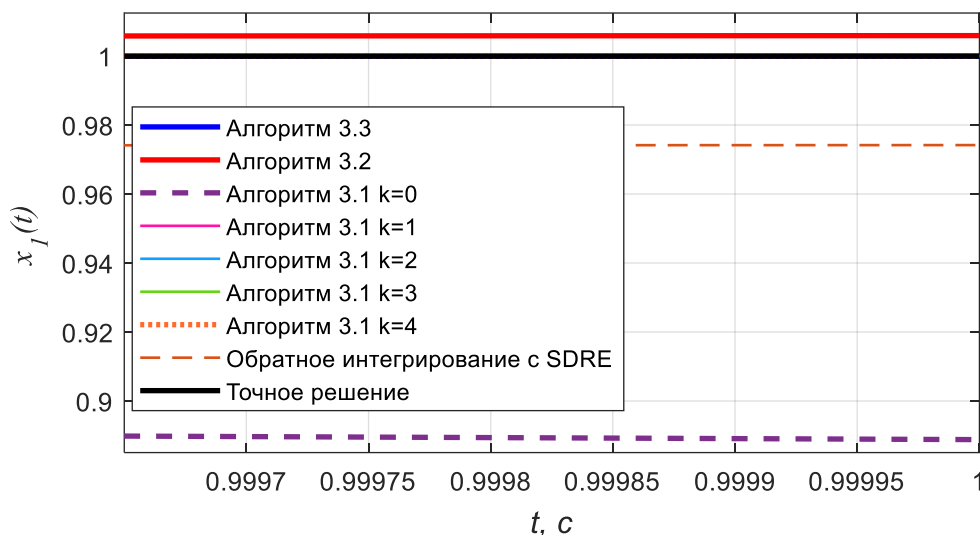


Рисунок 3.4. Результаты моделирования системы (3.58) в терминальный момент времени при  $\gamma = 1$ .

Решение на базе алгоритма 3.3 с терминальным вычислением вектора состояния при обратном интегрировании существенно отличается от решения с обратным интегрированием на основе классического SDRE регулятора. Здесь уже терминальный характер вектора состояния при обратном интегрировании играет роль и дает решение более близкое к точному. Это и подтверждает преимущество предлагаемого метода обратного интегрирования SDDRE, использующего для регулирования состояния системы при движении в обратном направлении от конечного момента времени к начальному терминальный регулятор, полученный на основе решения вспомогательной задачи терминального управления для этой системы при движении в обратном времени от конечной точки к начальной.

Высокой терминальной точностью приведения обладают алгоритм 3.1 (при  $k \geq 2$ ) и алгоритм 3.3. Алгоритм 3.2 в данном случае показал более плохой результат, но худший результат показал метод обратного интегрирования на базе SDRE как с точки зрения близости к точному решению на всем интервале времени, так и с точки зрения терминальной точности. Сравнительные данные приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Результат сравнения методов

№	Метод	Среднеквадратичная ошибка	Терминальная ошибка $e(t_f) =  x_f(t_f) - x_i(t_f) $
1	Алгоритм 1 (АПУР, k=0)	0.6938	0.1112
2	Алгоритм 1 (АПУР, k=1)	0.3649	$3.1283 \cdot 10^{-5}$
3	Алгоритм 1 (АПУР, k=2)	0.2185	$1.2226 \cdot 10^{-5}$
4	Алгоритм 1 (АПУР, k=3)	0.0744	$9.3683 \cdot 10^{-6}$
5	Алгоритм 1 (АПУР, k=4)	0.0230	$8.0957 \cdot 10^{-8}$
6	Алгоритм 2 (МУР)	0.8339	0.0059
7	Алгоритм 3	0.2780	$3.0327 \cdot 10^{-5}$
8	Обратное интегрирование с SDRE	0.8631	0.0258

### 3.5.2. Пример задачи оптимального следящего управления на конечном интервале времени

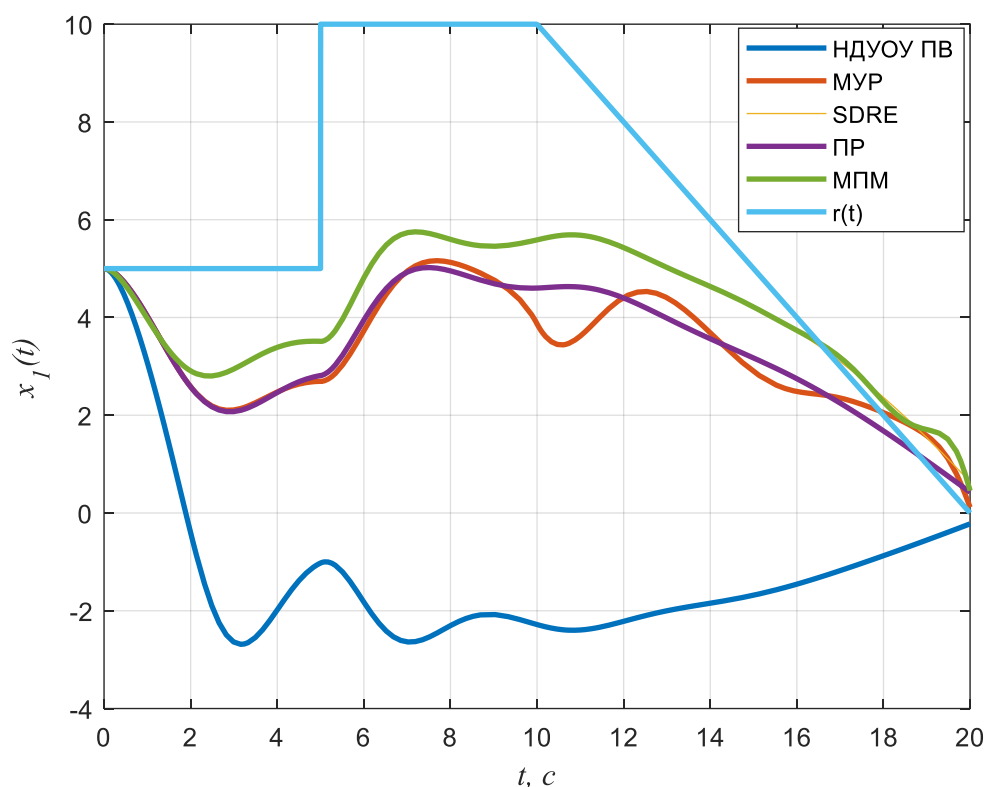
Здесь также рассматриваем осциллятор Ван дер Поля (3.58). Выход системы должен отслеживать желаемый задающий сигнал

$$r(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t \leq 5, \\ 10, & 5 < t \leq 10, \\ 20 - t, & 10 < t. \end{cases}$$

Чтобы задать начальное условие, соответствующее началу траектории, выбрано  $x(t_0) = [5 \ 0]^T$ . Время моделирования  $t_f = 25$ . Параметры матриц штрафов изначально взяты относительно небольшими, чтобы выявить различия между методами ( $R = 1$ ,  $Q = 1$ ). Решение задачи построено на основе раздела 3.2. Для анализа результатов проведено также решение задачи на основе существующих методов: МУР, классический SDRE, метода переходной матрицы (МПИМ), приближенное решение (ПР) и их модификаций [183, 185]. Результаты показаны на рис 3.5. Численные данные для сравнения приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3. Результат сравнения методов при  $R = 1$ ,  $Q = 1$ .

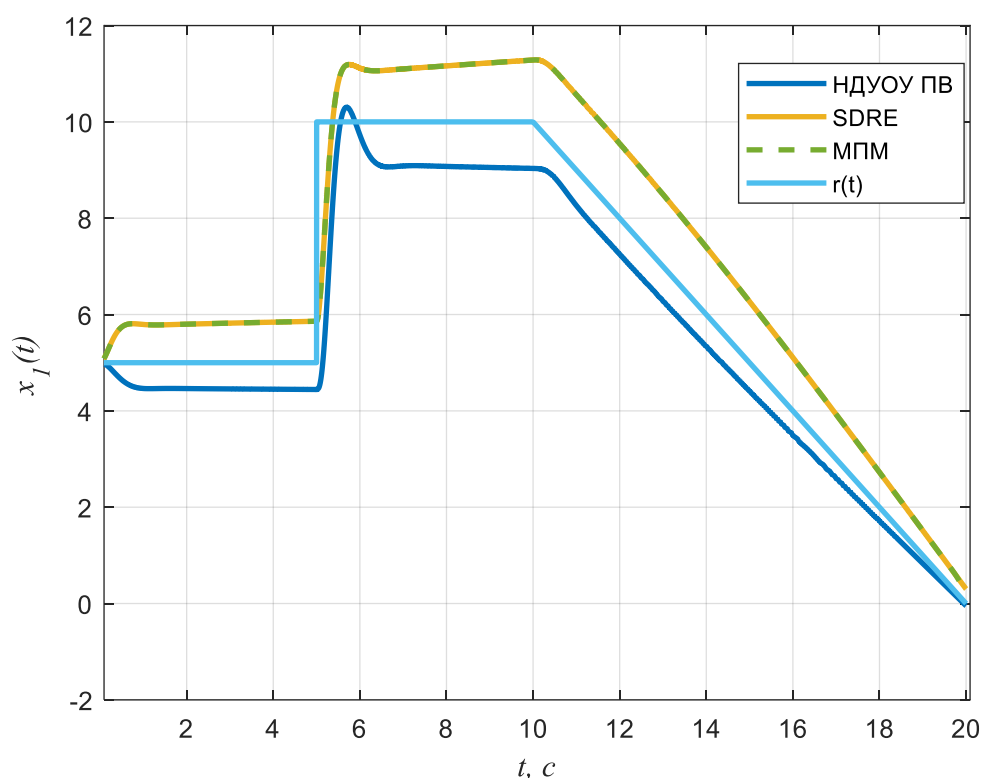
№	Метод	Среднеквадратичная ошибка	Терминальная ошибка $e(t_f) =  x_f(t_f) - x_i(t_f) $
1	НДУОУ ПВ	7.8562	0.2222
2	МУР	3.8365	0.1162
3	SDRE	3.0890	0.6373
4	ПР	3.6596	0.4262
5	МПМ	3.0906	0.4562

Рисунок 3.5. Результаты моделирования системы (3.58) со следящим управлением для сигнала  $r(t)$  при  $R = 1$ ,  $Q = 1$ 

Видно, что без настройки параметров через матрицы штрафов все следящие регуляторы не дают приемлемого результата. Увеличим матрицу штрафа  $Q = 10^3$  и промоделируем, результаты показаны на рис.3.6, и в табл.3.4. Во-первых, отметим, что не все методы смогли решить задачу из-за вычислительных сложностей (МУР и ПР столкнулись с численными ошибками). Также видно, что МПМ и SDRE дали одинаковый результат.

Таблица 3.4. Результат сравнения методов при  $R = 1, Q = 10^3$ .

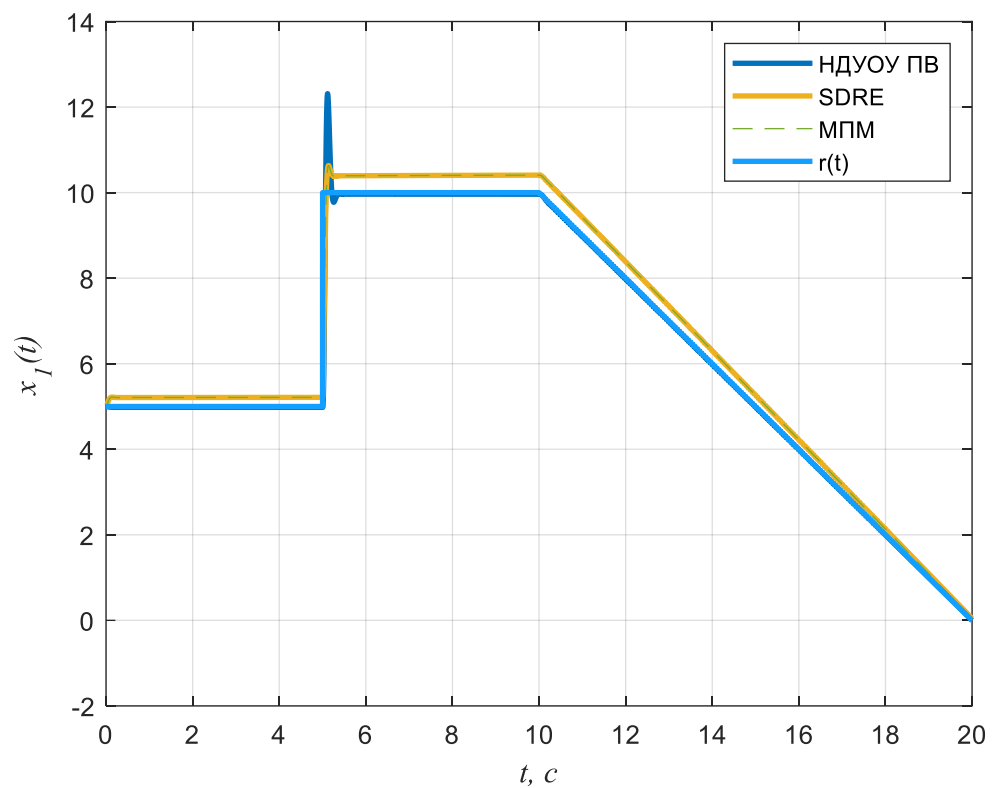
№	Метод	Среднеквадратичная ошибка	Терминальная ошибка $e(t_f) =  x_f(t_f) - x_i(t_f) $
1	НДУОУ ПВ	0.8684	0.0467
2	МУР	-	-
3	SDRE	1.1490	0.3009
4	ПР	-	-
5	МПИМ	1.1489	0.1995

Рисунок 3.6. Результат моделирования системы (3.58) со следящим управлением для сигнала  $r(t)$  при  $R = 1, Q = 10^3$ .

Скорректируем также матрицу штрафа  $R = 10^{-3}$ . В данном случае МУР и ПР также имели численные трудности и не привели к решению. Результаты приведены на рис.3.7 и в таблице 3.5. Заметим, что результат, близкий к последнему случаю, можно получить, взяв  $R = 10^{-6}, Q = 1$ .

Таблица 3.5. Результат сравнения методов при  $R = 10^{-3}$ ,  $Q = 10^3$ .

№	Метод	Среднеквадратичная ошибка	Терминальная ошибка $e(t_f) =  x_f(t_f) - x_i(t_f) $
1	НДУОУ ПВ	0.2510	0.0003
2	МУР	-	-
3	SDRE	0.3581	0.0467
4	ПР	-	-
5	МПМ	0.3581	0.0296

Рисунок 3.7. Результат моделирования системы (3.58) со следящим управлением для сигнала  $r(t)$  при  $R = 10^{-3}$ ,  $Q = 10^3$ .

### 3.5.3. Пример применения разработанных SDC-методов с оптимальной параметризацией

Для апостериорного представления об эффективности того или иного критерия выбора SDC-параметризации матриц нелинейной системы

проанализируем рассмотренные выше примеры. Для системы (3.58) выберем следующие родительские матрицы

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu(1 - x_1^2) \end{bmatrix}, \quad A_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + \mu x_1 x_2) & \mu \end{bmatrix}.$$

Соответственно параметризованная матрица будет иметь вид:

$$A(x, \alpha) = \alpha A_1(x) + (1 - \alpha) A_2(x), \alpha \in [0, 1].$$

Остальные параметры выберем такими же как в примере 3.5.1 и выполним моделирование алгоритма 3 с различными критериями параметризации (3.57). Результаты собраны в таблице 3.6, траектории координаты  $x_1$  даны на рис.3.8.

Из результатов следует, что использование даже достаточно простой параметризации (по одному параметру) позволило повысить терминальную точность приведения до 2 раз, уменьшить среднеквадратичную ошибку до 3,5 раз. С точки зрения указанных характеристик наилучшим критерием параметризации стала минимизация числа обусловленности матрицы состояния системы  $\min_{\alpha} C\{A(\alpha)\}$ , схожие результаты дал критерий  $\min_{\alpha} \{J(u, \alpha)\}$ . Важно, что в целом применение параметризации не зависимо от выбора одного из исследуемых критериев позволило улучшить результат.

Таблица 3.6. Результат сравнения методов при разных критериях параметризации.

№	Критерий	Среднеквадратичная ошибка	Терминальная ошибка $e(t_f)$
1	$\min_{\alpha} \text{tr}\{P(\alpha)\}$	0.4424	0.0146
2	$\min_{\alpha} C\{M(\alpha)\}$	0.2281	0.0330
3	$\min_{\alpha} C\{A(\alpha)\}$	0.1452	0.0028
4	$\min_{\alpha} \{C^{1/2}\{M(\alpha)\}\sigma_M^{1/2}(M(\alpha))\}$	0.2913	0.0128
5	$\min_{\alpha} \{J(u, \alpha)\}$	0.2009	0.0028
6	Без параметризации	0.5253	0.0050

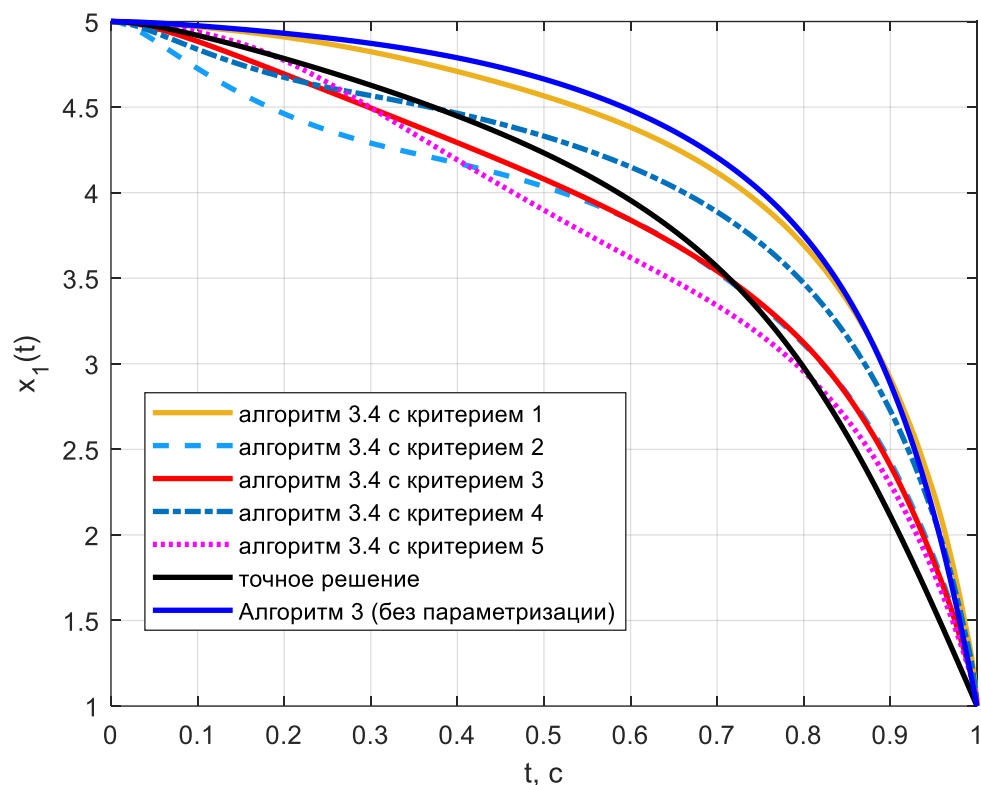


Рисунок 3.8. Результаты моделирования системы (3.58) с параметризацией по разным критериям

Аналогичный прием применим в задаче слежения из 3.5.2. Родительские матрицы выбираем, как и прежде, остальные параметры моделирования также оставляем прежними как в задаче 3.5.2. Результаты собраны в таблице 3.7, траектории координаты  $x_1$  даны на рис.3.9.

Таблица 3.7. Результат сравнения методов при разных критериях параметризации.

№	Критерий	Среднеквадратичная ошибка	Терминальная ошибка $e(t_f)$
1	$\min_{\alpha} \text{tr}\{P(\alpha)\}$	0.2312	0.0445
2	$\min_{\alpha} C\{M(\alpha)\}$	0.2312	0.0445
3	$\min_{\alpha} C\{A(\alpha)\}$	0.2255	0.0445
4	$\min_{\alpha} \left\{ C^{1/2}\{M(\alpha)\} \sigma_M^{1/2}(M(\alpha)) \right\}$	0.2311	0.0445
5	$\min_{\alpha} \{J(u, \alpha)\}$	0.2298	0.0445
6	Без параметризации	0.2510	0.0003

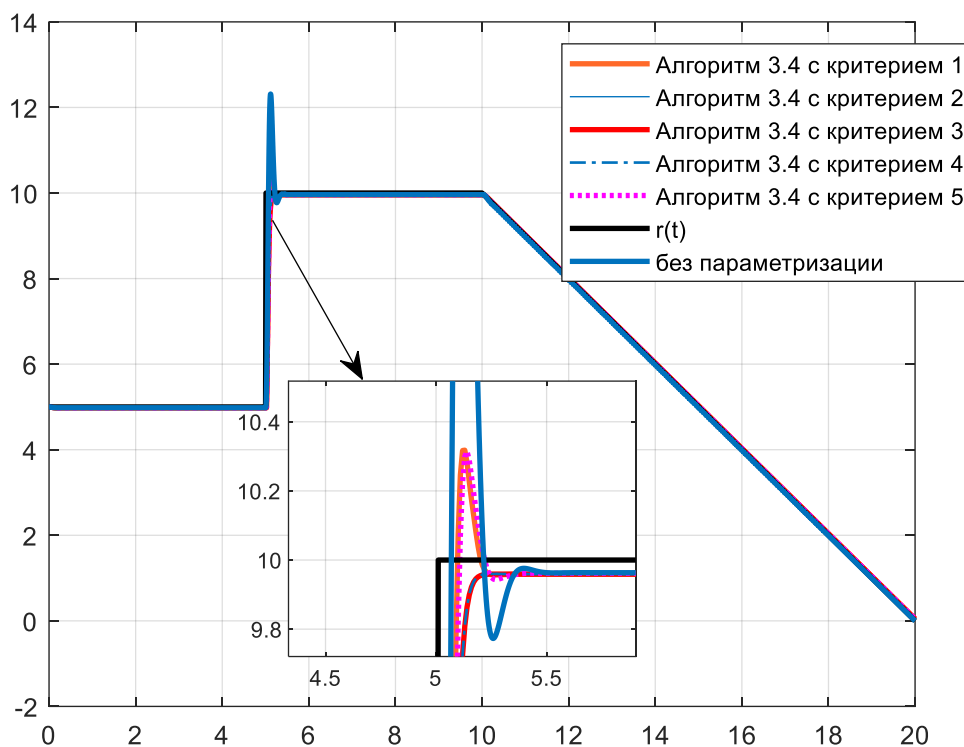


Рисунок 3.9. Результаты моделирования системы (3.58) со следящим управлением с параметризацией по разным критериям

Из результатов видно, параметризация также позволяет повысить качество слежения, снижая среднеквадратичную ошибку. При этом характеристики (среднеквадратичная и терминальная ошибки) для различных критериев параметризации оказались практически идентичными, хотя для критериев 3,4 переходный процесс при ступенчатом изменении задающего сигнала при  $t=5$  стал апериодическим, а критерии 1,2,5 дали переходный процесс с перерегулированием 2% (без параметризации перерегулирование составляло 22%). Поскольку выбор конкретного критерия в задаче слежения не существенно влиял на рассматриваемые характеристики точности, то в такой ситуации предлагается руководствоваться дополнительными характеристиками, например, вычислительными затратами на реализацию алгоритма с параметризацией. С этой позиции наиболее эффективным представляется критерий  $\min_{\alpha} C\{A(\alpha)\}$ .

### 3.6. Выводы по главе

В настоящей главе рассмотрены нелинейные задачи оптимального управления на конечном интервале времени. Основной вклад данной главы в следующем:

1. Получено решение в форме обратной связи задачи точного терминального управления выходом нелинейной системы на конечном интервале времени с использованием НДУОУ в SDC-представлении.

2. Получил дальнейшее развитие метод решения нелинейной задачи оптимального управления на конечном интервале времени на основе обратного интегрирования соответствующих НДУОУ в SDC-представлении, отличающийся тем, что для регулирования состояния системы при движении в обратном направлении от конечного момента времени к начальному используется не стабилизирующий SDRE регулятор, а терминальный регулятор, полученный на основе решения вспомогательной задачи терминального управления для этой системы. Преимущество предлагаемого терминального закона для регулирования в обратном времени по сравнению со стандартным SDRE состоит в том, что траектория вектора состояния носит терминальный характер (это не SDRE стабилизация на бесконечном интервале времени), что соответствует природе движения состояния системы в прямом времени под действием оптимального закона управления. Это позволяет повысить точность терминального приведения выхода системы.

3. Предложен новый метод решения задачи оптимального слежения за заданным сигналом для выхода нелинейной системы в SDC-представлении на конечном интервале времени, отличающийся тем, что решение ищется через одноэтапную процедуру с помощью решения SDRE и интегрирования в прямом времени соответствующего дифференциального уравнения для вспомогательного вектора, начальные условия для которого однозначно определяются из начальных условий для вектора состояния системы, тогда как существующие методы, основанные на одноэтапной процедуре

интегрирования в прямом времени, не дают информации о начальных условиях для аналогичных дифференциальных уравнений и требуют их численного подбора каким-либо способом, что увеличивает трудоемкость, влияет на точность решения.

4. Показано, что SDC-параметризация матриц состояния нелинейной системы может использоваться как дополнительная степень свободы при синтезе системы. В частности, целью оптимальной SDC-параметризации может быть минимизация затрат на управление, повышение степени управляемости системы, обеспечение условий разрешимости уравнений Ляпунова и пр. Предложенные критерии выбора параметризации носят эвристический характер; их эффективность подтверждена на примерах.

Результаты главы опубликованы в работах [55, 59, 160, 163, 165].

## Глава 4. Методы оценивания состояния и возмущений

В настоящей главе рассматриваются две задачи информационного уровня: оценивание состояния нелинейной системы при неопределённости в начальных условиях и оценивание неизвестных возмущений. Для решения первой задачи в разделе 4.1 предложен фильтр Калмана (ФК) в SDC-представлении с диффузной инициализацией, позволяющий получать состоятельные оценки даже при полном отсутствии априорной информации о начальном состоянии.

Вторая часть главы посвящена оцениванию возмущений (внешних или внутренних). Для решения этой задачи последние два десятилетия активно используются наблюдатели, работающие в скользящих режимах [28, 29, 114, 119, 225]. Однако типичные требования к системе – так называемые условия согласования – существенно ограничивают класс объектов, для которых такие наблюдатели могут быть построены. В данном разделе предлагается подход, свободный от этих ограничений, основанный на методах оптимального управления. Вспомогательная задача слежения с квадратичным функционалом невязки интерпретируется как мера воздействия, необходимого для отклонения системы от номинальной траектории, что позволяет оценивать возмущения как оптимальное управление.

### 4.1. Оценивание состояния нелинейной системы при неопределённости в начальных условиях

Рассмотрим нелинейную систему в SDC-представлении

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u + G_w(x)w, \quad y = Cx + v, \quad (4.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния системы,  $y \in \mathbb{R}^m$  – измеряемый выходной вектор системы,  $w \in \mathbb{R}^n$  – случайный шум в динамике объекта и  $v \in \mathbb{R}^m$  –

случайный шум при измерениях (некоррелированные случайные процессы с нулевым средним и ковариационными матрицами  $Q_w \geq 0$  и  $R_v > 0$  соответственно), матрицы  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $G_w(x)$  предполагаются непрерывно дифференцируемыми и локально липшицевыми. В дальнейшем траектории системы и наблюдателя считаются лежащими в некоторой компактной области  $\mathcal{D}$ ; поэтому локальная липшицевость автоматически даёт липшицевость в  $\mathcal{D}$ .

**Предположение 4.1.** Начальное состояние системы (4.1) удовлетворяет следующим условиям:

- случайный вектор  $x$  не коррелирует с  $w$  и  $v$  для  $t \in [t_0, t_f]$ ;
- априорная информация о векторе состояния в начальный момент времени  $x(t_0)$  отсутствует, а само начальное состояние рассматривается как случайная величина с нулевым средним, а ковариационная матрица пропорциональна малому параметру  $\lambda_f > 0$ .

Для системы (4.1) запишем уравнения нелинейного ФК в SDC-представлении [178]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A(\hat{x})\hat{x} + B(\hat{x})u + \Gamma_e(\hat{x}, t)(y - C\hat{x}), \\ \Gamma_e(\hat{x}, t) &= P_e(\hat{x}, t)C^T R_v^{-1}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

и матрица  $P_e(\hat{x}, t)$  является решением SDDRE

$$\begin{aligned} \dot{P}_e(\hat{x}) &= A(\hat{x})P_e(\hat{x}) + P_e(\hat{x})A^T(\hat{x}) - \\ &P_e(\hat{x})C^T R_v^{-1} C P_e(\hat{x}) + G_w(\hat{x})Q_w G_w^T(\hat{x}), \end{aligned} \quad (4.3)$$

которое решается при заданных начальных условиях  $P_e(\hat{x}, t_0)$ .

В условиях предположения 4.1 ковариация компонент вектора состояния в начальный момент времени определяется выражением

$$P_e(\hat{x}, t_0) = \lambda_f^{-1} P_{e0}, \quad (4.4)$$

где  $P_{e0} > 0$  постоянная  $(n \times n)$  - матрица. Параметр  $\lambda_f$  определяет величину неопределенности в начальных условиях для фильтра (4.2), т.е. чем меньше  $\lambda_f$ , тем больше начальная неопределенность.

Проблема заключается в построении фильтра (4.2) - (4.4), работоспособного при  $\lambda_f \rightarrow 0$ , т.е. в условиях практически полной неопределённости начального состояния.

Задача оценивания состояния системы (4.1) при неизвестных начальных условиях двойственна специальной задаче оптимального управления на конечном интервале времени (установить выход системы точно в ноль за конечное время), постановка и решение которой приведены в главе 3 (раздел 3.1 с учетом замечания 3.3). Здесь используем некоторые приемы из этой соответствующей задачи терминального управления.

Матрицу  $P_e(\hat{x})$  в (4.3) можно найти из

$$P_e(\hat{x}) = K_e(\hat{x}) + W_e(\hat{x})(M_e(\hat{x}) + \lambda_f P_{e0}^{-1})^{-1} W_e^T(\hat{x}), \quad (4.5)$$

где матрицы  $K_e(\hat{x})$ ,  $W_e(\hat{x})$  и  $M_e(\hat{x})$  удовлетворяют уравнениям

$$\dot{K}_e = A(\hat{x})K_e(\hat{x}) + K_e(\hat{x})A^T(\hat{x}) - K_e(\hat{x})C^T R_v^{-1} C K_e(\hat{x}) + G_w(\hat{x})Q_w G_w^T(\hat{x}), \quad K_e(\hat{x}, t_0) = 0,$$

$$\dot{W}_e = (A(\hat{x}) - K_e(\hat{x})C^T R_v^{-1} C)W_e(\hat{x}), \quad W_e(\hat{x}, t_0) = I,$$

$$\dot{M}_e = -W_e^T(\hat{x})C^T R_v^{-1} C W_e(\hat{x}), \quad M_e(\hat{x}, t_0) = 0.$$

Матрица  $W_e(t)$  является переходной матрицей линейной системы  $\dot{z} = (A(\hat{x}(t)) - K_e(\hat{x}(t))C^T R_v^{-1} C)z$ , следовательно,  $W_e(t)$  невырождена при всех  $t$ . Интегрируя уравнение для  $M_e$ , получаем

$$M_e(\hat{x}) = \int_{t_0}^t W_e^T(\hat{x}(\tau))C^T R_v^{-1} C W_e(\hat{x}(\tau)) d\tau. \quad (4.6)$$

**Предположение 4.2 [228].** Пара  $(A(\hat{x}), C)$  равномерно полностью наблюдаема на  $[t_0, t_f]$  вдоль траектории оценки  $\hat{x}(t)$ . То есть существуют константы  $t_T > 0$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  такие, что для любого  $t \geq t_0$  грамиан

наблюдаемости  $\mathcal{M}(t, t + t_T) = \int_t^{t+t_T} \Phi^T(\tau, t) C^T R_v^{-1} C \Phi(\tau, t) d\tau$  удовлетворяет  $\alpha_1 I \leq \mathcal{M}(t, t + t_T) \leq \alpha_2 I$ , где  $\Phi(\tau, t)$  – переходная матрица системы  $\dot{z} = A(\hat{x}(\tau))z$ .

**Предположение 4.3.** Матрица  $\tilde{Q}(x) = G_w(x) Q_w G_w^T(x)$  положительно определена: существует  $\lambda_{\min} > 0$  такое, что  $\tilde{Q}(x) \geq \lambda_{\min} I$  для всех  $x \in \mathcal{D}$ , где  $\mathcal{D}$  – компактная область, содержащая траектории системы и наблюдателя. Кроме того,  $R_v > 0$ .

Для  $\lambda_f \rightarrow 0$  из соотношений (4.2), (4.5) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_f \rightarrow 0} \Gamma_e(\hat{x}) &= \bar{\Gamma}_e(\hat{x}) = \bar{P}_e(\hat{x}) C^T R_v^{-1}, \\ \bar{P}_e(t) &= K_e(\hat{x}) + W_e(\hat{x}) M_e^{-1}(\hat{x}) W_e^T(\hat{x}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Условия существования предела в (4.7) определяются следующей теоремой.

**Теорема 4.1.** Пусть для системы (4.1) выполнены предположения 4.1, 4.2 и 4.3, а матрицы  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $G_w(\cdot)$  локально липшицевы. Тогда существует момент времени  $t_1 = t_0 + t_T$  такой, что предел (4.7) существует для всех  $t \geq t_1$ , матрица усиления  $\bar{\Gamma}_e(t)$  ограничена на любом интервале  $[t_1, t_f]$  с  $t_1 > t_0$ , и при этом  $\|\bar{\Gamma}_e(t)\| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow t_0$ .

**Доказательство.** При  $\lambda_f = 0$  из (4.5) имеем

$$\bar{P}_e(\hat{x}) = K_e(\hat{x}) + W_e(\hat{x}) M_e^{-1}(\hat{x}) W_e^T(\hat{x}).$$

Поскольку траектория оценки  $\hat{x}(\tau)$  вычисляется в реальном времени, матрица  $A(\hat{x}(\tau))$  становится известной функцией времени. Таким образом, уравнение (4.3) превращается в линейное дифференциальное уравнение Риккати с переменными коэффициентами. В [228] показано, что при выполнении условий равномерной полной наблюдаемости (предположение 4.2) и положительной определённости  $\tilde{Q}(x)$  (предположение 4.3) решение  $\bar{P}_e(\hat{x})$  уравнения (4.3) (при  $\lambda_f = 0$ ) существует, единственно, ограничено и

положительно определено для всех  $t \geq t_1 = t_0 + t_T$ . В частности, существуют константы  $\beta > 0$  и  $\gamma_1 > 0$  такие, что  $\beta I \leq \bar{P}_e(\hat{x}) \leq \gamma_1 I$  для всех  $t \geq t_1$ .

Матрица  $W_e(\hat{x})$  невырождена, а  $K_e(\hat{x})$  и  $W_e(\hat{x})$  ограничены на любом конечном интервале  $[t_0, t_f]$ . Из (4.5) при  $\lambda_f = 0$  имеем  $\bar{P}_e - K_e = W_e M_e^{-1} W_e^T$ . Умножая слева на  $W_e^{-1}$  и справа на  $W_e^{-T}$ , получаем  $M_e^{-1} = W_e^{-1}(\bar{P}_e - K_e)W_e^{-T}$ . Поскольку все сомножители в правой части ограничены на  $[t_1, t_f]$ , матрица  $M_e^{-1}(\hat{x}(t))$  также ограничена на этом интервале. Следовательно,  $\bar{\Gamma}_e(\hat{x}(t)) = \bar{P}_e(\hat{x}(t))C^T R_v^{-1}$  ограничена на  $[t_1, t_f]$ . При  $t \rightarrow t_0$  интеграл в (4.6) стремится к нулю,  $M_e(\hat{x}(t)) \rightarrow 0$  и  $\|M_e^{-1}(\hat{x}(t))\| \rightarrow \infty$ . Из второго выражения в (4.7) получаем  $\|\bar{P}_e(\hat{x}(t))\| \rightarrow \infty$ , а вместе с ним и  $\|\bar{\Gamma}_e(\hat{x}(t))\| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow t_0$ . Теорема доказана.

Теперь установим условия, при которых ошибка оценивания сходится к нулю. Для этого потребуется ряд дополнительных предположений.

**Предположение 4.4.** Матрицы  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $G_w(\cdot)$  равномерно ограничены и глобально липшицевы в  $\mathcal{D}$ . Управление  $u(t)$  также равномерно ограничено. Также существует константа  $L > 0$  такая, что для любых  $x, \hat{x} \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \|A(x)x - A(\hat{x})\hat{x} - A(\hat{x})(x - \hat{x})\| &\leq L\|x - \hat{x}\|, \\ \|B(x)u - B(\hat{x})u\| &\leq L\|x - \hat{x}\|. \end{aligned}$$

Первое неравенство выполнено, если компоненты вектор-функций  $A(x)x$  имеют ограниченные производные; второе – следствие липшицевости  $B(\cdot)$  и ограниченности  $u(t)$ .

**Предположение 4.5.** Константа  $L$  из предположения 4.4 удовлетворяет неравенству  $L < L^* \equiv \frac{\rho_0}{M_0(1+\gamma)}$ , где  $\rho_0 > 0$  и  $M_0 > 0$  – параметры равномерной экспоненциальной устойчивости матрицы  $A_o(t) = A(\hat{x}(t)) - \bar{\Gamma}_e(t)C$  ( $\|\Phi_o(t, s)\| \leq M_0 e^{-\rho_0(t-s)}$ ), а  $\gamma = \sup_{t \geq t_1} \|\bar{\Gamma}_e(t)\|$  – конечная величина, гарантированная теоремой 4.1 при  $t_1 > t_0$ .

**Теорема 4.2.** Пусть для системы (4.1) и наблюдателя (4.2) с матрицей усиления  $\bar{\Gamma}_e(t)$ , полученной предельным переходом  $\lambda_f \rightarrow 0$ , выполнены условия теоремы 4.1 и предположения 4.4 и 4.5. Тогда при отсутствии шумов  $w(t) \equiv 0$ ,  $v(t) \equiv 0$  ошибка  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  экспоненциально сходится к нулю:  $\|e(t)\| \leq M_0 e^{-\rho(t-t_1)} \|e(t_1)\|$ ,  $t \geq t_1 > t_0$ , с некоторыми  $M_0 > 0$ ,  $\rho > 0$ .

**Доказательство.** Динамика ошибки  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  имеет вид

$$\dot{e} = f(x, u) - f(\hat{x}, u) - \bar{\Gamma}_e(t)(h(x) - h(\hat{x})),$$

где  $f(x, u) = A(x)x + B(x)u$ ,  $h(x) = Cx$ . Используя предположение 4.4, запишем  $f(x, u) - f(\hat{x}, u) = A(\hat{x})e + \Delta_f(e, t)$ ,  $h(x) - h(\hat{x}) = Ce$ , причём  $\|\Delta_f(e, t)\| \leq L\|e\|$ . Тогда динамика ошибки будет

$$\dot{e} = (A(\hat{x}) - \bar{\Gamma}_e(t)C)e + r(e, t), \quad r(e, t) = \Delta_f(e, t).$$

Положим  $A_o(t) = A(\hat{x}(t)) - \bar{\Gamma}_e(t)C$ . Из теоремы 4.1 на любом интервале  $[t_1, t_f]$  ( $t_1 > t_0$ ) имеем  $\|\bar{\Gamma}_e(t)\| \leq \gamma$ , поэтому  $\|r(e, t)\| \leq L(1 + \gamma)\|e\|$ . В силу предположений 4.2 и 4.3 система  $\dot{z} = A_o(t)z$  равномерно экспоненциально устойчива, т.е.  $\exists M_0 > 0$ ,  $\rho_0 > 0$  такие, что переходная матрица  $\Phi_o(t, s)$  удовлетворяет  $\|\Phi_o(t, s)\| \leq M_0 e^{-\rho_0(t-s)}$ .

По формуле вариации постоянных для  $t > t_1$

$$e(t) = \Phi_o(t, t_1)e(t_1) + \int_{t_1}^t \Phi_o(t, \tau)r(e(\tau), \tau) d\tau.$$

Следовательно, переходя к нормам, получаем

$$\|e(t)\| \leq M_0 e^{-\rho_0(t-t_1)} \|e(t_1)\| + \int_{t_1}^t M_0 e^{-\rho_0(t-\tau)} L(1 + \gamma) \|e(\tau)\| d\tau.$$

Введём вспомогательную функцию  $z(t) = e^{\rho_0(t-t_1)} \|e(t)\|$ . Тогда неравенство принимает вид  $z(t) \leq M_0 \|e(t_1)\| + M_0 L(1 + \gamma) \int_{t_1}^t z(\tau) d\tau$ .

Применяя лемму Гронуолла [176, лемма А.1], получаем

$$z(t) \leq M_0 \|e(t_1)\| \exp(M_0 L(1 + \gamma)(t - t_1)),$$

откуда  $\|e(t)\| \leq M_0 \exp(-[\rho_0 - M_0 L(1 + \gamma)](t - t_1)) \|e(t_1)\|$ .

По предположению 4.5  $L < \frac{\rho_0}{M_0(1+\gamma)}$ , значит  $\rho = \rho_0 - M_0 L(1 + \gamma) > 0$ .

Получаем экспоненциальную оценку  $\|e(t)\| \leq M \exp(-\rho(t - t_1)) \|e(t_1)\|$ .

Таким образом, ошибка оценивания экспоненциально сходится к нулю.

Теорема доказана.

**Замечание 4.1.** В классическом линейном случае  $A(x) = A$ , предположения 4.2-4.5 выполняются автоматически при наблюдаемости  $(A, C)$  и  $\tilde{Q} > 0$ . Если исходно  $Q_w = 0$ , условие  $\tilde{Q} > 0$  обеспечивается внесением малой фиктивной добавки, что не нарушает асимптотику фильтра. На практике это соответствует стандартной регуляризации.

**Замечание 4.2.** Выбор момента  $t_1 > t_0$  в теореме 4.1 связан с тем, что при  $t \rightarrow t_0$  усиление  $\bar{\Gamma}_e(\hat{x})$  неограниченно растёт; на практике интегрирование уравнений (4.5) начинают с малого, но ненулевого  $t_1$ .

## 4.2. Оценивание возмущений нелинейных систем на основе методов оптимального управления

Уравнения управляемого объекта в SDC-представлении

$$\dot{x}_\xi = A(x_\xi)x_\xi + B(x_\xi)u + G(x_\xi)\xi(t), x_\xi(t_0) = x_0, \quad (4.8)$$

где  $\dot{x}_\xi \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния системы;  $u \in \mathbb{R}^r$  – вектор управления;  $A(x_\xi), B(x_\xi)$  – матрицы соответствующих размерностей, с коэффициентами, зависящими от состояния;  $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$  – вектор-функция, описывающая возмущения (внешние или внутренние): при их отсутствии  $\xi(t) = 0$ , при появлении возмущений  $\xi(t)$  становится неизвестной, но ограниченной функцией времени.

Предполагается, что матрица  $G(x)$  и функция  $\xi(t)$  описывают возмущения, которые возможны в системе, причем заранее неизвестно, какие

из них могут возникать. При этом известна история измерений  $y_\xi = Cx_\xi \in \mathbb{R}^m$  фазовых переменных  $x_\xi(t)$  системы (4.8) на интервале  $t \in [t_0, t_f]$ , на котором система управляется некоторым законом, который, не умаляя общности, можно представить в виде  $u(t) = G_{nom}(x_\xi, t)$ .

В работе ставится задача разработки метода построения наблюдателей для оценивания неизвестной функции  $\xi(t)$ . Задача состоит в нахождении по измерениям  $y(t)$  такой аппроксимации  $\xi_*(t, t_f)$  неизвестной функции возмущений  $\xi(t)$ , что  $\lim_{t_f \rightarrow \infty} \xi_*(t, t_f) = \xi(t)$ .

Для решения задачи оценивания возмущений в системе (4.8) рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления для системы

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(z)z + B(z)u + G(z)v, \quad z(t_0) = x_0, \\ y_z &= Cz, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния вспомогательной системы; функция  $v(t) \in \mathbb{R}^{n_\xi}$  рассматривается как управление вспомогательной системы.

Здесь роль неизвестной вектор-функции  $\xi(t)$ , описывающей возмущения, выполняет вспомогательное управление  $v(t)$ , которое выбирается так, чтобы перевести систему (4.9) из произвольного состояния  $z(t_0) = x_0$  в состояние  $y_z(t_f) = y(t_f)$  при  $t_f \rightarrow \infty$  и при этом минимизировать функционал невязки

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (e_y^T Q e_y + v^T R v) dt \rightarrow \min_v, \quad (4.10)$$

где  $e_y(t) = y_z(t) - y_\xi(t) \in \mathbb{R}^m$  – вектор невязки,  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  – положительно-полуопределённая матрица;  $R \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$  – положительно определенная матрица;  $T$  – символ транспортирования.

Задача оценивания возмущений состоит в том, чтобы восстановить по измерениям  $y_\xi(t)$  состояние  $z(t)$  вспомогательной системы (4.9), т.е. нужно построить оптимальное в смысле (4.10) управление  $v(t)$  и порождаемую им

траекторию системы (4.9) такие, что  $\|y_z(t) - y_\xi(t)\| \rightarrow 0$ ,  $\|v(t) - \xi(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Критерий (4.10) для системы (4.9) является мерой действия, которое необходимо выполнить для отклонения системы от номинальной невозмущённой траектории, которой присваивается действие, равное нулю  $v(t) = 0$ . В таком случае затратность движения по заданной возмущенной траектории  $y_\xi(t)$  измеряется количеством управляющих воздействий  $v(t)$ , необходимых для того, чтобы направить выход  $y_z(t)$  вспомогательной системы (4.9) вдоль  $y_\xi(t)$ . Эта ключевая идея интерпретации критерия (4.10) и связь с соответствующей задачей оптимального управления (4.9), (4.10) позволяют рассматривать значение  $v(t)$ , соответствующее оптимальному закону, как оценку возмущений  $\xi(t)$ , действующих на систему (4.8). Вспомогательная система (4.9) при этом представляет собой наблюдатель, который строит оценку возмущения  $\xi(t)$  на основе  $v(t)$ . Обоснованность этой идеи и принципиальная возможность оценивания возмущений таким способом показаны далее.

**Предположение 4.6.** Матрицы  $A(x_\xi), B(x_\xi), G(x_\xi)$  локально липшицевы, траектории  $x_\xi(t), z(t)$  лежат в некоторой компактной области  $\mathcal{D}$ , а сигналы  $u(t), v(t)$  ограничены.

Введём ошибку наблюдения  $e = z - x_\xi$  и ошибку оценивания возмущения  $e_\xi = v - \xi$ . Вычитая (4.8) из (4.9) и используя тождество  $A(z)z = A(x_\xi)z + (A(z) - A(x_\xi))z$ , получаем

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A(x_\xi)e + G(x_\xi)e_\xi + \Psi(z, x_\xi, u, v), \\ e_y &= Ce, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $\Psi(z, x_\xi, u, v) = (A(z) - A(x_\xi))z + (B(z) - B(x_\xi))u + (G(z) - G(x_\xi))v$ .

**Предположение 4.7.** Для системы ошибки (4.11) существует константа  $L > 0$  такая, что для всех  $z, x_\xi \in \mathcal{D}$ , ограниченных  $u(t), v(t)$  и достаточно малых  $\|e\|$  выполняются неравенства

$$\|\Psi(z, x_\xi, u, v)\| \leq L\|e\|. \quad (4.12)$$

Запишем теперь само решение задачи оптимального слежения (4.9), (4.10), которая, по сути, была решена в разделе 3.2 с той разницей, что в системе (4.9) присутствует слагаемое  $B(z)u$ , которое не меняет схемы решения. Приведем его:

$$v = -R^{-1}G^T(z)\bar{M}^{-1}(z)(z - \bar{g}(z)), \quad (4.13)$$

$$0 = \bar{M}(z)A^T(z) + A(z)\bar{M}(z) - G(z)R^{-1}G^T(z) + \bar{M}(z)C^TQC\bar{M}(z), \quad (4.14)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{g}(z) = (A(z) + \bar{M}(z)C^TQC)\bar{g}(z) - \bar{M}(z)C^TQu + B(z)u, \quad \bar{g}(t_0) = x_0. \quad (4.15)$$

Решение SDRE (4.14) существует при условии поточечной управляемости пары матриц  $(A(z), G(z))$  и наблюдаемости пары  $(A(z), C)$ . Решение (4.15) при этом можно найти, интегрируя слева направо от начальных условий  $\bar{g}(t_0) = x_\xi(t_0)$ , это решение будет ограничено.

Результирующий нелинейный наблюдатель будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(z)z + B(z)u - G(z)R^{-1}G^T(z)\bar{M}^{-1}(z)(z - \bar{g}(z)), \\ z(t_0) &= x_0, \quad y_z = Cz, \end{aligned} \quad (4.16)$$

а оценка возмущения будет определяться формулой (4.13).

**Предположение 4.8.** Для всех  $z \in \mathcal{D}$  выполнены следующие требования: пара  $(A(z), G(z))$  поточечно управляема, а пара  $(A(z), C)$  поточечно наблюдаема.

При этих условиях алгебраическое уравнение Риккати (4.14) имеет для каждого фиксированного  $z$  единственное положительно определённое решение  $\bar{M}(z) > 0$ , которое обеспечивает поточечную гурвицевость матрицы  $A_{cl}(z) = A(z) - G(z)R^{-1}G^T(z)\bar{M}^{-1}(z)$ . Именно это решение используется в законе (4.15) и при анализе устойчивости наблюдателя.

**Замечание 4.3.** Уравнение Риккати (4.14) допускает также отрицательно определённое решение  $\bar{M}(z) < 0$ . В численной реализации именно это

решение может применяться при интегрировании дифференциального уравнения (4.15) для вектора  $\bar{g}(z)$ .

**Теорема 4.3.** Пусть выполнены предположения 4.6-4.8. Тогда для наблюдателя (4.16) невязка выхода  $e_y(t) = y_z(t) - y_\xi(t)$  сходится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , а ошибка наблюдения  $e(t) = z(t) - x_\xi(t)$  остаётся ограниченной.

**Доказательство.** По построению наблюдателя управление  $v(t)$  минимизирует функционал (4.10). Поскольку  $Q \geq 0, R > 0$  и траектории лежат в компакте  $\mathcal{D}$ , функционал (4.10) конечен. Из теории оптимального управления для задач на бесконечном интервале с квадратичным критерием и наблюдаемой парой  $(A, C)$  следует, что конечность интеграла от  $e_y^T Q e_y$  влечёт  $e_y \rightarrow 0$  (см., например, [60]). При фиксированном  $z$  это стандартный результат для линейной системы; в нелинейном SDC-случае матрицы  $(A(z), C)$  непрерывно зависят от времени и равномерно ограничены на  $\mathcal{D}$ , поэтому поточечное свойство наблюдаемости гарантирует сходимость  $e_y \rightarrow 0$ . Ограниченность  $e(t)$  вытекает из того, что матрица  $A_{cl}(z)$  поточечно гурвицева (следует из предположения 4.8), а нелинейные члены  $\Psi(z, x_\xi, u, v)$  липшицевы и ограниченны на компакте  $\mathcal{D}$ . Опираясь на ограниченность решений экспоненциально устойчивых систем при ограниченном входе, ошибка  $e(t)$  остаётся ограниченной. Теорема доказана.

Покажем далее условия, при которых имеет место сходимость  $v(t)$  к  $\xi(t)$ . Для этого введем следующее определение.

**Определение 4.1.** Для системы ошибки (4.11) в каждой точке  $x \in \mathcal{D}$  рассмотрим линейную модель  $\dot{\varepsilon} = A(x_\xi)\varepsilon + G(x_\xi)e_\xi, e_y = C\varepsilon$ . Будем говорить, что система (4.11) поточечно сильно обнаруживаема в  $\mathcal{D}$ , если для любого  $x_\xi \in \mathcal{D}$  все инвариантные нули матричного пучка  $\begin{pmatrix} sI - A(x_\xi) & -G(x_\xi) \\ C & 0 \end{pmatrix}$  лежат в открытой левой полуплоскости.

**Предположение 4.9.** Система (4.11) поточечно сильно обнаруживаема в  $\mathcal{D}$  и  $\text{rank}G(x_\xi) = n_\xi$  для всех  $x_\xi \in \mathcal{D}$ .

**Теорема 4.4.** Пусть выполнены условия теоремы 4.3 и предположение 4.9. Тогда оценка возмущения  $v(t)$ , формируемая наблюдателем (4.16) с законом (4.13), сходится к истинному возмущению  $\xi(t)$ :  $\|v(t) - \xi(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Из теоремы 4.3 ошибка  $e(t)$  ограничена и  $e_y(t) \rightarrow 0$ . Рассмотрим систему ошибки (4.11) вместе с выходом  $e_y$ . По предположению 4.9 система (4.11) поточечно сильно обнаруживаема в смысле определения 4.1. Согласно [135] для такой системы из сходимости измеряемого выхода к нулю следует сходимость состояния к нулю. Применяя это свойство к системе ошибок с выходом  $e_y$  и состоянием  $e$ , получаем  $e(t) \rightarrow 0$ .

Теперь, зная, что  $e(t) \rightarrow 0$  и  $e(t)$  равномерно непрерывна (следует из ограниченности правой части (4.11)), по лемме Барбалата [176, лемма 8.2]  $\dot{e}(t) \rightarrow 0$ . Переписывая (4.11) как  $G(x_\xi)e_\xi = \dot{e} - A(x_\xi)e - \Psi(z, x_\xi, u, v)$ , видим, что правая часть стремится к нулю. Следовательно,  $G(x_\xi(t))e_\xi(t) \rightarrow 0$ . В силу  $\text{rank}G(x_\xi) = n_\xi$  (предположение 4.9), существует  $\gamma > 0$  такое, что  $\|G(x_\xi)e_\xi\| \geq \gamma \|e_\xi\|$  для всех  $x \in \mathcal{D}$ . Откуда  $\|e_\xi\| \leq \gamma^{-1} \|G(x_\xi)e_\xi\| \rightarrow 0$ , и значит  $v(t) \rightarrow \xi(t)$ . Теорема доказана.

**Замечание 4.4.** В линейном случае матрицы  $A$ ,  $G$ ,  $C$  постоянны, и поточечное условие на инвариантные нули переходит в стандартное условие сильной обнаруживаемости системы с неизвестным входом [65, 135]. Такая интерпретация соответствует принятым критериям для линейных моделей через инвариантные нули и матрицу Розенброка. Теорема 4.4 является естественным обобщением линейного результата, который представлен в работе автора в соавторстве с коллегами [50], на нелинейный SDC-случай через семейство линейных моделей с «замороженными» коэффициентами.

#### 4.2.1. Нелинейная зависимость от возмущения и астатические наблюдатели

Для сложных объектов линейное представление как правило является результатом линеаризации исходного возмущенного движения объекта в окрестности неподвижной точки, что сопровождается некоторой вычислительной погрешностью. Это приводит к тому, что управление в окрестности особой точки происходит с некоторой постоянной или медленно меняющейся ошибкой. Такими же будут последствия изменения условий функционирования системы и параметров внешней среды. Все эти и подобные явления приводят к тому, что ошибка оценивания реального возмущения может оказаться совсем не малой. Такая ситуация является вполне обычной для классической теории управления и типичным решением в таком случае является свойство астатизма системы стабилизации, т. е. способность системы обеспечивать нулевую статическую ошибку при воздействии постоянных внешних возмущений [120].

Пусть в системе (4.9) переменная  $v$  представляет собой интеграл от некоторого управления  $w$ , то есть

$$\dot{v} = G_v w, \quad v(t_0) = 0. \quad (4.17)$$

Предполагая управляемость системы (4.9), дополним вектор  $z$  переменной  $v$ . Обозначим полученный составной вектор  $Z = \text{col}(z, v)$ . Объединяя (4.9) и (4.17) получим систему с блочной структурой

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \tilde{A}(z)Z + \tilde{G}w + \tilde{f}(z), \\ Y_z &= \tilde{C}Z = y_z = Cz, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где  $\tilde{A}(z) = \begin{bmatrix} A(z) & G(z) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_v \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{f}(z) = \begin{bmatrix} B(z)u \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{C} = [C \quad 0]$ .

Преобразуем функционал невязки (4.10) с учетом нового управления  $w$ :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (e_y^T Q(z) e_y + w^T R(z) w) dt \rightarrow \min_v, \quad (4.19)$$

Решение задачи (4.18), (4.19) будет иметь вид (4.13) - (4.15) с учетом замены матриц  $A(z)$ ,  $G(z)$ ,  $C$  на  $\tilde{A}(z)$ ,  $\tilde{G}$ ,  $\tilde{C}$ . Запишем выражение для управления  $w$ :

$$w = -R^{-1}(z)\tilde{G}^T\tilde{M}^{-1}(z)(Z - \tilde{g}(z)) = [K_z(z) \quad K_v(z)] \begin{bmatrix} z - g_z(z) \\ v - g_v(z) \end{bmatrix}.$$

Подставляя это в (4.17) и объединяя с (4.18), получим замкнутую систему

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(z)z + B(z)u + G(z)v, \\ \dot{v} &= G_v K_z(z)(z - g_z(z)) + G_v K_v(z)(v - g_v(z)), \end{aligned} \quad (4.20)$$

Пусть существует  $i = 1, 2, \dots, n$ , при котором  $e_i^T G(z) \neq 0$ , где  $e_i$  –  $n$ -вектор,  $i$ -тый элемент которого равен 1, а все остальные – 0.

Умножим первое уравнение системы (4.20) слева на  $e_i^T$

$$e_i^T \dot{z} = e_i^T A(z)z + e_i^T G(z)v + e_i^T (B(z)u).$$

Решим полученное уравнение относительно  $v$ :

$$v = (e_i^T G(z))^{-1} e_i^T (A(z)z - \dot{z} + B(z)u). \quad (4.21)$$

Подставляя теперь (4.21) в уравнение (4.20) для  $v$ , получим астатический закон управления

$$\begin{aligned} \dot{v} &= G_v K_z(z)(z - g_z(z)) + G_v K_v(z)S(z)(A(z)z - \dot{z} + B(z)u - g_v(z)), \\ S(z) &= (e_i^T G(z))^{-1} e_i^T. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Переменная  $v$  является интегралом линейной формы от вектора  $z$ . Для того, чтобы убедиться в этом, остается проинтегрировать (4.22) от  $t_0$  до  $t_f$ , используя формулу интегрирования по частям и конкретные выражения для матриц  $G_z$  и  $G_v$  обратной связи (учитывая их гладкость).

Таким образом, выражение для астатического наблюдателя имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(z)z + B(z)u + G(z)v, \\ \dot{v} &= G_v K_z(z)(z - g_z(z)) + G_v K_v(z)S(z)(A(z)z - \dot{z} + B(z)u - g_v), \end{aligned}$$

где вычисление блоков  $K_z(z)$ ,  $K_v(z)$ ,  $g_z(z)$ ,  $g_v(z)$  выполняется через решение SDRE для  $\tilde{M}$  вида (4.14) и дифференциального уравнения для  $\tilde{g}(z)$  вида (4.15).

### 4.2.2. Редуцированные наблюдатели возмущений

На практике часто прибегают к использованию упрощенных моделей более низкого порядка по сравнению с исходной системой. Существуют разные подходы к редукции систем, часть из которых описаны в главах 1 и 2, но не зависимо от способа упрощения, главная его цель – сделать решение задачи более простым, чем оно могло бы быть для исходной системы (могут быть случаи, когда задача для исходной системы попросту не может быть решена ввиду невыполнения необходимых условий, которые для редуцированной модели выполняются). В контексте задач оценивания возмущений в системах использование редуцированных моделей также может иметь свои преимущества, связанные как с понижением порядка модели, так и с исключением из модели некоторых нежелательных воздействий (модель становится нечувствительной к определенным возмущениям). Так, если предположить, что на систему действуют одновременно разные возмущения, т.е. систему (4.8) можно представить в несколько измененной форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_\xi &= A(x_\xi)x_\xi + B(x_\xi)u + G_1\xi_1 + G_2\xi_2, x_\xi(t_0) = x_0, \\ y_\xi &= Cx_\xi, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где  $G_1 \in \mathbb{R}^{n \times q}$  – известная постоянная матрица входа возмущения  $\xi_1$ ;  $G_2 \in \mathbb{R}^{n \times s}$  – известная постоянная матрица входа возмущения  $\xi_2$ ;  $\xi_1 \in \mathbb{R}^q$  – неизвестный входной сигнал возмущения, подлежит оценке;  $\xi_2 \in \mathbb{R}^s$  – неизвестный входной сигнал, описывающий действующее на систему возмущение, которое требуется исключить из редуцированной модели. В таком случае с помощью преобразований, в т.ч. представленных в главе 2, можно получить редуцированную модель, которая будет нечувствительна к возмущению  $\xi_2$  и при этом будет реагировать на возмущение  $\xi_1$ .

Не останавливаясь здесь на способах и методах получения редуцированных моделей, некоторые из них представлены в главе 2, рассмотрим соответствующую постановку задачи оценивания возмущений  $\xi_1$  для редуцированной модели, в которой возмущение  $\xi_2$  исключено. Такую

модель для системы (4.23) можно представить в виде нелинейной системы, содержащей слагаемые, нелинейные относительно вектора выхода  $y_\xi(t)$ . В таком случае редуцированная модель должна иметь вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_* &= \bar{A}_*x_* + J_*(y_\xi) + B_*(y_\xi)u + G_*(y_\xi)\xi_1, \\ y_* &= C_*x_* = R_*y_\xi.\end{aligned}\quad (4.24)$$

Задача оценивания возмущения для системы (4.24) формулируется также через соответствующую вспомогательную нелинейную задачу оптимального следящего управления

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (e_y^T Q e_y + v^T R v) dt \rightarrow \min_v,$$

для вспомогательной системы

$$\dot{z} = \bar{A}_*z + J_*(y_\xi) + B_*(y_\xi)u + G_*(y_\xi)v, \quad z(t_0) = T(x_0), \quad y_z = C_*z.$$

По аналогии с (4.11) для вектора ошибки  $e(t)$  можно составить систему:

$$\dot{e} = \bar{A}_*e + G_*(y_\xi)(v - \xi_1), \quad e(t_0) = 0, \quad (4.25)$$

которая является линейной по  $e(t)$ .

Предположим, система (4.25) сильно обнаруживаема. Поскольку система (4.25) является частным случаем (4.11) с  $\Psi = 0$ , то при выполнении условия поточечной сильной обнаруживаемости (определение 4.1) и сходимости  $e_y \rightarrow 0$  из теоремы 4.4 непосредственно следует  $v(t) \rightarrow \xi(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

В результате для наблюдателя получим:

$$\dot{z} = \bar{A}_*z - G_*(y_\xi)R^{-1}G_*^T(y_\xi)M^{-1}(z - g) + J_*(y_\xi) + B_*(y_\xi)u,$$

где

$$0 = \bar{A}_*\bar{M} + \bar{M}\bar{A}_*^T - G_*(y_\xi)R^{-1}G_*^T(y_\xi) + \bar{M}C_*^TQC_*\bar{M}, \quad (4.26)$$

$$\dot{g} = (\bar{A}_* + \bar{M}C_*^TQC_*)\bar{g} - \bar{M}C_*^TQR_*y_\xi + J_*(y_\xi) + B_*(y_\xi)u.$$

Уравнение (4.26) имеет ограниченное стабилизирующее решение  $\bar{M}$  при условии поточечной управляемости пары матриц  $(\bar{A}_*, G_*(y_\xi))$ .

### 4.3. Примеры применения разработанных методов

#### 4.3.1. Пример оценивания состояния

В этом разделе рассматривается перевернутый маятник, приводимый в движение двигателем постоянного тока (см. рис.2.4, глава 2). Динамические уравнения рассматриваемой системы:

$$U = L \frac{dI}{dt} + RI + k_b \frac{d\theta}{dt},$$

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl \sin(\theta) - k_m I,$$

где  $U$  – управляющее напряжение;  $L$  – индуктивность двигателя;  $I$  – ток через обмотку двигателя;  $R$  – сопротивление обмотки двигателя;  $k_m$  – электромагнитная постоянная двигателя;  $\theta$ ,  $m$ ,  $l$  – угол; масса и длина маятника, соответственно;  $g$  – гравитационная постоянная;  $k_b$  – постоянная демпфирования (трения).

Уравнения системы могут быть записаны в SDC-представлении

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{g \sin(x_1)}{lx_1} & 0 & -\frac{k_m}{ml^2} \\ 0 & -k_b/L & -R/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{pmatrix} u,$$

$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = I, u = U.$$

Предполагаем, что шумы присутствуют в динамике системы и в измерениях. Ковариационные матрицы шумов  $Q_w(t) = \text{diag}(0.2, 0.2, 0.2)$  и  $R_v(t) = 10$ . Управляющий сигнал генерируется как в [178].

Случай 1. Предполагаем, что начальное состояние системы известно, поэтому начальное состояние наблюдателя такое же. Моделирование выполняется в течение 6 секунд. Заданное значение, реальное значение и оценка угла  $\theta$  показаны на рис. 4.1, ошибка оценивания дана на рис.4.2, где сплошная линия обозначает заданное значение угла, точечная линия – фактическое значение (с шумом) угла, а пунктирная линия – оценка угла. Из результатов видно, что предложенный алгоритм дает хорошие результаты.

Оценка обеспечивает хорошее отслеживание эталонного значения угла, и рассчитанная траектория близка к фактической траектории.

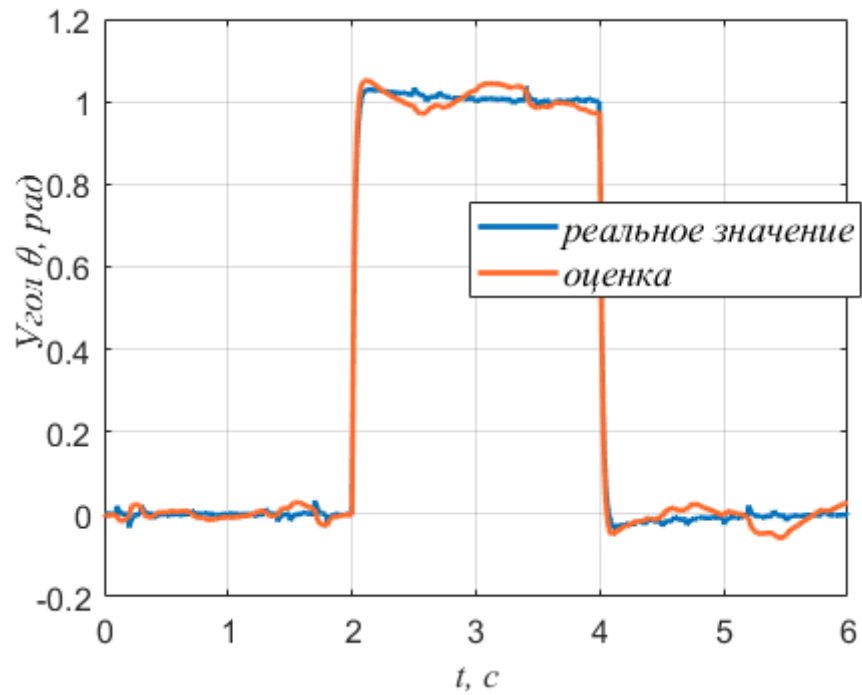


Рисунок 4.1. Угловые траектории (случай 1)

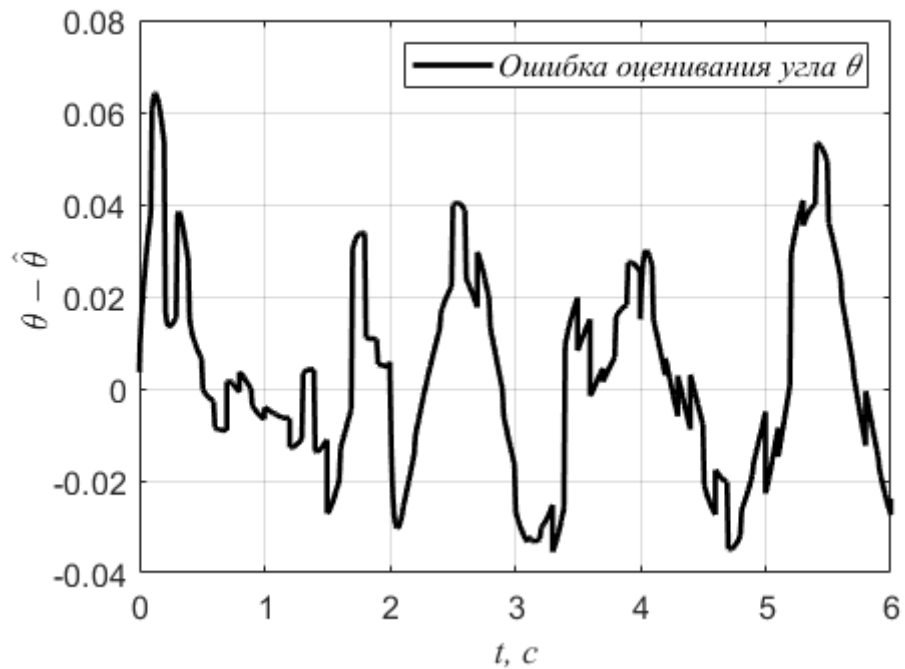


Рисунок 4.2. Ошибки оценки угла  $\theta$  (случай 1)

Случай 2. Предполагаем, что начальное состояние системы неизвестно, поэтому начальное состояние наблюдателя установлено равным нулю. Моделирование снова выполняется в течение 6 секунд. Реальное начальное состояния системы  $x(t_0) = (0.5, 0)^T$ . Результирующие угловые траектории показаны на рис. 4.3, ошибка оценивания представлена на рис. 4.4.

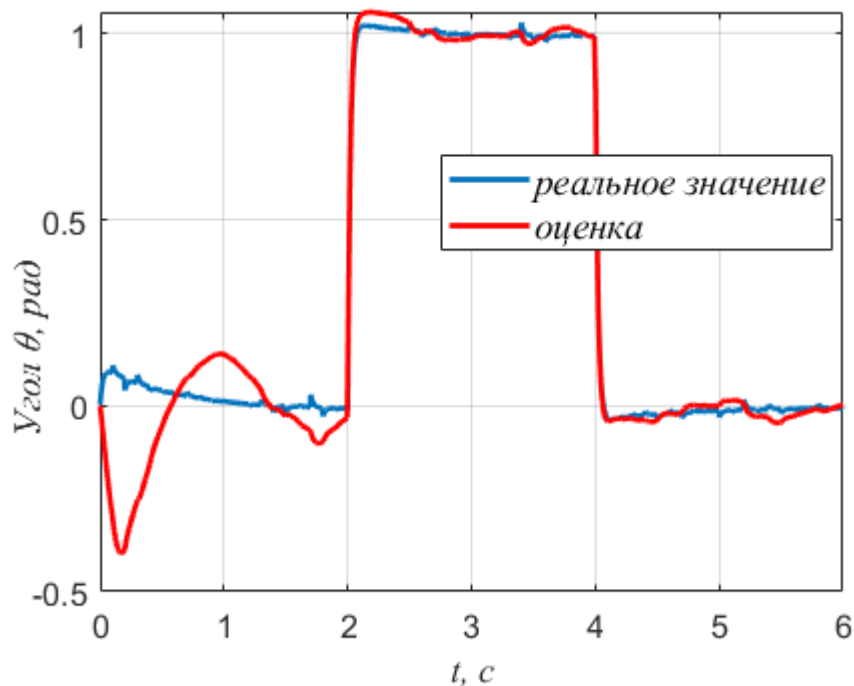


Рисунок 4.3. Угловые траектории (случай 2)

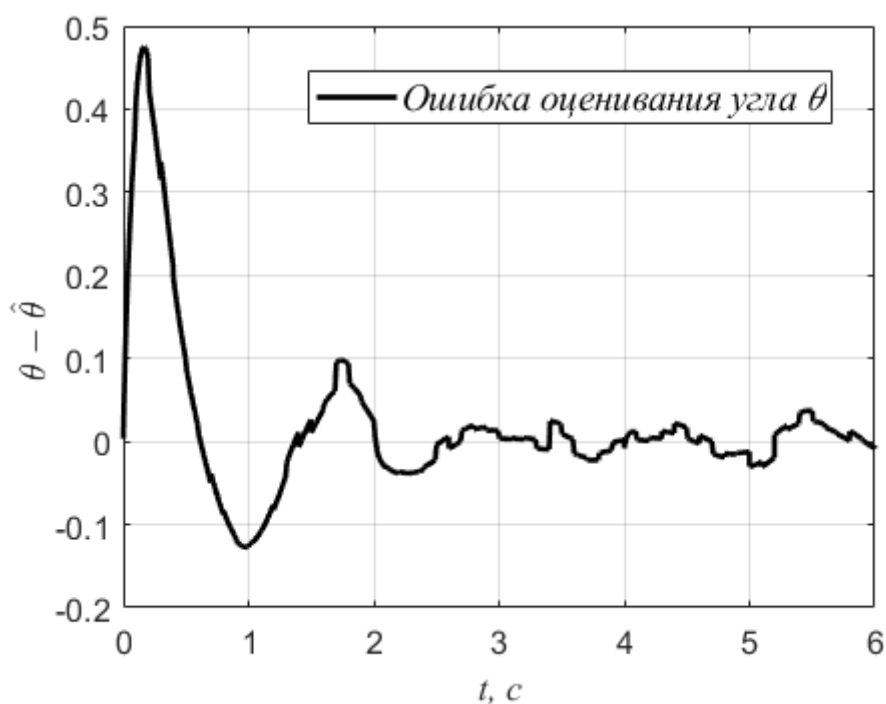


Рисунок 4.4. Ошибки оценки угла  $\theta$  (случай 2)

Из представленных результатов видно, что неопределенность в начальных условиях на начальном этапе времени приводит к большему значению ошибки оценки, однако, когда оценка сходится, точность увеличивается.

Случай 3. Дана неопределенность в начальных условиях оцениваемой координаты. Для случая 3 предполагаем, что реальное начальное состояние системы  $x(t_0) = (0.5, 0, 0)^T$ , начальное состояние наблюдателя установлено на ноль. Моделирование снова выполняется в течение конечного времени 6 секунд. Результирующие угловые траектории показаны на рис. 4.5. В случае 3 качество оценки состояния системы также хорошее.

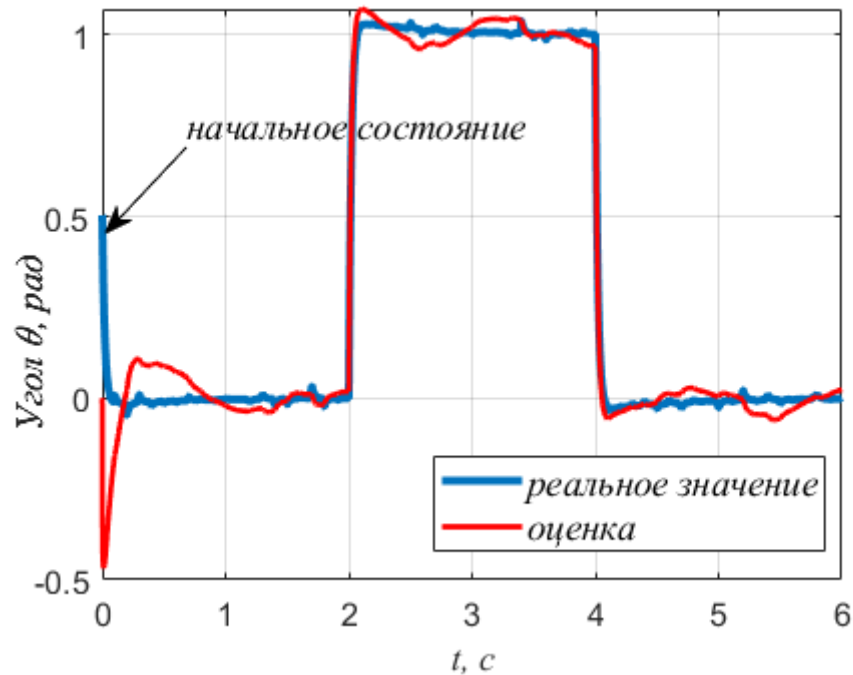


Рисунок 4.5. Угловые траектории (случай 3)

#### 4.3.2. Примеры оценивания возмущений

В робототехнических комплексах обычно используют двигатели постоянного тока независимого возбуждения или с постоянными магнитами. Также они обычно оснащаются редуктором, датчиками углового положения для измерения угла поворота выходного вала редуктора  $\alpha(t)$  и датчиками тока

в цепи якоря  $I(t)$ . Электропривод можно описать системой (4.8) с такими векторами и матрицами (без учета вязкого трения в модели) [180, 195]:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \omega(t) \\ I(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ I(t) \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$a_{12} = 1/i_r; a_{23} = k_m/J_\Sigma; a_{32} = -k_\omega/L_a; a_{33} = -R_a/L_a; b = k_u/L_a,$$

где  $x_1(t) = \alpha(t)$  – угол поворота выходного вала редуктора;  $x_2(t) = \omega(t)$  – скорость вращения ротора электродвигателя;  $x_3(t) = I(t)$  – сила тока;  $u(t)$  – напряжение, подаваемое на двигатель системой управления;  $\xi_1(t) = -\widehat{M}(t)/J_\Sigma$ ;  $\omega(t)$  – угловая скорость выходного вала двигателя постоянного тока;  $J_\Sigma$  – момент инерции ротора двигателя постоянного тока;  $R_a$  и  $L_a$  – соответственно активное сопротивление и индуктивность якорной цепи двигателя постоянного тока;  $J_\Sigma$  – суммарный момент инерции вращающихся частей электропривода;  $k_u$  – коэффициент усиления;  $k_\omega$  – коэффициент противо-ЭДС;  $k_m$  – коэффициент крутящего момента;  $i_r$  – передаточное число редуктора;  $\widehat{M}(t)$  – неизвестный момент нагрузки.

Для проверки эффективности полученных наблюдателей было проведено математическое моделирование. При моделировании использовались следующие параметры электропривода:  $J_\Sigma = 0.001$  кг·м<sup>2</sup>;  $R_a = 0.5\Omega$ ;  $L_a = 0.01$  Гн;  $k_m = 0.04$  Н·м/А;  $k_\omega = 0.04$  В·с/рад;  $i_r = 100$ ;  $k_u = 35$ . Функция возмущения  $\xi(t)$  задана в виде

$$\xi(t) = \begin{cases} 1(t-1), & t < 2, \\ \sin(t), & t \geq 2. \end{cases}$$

На рис. 4.6 даны графики оцениваемого возмущения и оценки (слева), график ошибки оценивания (справа). Из рисунка видно, что наблюдатель в целом справляется, но присутствует статическая ошибка оценивания (график ошибки на рис.4.6 справа).

Для устранения статической ошибки в наблюдатель введен астатизм согласно разделу 4.2. График оценки возмущения астатическим наблюдателем дан на рис.4.7 (слева), график ошибки дан на рис. 4.7 (справа), где видно, что статическая ошибка равна нулю.

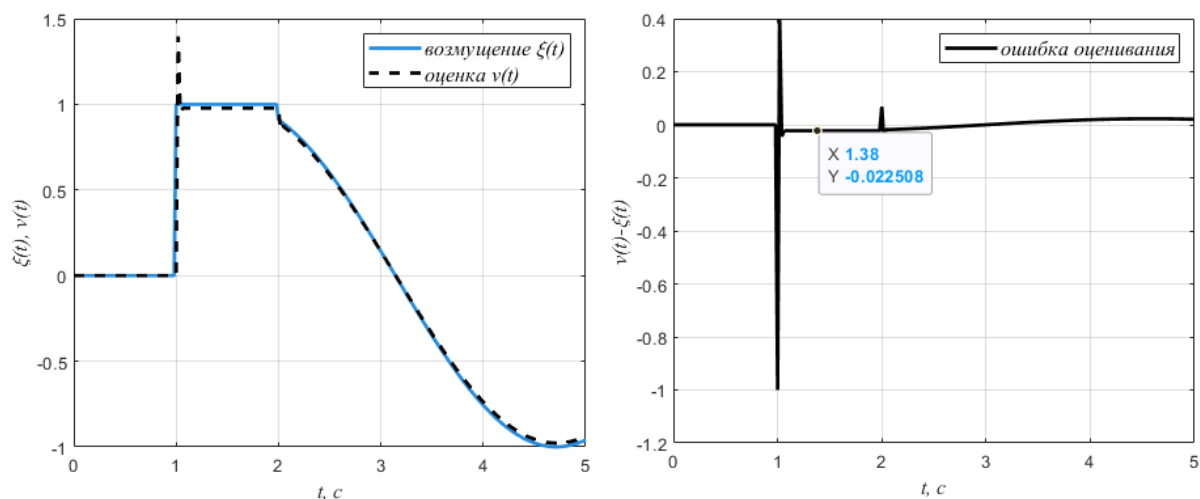


Рисунок 4.6. Возмущение и оценка наблюдателя (слева); ошибка оценивания возмущения (справа)

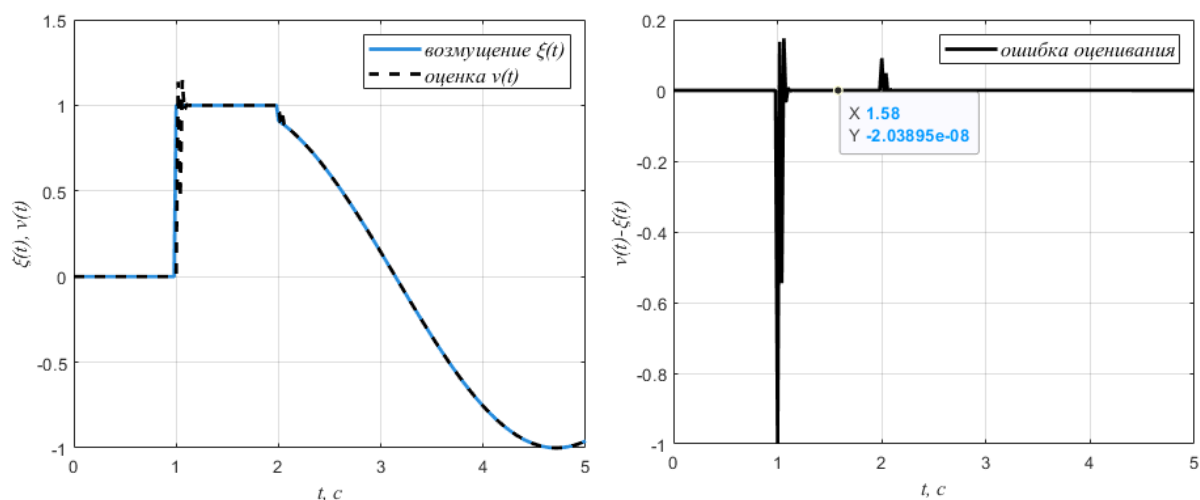


Рисунок 4.7. Возмущение и оценка астатического наблюдателя (слева); ошибка оценивания возмущения астатического наблюдателя (справа)

Теперь рассмотрим модель электропривода, но с учетом моментов сухого и вязкого трений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{1}{i_r} x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k_v}{J_\Sigma} x_2(t) + \frac{k_m}{J_\Sigma} x_3(t) - \frac{k_{df}}{J_\Sigma} \text{sign}(x_2) - \frac{P(t)}{J_\Sigma \cdot i_r}, \\ \dot{x}_3(t) &= -\frac{k_\omega}{L_a} x_2(t) - \frac{R_a}{L_a} x_3(t) + \frac{k_u}{L_a} u(t), \end{aligned} \quad (4.27)$$

где  $k_v$  – коэффициент вязкого трения;  $k_{df}$  – коэффициент сухого трения;  $M_{df}(t) = -k_{df} \text{sign}(\dot{\alpha}(t)) / J_\Sigma$  – крутящий момент сухого трения;  $P(t)$  – суммарный внешний момент, действующий на выходном валу электропривода; остальные обозначения соответствуют принятым ранее.

Обычно электропривод оснащен датчиками положения выходного вала редуктора и тока в цепи якоря двигателя. В данном примере для оценки внешнего момента используется только измерение положения выходного вала редуктора. С учетом этого рассматриваемую модель электропривода можно представить в нелинейной векторно-матричной форме (4.8), где  $x(t) = (x_1, x_2, x_3)^T$  – вектор фазовых координат,  $y_\xi(t) = x_1$  – вектор измеряемых параметров,  $\xi(t) = P(t)$  – неизвестная вектор-функция, подлежащая оцениванию.

Параметры модели взяты равными  $k_v = 0.005$ ,  $k_{df} = 0.06$ , а остальные параметры взяты как в примере из 4.3.2. В качестве регулятора в системе используется стандартный ПИД-регулятор. Задающий сигнал имеет синусоидальный вид.

Для синтеза наблюдателя параметры критерия качества взяты равными  $Q = 10^6$ ,  $R = 0.01$ . Результаты моделирования даны на рис. 4.8. Из результатов видно, что наблюдатель реагирует на возмущение, но быстродействие и точность могут быть недостаточными. Для их повышения следует увеличить коэффициент штрафа  $Q$ . Возьмем  $Q = 10^{10}$ , из моделирования (рис.4.9) видно, что наблюдатель хорошо справляется с задачей.

Рассмотрим еще один частный случай для модели электропривода (4.27), но выходом системы в этом примере положим только  $y_\xi(t) = x_3$  – ток в цепи якоря. В таком случае условие поточечной наблюдаемости пары  $(A, C)$  не выполняется, что не позволяет построить наблюдатель полного порядка (либо его астатическую версию). В связи с этим предлагается выполнить редукцию модели.

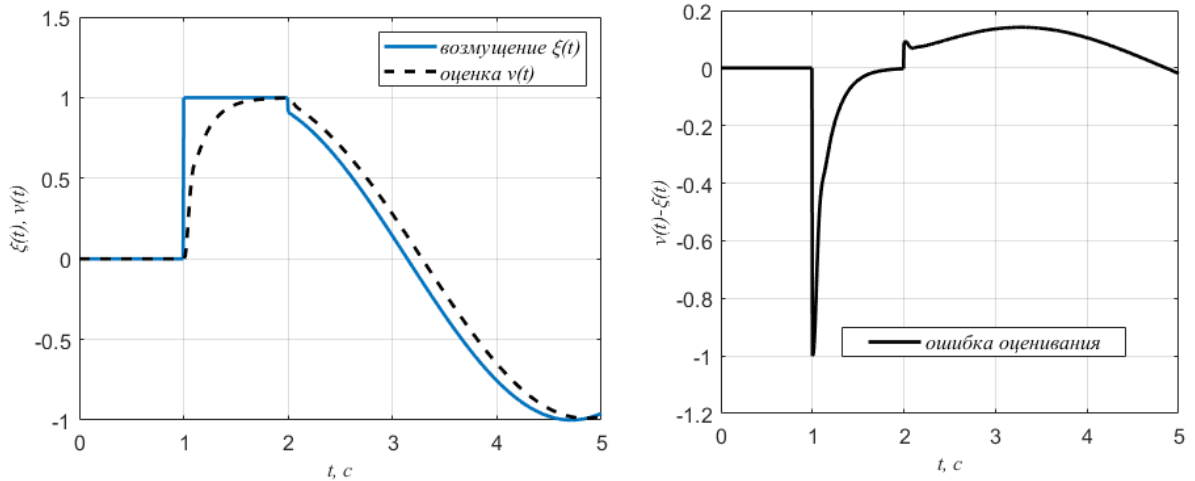


Рисунок 4.8. Графики возмущения  $\xi(t)$  и оценки  $v(t)$  при  $Q = 10^6$ .

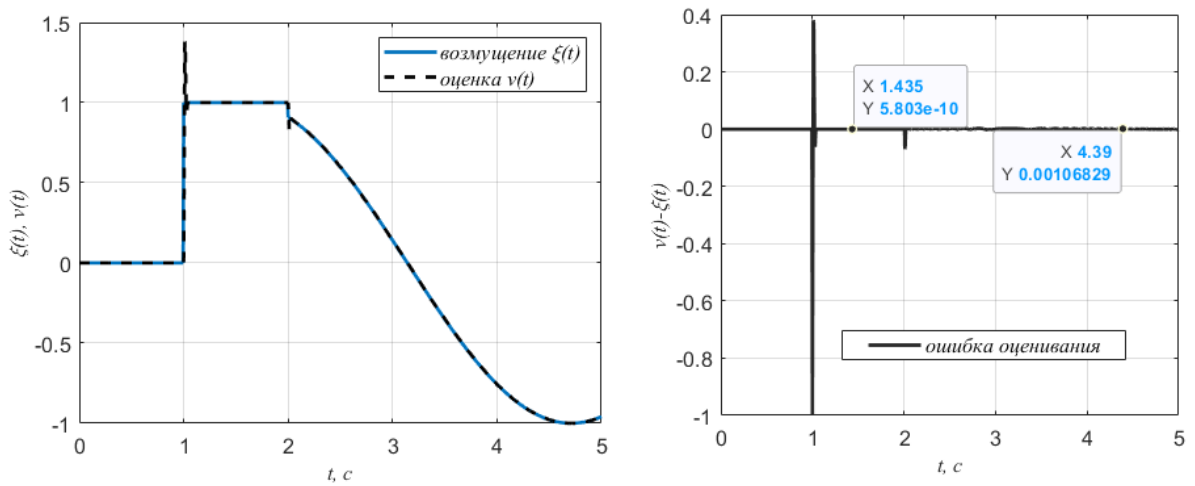


Рисунок 4.9. Графики возмущения  $\xi(t)$  и оценки  $v(t)$  при  $Q = 10^{10}$ .

Примем  $x_{*1} = T_1(x) = x_3$ ,  $x_{*2} = T_2(x) = a_{32}x_2$ , тогда редуцированная модель имеет вид

$$\dot{x}_{*1} = a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + bu,$$

$$\dot{x}_{*2} = a_{32}a_{22}x_2 + a_{32}a_{23}x_3 + a_{32}g_2 \text{sign}(x_2) + a_{32}\xi_1.$$

Поскольку  $x_2 = \frac{x_{*2}}{a_{32}}$ , получим

$$\dot{x}_{*1} = x_{*2} + a_{33}x_{*1} + bu,$$

$$\dot{x}_{*2} = a_{22}x_{*2} + a_{32}a_{23}x_{*1} + a_{32}g_2 \text{sign}\left(\frac{x_{*2}}{a_{32}}\right) + a_{32}\xi_1,$$

или с учетом  $x_{*1} = x_3 = y_\xi$  для первого уравнения имеем

$$\dot{x}_{*1} = x_{*2} + a_{33}y_\xi + bu,$$

$$\dot{x}_{*2} = a_{22}x_{*2} + a_{32}a_{23}y + a_{32}g_2 \text{sign}\left(\frac{x_{*2}}{a_{32}}\right) + a_{32}\xi_1.$$

Таким образом для матричной формы записи редуцированной модели (4.27) имеем:

$$\bar{A}_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_* = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, G_* = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{32} \end{pmatrix}, C_* = (1 \quad 0),$$

$$J_* = \begin{pmatrix} a_{33}y \\ a_{22}x_{*2} + a_{32}a_{23}y + a_{32}g_2 \text{sign}\left(\frac{x_{*2}}{a_{32}}\right) \end{pmatrix}.$$

Параметры модели электропривода и модель возмущения прежние. Для синтеза наблюдателя параметры критерия качества взяты равными  $Q = 10^6$ ,  $R = 0.01$  как и в предыдущем случае. Параметры обратной связи по вектору невязки:  $K = (3 \cdot 10^{-3} \quad 2 \cdot 10^{-6})$ .

Результат оценки показан на рис.4.10, откуда видно, что несмотря на изменение структуры выхода (в этом примере выходом системы является ток в цепи якоря, в отличие от предыдущего случая, где выходом являлось положение выходного вала редуктора), за счет редукции модели удалось достичь приемлемого качества оценивания возмущения при меньших (на 4 порядка) значениях параметров штрафа в критерии качества.

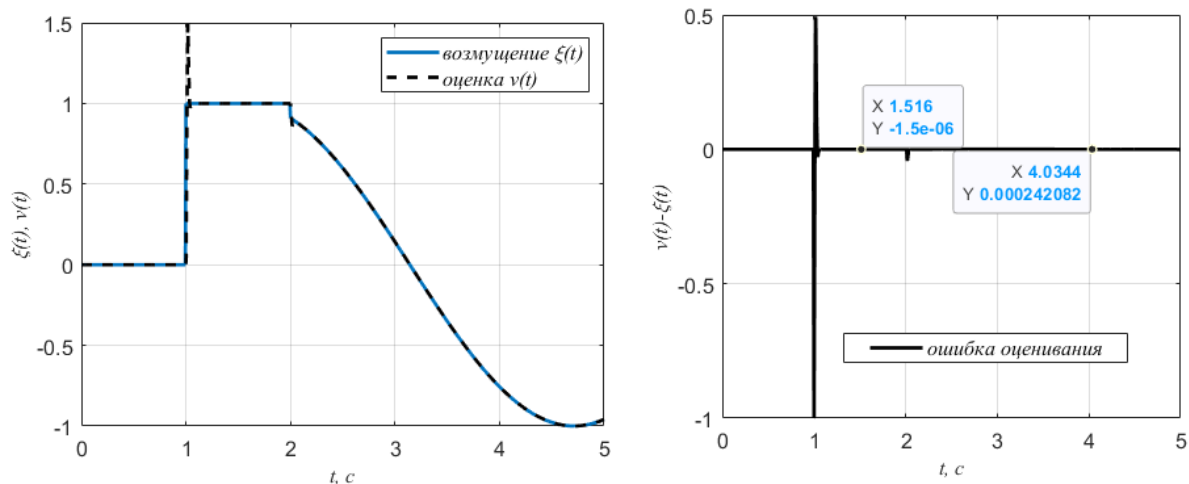


Рисунок 4.10. Графики возмущения  $\xi_1(t)$  и оценки  $v(t)$  (слева); ошибка оценивания (справа) при  $Q = 10^6$ .

Для экспериментальной проверки разработанных методов построения наблюдателей возмущений и исследования их практической эффективности была разработана лабораторная установка (стенд), предназначенная для проведения полунатурных исследований в реальном времени. Стенд обеспечивает возможность имитации неисправностей в системе управления бесколлекторным двигателем постоянного тока (БДПТ) и регистрации реакций наблюдателей таких внутренних возмущений при различных сценариях функционирования. Конструкция стенда позволяет реализовать замкнутый контур «управление – измерение – диагностика», включающий в себя как реальные измерительные датчики, так и виртуальные наблюдатели, функционирующие на основе предложенных алгоритмов.

Лабораторный стенд включает в свой состав вычислительный модуль на базе одноплатного компьютера Raspberry Pi 4 Model B, электронный регулятор скорости SkyStars Talon BLHeli32 40A, трехфазный бесколлекторный двигатель и систему измерительных сенсоров. Система датчиков содержит магнитный энкодер AS5600 для измерения углового положения и угловой скорости ротора, два тензодатчика, подключенных через аналого-цифровые преобразователи HX711 для измерения крутящего момента, а также четыре

датчика тока CJMCU-219 (INA219), один из которых используется для регистрации тока на входе в драйвер двигателя, а три других – для измерения токов в каждой фазе. Для обеспечения двустороннего обмена информацией с персональным компьютером, на котором выполняется программная среда MATLAB, используется протокол UDP, позволяющий реализовать передачу данных с частотой до 200 Гц.

На рис. 4.11 представлены 3D-модель и фотография собранного стенда, где показаны основные конструктивные и функциональные элементы. 3D-модель иллюстрирует компоновку узлов, взаимное расположение датчиков и исполнительных элементов. На 3D-модели под номерами изображены: 1 – микрокомпьютер Raspberry Pi; 2 – токоизмерительные датчики фаз БДПТ; 3 – шунты датчиков измерения тока фаз БДПТ; 4 – токоизмерительный датчик линии питания драйвера БДПТ; 5 – шунт датчика измерения тока линии питания драйвера БДПТ; 6 – драйвер БДПТ; 7,8 – тензодатчики; 9 – клемма питания +3,3 В; 10 – клемма питания +12-24 В; 11 – БДПТ.

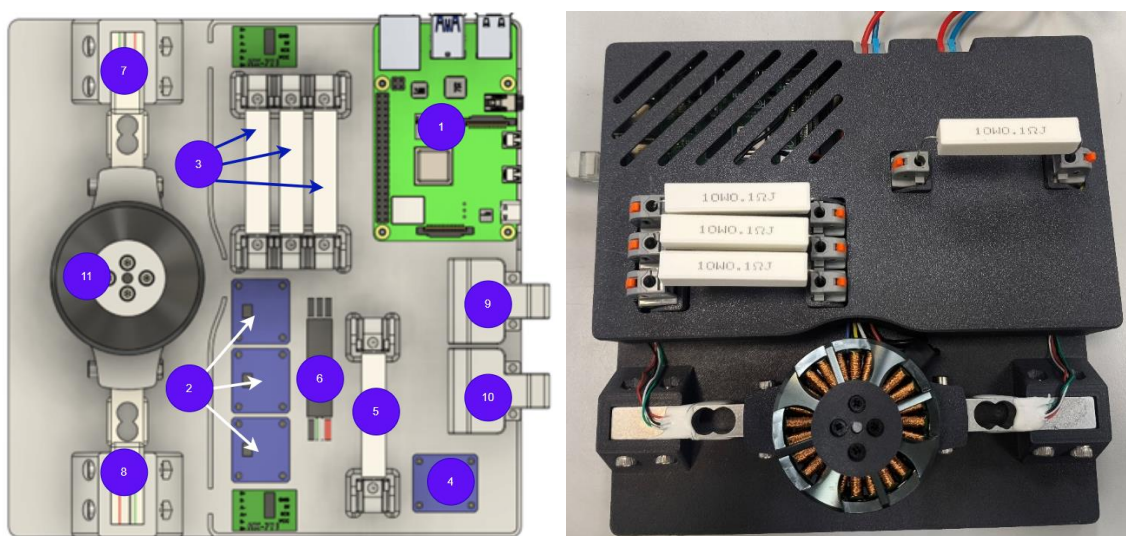


Рисунок 4.11. 3D-модель (слева) и внешний вид стенда (справа)

На стенде экспериментально проверялся третий тестовый пример с оцениванием суммарного внешнего момента, действующего на выходном валу с учетом наличия шума в канале измерения силы тока электропривода.

Диапазон измерений силы тока лежит в пределах  $\pm 32$  А при использовании шунта на 0.01 Ом, погрешность шунта составляет  $\pm 1\%$ . Для проведения эксперимента были задействованы датчики входного тока электропривода и момента на валу электропривода. Регистрация измеряемых сигналов осуществлялась с частотой 80 Гц, что обусловлено ограничением быстродействия аналого-цифровых преобразователей тензометрических датчиков. Сбор, синхронизация и первичная обработка данных выполнялись на базе микрокомпьютера Raspberry Pi. Для данных момента применялись медианный фильтр и фильтр низких частот. Для данных тока применялся фильтр низких частот. Пример данных, полученных со стенда после предварительной обработки, представлен на рис. 4.12. Результат работы наблюдателя при оценке ступенчатой нагрузки показан на рис. 4.13. Проверка на стенде показала хорошее качество оценивания возмущения.

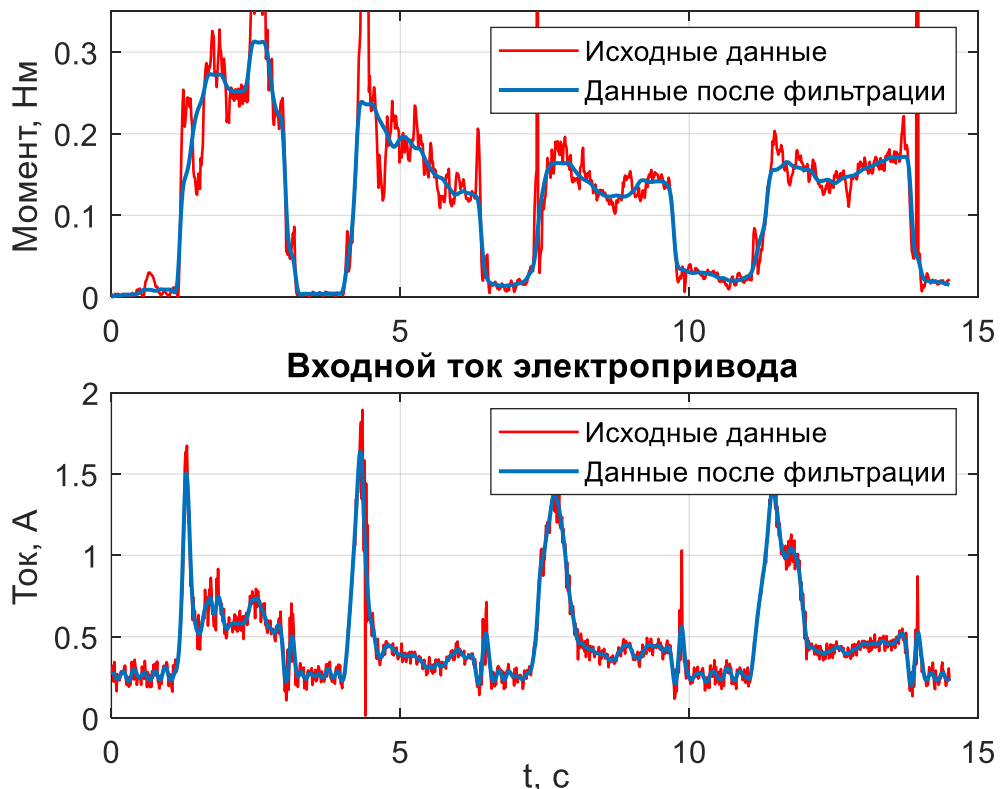


Рисунок 4.12 Данные, полученные со стенда

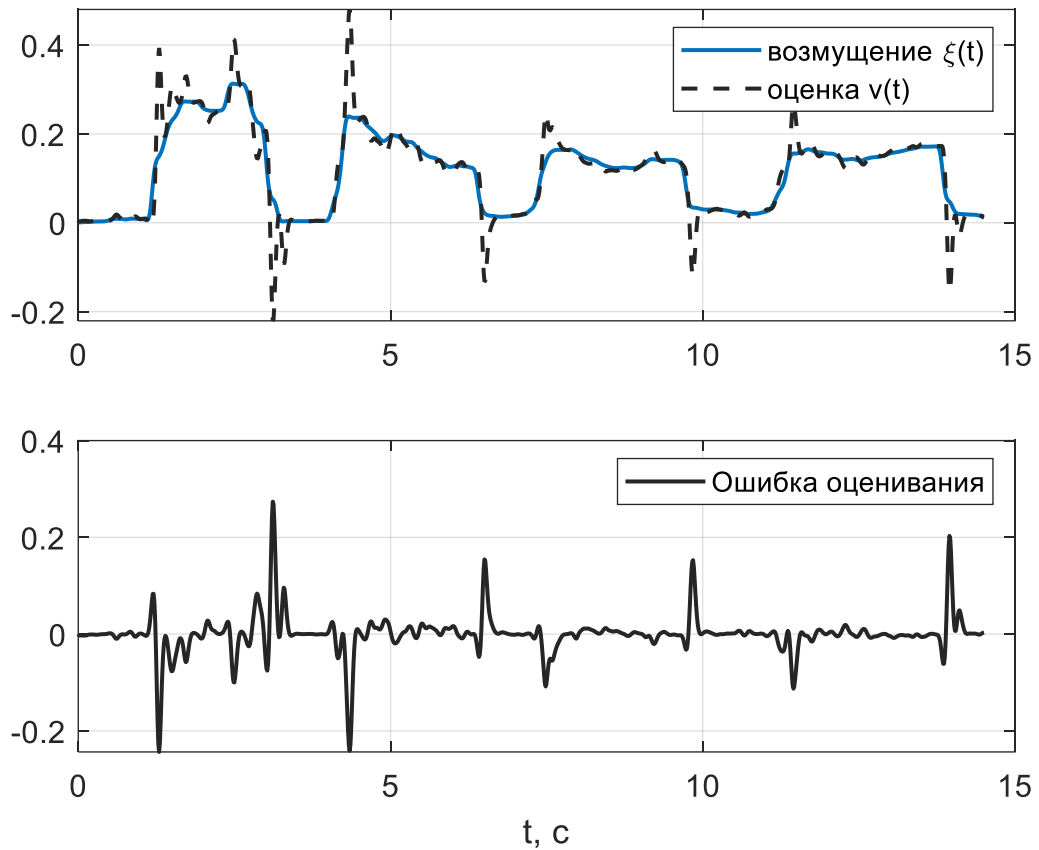


Рисунок 4.13 Оценка возмущения при проверке на стенде

#### 4.4. Выводы по главе

В настоящей главе решены задачи оценивания состояния и возмущений в системах, описываемых нелинейными динамическими моделями в SDC-представлении, а именно:

1. Разработан новый метод синтеза наблюдателей состояния нелинейной системы. На основе объединения ФК с SDC-подходом и диффузной инициализацией предложен метод оценивания состояния нелинейной системы при отсутствии априорной информации о начальных условиях.
2. Разработан новый метод синтеза наблюдателей для оценивания неизмеряемых возмущений, основанный на решении вспомогательной задачи оптимального следящего управления с минимизацией квадратичного функционала невязки. Этот функционал представляет собой меру

необходимого действия для отклонения траектории возмущенной системы от невозмущенной траектории, которой присваивается действие, равное нулю. В таком случае затратность движения по заданной возмущенной траектории измеряется количеством управляющих воздействий, необходимых для того, чтобы направить выход вспомогательной системы вдоль этой возмущенной траектории. Такая интерпретация функционала невязки и связь с соответствующей задачей оптимального следящего управления позволяют рассматривать значение требуемого действия, как оценку возмущений, влияющих на исходную систему. Вспомогательная система при этом представляет собой наблюдатель возмущений. В настоящей главе показана обоснованность этой идеи и принципиальная возможность оценки возмущений таким способом. В результате разработаны новые методы синтеза наблюдателей для оценивания неизмеряемых возмущений для нелинейных систем, включая синтез редуцированных и астатических наблюдателей, гарантирующих нулевую статическую ошибку оценивания возмущений.

Результаты главы и предварительных исследований по рассмотренным задачам опубликованы в работах [30, 33, 40-43, 45, 50, 53, 169-171].

## Глава 5. Методы и алгоритмы прогнозирующего управления и ситуационное прогнозирование

В соответствии с общей постановкой задачи синтеза функционально устойчивой системы управления АПО из главы 1 на исполнительном уровне системы управления приходим к двум подзадачам:

3. Задача  $P(t, x, t_f, r)$  – оптимальное детерминированное управление номинальным движением.

4. Задача  $P_\delta(t, \delta, t + \tau, r)$  – стохастическое управление системой уклонений на горизонте прогнозирования  $\tau$  с целью ее стабилизации и выполнения вероятностного ограничения.

Методы решения задач типа  $P(t, x, t_f, r)$  рассмотрены в главе 3. В настоящей главе сосредоточимся на задачах стратегического уровня и их связи с задачами типа  $P_\delta(t, \delta, t + \tau, r)$ , где одной из ключевых проблем остается выбор горизонта прогнозирования  $\tau$ , который предлагается реализовать через оценку времени первого выхода траектории уклонения за пределы «трубки» вокруг номинальной траектории. Реализация этой идеи для синтеза МРС управления является одним из результатов настоящей главы.

Другой конструктивной идеей из теории больших уклонений, предложенной в главе 1, является учет редких событий (больших уклонений траектории) через А-профили уклонений на этапе формирования базы сценариев. ТБУ предоставляет строгий математический базис для анализа асимптотики редких событий, и функционал действия имеет ясный физический смысл как мера «стоимости» больших уклонений. При таком подходе функционал действия становится реальным инструментом онлайн анализа и управления.

Соответственно основным предметом настоящей главы является разработка методов интеграции ТБУ (функционала действия) с методами исполнительного и стратегического уровней.

## 5.1. Интеграция теории больших уклонений и прогнозирующего управления

В постановке задачи рассматривается нелинейная стохастическая система в SDC-представлении:

$$\begin{aligned}\dot{x}_\xi &= A(x_\xi)x_\xi + B(x_\xi)u_\xi + \varepsilon G\dot{W}(t), x_\xi(t_0) = x_0, \\ y_\xi(t) &= Cx_\xi(t),\end{aligned}\tag{5.1}$$

где  $\varepsilon > 0$  – малый параметр;  $\dot{W}(t) \in \mathbb{R}^k$  – вектор стандартных независимых «белых шумов»;  $G \in \mathbb{R}^{n \times k}$  – матрица интенсивности шумов; остальные величины соответствуют принятым ранее обозначениям.

Требуется найти управление  $u_\xi(t)$ , которое переводит выход системы из начального состояния  $y_\xi(t_0) = Cx_0$  в окрестность целевого состояния  $ref(t)$  на конечном интервале времени  $t \in [t_0, t_f]$ , гарантируя, что траектория  $y_\xi(t)$  остается в заданной «трубке» вокруг номинальной траектории  $y(t)$  с вероятностью:

$$P\left(\sup_{t \in [t_0, t_f]} \|C(x_\xi(t) - x(t))\| < K_{dev}\right) \geq 1 - \beta,\tag{5.2}$$

где  $K_{dev} > 0$  – допустимое отклонение (радиус трубки);  $\beta \in (0, 1)$  – допустимый уровень риска; при детерминированном ограничении на управление:  $u_\xi(t) \in \mathbb{U}_{feasible}$ ,  $\mathbb{U}_{feasible} = \{u_\xi \in \mathbb{R}^r : \|u_\xi(t)\|_\infty \leq u_{max}\}$ .

Для решения стохастической задачи (5.1), (5.2) применяется декомпозиция, лежащая в основе tube-based MPC подхода, описанного в 1.1.1, где состояние разделяется на номинальную составляющую и составляющую ошибки (уклонение):  $x_\xi(t) = x(t) + \delta(t)$ .

Соответственно, управление представляется в виде суммы номинального и корректирующего управлений:  $u_\xi(t) = u(t) + u_\delta(t)$ .

Для задачи  $P(t, x, t_f, r)$  номинальная траектория  $x(t)$  описывается детерминированной системой (1.9) с номинальным управлением  $u(t)$ , которое

находится как решение детерминированной задачи оптимального управления с критерием качества (1.10).

В критерии (1.10) вид и параметры подынтегральной функций  $L(s, x(s), u(s), r)$  и терминального члена  $S_f(t_f, y(t_f), r)$  зависят от текущего режима управления  $r$  (например, базовый, осторожный или антикризисный), определяемого на стратегическом уровне. Решение задачи  $P(t, x, t_f, r)$  дает управление в форме обратной связи  $u(t) = G_{\text{ном}}(\hat{x}, t, r)\hat{x}(t)$ , где  $\hat{x}(t)$  – оценка вектора состояния системы (1.9).

Для задачи  $P_\delta(t, \delta, t + \tau, r)$  динамика отклонения  $\delta(t)$  реальной траектории  $x_\xi(t)$  от номинальной  $x(t)$  выводится путем вычитания уравнений номинальной системы (1.9) из исходной (5.1) и линеаризации вокруг номинальной траектории. Пренебрегая членами высшего порядка  $O(\varepsilon\|\delta\|, \|\delta^2\|)$ , получаем линеаризованную стохастическую систему:

$$\dot{\delta} = (A(x) + \tilde{A}(x, u))\delta + B(x)(u_\xi - u) + \varepsilon G\dot{W}(t),$$

$$\text{где } \tilde{A}_{ij}(x, u) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial A_{il}(x)}{\partial x_{\varepsilon j}} x_l + \sum_{l=1}^r \frac{\partial B_{il}(x)}{\partial x_{\varepsilon j}} u_l.$$

Вводя корректирующее управление  $u_\delta(t) = u_\xi(t) - u(t)$ , для модели отклонений имеем

$$\dot{\delta} = A_\delta(t)\delta + B_\delta(t)u_\delta + \varepsilon G_\delta\dot{W}(t), \delta(0) = 0, y_\delta = C\delta, \quad (5.3)$$

где  $A_\delta(t) = A(x) + \tilde{A}(x, u)$ ,  $B_\delta(t) = B(x)$ ,  $G_\delta = G$ .

Задача МРС управления для системы отклонений (5.3) формулируется как задача поиска управления  $u_\delta(t)$ , минимизирующего функционал стоимости

$$\min_{u_\delta} J_\delta(u_\delta), \quad (5.4)$$

$$J_\delta(u_\delta) = E \frac{1}{2} \left[ S_{f\delta}(t_k + \tau, \delta(t_k + \tau), r) + \int_{t_k}^{t_k + \tau} L_\delta(s, \delta(s), u_\delta(s), r) ds \right]$$

при начальном условии  $\delta(t) = 0$ , горизонте прогнозирования  $\tau > 0$ , ограничении на управление

$$u_\delta(t_k + s) + u(t_k + s) \in \mathbb{U}_{feasible}, \forall s \in [t_k, t_k + \tau],$$

$$\mathbb{U}_{feasible} = \{u_\delta \in \mathbb{R}^r: \|u_\delta(t_k + s) + u(t_k + s)\|_\infty \leq u_{max}\}.$$

и ограничении (5.2) на вероятность выхода уклонения на заданную границу, которое в терминах уклонений принимает вид

$$P\left(\sup_{s \in [t_k, t_k + \tau]} \|C\delta(s)\| \geq K_{dev}\right) < \beta_\delta, \quad (5.5)$$

где  $\beta_\delta = \beta/N$  – допустимый уровень риска на одном подынтервале,  $N$  – число подынтервалов.

### 5.1.1. Определение горизонта прогнозирования на основе ТБУ

ТБУ позволяет оценить вероятность события (5.5) для системы (5.3) через функционал действия. Согласно теореме Вентцеля-Фрейдлина [7, Теорема 1.2, Глава 4] асимптотическая вероятность уклонения удовлетворяет

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln P\left(\sup_{t \in [t_0, t_f]} \|C(x_\xi(t) - x(t))\| \geq K_{dev}\right) = - \inf_{w \in S^u} I(w), \quad (5.6)$$

где  $S^u = \{w \in C_{x_0}[t_0, t_f]: \sup_{t \in [t_0, t_f]} \|C(w(t) - x(t))\| \geq K_{dev}, w(t_0) = x_0\}$  –

множество траекторий  $w(t)$ , отклоняющихся от номинальной  $x(t)$  не менее чем на  $K_{dev}$  в супремум-норме;  $C_{x_0}[t_0, t_f]$  – пространство непрерывных функций, начинающихся в  $x_0$ ;  $I(w)$  – функционал действия (ФД) Вентцеля-Фрейдлина, определяемый как

$$I(w) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\dot{w}(t) - A_\delta(w(t))w(t) - B_\delta(w(t))u_\delta\|_{(G_\delta G_\delta^T)^{-1}}^2 dt, \quad (5.7)$$

при условии, что интеграл конечен (для сингулярных путей  $I(w) = \infty$ ).

Согласно (1.28) момент  $\tau^*$ , где «стоимость» уклонения минимальна, можно определить через решение оптимизационной задачи:

$$\tau^* = \arg \min_{\tau \in [t_0, t_f]} \left( \min_{w \in S_u^\tau} I(w) \right). \quad (5.8)$$

где  $S_u^\tau = \{w: w(t_0) = x_0, \|C(w(\tau) - x(\tau))\| = K_{dev}\}$ .

Для анализа влияния возмущений на уклонения примем  $u_\delta = 0$ , обозначив  $v(t) = G_\delta^{-1}(\dot{\delta}(t) - A_\delta(t)\delta(t))$ , для фиксированных  $u$  и  $\tau$  запишем, так называемую, систему путей для модели уклонений (5.3)

$$\dot{\delta}(t) = A_\delta(t)\delta(t) + G_\delta v(t) \quad (5.9)$$

и ФД (5.7) в терминах системы путей (5.9):

$$I(\delta) = \frac{1}{2} \int_0^\tau v^T v dt. \quad (5.10)$$

В результате внутренняя задача минимизации в (5.8) формулируется как задача терминального управления – минимизировать ФД (5.10) на движениях системы путей (5.9) с граничными условиями

$$\delta(0) = 0, \|C\delta(\tau)\| = K_{dev}. \quad (5.11)$$

Решение этой задачи (5.9), (5.10), (5.11) в форме обратной связи можно записать в виде (см. главу 3, замечание 3.4):

$$v = -G_\delta^T(t)W_\delta^T(t)C^T M_\delta^{-1}(t)C(W_\delta(t)\delta(t) - \delta(\tau)), \quad (5.12)$$

где

$$\dot{W}_\delta(t) = -W_\delta(t)A_\delta(t), \quad W_\delta(\tau) = I, \quad (5.13)$$

$$\dot{M}_\delta(t) = -CW_\delta(t)G_\delta(t)G_\delta^T(t)W_\delta^T(t)C^T, \quad M_\delta(\tau) = 0. \quad (5.14)$$

Откуда для матриц  $W_\delta(t)$  и  $M_\delta(t)$  имеем

$$\begin{aligned} W_\delta(t) &= -\int_\tau^t W_\delta(s)A_\delta(s)ds, \quad W_\delta(\tau) = I, \\ M_\delta(t) &= -\int_\tau^t CW_\delta(s)G_\delta(s)G_\delta^T(s)W_\delta^T(s)C^T ds, \quad M_\delta(\tau) = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Из последних соотношений можно получить аналитические выражения для  $W(t)$  и  $M(t)$ :

$$W_\delta(t) = \Phi_\delta(\tau, t), \quad M_\delta(t) = C(W_\delta(t)LW_\delta^T(t) - L)C^T, \quad (5.16)$$

где  $\Phi_\delta(\tau, t)$  – фундаментальная матрица системы  $\dot{\delta} = A_\delta\delta$ ; матрица  $L$  является решением матричного уравнения Ляпунова (в стационарном или «замороженном» смысле)

$$A_\delta(t)L + LA_\delta^T(t) - G_\delta(t)G_\delta^T(t) = 0. \quad (5.17)$$

Тогда интеграл в (5.15) для  $M(t)$  можно записать в виде (5.16), исходя из равенства

$$\begin{aligned} & - \int_\tau^t CW_\delta(s)G_\delta(s)G_\delta^T(s)W_\delta^T(s)C^T ds = \\ & - \int_\tau^t CW_\delta(s)(A_\delta(s)L + LA_\delta^T(s))W_\delta^T(s)C^T ds = \\ & \int_\tau^t C \frac{d}{ds} W_\delta(s)LW_\delta^T(s)C^T ds = C(W_\delta(t)LW_\delta^T(t) - L)C^T. \end{aligned}$$

С учетом (5.16) ФД (5.10) принимает вид (с учетом правила дифференцирования обратной матрицы  $\dot{M}^{-1} = -M^{-1}\dot{M}M^{-1}$ ; здесь в подынтегральном выражении зависимость матриц от времени опустим для сокращения записи)

$$\begin{aligned} I_{0\tau}(\delta) &= -\frac{1}{2} \int_0^\tau (W_\delta\delta - \delta(\tau))^T C^T M_\delta^{-1} \dot{M}_\delta^{-1} M_\delta^{-1} C (W_\delta\delta - \delta(\tau)) dt = \\ & \frac{1}{2} \int_0^\tau (W_\delta\delta - \delta(\tau))^T C^T \dot{M}_\delta^{-1} C (W_\delta\delta - \delta(\tau)) dt = \\ & \frac{1}{2} (W_\delta\delta - \delta(\tau))^T C^T M_\delta^{-1} C (W_\delta\delta - \delta(\tau)) \Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

откуда с учетом граничных условий (5.11) имеем

$$I_{0\tau}(\delta) = \frac{1}{2} \delta^T(\tau) C^T M_\delta^{-1}(0) C \delta(\tau), \quad (5.18)$$

где  $M_\delta(0) = C(\Phi_\delta(\tau, 0)L\Phi_\delta^T(\tau, 0) - L)C^T$ .

В классической постановке задачи выхода требуется решать вариационную задачу. Здесь же, используя обратную связь, она сводится к матричным уравнениям (5.13) – (5.17), что даёт аналитическое выражение (5.18) для минимального действия и позволяет определить траекторию  $w(t)$  с наименьшей «энергией» достижения границы  $\|C\delta(\tau)\| = K_{dev}$  к моменту  $\tau$ .

На основе (5.18) решение задачи минимизации (5.8) принимает вид

$$\tau^* = \arg \min_{\tau} \left( \min_{\|C\delta(\tau)\|=K_{dev}} \frac{1}{2} \delta^T(\tau) C^T M_\delta^{-1}(0) C \delta(\tau) \right). \quad (5.19)$$

При фиксированном  $\tau$  и условии  $\|C\delta(\tau)\| = K_{dev}$  минимум достигается, когда  $\delta(\tau)$  направлен вдоль собственного вектора, соответствующего

минимальному собственному числу  $\lambda_{\min}(M_{\delta}^{-1}(0))$  [8, §17, теорема 1].

Поскольку  $\lambda_{\min}(M_{\delta}^{-1}(0)) = \frac{1}{\lambda_{\max}(M_{\delta}(0))}$ , то

$$\min_{\|C\delta(\tau)\|=K_{dev}} I(\delta) = \frac{K_{dev}^2}{2} \frac{1}{\lambda_{\max}(M_{\delta}(0))}. \quad (5.20)$$

Таким образом, задача (5.19) сводится к

$$\begin{aligned} \tau^* = \arg \min_{\tau} \frac{1}{\lambda_{\max}(M_{\delta}(0))} &= \arg \max_{\tau} \lambda_{\max}(M_{\delta}(0)) = \\ &= \arg \max_{\tau} \lambda_{\max}(C(\Phi_{\delta}(\tau, 0) L \Phi_{\delta}^T(\tau, 0) - L) C^T). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Соотношение (5.21) позволяет найти оценку времени первого выхода отклонения  $\delta(t)$  на заданную границу  $K_{dev}$ , зная фундаментальную матрицу системы, выражение для которой в нестационарном случае сложно получить. Для упрощения можно воспользоваться гипотезой «замороженных» коэффициентов [138,139]: в каждый момент времени «замораживается» значение матрицы  $A_{\delta}(t) = A_{\delta t}$ , далее для этого постоянного значения решаются уравнения (5.16) и (5.17) на интервале  $[t, \tau]$  как для стационарной системы:

$$W_{\delta}(t) = e^{A_{\delta t}(\tau-t)}, \quad M_{\delta}(t) = C(e^{A_{\delta t}(\tau-t)} L e^{A_{\delta t}^T(\tau-t)} - L) C^T. \quad (5.22)$$

Подставляя (5.22) в (5.21), для  $\tau^*$  получаем:

$$\tau^* \approx \arg \max_{\tau} \lambda_{\max}(C(e^{A_{\delta t}(\tau-t)} L e^{A_{\delta t}^T(\tau-t)} - L) C^T). \quad (5.23)$$

**Теорема 5.1.** Пусть для системы путей (5.9) выполнены следующие условия:

1. Матрица  $A_{\delta}(t)$  непрерывна по  $t$  и равномерно гурвицева, т.е. существуют константы  $c \geq 1, \alpha > 0$  такие, что для фундаментальной матрицы  $\Phi_{\delta}(t, s)$  системы  $\dot{\delta} = A_{\delta}(t)\delta$  справедлива оценка  $\|\Phi_{\delta}(t, s)\| \leq c e^{-\alpha(t-s)}$  при всех  $t \geq s$ .

2. Матрица интенсивности шума  $G$  постоянна.

3. Для каждого фиксированного момента времени  $t$  в рамках гипотезы замороженных коэффициентов существует единственное положительно определённое решение  $L$  уравнения Ляпунова (5.17).

Тогда критическое время  $\tau^*$  первого достижения границы  $\|C\delta(\tau)\| = K_{dev}$  (в смысле максимума асимптотической вероятности или минимума функционала действия) определяется формулой (5.21). В стационарном случае ( $A_\delta = \text{const}$ ) эта формула принимает вид (5.23).

**Доказательство** основано на сведении задачи выхода к минимизации квадратичной формы (5.19) с последующим применением экстремальных свойств собственных чисел (см. [8, §17, теорема 1]).

**Замечание 5.1.** Условие равномерной гурвицевости матрицы  $A_\delta(t)$  обеспечивает экспоненциальную устойчивость фундаментальной матрицы  $\Phi_\delta(t, s)$  и тем самым корректность асимптотической оценки (5.6). В стационарном случае это условие также обеспечивает существование единственного положительно определённого решения алгебраического уравнения Ляпунова (5.17). Для нестационарной системы (5.17) используется в рамках гипотезы «замороженных» коэффициентов, что приводит к локальному по времени приближению и, как следствие, к формуле (5.23).

Критическое время  $\tau^*$ , определяемое теоремой 5.1, следует интерпретировать как момент времени, когда система наиболее уязвима к отклонениям амплитудой  $K_{dev}$ , т.е. когда требуемая «энергия» возмущения для вывода системы на границу минимальна. Это время используется для адаптивного задания горизонта прогнозирования:

$$\tau = \alpha \cdot \tau^*, \alpha \in (0,1), \quad (5.24)$$

где  $\alpha$  – коэффициент безопасности. В безопасных областях (большое  $\tau^*$ ) горизонт расширяется, позволяя системе видеть дальние угрозы. При приближении к границе опасности (малый  $\tau^*$ ) горизонт сужается, экономя вычислительные ресурсы.

**Замечание 5.2.** На практике важна именно динамика ФД, поэтому можно алгоритм оценки времени первого выхода построить на анализе изменений ФД во времени, а не на его минимизации по  $\tau$ . Численные примеры показывают, что точность вычисления оценки  $\tau^*$  в таком случае изменяется не существенно, но при этом можно снизить вычислительные затраты.

**Замечание 5.3.** Из выражений (5.20) - (5.23) видно, что критическое время  $\tau^*$ , определяемое как момент минимума ФД, не зависит от параметра  $\varepsilon$ , характеризующего интенсивность шума. Это свойство отражает асимптотический характер ТБУ: наиболее вероятный путь выхода на границу (А-профиль) и момент наименьших затрат энергии на этот путь определяются исключительно детерминированной системой путей (5.9) и геометрией допустимой области  $K_{dev}$ . При этом сама вероятность выхода на границу за время  $\tau$  пропорциональна  $P \sim e^{-\frac{I(w)}{\varepsilon^2}}$ , так что с ростом интенсивности шума вероятность нарушения ограничений действительно возрастает. Однако наиболее уязвимый момент времени, в который ожидается наиболее опасное стечение обстоятельств, остаётся неизменным. В практических приложениях, где  $\varepsilon$  конечно, значение  $\tau^*$  разумно использовать как базовую оценку, а влияние фактического уровня шума на оперативные решения можно учесть вариацией коэффициента безопасности  $\alpha$  в (5.24).

### 5.1.2. Преобразование вероятностных ограничений

Важным этапом реализации MPC для стохастических систем является замена вероятностных ограничений на ограничения, пригодные для решения стандартными методами оптимизации. В рассматриваемой постановке локальное вероятностное ограничение на интервале прогнозирования  $[t_k, t_k + \tau]$  имеет вид

$$P \left( \sup_{s \in [t_k, t_k + \tau]} \|C\delta(s)\| \geq K_{dev} \right) < \beta_\delta,$$

где  $\beta_\delta$  – допустимый уровень риска на одном подынтервале прогнозирования.

В общем случае такое интервальное ограничение не сводится напрямую к простой детерминированной форме. Поэтому в практической реализации MPC оно заменяется консервативной поточечной аппроксимацией на всём горизонте прогнозирования, которая обеспечивает выполнение более сильного детерминированного ограничения и тем самым уменьшает вероятность нарушения исходного интервального условия.

Рассмотрим процесс отклонения  $\delta(t)$ , который при условии гауссовости исходных возмущений аппроксимируется гауссовским процессом с ковариационной матрицей  $\Sigma_\delta(t)$ . Для линеаризованной системы отклонения (5.3) в замкнутой форме

$$\dot{\delta}(t) = (A_\delta - B_\delta K_\delta)\delta(t) + G_\delta \dot{W}, \delta(0) = 0$$

ковариационная матрица  $\Sigma_\delta(t)$  удовлетворяет уравнению Ляпунова [81]:

$$\dot{\Sigma}_\delta(t) = (A_\delta - B_\delta K_\delta)\Sigma_\delta + \Sigma_\delta(t)(A_\delta - B_\delta K_\delta)^\top + G_\delta G_\delta^\top, \Sigma_\delta(0) = 0.$$

Рассмотрим выход системы  $y_\delta(t) = C\delta(t)$ . Поскольку линейное преобразование гауссовского процесса остается гауссовским, вектор  $y_\delta(t)$  распределен нормально с нулевым средним и ковариацией  $\Sigma_y(t) = C\Sigma_\delta(t)C^\top$ .

Вместо исходного интервального вероятностного ограничения введём суженное детерминированное ограничение

$$\|y_\delta(s)\| \leq K_{\text{mpc}}(s), \forall s \in [t_k, t_k + \tau],$$

где  $K_{\text{mpc}}(s) = K_{\text{dev}} - \rho(s)$ , а функция  $\rho(s) \geq 0$  задаёт величину консервативного сужения допустимой области. Такое ограничение не является точным эквивалентом условия (5.5), однако представляет собой его консервативную аппроксимацию для MPC.

Для скалярного выхода (когда  $y_\delta(t)$  – скаляр) величина сужения может быть выбрана на основе квантиля стандартного нормального распределения  $\rho(s) = \kappa(\beta_\delta)\sqrt{\Sigma_y(s)}$ . Здесь  $\kappa(\beta_\delta)$  – коэффициент, соответствующий квантилю стандартного нормального распределения уровня  $1 - \beta_\delta/2$  (например,  $\kappa(0.05) \approx 1.96$ ,  $\kappa(0.01) \approx 2.58$ ) [81, 263]. В этом случае выполнение

ограничения  $|y_\delta(s)| \leq K_{\text{mpc}}(s), \forall s \in [t_k, t_k + \tau]$ , используется как консервативное условие снижения риска нарушения ограничения (5.5).

Для векторного выхода (когда  $y_\delta(t) \in \mathbb{R}^m, m > 1$ ) требуются более сложные оценки. В гауссовской аппроксимации коэффициент  $\kappa(\beta_\delta)$  может быть определён через квантиль распределения хи-квадрат с  $m$  степенями

свободы:  $\kappa(\beta_\delta) = \sqrt{\chi_{m,1-\beta_\delta}^2}$ , где  $\chi_{m,1-\beta_\delta}^2$  – квантиль распределения хи-квадрат

уровня  $1 - \beta_\delta$  [93,94]. Тогда консервативное детерминированное ограничение

можно записать в виде  $\|y_\delta(s)\| \leq K_{dev} - \kappa(\beta_\delta)\sqrt{\lambda_{\max}(\Sigma_y(s))}, \forall s \in [t_k, t_k + \tau]$ .

Другой подход состоит в использовании неравенства для евклидовой нормы (неравенство Маркова для квадрата нормы):

$$P(\|y_\delta(t)\| \geq K_{dev}) \leq \min\left\{1, \frac{\text{Tr}(\Sigma_y(t))}{K_{dev}^2}\right\}.$$

Однако такая оценка, как правило, оказывается чрезмерно консервативной при малых вероятностях нарушения. Более точную экспоненциальную оценку можно получить, используя ТБУ. В отличие от поточечной гауссовской аппроксимации, ТБУ позволяет анализировать вероятность события выхода на всём интервале прогнозирования, то есть события вида  $\sup_{s \in [t_k, t_k + \tau]} \|y_\delta(s)\| \geq K_{dev}$ .

Рассмотрим асимптотику вероятности выхода на границу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . По аналогии с (5.6) для локального интервала прогнозирования имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln P\left(\sup_{t \in [t_k, t_k + \tau]} \|y_\delta(t)\| \geq K_{dev}\right) = -I_{\min},$$

где  $I_{\min}$  – минимальное значение ФД (5.7) на траекториях, выходящих на границу  $K_{dev}$ .

Из оценки вероятности выхода на границу через ФД

$$P\left(\sup_{s \in [t_k, t_k + \tau]} \|y_\delta(s)\| \geq K_{dev}\right) \asymp \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^2} I_{\min}\right)$$

следует, что для выполнения условия (5.5) необходимо обеспечить неравенство  $I_{\min} > -\varepsilon^2 \ln \beta_\delta$ .

Согласно (5.20), минимальное действие для достижения границы  $K_{dev}$  к моменту  $\tau$  оценивается как  $I_{\min} = \frac{K_{dev}^2}{2\lambda_{\max}(M_\delta(0))}$ , где  $M_\delta(0) = C(\Phi_\delta(\tau, 0)L\Phi_\delta^\top(\tau, 0) - L)C^\top$ . Тогда, условие  $I_{\min} > -\varepsilon^2 \ln \beta_\delta$  принимает вид  $\frac{K_{dev}^2}{2\lambda_{\max}(M_\delta(0))} > -\varepsilon^2 \ln \beta_\delta$ . Отсюда получаем оценку

$$K_{dev} > \varepsilon \sqrt{-2 \ln \beta_\delta \cdot \lambda_{\max}(M_\delta(0))}. \quad (5.25)$$

Для стационарных систем при малых  $\tau$  справедливо приближение  $M_\delta(0) \approx \tau \Sigma_y$ , что дает  $K_{dev} > \varepsilon \sqrt{-2\tau \ln \beta_\delta \cdot \lambda_{\max}(\Sigma_y)}$ .

Таким образом, в рамках MPC могут использоваться два взаимодополняющих способа учёта вероятностного ограничения (5.5). Первый способ основан на гауссовской поточечной аппроксимации и приводит к суженным детерминированным ограничениям вида  $\|y_\delta(s)\| \leq K_{\text{mpc}}(s)$ , удобным для онлайн-оптимизации. Второй способ основан на ТБУ и позволяет получить асимптотическую оценку вероятности выхода на всём интервале прогнозирования, непосредственно согласованную с исходной постановкой условия (5.5).

## 5.2. Адаптивный алгоритм MPC

Основная идея адаптивного алгоритма MPC заключается в использовании критического времени  $\tau^*$ , полученного из анализа больших отклонений, для выбора горизонта прогнозирования  $\tau$  на каждом шаге MPC. Это позволяет адаптировать глубину прогнозирования к текущей уязвимости системы: при увеличении восприимчивости системы к случайным возмущениям (уменьшении  $\tau^*$ ) применяется более короткий горизонт прогнозирования, обеспечивающий более частый пересчет управляющих

воздействий и, как следствие, более оперативную реакцию на возникающие отклонения. Напротив, при уменьшении уязвимости системы горизонт прогнозирования может быть увеличен, что снижает вычислительную нагрузку без ущерба для качества управления.

В классическом алгоритме на каждом шаге управления  $t_k$  решается детерминированная задача MPC для системы отклонений (5.3) с целевым функционалом (5.4), где горизонт прогнозирования рассчитывается из (5.24). При этом задается детерминированное ограничение на отклонение:

$$\|C\delta(s)\| \leq K_{\text{mpc}}(s), \forall s \in [t_k, t_k + \tau] \quad (5.26)$$

где  $K_{\text{mpc}}(s)$  задается одним из способов, описанных выше, в зависимости от размерности выхода и требуемой консервативности.

### **Алгоритм 5.1. Адаптивное tube-based MPC управление.**

Этап 1. Предварительные вычисления (offline):

Шаг 1. Задание параметров: определить  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $G(x)$ , параметр  $\varepsilon$ , допустимое отклонение  $K_{dev}$ , допустимый уровень риска  $\beta$ , коэффициент безопасности  $\alpha$ , квантиль стандартного нормального распределения  $\kappa(\beta_\delta)$ , параметры критериев качества задач  $P(t, x, t_f, r)$  и  $P_\delta(t, \delta, t + \tau, r)$ .

Шаг 2. Расчет номинальной траектории  $x(t)$  и управления  $u(t)$ : решить задачу оптимального управления  $P(t, x, t_f, r)$  на интервале  $[0, t_f]$ .

Этап 2. Оперативная часть алгоритма (онлайн на каждом шаге  $t_k$ ):

Шаг 1. Измерение состояния  $\hat{x}_\xi(t_k)$ , отклонения  $\delta(t_k) = \hat{x}_\xi(t_k) - x(t_k)$ .

Шаг 2. Вычисление матриц модели отклонений в  $x(t_k)$ :  $A_\delta(t_k)$ ,  $B_\delta(t_k)$ .

Шаг 3. Определение горизонта прогнозирования: вычислить  $\tau_k^*$  из (5.23) (или (5.21)) и установить горизонт прогнозирования  $\tau = \alpha\tau_k^*$ .

Шаг 4. Определение детерминированных ограничений: определить  $K_{\text{mpc}}(s)$ .

Шаг 5. Решение задачи  $P_\delta(t, \delta, t + \tau, r)$  для модели уклонений (5.3).  
Получение оптимальной последовательности управлений  $u_\delta(s)$ ,  
 $s \in [t_k, t_k + \tau]$ .

Шаг 6. Применение управления: подать на объект управление:

$$u_\xi(t_k) = u(t_k) + u_\delta(t_k),$$

где  $u_\delta(t_k)$  – первое значение из оптимальной последовательности.

Шаг 7. Переход к следующему шагу: установить  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ , где  $\Delta t$  – шаг дискретизации, и перейти к Шагу 1 этапа 2.

Использование критического времени  $\tau^*$  в качестве основы для выбора горизонта прогнозирования  $\tau$  обеспечивает адаптацию алгоритма к текущей уязвимости системы. В моменты повышенной уязвимости (малое  $\tau^*$ ) применяется короткий горизонт прогнозирования, что позволяет чаще пересчитывать управление и быстрее реагировать на уклонения.

Предложенный алгоритм требует решения двух основных вычислительных задач на каждом шаге: решение уравнения Ляпунова для определения горизонта прогнозирования и решение задачи МРС. Обе задачи могут быть эффективно решены с использованием современных численных методов. После дискретизации по времени задача МРС сводится к задаче квадратичного программирования.

Интеграция теории больших уклонений, консервативного сужения ограничений и метода прогнозирующего управления позволяет синтезировать закон управления, который адаптирует горизонт прогнозирования к текущей уязвимости системы, гарантирует выполнение вероятностных ограничений через детерминированные суженные ограничения, обеспечивает робастность к случайным возмущениям и может быть эффективно реализован в реальном времени. Данный подход открывает новые возможности для применения МРС в задачах управления сложными стохастическими системами.

### 5.3. Сценарный подход к ситуационному прогнозированию

Классическое прогнозирующее управление действительно является мощным методом, осуществляющим оптимизацию управления на конечном горизонте на основе текущей модели системы и измеренного состояния. Его прогнозирующая способность, однако, принципиально ограничена двумя факторами: характером используемой модели и ограниченным горизонтом прогнозирования. MPC хорошо решает задачу компенсации возмущений и удержания системы в окрестности номинальной траектории, эффективно работая с типовыми отклонениями, статистика которых отражена в модели шумов. Однако его фундаментальным ограничением является неспособность эффективно учитывать редкие, но катастрофические события. В условиях длительного автономного функционирования АПО, даже при воздействии гауссовских возмущений малой интенсивности, накопление ошибок и нелинейная динамика могут приводить к тому, что события, традиционно считающиеся пренебрежимо редкими, перестают быть таковыми. Такие ситуации не описываются стандартными моделями шумов, могут развиваться по сценариям, качественно отличным от типовых, и требуют не просто корректировки управляющего воздействия, а упреждающего изменения самой стратегии или структуры управления.

Именно для преодоления этого ограничения предлагается выполнять ситуационное прогнозирование на основе сценарного подхода. Если MPC осуществляет тактический прогноз («куда система попадет через  $\tau$  секунд при данном управлении»), то ситуационный прогноз нацелен на стратегическое, качественное предвидение («по какому сценарию развивается ситуация и к каким последствиям это может привести в будущем»). Его задача заключается не в замене MPC на исполнительном уровне, а его стратегическое дополнение за счет оценки потенциальных угроз, выходящих за рамки типовых отклонений, и, как следствие, упреждающая адаптация параметров, целевых установок или даже структуры самого MPC регулятора.

Сценарный подход базируется на предположении, что множество возможных траекторий возмущений, влияющих на систему, можно аппроксимировать конечным набором типовых сценариев. Каждый сценарий представляет собой формализованное описание развития ситуации во времени, включая как динамику возмущений, так и реакции системы. В контексте управления нелинейными стохастическими системами данный подход приобретает особую ценность, поскольку позволяет учитывать редкие, но катастрофические события. Ключевое отличие от классического прогнозирования в том, что классический прогноз даёт точечную оценку, где ошибки первого и второго рода примерно равносильны. Ситуационное прогнозирование оперирует семейством траекторий – А-профилями, которые параметризуются непрерывным спектром вероятностей ложной тревоги: от единицы в аттракторе (где система заведомо безопасна) до нуля в конечной точке выхода на границу. Такая параметризация позволяет заблаговременно, пусть и ценой повышенной вероятности ложной тревоги, инициировать превентивные меры. Поскольку последствия некомпенсации критической ситуации могут быть слишком велики, такая «избыточная осторожность» является оправданной и обеспечивает возврат системы к штатному режиму.

Предлагаемый алгоритм реализует следующую логику работы:

1. Онлайн-сопоставление и диагностика – выполняет непрерывный мониторинг текущей траектории управляемого процесса и её сравнение с базой сценариев для определения текущего режима работы.
2. Прогнозирование и упреждающая адаптация – на основе идентифицированного сценария и его параметров осуществляется прогноз развития ситуации на упреждающем горизонте, вычисляется интегральный риск и вырабатываются корректирующие воздействия на параметры контура управления исполнительного уровня.

Структурно подсистема ситуационного прогнозирования состоит из следующих модулей (рис. 5.1): база сценариев, блок онлайн-сопоставления, блок оценки риска и прогнозирования, блок упреждающей адаптации.

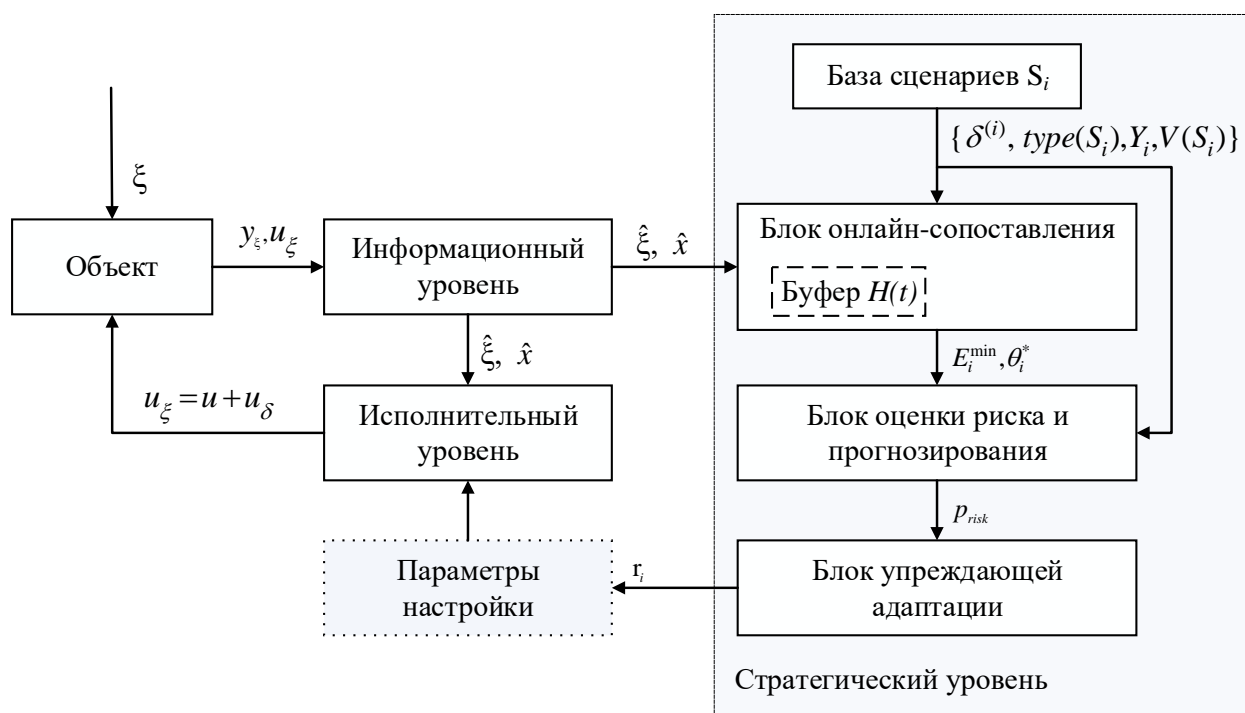


Рисунок 5.1. Структурная схема взаимодействия блоков подсистемы ситуационного прогнозирования

Блок ситуационного прогнозирования функционирует как контур обработки информации, интегрированный в общую структуру системы управления. Его работа начинается с получения от информационного уровня оценок текущего состояния  $\hat{x}_\xi(t)$  и возмущения  $\hat{\xi}(t)$ . Затем, на основе этой оценки и известной номинальной траектории  $x(t)$ , определяется оценка траектории уклонения:  $\hat{\delta}(t) = \hat{x}_\xi(t) - x(t)$ .

Полученная последовательность оценок  $\hat{\xi}(t)$  и  $\hat{\delta}(t)$  поступает в блок формирования буфера истории наблюдений  $H(t)$ . Данный блок хранит массив данных за фиксированный промежуток времени, формируя скользящее окно фиксированной длины  $L$ . Этот массив представляет собой набор данных, характеризующий динамику уклонения системы от номинала, и служит входным сигналом для последующего анализа.

Основную вычислительную нагрузку алгоритма несет блок онлайн-сопоставления. Его функция заключается в количественной оценке степени

соответствия текущей истории  $H(t)$  каждому из эталонных сценариев, хранящихся в базе сценариев, которая содержит заранее подготовленные временные профили развития управляемого процесса, которые включают как реакцию системы на типовые последовательности возмущений, так и критические А-профили, синтезированные с помощью ТБУ. Для каждого сценария  $S_i$  этот блок решает задачу оптимизации, находя такой временной сдвиг  $\theta_i^*(t)$ , который минимизирует функционал квадратичной ошибки  $E_i(t, \theta)$  между буфером  $H(t)$  и соответствующим фрагментом эталонного профиля. Результатом работы блока для каждого  $i$ -го сценария является пара чисел: оптимальный сдвиг  $\theta_i^*(t)$  и достигнутое минимальное значение ошибки  $E_i^{\min}(t)$ .

Далее, набор минимальных ошибок  $\{E_i^{\min}(t)\}$  поступает в блок оценки риска и прогнозирования. На первом этапе данный блок преобразует ошибки в набор нормированных весов  $w_i(t)$ , которые интерпретируются как апостериорная вероятность актуальности сценария  $S_i$  в текущий момент. На основе этих весов и заранее определенных для каждого сценария бинарных индикаторов опасности  $V(S_i)$  вычисляется интегральный скалярный индекс риска  $p_{\text{risk}}(t)$ .

Параллельно, используя найденные оптимальные сдвиги  $\theta_i^*(t)$ , блок оценки риска и прогнозирования строит прогноз развития управляемого процесса на упреждающем интервале  $\Delta$ , экстраполируя «хвост» наиболее вероятных сценариев.

Заключительным этапом является работа блока упреждающей адаптации. Данный блок принимает решения на основе анализа текущего индекса риска  $p_{\text{risk}}(t)$ , распределения весов  $w_i(t)$  и метаданных идентифицированных сценариев. Его логика сводится к выбору одного из дискретных стратегических режимов управления  $r_i$  (например, базовый, осторожный, антикризисный). Каждому режиму соответствует predetermined набор корректировок параметров для контуров управления

исполнительного уровня. Эти корректировки являются выходным воздействием блока упреждающей адаптации и, например, могут включать: новое целевое состояние  $r(t)$  или иные параметры для закона номинального управления  $u(t)$ ; адаптивные матрицы штрафов  $Q(t), R(t)$ , коэффициент безопасности  $\alpha(t)$  для расчета горизонта прогнозирования  $\tau = \alpha \cdot \tau^*$  и скорректированный радиус консервативного сужения  $\rho(t)$  для задачи MPC в канале уклонений.

Исполнительный уровень, получив адаптированные параметры, решает задачу синтеза управления. Номинальный контроллер вычисляет управление  $u(t)$ , а адаптивный MPC-контроллер, используя обновленный горизонт прогнозирования  $\tau$  и ограничения, находит корректирующее управление уклонениями  $u_\delta(t)$ . Суммарное управление  $u_\xi(t) = u(t) + u_\delta(t)$  подается на объект. Изменение состояния объекта под действием этого управления и внешних возмущений снова фиксируется наблюдателями на информационном уровне, инициируя следующий цикл работы алгоритма ситуационного прогнозирования. Таким образом, осуществляется непрерывный цикл наблюдения, анализа, прогнозирования и адаптивной коррекции стратегии управления.

Далее более подробно рассмотрим работу блоков подсистемы ситуационного прогнозирования.

**Формирование и структура базы сценариев.** Ядром алгоритма является база сценариев  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ , представляющая собой структурированное знание о возможных режимах работы системы. Каждый сценарий  $S_i$  – это не просто траектория уклонения, а комплексный информационный объект, включающий:

1. Временной профиль результирующего уклонения системы  $\delta^{(i)}(t)$ , где  $t \in [0, T_s^{(i)}]$ ,  $T_s^{(i)}$  – длительность сценария  $S_i$ . Профиль нормирован, например, по энергии:  $\int_0^{T_s^{(i)}} \|\delta^{(i)}(t)\|^2 dt = 1$ .

2. Метаданные:

- тип сценария  $type(S_i) \in \{\text{типовой, критический}\}$ ;
- для критических сценариев – А-профили – связанные с ними значение минимального функционала действия  $I_{\min}^{(i)}$ , критическое время  $\tau^{*(i)}$  и оценка вероятности реализации  $\hat{p}_i$ ;
- индикатор опасности  $V(S_i)$ . Для типовых сценариев, реализация которых не ведёт к нарушению проектных ограничений при использовании номинального регулятора,  $V(S_i) = 0$ . Для критических сценариев (А-профилей), чья реализация гарантированно приводит к выходу на границу  $K_{dev}$  индикатор принимается равным  $V(S_i) = 1$ . Для некоторых сложных сценариев может быть определена промежуточная вероятность  $V(S_i) \in (0,1)$ .

**Замечание 5.4.** Каждый сценарий  $S_i$  помимо профиля уклонения  $\delta^{(i)}$  также может содержать соответствующий профиль характерного внешнего возмущения  $\xi^{(i)}(t)$ . Кроме того, в каждый сценарий можно добавить вектор последствий  $Y^{(i)}$ , количественно описывающий ожидаемое воздействие на выходы системы (или другие требующие контроля параметры).

Типовые сценарии формируются путём статистической обработки исторических данных эксплуатации АПО, кластеризации траекторий возмущений, экспертного описания характерных рабочих режимов или моделирования.

Критические сценарии генерируются с помощью ТБУ через решение соответствующей задачи точного терминального управления (5.9), (5.10). Траектория, реализующая минимум в (5.20), называется А-профилем (профиль действия, action-profile) и представляет собой наиболее вероятный путь к нарушению ограничений (5.5).

Характеристики А-профиля:

- минимальное «действие» (в смысле функционала (5.10));

– максимальная вероятность среди всех путей реализации выхода на границу;

– описывает опасный сценарий, который система должна предвидеть.

Явное включение А-профилей в базу сценариев позволяет стратегическому уровню распознавать предпосылки редкого события в реальном времени, оценивать вероятность, инициировать превентивные меры. Соответствующие функционалы действия обеспечивают количественную оценку опасности через асимптотическую оценку вероятности. Полученные А-профили  $\delta^{(i)*}(t)$ , представляющие наиболее вероятные пути к нарушению ограничений, нормируются и заносятся в базу, становясь сценариями. Это обеспечивает обоснованность базы для редких событий.

**Блок онлайн-сопоставления и классификации.** Данный блок решает задачу идентификации текущего режима в реальном времени. Входным сигналом является оценка вектора уклонений  $\hat{\delta}(t)$  (или возмущений  $\hat{\xi}(t)$ ), формируемая наблюдателем информационного уровня. В момент времени  $t$  фиксируется скользящее окно (буфер) недавних наблюдений фиксированной длины  $L$ :  $H(t) = \{\hat{\delta}(s) \mid s \in [t - L, t]\}$ . Выбор  $L$  является компромиссом: слишком короткое окно не содержит достаточной информации для распознавания, слишком длинное – приводит к запаздыванию идентификации и излишней вычислительной нагрузке.

Основная операция заключается в оценке степени соответствия текущей истории  $H(s)$  каждому сценарию  $S_i$ . Поскольку начало наблюдаемого фрагмента не обязано совпадать с началом сценария, вводится параметр временного сдвига  $\theta$ . Для каждого  $S_i$  ищется такой сдвиг  $\theta_i^*$ , при котором фрагмент сценария  $\delta^{(i)}(\theta_i^* + s)$ ,  $s \in [0, L]$ , максимально близок к  $H(t)$ .

Формально это задача минимизации функционала ошибки:

$$E_i(t, \theta) = \int_0^L \|\hat{\delta}(t - L + s) - \gamma_i(t, \theta) \cdot \delta^{(i)}(\theta + s)\|^2 ds,$$

где  $\gamma_i(t, \theta)$  – коэффициент масштабирования амплитуды, компенсирующий различие в интенсивности наблюдаемого и эталонного сценария. Он вычисляется адаптивно, например, по формуле:

$$\gamma_i(t, \theta) = \frac{\|\hat{\delta}(t)\|}{\|\delta^{(i)}(\theta+L)\| + \epsilon}, \epsilon > 0.$$

Здесь малый параметр  $\epsilon$  предотвращает нестабильность при приближении к нулевой эталонной амплитуде.

Оптимальный сдвиг  $\theta_i^*(t)$  и соответствующая минимальная ошибка  $E_i^{\min}(t)$  определяются как:

$$\theta_i^*(t) = \arg \min_{\theta \in [0, T_s^{(i)} - L]} E_i(t, \theta), E_i^{\min}(t) = E_i(t, \theta_i^*(t)). \quad (5.27)$$

Решение задачи (5.27) в реальном времени требует эффективных алгоритмов. На практике область поиска по  $\theta$  может быть сужена вокруг предыдущей оценки  $\theta_i^*(t - \Delta t)$ , а интеграл вычисляться через дискретную сумму.

Полученные минимальные ошибки  $E_i^{\min}(t)$  преобразуются в нормированные веса  $w_i(t)$ , интерпретируемые как апостериорная вероятность актуальности сценария  $S_i$  при условии наблюдаемой истории  $H(t)$ . Для этого используется softmax-функция

$$w_i(t) = \frac{\exp(-\gamma \cdot E_i^{\min}(t))}{\sum_{j=1}^N \exp(-\gamma \cdot E_j^{\min}(t))}, i = 1, \dots, N.$$

Здесь  $\gamma > 0$  – параметр чувствительности (большие значения  $\gamma$  усиливают различие между лучшим и худшим сценариями). Полученные веса удовлетворяют условиям:  $w_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^N w_i(t) = 1$ .

Следует отметить, что эффективность распознавания сценариев на основе описанной процедуры определяется тем, насколько фактическая динамика отклонений соответствует семейству А-профилей, построенных для номинальных условий. При существенных изменениях параметров системы (например, вследствие отказов или значительного изменения режима

движения) профили, предварительно рассчитанные для номинальной траектории, могут терять адекватность. Частичная компенсация этого эффекта достигается за счёт масштабирования амплитуды и экспоненциального сглаживания показателя риска. Полное решение проблемы робастного распознавания в нестационарных условиях предполагает механизмы адаптивного обновления базы сценариев, в том числе онлайн-пополнение её новыми профилями, что является предметом дальнейших исследований.

**Блок оценки риска и прогнозирования.** На основе результатов классификации данный блок осуществляет количественную оценку угроз и строит прогноз развития ситуации.

Интегральная оценка риска сводится к скалярному показателю и вычисляется как математическое ожидание индикатора опасности по всем сценариям с учётом их вероятностей:  $p_{\text{risk}}(t) = \sum_{i=1}^N w_i(t) \cdot V(S_i)$ .

Таким образом,  $p_{\text{risk}}(t)$  отражает текущую взвешенную вероятность развития событий по критическому пути.

Для наиболее вероятных сценариев строится прогноз отклонения на упреждающем горизонте  $T_p$ . Если в момент  $t$  идентифицировано соответствие сценарию  $S_i$  со сдвигом  $\theta_i^*(t)$ , то это означает, что текущему физическому времени  $t$  соответствует сценарное время  $s_i(t) = \theta_i^*(t) + L$ . Тогда прогнозируемая траектория отклонения на интервале  $\Delta \in [0, T_p]$  определяется как продолжение сценария из этой точки с учётом масштабирования:

$$\delta_p^{(i)}(t + \Delta) = \gamma_i(t, \theta_i^*(t)) \cdot \delta^{(i)}(s_i(t) + \Delta). \quad (5.28)$$

Прогноз (5.28) может быть использован для имитационного моделирования с целью оценки последствий, если система продолжит движение в текущем режиме.

**Блок упреждающей адаптации.** Этот блок завершает цикл ситуационного прогнозирования для стратегического уровня управления, преобразуя диагностическую информацию и оценку риска в конкретные управляющие воздействия на исполнительном уровне. Его решения носят

дискретно-логический характер и направлены на упреждающее изменение параметров или структуры регулятора.

Выбор режима управления. На основе интегральной оценки риска  $p_{\text{risk}}(t)$  и идентифицированного основного сценария система переключается между заранее определёнными режимами  $r_i$ :

$r_1$ : базовый режим, если  $p_{\text{risk}}(t) < \beta_1$ ;

$r_2$ : осторожный режим, если  $\beta_1 \leq p_{\text{risk}}(t) < \beta_2$ ;

$r_3$ : антикризисный режим, если  $p_{\text{risk}}(t) \geq \beta_2$ .

Здесь  $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$  – пороговые уровни риска.

Каждому режиму  $r_m$  соответствует набор корректировок для исполнительных контуров управления. Так для номинального канала управления характерны:

1. Пересчёт целевой траектории  $ref(t)$ : смена целевого режима, альтернативный маршрут;

2. Корректировка матриц штрафов  $Q, R$ : штрафы увеличиваются с ростом риска по скалярному правилу  $Q(t) = Q_{\text{base}} + \lambda \cdot p_{\text{risk}}(t)\Delta Q$ , где  $\lambda > 0$  – коэффициент адаптации,  $\Delta Q \geq 0$  – добавочная матрица штрафа.

Для МРС-контуров уклонений помимо корректировки матриц штрафов могут применяться:

1. Изменение горизонта прогнозирования  $\tau$ : коэффициент безопасности  $\alpha$  уменьшается при приближении к опасности и увеличивается в спокойной обстановке  $\alpha(t) = \alpha_{\text{min}} + (\alpha_{\text{max}} - \alpha_{\text{min}})\exp(-\lambda_\alpha \cdot p_{\text{risk}}(t))$ , где  $\alpha_{\text{max}} \leq 1$ ,  $\alpha_{\text{min}} > 0$ .

2. Радиус детерминированной трубки  $\rho$  в (5.26) может быть ужесточён за счёт увеличения коэффициента  $\kappa(\beta)$  для выбранного режима.

3. Для А-профилей может быть временно установлен более строгий (меньший) уровень допустимого риска:  $\beta_{\text{adapt}}(t) = \beta_{\text{base}} \cdot [1 - \mu \cdot \mathbb{1}_{\text{critical}}(t)]$ , где  $\mathbb{1}_{\text{critical}}(t) = 1$  при обнаружении А-профиля (иначе  $\mathbb{1}_{\text{critical}}(t) = 0$ ), и это автоматически ужесточает ограничение.

Реализация алгоритма в реальном времени предъявляет высокие требования к вычислительной эффективности. Основные пути оптимизации вычислений укрупненно показаны ниже:

1. База сценариев: использование эффективных структур данных (kd-деревья, хеш-таблицы признаков) для ускорения поиска похожих профилей [78, 97].

2. Минимизация по  $\theta$ : применение быстрых алгоритмов сопоставления временных рядов, таких как Dynamic Time Warping или нормализованная кросс-корреляция, вычисляемая через быстрое преобразование Фурье [101, 232].

3. Обновление весов: инкрементальный пересчет весов  $w_i(t)$  при поступлении новых данных в буфер  $H(t)$ .

4. Параллельные вычисления: независимое вычисление ошибок  $E_i(t, \theta)$  для разных сценариев  $S_i$  может быть эффективно распараллелено.

## 5.4. Примеры построения А-профилей

### 5.4.1. А-профили в задаче контроля качки судна

В задачах контроля мореходности есть примеры развития параметрических колебаний, когда наряду с аддитивным возмущением от ветра и (или) волны действует еще (параметрически) периодическое изменение плеча восстанавливающего момента [121]. Бортовая качка судна в условиях волнения и ветра может быть представлена системой второго порядка вида (5.1), где [110]

$$A(x_\xi) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2h \end{pmatrix}, \varepsilon G(x_\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ \mu x_{\xi_1} & \gamma & 0 \end{pmatrix},$$

где параметры равны  $\omega_0^2 = 0.36, h = 0.0315, \gamma = \mu = 0.1, \varepsilon = 10^{-3}$ ,  $x_{\xi_1}$  – первый элемент вектора  $x_\xi$ . Задача состоит в прогнозе нормированного критического значения угла крена  $y(t_f) = Cx_\xi(t_f) = \theta_f = 1$  через А-профиль.

Численные результаты решения задачи построения А-профиля для данной системы показаны на рис.5.2, где  $x_{\xi_1} = \theta$  – экстремаль для угла крена,  $u_1, u_2$  – соответственно, возмущения от волнения и флуктуационного ветра.

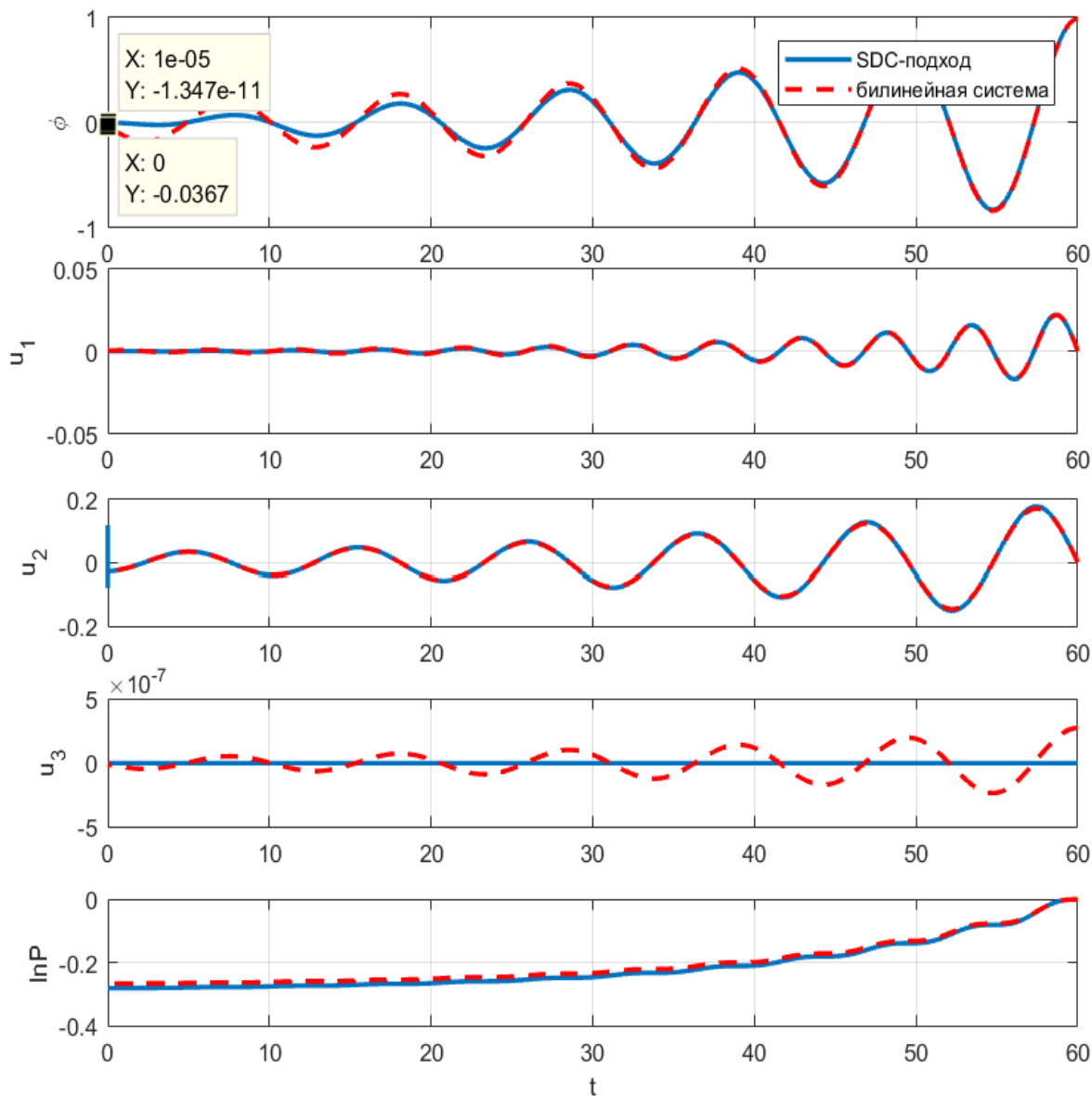


Рисунок 5.2. Осциллограммы для задачи контроля бортовой качки судна.

Для исследования режимов качки судна и проверки алгоритмов вычисления вероятностных оценок критических состояний мореходности использовался стенд, имитирующий различные режимы качки. Стенд представляет платформу с 6-ю степенями свободы с микроконтроллерным управлением, внешний вид стенда представлен на рисунке 5.3.

При проведении эксперимента было важно выяснить возможность отработки стендом А-профилей критических состояний, обыкновенных траекторий волнения судна, адекватность и качество их воспроизведения, адекватность работы алгоритмов контроля прогнозирования.

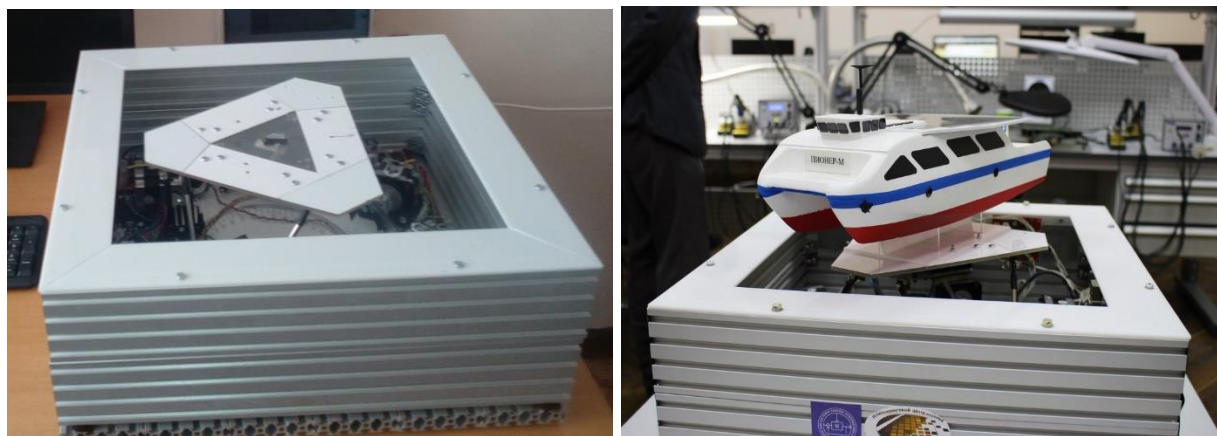


Рисунок 5.3. Внешний вид стенда «Имитатор качки»

На рисунке 5.4 изображена траектория движения судна, которая была смоделирована в MATLAB и отработана стендом. При воспроизведении обычных траекторий, когда судно качается при воздействии ветра ошибка воспроизведения значительно ниже.

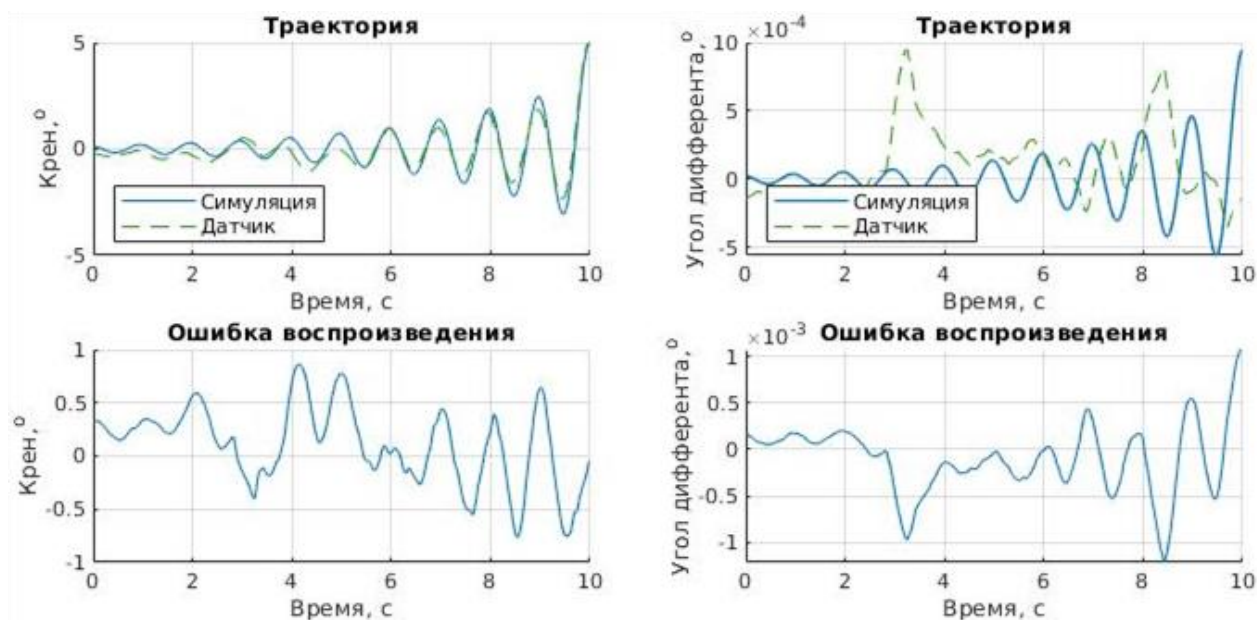


Рисунок 5.4. Сравнение траектории А-профиля и ошибка воспроизведения, порог  $5^\circ$

На рисунке 5.5 представлены результаты расчета вероятности критической ситуации в реальном времени на основе измерений параметров крена, полученных от имитатора качки. Результаты показывают, что качество оценок является хорошим и может быть использовано для систем контроля мореходности. Программное обеспечение имитатора качки имеет свидетельство о регистрации программы для ЭВМ: Лазарев, В. Б. Комплексная программа стенда имитации качки судна: свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019662838 / В. Б. Лазарев, С. А. Дубовик, А. А. Кабанов, И. Ю. Липко, А. Е. Осадченко, А. Н. Путин, В. П. Тыщенко. – 03.10.2019. На основе указанных результатов был получен патент на полезную модель: Дубовик, С. А. Система оперативного контроля крена судна на волнении: пат. 195040 U1 Рос. Федерация / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов, И. Ю. Липко. – 14.01.2020.

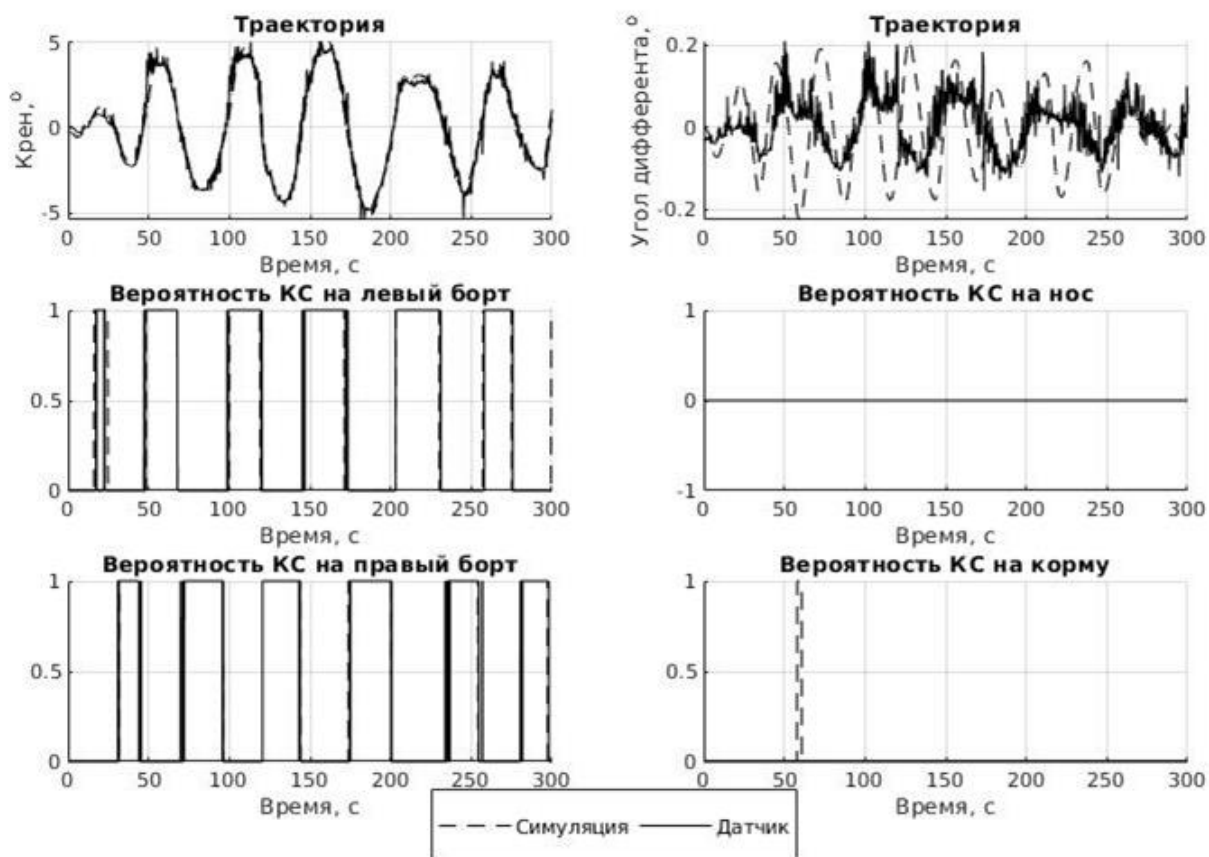


Рисунок 5.5. Прогноз критической ситуации (КС) при ветре 13.45 м/с

### 5.4.2. А-профиль столкновения двух подводных аппаратов

Рассмотрим движение двух автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) в горизонтальной плоскости вдоль продольной оси земной системы координат, то есть в ситуации, когда их курсы параллельны продольной оси координатного трехгранника. Движение АНПА будем считать близким к прямолинейному с постоянной продольной скоростью  $u_e$  и на заданной глубине, также будем предполагать, что движение каждого аппарата стабилизируется около выделенной ему номинальной прямолинейной траектории. Тогда относительное движение каждой пары аппаратов можно представить в земной системе координат вектором  $X^\varepsilon(t) = (y_1 \ v_1 \ y_2 \ v_2)^T$ , где  $y_1, y_2$  и  $v_1, v_2$  – координаты (в земной системе) и поперечные скорости (соответственно) первого и второго АНПА в горизонтальной плоскости; будем использовать также блоки:  $X_i^\varepsilon = (y_i \ v_i)^T$ ,  $i = 1, 2$ . Рассматривая взаимное поперечное движение любой пары аппаратов, можно записать единую стохастическую систему для вектора  $X_\xi(t) = \text{col}(X_1^\varepsilon(t), X_2^\varepsilon(t)) \in R^4$

$$\dot{X}_\xi = A(X_\xi) + \varepsilon G(X_\xi) \dot{w}, X_\xi(t_0) = X_{\xi 0} \in \mathbb{X}_{safe}, \quad (5.29)$$

$$A(X_\xi) = A = \text{diag}(A_1, A_2), G(X_\xi) = \text{diag}(G_1, G_2), C = \text{diag}(C_1, C_1),$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\xi_i\omega_i \end{pmatrix}, G_i = \begin{pmatrix} 0 \\ g_i \end{pmatrix},$$

где  $\dot{w}$  –  $k$ -вектор «белого шума»,  $\varepsilon > 0$  – малый параметр, параметры  $\xi_i, \omega_i$  и  $g_i$  определяются из динамики движения АНПА [19].

Для численного моделирования взяты следующие значения относительных коэффициентов затухания  $\xi_1, \xi_2$  матрицы  $A = \text{diag}(A_1, A_2)$  системы (5.29): вариант 1 соответствует апериодическому режиму с параметрами  $\xi_1 = 1.77, \xi_2 = 0.88, g_1 = 0.5, g_2 = 0.2$ , вариант 2 – режиму осциллятора с параметрами  $\xi_1 = 0.35, \xi_2 = 0.18, g_1 = 0.5, g_2 = 0.2$ , где коэффициенты затухания уменьшены примерно в пять раз. На рис.5.6 представлены графики изменения функционала действия в зависимости от значения координаты столкновения  $\hat{y}$  (а – вариант 1, б – вариант 2), откуда

видно, что настройка конкретных параметров стабилизации каждого АНПА практически не влияют на величину  $\hat{y}$ . Также видно, что аperiodический характер системы приводит к уменьшению вероятности  $P_{0t_f}$  без малого на двадцать порядков (вариант 1 –  $P_{0t_f} = 2.916e^{-26}$ , вариант 2 –  $P_{0t_f} = 8.125e^{-06}$ ). На рис.5.7 представлены зависимости изменения функционала действия от координаты столкновения  $\hat{y}$  и времени столкновения  $t_f$ . Откуда видно, что, начиная с  $t_f > 16$  с, рост вероятности составляет менее 5%, следовательно, для моделирования А-профиля достаточно взять  $t_f = 16$  с.

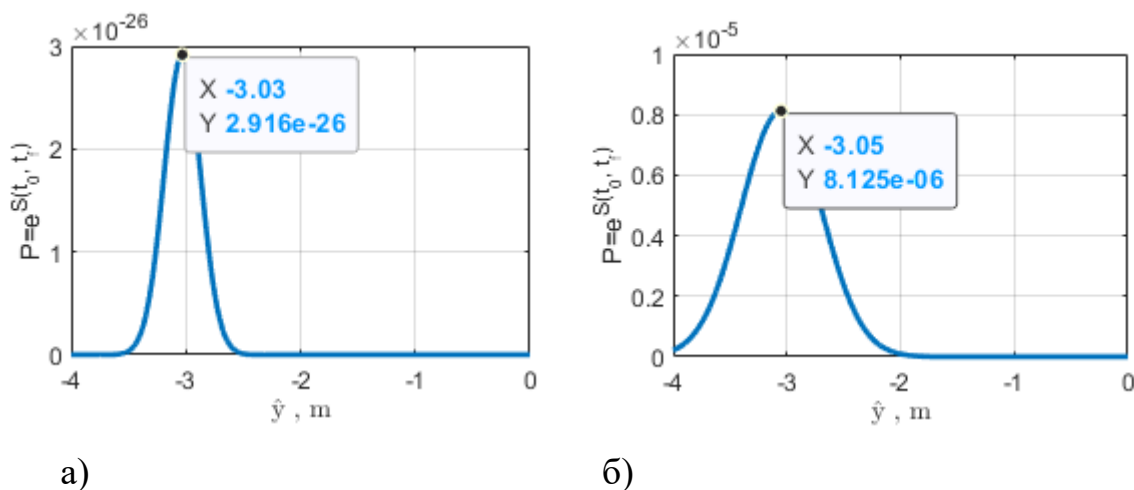


Рисунок 5.6. Зависимость функционала действия от координаты столкновения  $\hat{y}$  (а – вариант 1; б – вариант 2)

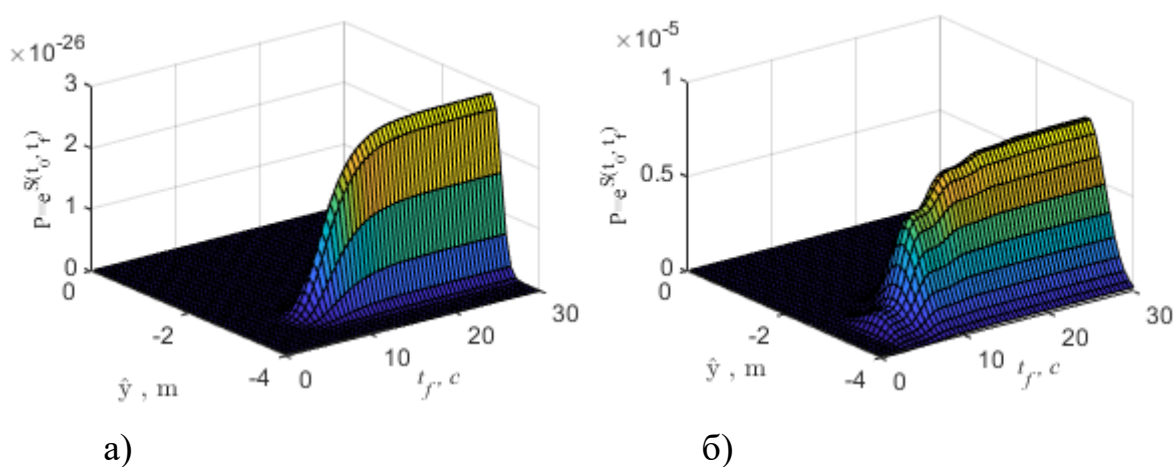


Рисунок 5.7. Зависимость функционала действия от координаты столкновения  $\hat{y}$  и времени столкновения  $t_f$  (а – вариант 1; б – вариант 2)

На рисунке 5.8 представлены А-профили столкновения двух аппаратов для обоих вариантов. Верхние графики показывают компоненты поперечных перемещений первого и второго АНПА, нижние графики вероятности при  $\varepsilon = 1$ , все в функции времени.

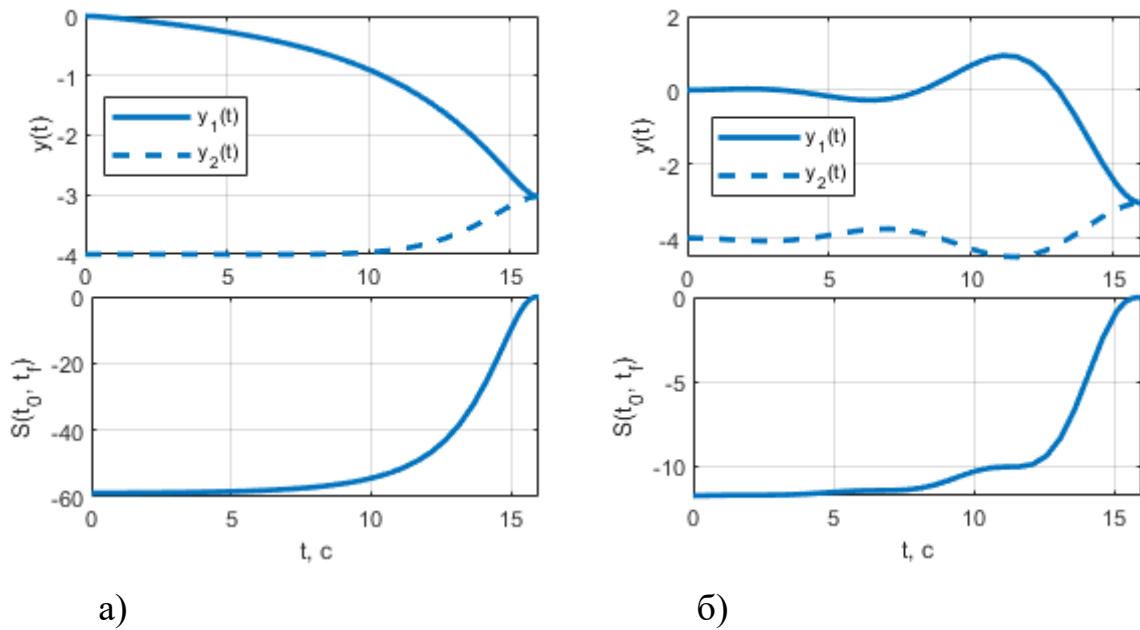


Рисунок 5.8. А-профиль столкновения и вероятность (а – вариант 1; б – вариант 2)

В этих примерах нужно отметить роль относительных коэффициентов затухания  $\xi_1, \xi_2$  матрицы  $A = \text{diag}(A_1, A_2)$ , значения которых зависят от конкретной настройки системы стабилизации АНПА. Здесь в качестве одного из возможных требований к проектированию системы стабилизации можно взять минимизацию вероятности столкновения, которая ниже для апериодического варианта настройки. Но даже если колебательность в системе будет вполне ощутимой, как на рисунке 5.8б, возможное в результате колебаний столкновение вполне может быть спрогнозировано по кривой функционала действия, благодаря которой (в силу ее монотонности) все точки А-профиля оказываются упорядоченными по вероятности столкновения. По

этой причине попадание текущего состояния  $X_\xi(t)$  системы (5.29) в малую окрестность (некоторая  $\varepsilon$ -трубка) А-профиля критической ситуации в момент  $t = t_1$  дает информацию о двух вещах: 1) вероятности  $P_{t_1 t_f}$ , 2) времени  $\tau = t_f - t_1$  до столкновения в худшем случае. Последнее означает, что  $X_\xi(t)$  при  $t > t_1$  и до столкновения, скорее всего покинет  $\varepsilon$ -трубку А-профиля критической ситуации с возможным последующим возвращением в нее, и так далее; и только в худшем случае, с априорно малой вероятностью, дальнейшее движение  $X_\xi(t)$  до столкновения продолжается в пределах указанной  $\varepsilon$ -трубки. Указанная информация позволяет в каждый момент ее поступления организовать, при необходимости, дополнительное корректирующее воздействие на процесс движения АНПА.

### 5.5. Выводы по главе

Представленный метод ситуационного прогнозирования на основе сценарного подхода совместно с анализом больших уклонений через А-профили представляет собой инструмент повышения интеллектуальности и живучести автономных систем. Его основными преимуществами являются:

1. Упреждающий характер реакции за счёт ранней идентификации угроз (через сценарный анализ и прогнозирование).
2. Учёт редких событий через интеграцию с теорией больших уклонений, что отсутствует в классических MPC и tube-based MPC.
3. Естественное представление неопределённости в виде дискретного набора сценариев с вероятностными весами.
4. Возможность онлайн-обучения и пополнения базы сценариев новыми, не предусмотренными на этапе проектирования, профилями возмущений.

Таким образом, сценарный подход стратегически дополняет классические методы обратной связи и прогнозирующего управления, реализуя итеративный цикл «наблюдение – прогноз – адаптация» на качественно новом, семантическом уровне. Это позволяет системе не только оптимально реагировать на текущие отклонения, но и осуществлять упреждающую адаптацию к потенциально опасным ситуациям.

Результаты данной главы, а также предварительных исследований по данной теме опубликованы в [10-13, 15, 19-26, 58, 107-112, 162, 167, 168].

## **Глава 6. Синтез функционально устойчивой системы управления движением АНПА**

В данной главе основные результаты, полученные в настоящей работе, применяются для построения функционально устойчивой системы управления траекторным движением автономного необитаемого подводного аппарата (АНПА).

### **6.1. Описание объекта управления**

В качестве объекта управления рассматривается АНПА типа ММТ-300, который предназначен для проведения исследовательских подводных работ на глубинах до 300 метров. АНПА представляет собой подводный носитель исследовательского оборудования (полезной нагрузки).

Внешний вид АНПА представлен на рисунке 6.1.

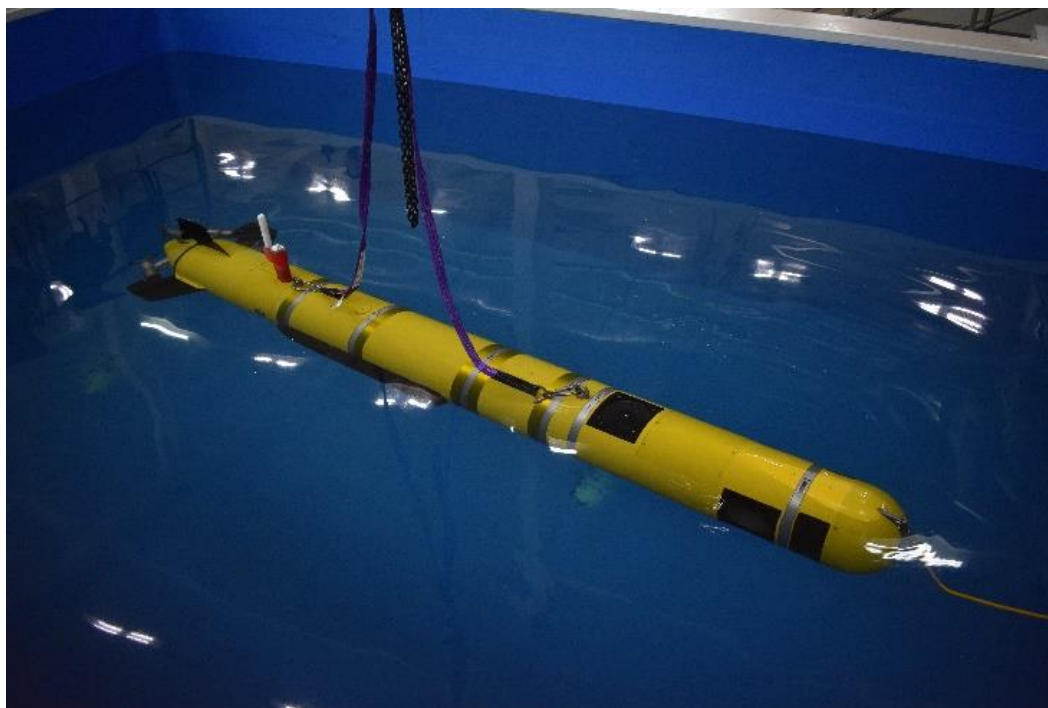


Рисунок 6.1. Внешний вид АНПА ММТ-300

Основные технические характеристики АНПА ММТ-300 приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1. Основные технические характеристики АНПА ММТ-300

п/п	Наименование параметра	Значение
1	Предельная рабочая глубина погружения АНПА	300 м
2	Диапазон скоростей движения АНПА	0 - 2 м/с
3	Автономность АНПА (при скорости хода 0,8 м/с)	12 часов
4	Вес АНПА (в воздухе), не более	150 кг
5	Габаритные размеры АНПА (в базовой комплектации) - длина - диаметр	3.0 м 0.3 м
6	Параметры электропитания оборудования, размещаемого на судне носителя	220 В ± 10 %, 50 Гц ± 1
7	Потребляемая мощность оборудования, размещаемого на судне носителя	3 кВт
8	Диапазон рабочих температур	от -5 ° до +35 °С
9	Максимальная дальность связи ПКУ – АНПА: - по радио каналу (при прямой видимости) в надводном положении	200 м
10	Радиус циркуляции АНПА на стопе	3 м
11	Максимальные значения дифферента во время погружения/всплытия	45 °
12	Координаты центра масс, $r_g^b$	$[0 \ 0 \ 0]^T$
13	Координаты центра плавучести, $r_b^b$	$[0 \ 0 \ 0.07]^T$
14	Плавучесть, $B$	$mg, Н$

Функциональная схема комплекса изображена на рисунке 6.2 [37].

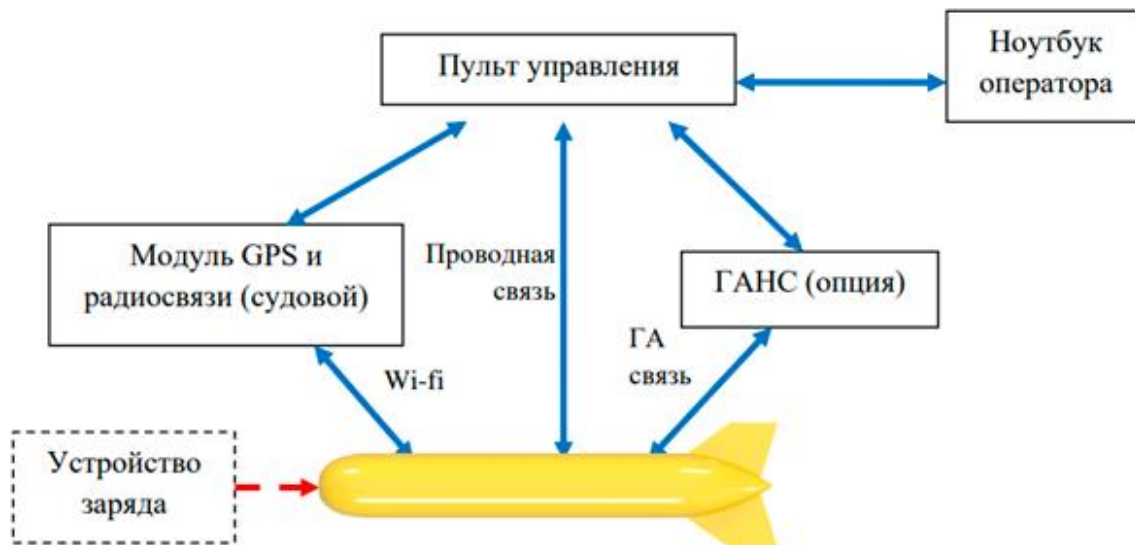


Рисунок 6.2. Функциональная схема комплекса АНПА ММТ-300

### 6.1.1. Описание математической модели АНПА

Для описания движения АНПА используются две правые системы координат: неподвижная инерциальная система  $\{n\}$  (связанная с землей, оси  $x_n, y_n, z_n$ ) и подвижная система координат  $\{b\}$ , жестко связанная с корпусом аппарата (начало в центре масс, оси  $x_b, y_b, z_b$ ).

Вектор состояния аппарата в связанной системе координат определяется как [121]:

$$\mathbf{x} = [\boldsymbol{\eta}^T, \mathbf{v}^T]^T \in \mathbb{R}^{12}, \quad (6.1)$$

где  $\boldsymbol{\eta} = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T$  – вектор положения и углов Эйлера (крен, дифферент, рыскание) в инерциальной системе, а  $\mathbf{v} = [u, v, w, p, q, r]^T$  – вектор линейных и угловых скоростей в связанной системе.

Кинематические соотношения имеют вид:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v},$$

где  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})$  – матрица преобразования скоростей, зависящая от углов Эйлера и имеющая блочную структуру:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})$  – матрица поворота размера  $(3 \times 3)$  преобразует вектор линейных скоростей из связанной системы координат  $\{b\}$  в инерциальную систему  $\{n\}$ . При стандартной последовательности поворотов  $ZYX$ , то есть рыскание  $\psi$ , затем дифферент  $\theta$ , затем крен  $\phi$ , она записывается в виде [121]:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix},$$

$\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta})$  – матрица преобразования размера  $(3 \times 3)$ , связывает угловые скорости в связанной системе  $\boldsymbol{\omega} = [p, q, r]^T$  с производными углов Эйлера  $\dot{\boldsymbol{\Theta}} = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$ . Это соотношение имеет вид [121]:

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\omega}.$$

Для  $ZYX$ -параметризации явное выражение для  $\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta})$  задается соотношением ниже (оно корректно при  $\theta \neq \pm 90^\circ$ , то есть вне стандартной сингулярности эйлеровых углов):

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Динамика аппарата в связанной системе координат описывается нелинейным матричным уравнением [121]:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{\text{dist}}, \quad (6.2)$$

где  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{RB} + \mathbf{M}_A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  – матрица инерции, включающая массу твердого тела ( $\mathbf{M}_{RB}$ ) и присоединенные массы жидкости ( $\mathbf{M}_A$ ), матрица  $\mathbf{M}$  является симметричной и положительно определенной;  $\mathbf{C}(\mathbf{v}) = \mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v}) + \mathbf{C}_A(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  – кососимметричная матрица кориолисовых и центробежных сил (твердого тела и гидродинамических добавок);  $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \mathbf{D}_L + \mathbf{D}_{NL}(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  – матрица гидродинамического демпфирования, где  $\mathbf{D}_L$  – линейное демпфирование (ламинарное трение), а  $\mathbf{D}_{NL}(\mathbf{v})$  – квадратичное

демпфирование (турбулентное трение), содержащие члены вида  $D_q|v_i|v_i$ ;  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^6$  – вектор восстанавливающих сил и моментов, определяемый разностью силы тяжести и силы плавучести, а также взаимным расположением центра масс и центра плавучести, компоненты этого вектора зависят от углов  $\phi$  и  $\theta$  и имеют вид

$$\mathbf{g}_g(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} (W - B)\sin\theta \\ -(W - B)\cos\theta\sin\phi \\ -(W - B)\cos\theta\cos\phi \\ -(y_g W - y_b B)\cos\theta\cos\phi + (z_g W - z_b B)\cos\theta\sin\phi \\ (z_g W - z_b B)\sin\theta + (x_g W - x_b B)\cos\theta\cos\phi \\ -(x_g W - x_b B)\cos\theta\sin\phi - (y_g W - y_b B)\sin\theta \end{bmatrix},$$

где  $W = mg$  – вес аппарата,  $B$  – сила плавучести,  $(x_g, y_g, z_g)$  и  $(x_b, y_b, z_b)$  – координаты центра масс и центра плавучести;  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^6$  – вектор управляющих сил и моментов, создаваемых движителями;  $\boldsymbol{\tau}_{\text{dist}} \in \mathbb{R}^6$  – вектор внешних возмущающих сил и моментов, обусловленных морским течением, волнением и прочими неконтролируемыми факторами; детальные модели этих воздействий рассматриваются в подразделе 6.1.2.

Для численного моделирования и синтеза законов управления используется SDC-представление нелинейной системы:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}\boldsymbol{\tau}_{\text{dist}}, \quad (6.3)$$

где матрица  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  и вектор  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$  выбираются таким образом, чтобы выполнялось тождество (6.2). В данной работе используется параметризация, выделяющую линейную часть демпфирования:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta}) \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}_l \end{bmatrix}, \mathbf{d}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}(\mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{D}(\mathbf{v}) - \mathbf{D}_l)\mathbf{v} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})) \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{D}_l = \text{diag}(X_u, Y_v, Z_w, K_p, M_q, N_r)$  – диагональная матрица линейного демпфирования, коэффициенты которой получены из численного моделирования и расчетов в [188]. Постоянная матрица входа определяется

как  $\mathbf{B} = \mathbf{G} = [\mathbf{0}_{6 \times 6}; \mathbf{M}^{-1}]$ . Матрицы  $\mathbf{M}_{RB}$ ,  $\mathbf{M}_A$ ,  $\mathbf{C}_{RB}(\mathbf{v})$ ,  $\mathbf{C}_A(\mathbf{v})$  рассчитываются в соответствии с [89, 121].

### 6.1.2. Модели внешних возмущений

Рассматриваются ситуации, когда в процессе движения на АНПА действуют внешние возмущения, которые можно разделить на три основные составляющие: воздействие морского течения  $\boldsymbol{\tau}_{\text{current}}$ , волновые нагрузки  $\boldsymbol{\tau}_{\text{wave}}$  и неучтённые высокочастотные возмущения  $\boldsymbol{\tau}_{\text{noise}}$ . Суммарное возмущение, входящее в правую часть уравнения (6.3), определяется как

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{dist}} = \boldsymbol{\tau}_{\text{current}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{wave}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{noise}}. \quad (6.4)$$

Каждая из составляющих моделируется с учётом физической природы и статистических характеристик реальных процессов.

**Модель течения.** Скорость морского течения  $\mathbf{v}_c \in \mathbb{R}^3$  в инерциальной системе координат описывается как медленно меняющийся случайный процесс. Для его описания используется процесс Орнштейна–Уленбека [243, 263], который представляет собой стационарный гауссовский марковский процесс, обладающий свойством возврата к среднему. Уравнение динамики скорости течения имеет вид:

$$\dot{\mathbf{v}}_c = -\mathbf{A}_c \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\Sigma}_c \dot{\mathbf{w}}_c,$$

где  $\mathbf{A}_c = \text{diag}(\alpha_c, \alpha_c, \alpha_c)$  – диагональная матрица коэффициентов возврата ( $\alpha_c > 0$ ), определяющая скорость релаксации течения к нулевому среднему;  $\boldsymbol{\Sigma}_c = \text{diag}(\sigma_c, \sigma_c, \sigma_c)$  – матрица интенсивности шума;  $\dot{\mathbf{w}}_c$  – вектор белых шумов.

Воздействие течения на аппарат проявляется через силу сопротивления, пропорциональную относительной скорости. В связанной системе координат проекция скорости течения определяется как  $\mathbf{v}_c^b = \mathbf{R}^\top(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}_c$ , где  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})$  – матрица поворота из инерциальной системы в связанную. Тогда сила и момент, вызванные течением, вычисляются по формуле  $\boldsymbol{\tau}_{\text{current}} = -\mathbf{D}_l \mathbf{v}_c^b$ , где

$\mathbf{D}_l = \text{diag}(X_w, Y_v, Z_w, K_p, M_q, N_r)$  – диагональная матрица коэффициентов линейного демпфирования.

**Модель волнения.** Воздействие морского волнения на аппарат описывается с помощью линейного формирующего фильтра второго порядка, аппроксимирующего спектр Пирсона-Московица (или JONSWAP) [134, 221]. Состояние фильтра  $\zeta \in \mathbb{R}^{n_w}$  и вызываемые им силы и моменты  $\tau_{\text{wave}}$  подчиняются уравнениям:

$$\dot{\zeta} = \mathbf{A}_w \zeta + \mathbf{B}_w \dot{\mathbf{w}}_w, \tau_{\text{wave}} = \mathbf{C}_w \zeta,$$

где  $\mathbf{A}_w$  – блочно-диагональная матрица с блоками  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix}$  для каждой из рассматриваемых степеней свободы (например, вертикальной силы и момента по тангажу). Здесь  $\omega_0$  – доминирующая частота волнения,  $\xi$  – коэффициент демпфирования;  $\dot{\mathbf{w}}_w$  – вектор белых шумов;  $\mathbf{B}_w$  – матрица входа шума, определяющая интенсивность возбуждения;  $\mathbf{C}_w$  – матрица выхода, связывающая состояния фильтра с результирующими силами и моментами. Значения параметров  $\omega_0$  и  $\xi$  выбираются на основе типовых гидрологических условий района плавания.

**Аддитивный шум в динамике.** Неучтённые высокочастотные возмущения моделируются аддитивным белым шумом  $\dot{\mathbf{W}} \in \mathbb{R}^6$  с нулевым средним и ковариационной матрицей  $\mathbf{Q}_{\text{dyn}}$ . Интенсивность шума определяется через матрицу  $\Sigma_v$  такую, что  $\mathbf{Q}_{\text{dyn}} = \varepsilon^2 \Sigma_v \Sigma_v^T$ ,  $\varepsilon > 0$  – неизвестный малый параметр. Вклад данного шума в правую часть уравнения (6.3):

$$\tau_{\text{noise}} = \varepsilon \Sigma_v \dot{\mathbf{W}}, \mathbf{G} \tau_{\text{noise}} = \varepsilon \mathbf{G}_\delta \dot{\mathbf{W}}, \mathbf{G}_\delta = [\mathbf{0}_{6 \times 6}; \mathbf{M}^{-1} \Sigma_v].$$

Таким образом, все три компоненты суммарного возмущения имеют физическую интерпретацию и могут быть настроены в соответствии с типовыми гидродинамическими условиями.

## 6.2. Постановка и решение задачи функционально устойчивого управления движением АНПА

С учетом (6.4) рассматриваемую модель (6.3) запишем в виде стохастической системы:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{\xi} &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_{\xi})\mathbf{x}_{\xi} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{\xi} + \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\xi}) + \mathbf{G}\boldsymbol{\tau}_{\text{wc}} + \varepsilon\mathbf{G}_{\delta}\dot{\mathbf{W}}(t), \\ \mathbf{x}_{\xi}(0) &= \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\tau}_{\text{wc}} = \boldsymbol{\tau}_{\text{wave}} + \boldsymbol{\tau}_{\text{current}},\end{aligned}\quad (6.5)$$

где в соответствии с обозначениями главы 5 индекс « $\xi$ » соответствует возмущенному движению.

В постановке задачи функционально устойчивого управления рассматриваем АНПА ММТ-300, динамика которого описывается стохастической нелинейной системой (6.5). Начальное состояние  $\mathbf{x}_0$  может быть частично известно. На интервале времени  $[0, T_f]$  задана желаемая траектория  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  (положение и ориентация), которую необходимо отслеживать в соответствии с квадратичным критерием качества

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{T_f} ((\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\eta}_d(t))^T \mathbf{Q}_{\text{pos}} (\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\eta}_d(t)) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}_u \mathbf{u}(t)) dt, \quad (6.6)$$

где  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{\text{pos}}\mathbf{x}(t)$  – выход системы (положение и ориентация);  $\boldsymbol{\eta}_d$  – желаемая траектория (первые шесть компонент целевого состояния);  $\mathbf{C}_{\text{pos}} = [\mathbf{I}_{6 \times 6}, \mathbf{0}_{6 \times 6}]$  – матрица выхода по положению аппарата;  $\mathbf{Q}_{\text{pos}} \geq \mathbf{0}, \mathbf{R}_u > \mathbf{0}$  – весовые матрицы соответствующих размеров (выбираются при синтезе номинального регулятора).

Требуется синтезировать закон управления  $\mathbf{u}_{\xi}(t)$ , который обеспечивает выполнение следующих условий:

1. Вероятностное ограничение на траекторию: реальная траектория должна с вероятностью не менее  $1 - \beta$  находиться внутри «трубки» заданного радиуса  $K_{\text{dev}}$  вокруг номинальной траектории  $\mathbf{x}(t)$ :

$$P \left\{ \sup_{t \in [0, T_f]} \|\mathbf{C}_{\text{dev}}(\mathbf{x}_{\xi}(t) - \mathbf{x}(t))\| \leq K_{\text{dev}} \right\} \geq 1 - \beta, \quad (6.7)$$

где  $\mathbf{C}_{\text{dev}} = [\mathbf{I}_{3 \times 3} \mathbf{0}_{3 \times 9}]$ , выделяет позиционные координаты  $(x, y, z)$ , а  $\mathbf{x}(t)$  – номинальная траектория, удовлетворяющая детерминированной системе без возмущений.

2. Ограничения на управление: управляющие воздействия должны быть физически реализуемы, то есть находиться в пределах, определяемых конструкцией движителей и рулевых поверхностей аппарата. Для АНПА эти ограничения обусловлены максимальной тягой маршевых движителей и максимальными моментами, создаваемыми подруливающими устройствами. Они задаются в виде покомпонентных ограничений:

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}_{\xi}(t) \leq \mathbf{u}_{\max}, \forall t \in [0, T_f], \quad (6.8)$$

где  $\mathbf{u}_{\min}, \mathbf{u}_{\max} \in \mathbb{R}^6$  – векторы минимальных и максимальных допустимых сил и моментов. Для аппаратов класса ММТ-300 типичные значения находятся в диапазоне  $|u_i| \lesssim 50$  Н для линейных сил (первые три компоненты) и  $|u_i| \lesssim 10$  Н·м для моментов (последние три компоненты) [121].

Таким образом, задача сводится к нахождению управления, минимизирующего функционал  $J$  при одновременном выполнении вероятностного ограничения (6.7) и детерминированных ограничений на управление (6.8).

Для решения сформулированной задачи используется подход, основанный на декомпозиции движения на номинальную (детерминированную) траекторию и стохастическое отклонение. Представим полное состояние и управление в виде:

$$\mathbf{x}_{\xi}(t) = \mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\delta}(t), \mathbf{u}_{\xi}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_{\delta}(t) + \mathbf{u}_{\text{wc}}(t), \quad (6.9)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{u}(t)$  – номинальное движение в отсутствие шумов и возмущений,  $\boldsymbol{\delta}(t)$  – отклонение,  $\mathbf{u}_{\delta}(t)$  – корректирующее управление, формируемое для гашения отклонений, а  $\mathbf{u}_{\text{wc}}(t)$  – компенсационное управление, зависящее от оценок внешних возмущений  $\hat{\mathbf{t}}_{\text{wc}}$ . При этом для реализации обратной связи строится наблюдатель состояния, а для онлайн настройки параметров

соответствующих регуляторов используется ситуационное прогнозирование, суть которого изложена в главе 5.

Решение сформулированных подзадач реализуется в иерархической структуре (см. рис. 5.1, глава 5). Нижний (исполнительный) уровень включает: номинальный регулятор, формирующий  $\mathbf{u}(t)$ ; регулятор уклонений, реализующий MPC на основе модели уклонений с учетом ограничений (6.7) и (6.8); наблюдатель состояния и наблюдатели возмущений (редуцированные наблюдатели), предоставляющие оценки  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  и  $\hat{\mathbf{t}}_{wc}(t)$ .

Верхний (стратегический) уровень отвечает за ситуационное прогнозирование: на основе текущей траектории уклонения и базы сценариев (включая A-профили, построенные с применением теории больших уклонений) оценивается риск; в зависимости от значения риска выбирается режим управления  $\mathbf{r}$  (базовый, осторожный, критический), который определяет параметры настройки регуляторов нижнего уровня.

Такая структура позволяет совместить преимущества прогнозирующего управления для подавления типовых возмущений с возможностью заблаговременного учёта редких, но опасных сценариев, обеспечивая функциональную устойчивость системы в широком диапазоне эксплуатационных условий. Далее показан синтез соответствующих регуляторов и наблюдателей.

### 6.2.1. Задача номинального управления $\mathbf{P}(t, \mathbf{x}, t_f, \mathbf{r})$

Для детерминированной номинальной системы, записанной в SDC-представлении с выделением нелинейной части  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(\mathbf{x}), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (6.10)$$

необходимо найти управление  $\mathbf{u}(t)$ , обеспечивающее отслеживание желаемой траектории  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$  с заданным качеством по критерию (6.6). Здесь  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$  – детерминированный вектор нелинейностей, не включённых в  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ .

Для синтеза номинального управления удобно воспользоваться естественным разделением движения АНПА на медленную и быструю составляющие. Медленная подсистема описывает изменение положения и ориентации, а быстрая – динамику скоростей. Такое разделение особенно уместно, если в выбранном рабочем режиме скорости и моменты демпфирования приводят к заметной разнице временных масштабов между кинематикой и динамикой. В этом случае исходную модель (6.10) можно представить в сингулярно возмущённой форме. Следуя классической теории сингулярных возмущений, разобьём вектор состояния на две группы:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^6, \mathbf{x}_2 = \mathbf{v} \in \mathbb{R}^6.$$

Тогда уравнения (6.10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_{12}(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2, & \mathbf{x}_1(0) &= \mathbf{x}_{10}, \\ \varepsilon \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) + \mathbf{d}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), & \mathbf{x}_2(0) &= \mathbf{x}_{20}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{12}(\mathbf{x}_1) &= \mathbf{J}(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{A}_{22} = -\bar{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{D}_l, \mathbf{B}_2 = \bar{\mathbf{M}}^{-1}, \bar{\mathbf{M}}^{-1} = \varepsilon\mathbf{M}^{-1}, \\ \mathbf{d}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= -\bar{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{C}(\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 + (\mathbf{D}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{D}_l)\mathbf{x}_2 + \mathbf{g}(\mathbf{x}_1)). \end{aligned}$$

Матрица  $\mathbf{A}_{22}$  является гурвицевой при положительно определённой  $\mathbf{D}_l$  и положительно определённой  $\bar{\mathbf{M}}$ , что соответствует обычному физическому предположению о наличии линейного демпфирования в быстрых каналах.

Согласно теории сингулярных возмущений [181], при  $\varepsilon \rightarrow 0$  быстрая подсистема в первом приближении переходит в квазистационарный режим, определяемый из алгебраического уравнения

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}_{22}\bar{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{B}_2\bar{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{d}_2(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{x}}_2).$$

Здесь  $\bar{\mathbf{x}}_2$  и  $\bar{\mathbf{u}}$  – квазистационарные переменные на медленной шкале времени. Это уравнение, вообще говоря, нелинейно относительно  $\bar{\mathbf{x}}_2$ , поэтому его решение может находиться итерационно или приближённо, если нелинейная добавка  $\mathbf{r}_2$  достаточно мала.

Для рабочей области, в которой влияние кориолисовых сил, нелинейного демпфирования и восстанавливающих сил существенно меньше влияния линейного демпфирования, можно использовать приближённое соотношение  $\bar{\mathbf{x}}_2 \approx -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2\bar{\mathbf{u}}(t)$ . Такое приближение соответствует случаю, когда остаточные нелинейные члены в  $\mathbf{d}_2$  малы по сравнению с линейной частью в рассматриваемом диапазоне скоростей и углов. В этом случае редуцированная модель медленной подсистемы принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_S &= \mathbf{B}_S(\mathbf{x}_S)\mathbf{u}_S(t), \quad \mathbf{x}_S(0) = \mathbf{x}_{10}, \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{x}_S(t),\end{aligned}$$

где  $\mathbf{x}_S \equiv \bar{\mathbf{x}}_1$  – состояние медленной подсистемы,  $\mathbf{u}_S(t) = \bar{\mathbf{u}}(t)$  – управление на медленной шкале времени,  $\mathbf{B}_S(\mathbf{x}_S) = -\mathbf{A}_{12}(\mathbf{x}_S)\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2$ .

Полученная модель имеет меньший порядок, чем исходная система, что упрощает синтез траекторного регулятора. При этом быстрые переменные  $\mathbf{x}_2$  могут быть восстановлены по квазистационарному соотношению (6.13) и использованы при формировании полного управления. Такой подход хорошо согласуется с классическими результатами по сингулярным возмущениям и с практикой управления подводными аппаратами [2, 251]

Решение задачи  $P(t, \mathbf{x}, t_f, \boldsymbol{\eta}_d, r)$  с критерием (6.6) для медленной подсистемы изложено в разделе 3.2, приведем здесь итоговый результат:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}_u^{-1}\mathbf{B}_S(\mathbf{x}_S)^T\mathbf{M}_S^{-1}(\mathbf{x}_S)(\mathbf{x}_S(t) - \mathbf{g}_S(t)), \quad (6.11)$$

где матрица  $\mathbf{M}_S(\mathbf{x}_S)$  является решением уравнения:

$$-\mathbf{M}_S(\mathbf{x}_S)\mathbf{B}_S(\mathbf{x}_S)\mathbf{R}_u^{-1}\mathbf{B}_S(\mathbf{x}_S)^T\mathbf{M}_S(\mathbf{x}_S) + \mathbf{Q}_{\text{pos}} = \mathbf{0},$$

а динамика вектора  $\mathbf{g}(t)$  описывается уравнением:

$$\dot{\mathbf{g}}_S = \mathbf{M}_S(\mathbf{x}_S)\mathbf{Q}_{\text{pos}}\mathbf{g}_S - \mathbf{M}_S(\mathbf{x}_S)\mathbf{Q}_{\text{pos}}\boldsymbol{\eta}_d, \quad \mathbf{g}_S(0) = \mathbf{x}_{10}.$$

Решение задачи  $P(t, \mathbf{x}, t_f, \boldsymbol{\eta}_d, r)$  задаёт опорные сигналы  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{u}(t)$  для последующих уровней управления.

### 6.2.2. Задача управления уклонениями $\mathbf{P}_\delta(\mathbf{t}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{t} + T_{MPC}, \mathbf{r})$

После вычитания номинального движения и линеаризации вдоль номинальной траектории получаем стохастическую систему уклонений:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\delta}} &= \mathbf{A}_\delta(t)\boldsymbol{\delta}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_\delta(t) + \varepsilon\mathbf{G}_\delta\dot{\mathbf{W}}(t) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\tau}_{wc}(t) - \hat{\boldsymbol{\tau}}_{wc}(t)), \\ \boldsymbol{\delta}(0) &= 0, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где  $\boldsymbol{\tau}_{wc} = \boldsymbol{\tau}_{wave} + \boldsymbol{\tau}_{current}$  – суммарные внешние силы и моменты от волнения и течения, а  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{wc}$  – их оценка (которая будет определена позже). Член  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\tau}_{wc} - \hat{\boldsymbol{\tau}}_{wc})$  описывает остаточную ошибку компенсации; при точной оценке он обращается в нуль.

Качество управления уклонениями оценивается квадратичным критерием, включающим штраф на уклонение и на корректирующее управление. В непрерывной постановке функционал (математическое ожидание по реализациям шума) записывается как:

$$J_\delta = \mathbb{E} \left\{ \int_{t_k}^{t_k + T_{MPC}} (\boldsymbol{\delta}(s)^T \mathbf{Q}_\delta \boldsymbol{\delta}(s) + \mathbf{u}_\delta(s)^T \mathbf{R}_\delta \mathbf{u}_\delta(s)) ds + \boldsymbol{\delta}(t_k + T_{MPC})^T \mathbf{F}_\delta \boldsymbol{\delta}(t_k + T_{MPC}) \right\}, \quad (6.13)$$

где  $\mathbf{Q}_\delta \geq 0$  и  $\mathbf{R}_\delta > 0$  – весовые матрицы, а  $\mathbf{F}_\delta \geq 0$  – терминальный вес.

При синтезе управления необходимо учитывать два типа ограничений: ограничения на управление (физическая реализуемость) (6.8), которые с учетом (6.9) принимает вид

$$\mathbf{u}_{min} - \mathbf{u}(t_k) - \mathbf{u}_{wc}(t_k) \leq \mathbf{u}_\delta(t_k) \leq \mathbf{u}_{max} - \mathbf{u}(t_k) - \mathbf{u}_{wc}(t_k); \quad (6.14)$$

и вероятностное ограничение (6.7), которое можно записать в терминах модели уклонений

$$P \left( \sup_{t \in [t_k, t_k + T_{MPC}]} \|\mathbf{C}_{dev} \boldsymbol{\delta}(t)\| < K_{dev} \right) \geq 1 - \beta, \quad (6.15)$$

на интервале  $[t_k, t_k + T_{MPC}]$ , где  $T_{MPC} > 0$  – горизонт прогнозирования, адаптивно настраиваемый в зависимости от текущей ситуации (в соответствии с методами главы 5).

Для численного решения задачи MPC (6.12) - (6.15) перейдем к дискретному времени с шагом  $\Delta t$ . При этом поскольку прогноз на будущее не может точно предсказать реализации случайного шума, то будем использовать его среднее значение, равное нулю.

$$\delta_{k+i+1|k} = \mathbf{A}_{d,k+i} \delta_{k+i|k} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{\delta,k+i}, i = 0, \dots, N-1, \quad (6.16)$$

где  $\delta_{k|k} = \delta(t_k)$  – текущее (измеренное или оцененное) отклонение,  $N$  – горизонт прогноза, связанный с  $T_{MPC}$  соотношением  $N = \lfloor T_{MPC}/\Delta t \rfloor$ ; Здесь  $\mathbf{A}_{d,k+i}$ ,  $\mathbf{B}_d$  – матрицы, полученные в результате дискретизации непрерывной модели (6.12) с шагом  $\Delta t$  (например, методом Эйлера или более точными схемами). Конкретный вид этих матриц определяется выбранным способом дискретизации.

Поскольку случайная составляющая из уравнения прогноза (6.16) исключена, то для гарантирования ограничения (6.15) при любых допустимых возмущениях оно преобразуется в детерминированное сужение допустимой области на основе ковариации шума. Суженный радиус равен:

$$K_{\text{mpc}}(t_k + i\Delta t) = \max\left(0, K_{\text{dev}} - \kappa \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{C}_{\text{dev}} \boldsymbol{\Sigma}(t_k + i\Delta t) \mathbf{C}_{\text{dev}}^T)}\right),$$

где  $\boldsymbol{\Sigma}(t)$  – ковариационная матрица отклонения при отсутствии управления,  $\kappa$  – квантиль нормального распределения уровня  $1 - \beta/2$ . Тогда детерминированное ограничение на прогнозируемые состояния записывается как:

$$\|\mathbf{C}_{\text{dev}} \delta_{k+i|k}\| \leq K_{\text{mpc}}(t_k + i\Delta t), i = 1, \dots, N. \quad (6.17)$$

Таким образом, задача управления отклонениями сводится к стандартной задаче квадратичного программирования с линейными ограничениями-равенствами (динамика) и линейными ограничениями-неравенствами (границы управления и суженные ограничения на состояние), которая может быть эффективно решена численными методами в реальном времени:

$$\min_{\{\mathbf{u}_{\delta,k+i}\}_{i=0}^{N-1}} \sum_{i=0}^{N-1} (\boldsymbol{\delta}_{k+i|k}^T \mathbf{Q}_{\delta} \boldsymbol{\delta}_{k+i|k} + \mathbf{u}_{\delta,k+i}^T \mathbf{R}_{\delta} \mathbf{u}_{\delta,k+i}) + \boldsymbol{\delta}_{k+N|k}^T \mathbf{F}_{\delta} \boldsymbol{\delta}_{k+N|k} \quad (6.18)$$

$$\boldsymbol{\delta}_{k+i+1|k} = \mathbf{A}_{d,k+i} \boldsymbol{\delta}_{k+i|k} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{\delta,k+i}, i = 0, \dots, N-1,$$

$$\mathbf{u}_{\min} - \mathbf{u}(t_k) - \mathbf{u}_{\text{wc}}(t_k) \leq \mathbf{u}_{\delta,k+i} \leq \mathbf{u}_{\max} - \mathbf{u}(t_k) - \mathbf{u}_{\text{wc}}(t_k), i = 0, \dots, N-1,$$

$$\|\mathbf{C}_{\text{dev}} \boldsymbol{\delta}_{k+i|k}\| \leq K_{\text{mpc}}(t_k + i\Delta t), i = 1, \dots, N.$$

После нахождения оптимальной последовательности управлений  $\{\mathbf{u}_{\delta,k+i}^*\}_{i=0}^{N-1}$  на объект подаётся первое значение  $\mathbf{u}_{\delta}(t_k) = \mathbf{u}_{\delta,k}^*$ . Затем процедура повторяется в следующий момент времени  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ .

Выбор горизонта  $T_{\text{MPC}}$  (а следовательно, и  $N$ ) в главе 5 предложено выполнить на основе теории больших уклонений через оценку времени первого выхода траектории уклонения на границу  $K_{\text{dev}}$ :

$$T_{\text{MPC}} = \alpha \cdot \tau^*, \alpha \in (0,1),$$

$$\tau^* \approx \arg \max_{\tau} \lambda_{\max}(\mathbf{C}_{\text{dev}}(e^{\mathbf{A}_{\delta}(\tau-t)} \mathbf{L} e^{\mathbf{A}_{\delta}^T(\tau-t)} - \mathbf{L}) \mathbf{C}_{\text{dev}}^T),$$

$$\mathbf{A}_{\delta} \mathbf{L} + \mathbf{L} \mathbf{A}_{\delta}^T - \mathbf{G}_{\delta} \mathbf{G}_{\delta}^T = 0.$$

Далее в зависимости от ситуации эта величина горизонта может адаптироваться, в т.ч. путем варьирования  $\alpha$ .

### 6.2.3. Активная компенсация внешних возмущений

Для повышения робастности и снижения нагрузки на регулятор уклонений используется контур активной компенсации внешних возмущений. Оценка суммарного вектора сил и моментов  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{wc}}(t)$ , создаваемых течением и волнением, формируется с помощью наблюдателей. На основе этой оценки задаётся компенсирующее управление:

$$\mathbf{u}_{\text{wc}}(t) = -\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{wc}}(t), \quad (6.19)$$

так что полное управление, подаваемое на движители аппарата, имеет вид (6.14). При точной оценке  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{wc}} = \boldsymbol{\tau}_{\text{wc}}$  влияние возмущений в уравнении для уклонений (6.12) полностью компенсируется, однако на практике остаётся

ошибка  $\tau_{wc} - \hat{\tau}_{wc}$ , которая учитывается в уклонениях. Тем не менее, даже неполная компенсация позволяет существенно уменьшить уровень остаточных возмущений, что даёт возможность использовать менее консервативные настройки МРС регулятора уклонений. Для оценки  $\hat{\tau}_{wc}$  требуется построить соответствующие наблюдатели, синтез которых приведён далее.

#### 6.2.4. Наблюдатель состояния

Для реализации управления в реальных условиях необходима оценка полного вектора состояния по зашумленным измерениям. Вектор измерений формируется на основе данных от бортовых датчиков, типичных для АНПА класса ММТ-300 [116, 121]. В таблице 6.2 приведён состав измерительной системы, измеряемые величины и среднеквадратичные отклонения (СКО) шумов, характерные для соответствующих датчиков.

Таблица 6.2. Состав измерительной системы и характеристики шумов датчиков

Измеряемая величина	Тип датчика	Обозначение	СКО шума
Линейные скорости $u, v, w$	Доплеровский лаг (ДЛ)	$\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w$	$3.4 \times 10^{-3}$ м/с
Угловые скорости $p, q, r$	МЭМС-гироскоп	$\sigma_p, \sigma_q, \sigma_r$	$6.2 \times 10^{-4}$ рад/с
Глубина $z$	Датчик давления	$\sigma_z$	$1.0 \times 10^{-2}$ м
Углы крена $\phi$ , дифферента $\theta$	МЭМС-акселерометры	$\sigma_\phi, \sigma_\theta$	$2.9 \times 10^{-3}$ рад
Угол рыскания $\psi$	Магнитометр	$\sigma_\psi$	$1.16 \times 10^{-2}$ рад
Координаты $x, y$ (для дистанции ~200 м; зависит от дальности)	Гидроакустическая система УКБ (ультракороткая база)	$\sigma_x, \sigma_y$	0,35 м

Линейные скорости  $(u, v, w)$  измеряются доплеровским лагом (ДЛ), который определяет скорость движения аппарата относительно дна или слоя воды [223]. Шум измерений ДЛ обычно имеет уровень порядка нескольких миллиметров в секунду и обусловлен акустическими помехами и флуктуациями отражённого сигнала.

Угловые скорости  $(p, q, r)$  получаются от МЭМС-гироскопов. Современные микромеханические гироскопы имеют невысокий уровень шума, но подвержены температурным дрейфам, которые в данной работе не моделируются; учитывается только высокочастотная составляющая шума.

Глубина  $(z)$  измеряется датчиком давления. Точность таких датчиков достаточно высока, однако шум может быть вызван гидродинамическими флуктуациями и пульсациями давления.

Углы крена  $\phi$  и дифферента  $\theta$  определяются путём обработки сигналов акселерометров и магнитометра (в статике или медленном движении). В реальных условиях эти оценки также зашумлены; в таблице приведены типичные значения СКО для МЭМС-датчиков после фильтрации.

Угол рыскания  $\psi$  измеряется магнитометром (электронным компасом) или может быть получен интегрированием угловой скорости с коррекцией по магнитометру. Шум магнитометра выше, чем у гироскопа, и может содержать низкочастотные составляющие; здесь учитывается только высокочастотная часть.

Координаты  $x, y$  определяются гидроакустической навигационной системой с ультракороткой базой (УКБ) – ГАНС УКБ S2C-18/34, которая входит в состав ММТ-300. Точность УКБ системы определяется погрешностью измерения пеленга ( $0.1^\circ$ ) и наклонной дальности (0.01 м). Результирующая ошибка плановых координат зависит от дистанции до судна: при удалении 200 м СКО составляет около 0.35 м, при 500 м – около 0.87 м. В представленном моделировании используется упрощённая модель белого некоррелированного шума с СКО 0.35 м, соответствующая работе на типовом удалении. [217].

Таким образом, полный вектор измерений имеет размерность  $m = 12$  и может быть записан как:

$$\mathbf{y}_\xi = \mathbf{C}\mathbf{x}_\xi + \mathbf{v}, \quad (6.20)$$

где  $\mathbf{C}$  – матрица измерений ( $12 \times 12$ ), соответствующая указанному составу датчиков (единицы на соответствующих позициях), а  $\mathbf{v}$  – вектор шумов измерений, который предполагается белым гауссовским с нулевым средним и диагональной ковариационной матрицей

$$\mathbf{R}_{\text{meas}} = \text{diag}(\sigma_u^2, \sigma_v^2, \sigma_w^2, \sigma_p^2, \sigma_q^2, \sigma_r^2, \sigma_z^2, \sigma_\phi^2, \sigma_\theta^2, \sigma_\psi^2, \sigma_x^2, \sigma_y^2).$$

Значения  $\sigma_x, \sigma_y$  приняты равными 0,35 м, что соответствует типичной точности позиционирования УКБ на дистанции 200 м (пеленг  $0.1^\circ$ ). Для учёта реальной зависимости точности от дальности может быть использована адаптивная настройка матрицы  $\mathbf{R}_{\text{meas}}$ .

Для оценки состояния используется диффузный ФК, адаптированный для нелинейных систем в SDC-представлении. Уравнения фильтра имеют вид (см. раздел 4.3):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_\xi = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}_\xi)\hat{\mathbf{x}}_\xi + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{d}(\hat{\mathbf{x}}_\xi) + \mathbf{\Gamma}_e(\hat{\mathbf{x}}_\xi)(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_\xi), \quad (6.21)$$

где

$$\mathbf{\Gamma}_e(\hat{\mathbf{x}}_\xi) = \mathbf{P}_e \mathbf{C}^T (\mathbf{R}_{\text{meas}})^{-1}, \mathbf{P}_e = \mathbf{K}_e(\hat{\mathbf{x}}_\xi) + \mathbf{W}_e(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{M}_e^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_\xi)\mathbf{W}_e^T(\hat{\mathbf{x}}_\xi),$$

$$\frac{d\mathbf{K}_e}{dt} = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}_\xi)\mathbf{K}_e(\hat{\mathbf{x}}_\xi) + \mathbf{K}_e(\hat{\mathbf{x}}_\xi)\mathbf{A}^T(\hat{\mathbf{x}}_\xi) + \mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}}_\xi)\mathbf{Q}_w\mathbf{G}^T(\hat{\mathbf{x}}_\xi) -$$

$$\mathbf{K}_e(\hat{\mathbf{x}}_\xi)\mathbf{C}^T(\mathbf{R}_{\text{meas}})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{K}_e(\hat{\mathbf{x}}_\xi),$$

$$\frac{d\mathbf{W}_e}{dt} = (\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}_\xi) - \mathbf{K}_e(\hat{\mathbf{x}}_\xi)\mathbf{C}^T(\mathbf{R}_{\text{meas}})^{-1}\mathbf{C})\mathbf{W}_e(\hat{\mathbf{x}}_\xi),$$

$$\frac{d\mathbf{M}_e}{dt} = -\mathbf{W}_e^T(\hat{\mathbf{x}}_\xi)\mathbf{C}^T(\mathbf{R}_{\text{meas}})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{W}_e(\hat{\mathbf{x}}_\xi),$$

$$\mathbf{K}_e(\hat{\mathbf{x}}_\xi, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \mathbf{W}_e(\hat{\mathbf{x}}_\xi, \mathbf{0}) = \mathbf{I}, \mathbf{M}_e(\hat{\mathbf{x}}_\xi, \mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{P}_e$  – ковариационная матрица ошибки оценки,  $\mathbf{Q}_{\text{dyn}}$  – ковариация шума процесса. Такой подход позволяет получать текущую оценку  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  для вычисления уклонения  $\hat{\boldsymbol{\delta}}(t) = \hat{\mathbf{x}}_\xi(t) - \mathbf{x}(t)$ .

### 6.2.5. Наблюдатель внешних возмущений

Используемые для получения оценки  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{wc}$  наблюдатели строятся на основе метода редукции (см. раздел 2.3), позволяющего выделить составляющую динамики, непосредственно связанную с возмущениями, и оценивать её без явного знания модели самих возмущений.

Рассмотрим подробнее постановку задачи оценивания возмущений. Уравнение динамики для части модели АНПА, описывающей динамику скоростей, может быть выделено из полной системы (6.5):

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \mathbf{A}_{22}(\mathbf{x})\boldsymbol{v} + \mathbf{B}_v\mathbf{u} + \mathbf{d}_v(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_v\boldsymbol{\tau}_{wc}, \quad (6.22)$$

где  $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^6$  – вектор скоростей в связанной системе;  $\mathbf{A}_{22}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  – соответствующий блок матрицы  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ;  $\mathbf{B}_v = \mathbf{G}_v = \mathbf{M}^{-1} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  – матрица входа для управления и возмущений (полный ранг);  $\mathbf{d}_v(\mathbf{x})$  – нелинейные члены, не зависящие от управления и возмущений.

Измерениями служат компоненты вектора состояния  $\mathbf{x}_\xi$ , доступные через бортовые датчики АНПА (см. таблицу 6.2).

Матрица  $\mathbf{B}_v$  имеет полный ранг, поэтому прямое оценивание  $\boldsymbol{\tau}_{wc}$  по всем шести каналам одновременно затруднено из-за взаимного влияния управлений. Для решения этой задачи используется декомпозиция и приведение к редуцированным моделям, что позволяет свести исходную многомерную задачу к шести условно независимым одномерным подзадачам.

Для каждого  $i$ -го канала ( $i = 1, \dots, 6$ ) формируется матрица ортогонального дополнения  $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^{5 \times 6}$ , которая выбирается как базис нуль-пространства матрицы  $\mathbf{B}_{v,-i}$  (матрицы  $\mathbf{B}_v$  без  $i$ -го столбца). Формально  $\mathbf{Q}_i$  удовлетворяет условию

$$\mathbf{Q}_i^T \mathbf{B}_{v,-i} = \mathbf{0}_{5 \times 5}. \quad (6.23)$$

Физический смысл такого выбора в том, что проекция  $\mathbf{Q}_i^T \dot{\boldsymbol{v}}$  не зависит от управлений по всем каналам, кроме  $i$ -го. Оставшаяся зависимость от управления  $u_i$  характеризуется скалярной величиной

$$b_i = \mathbf{Q}_i^T \mathbf{B}_{v,i} \in \mathbb{R}, \quad (6.24)$$

где  $\mathbf{B}_{v,i}$  –  $i$ -й столбец матрицы  $\mathbf{B}_v$ .

Применяя  $\mathbf{Q}_i^T$  к обеим частям (6.22) и учитывая условие (6.23), получаем:

$$\mathbf{Q}_i^T \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_i^T \mathbf{A}_{22} \mathbf{v} + \mathbf{Q}_i^T \mathbf{B}_v \mathbf{u} + \mathbf{Q}_i^T \mathbf{d}_v + b_i \tau_i. \quad (6.25)$$

Вводится известный член  $f_i$ , объединяющий все детерминированные составляющие, не зависящие от  $\tau_i$ :  $f_i = \mathbf{Q}_i^T (\mathbf{A}_{22} \mathbf{v} + \mathbf{B}_v \mathbf{u} + \mathbf{d}_v)$ .

Тогда (6.23) переписывается в виде  $\mathbf{Q}_i^T \dot{\mathbf{v}} = f_i + b_i \tau_i$ . Из последнего выражения получаем редуцированную модель для оценки воздействия  $\tau_i$ :

$$\dot{z}_i = f_i + b_i \tau_i, \quad z_i = \mathbf{Q}_i^T \mathbf{v}. \quad (6.26)$$

Для оценки  $\tau_i$  по редуцированной модели (6.26) строится астатический наблюдатель второго порядка (см. разделы 4.1, 4.2):

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_i = \begin{bmatrix} 0 & b_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_i + \begin{bmatrix} f_i \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_{zi}, \quad (6.27)$$

где  $\hat{\mathbf{z}}_i = [z_i, \tau_i]^T$  – вектор состояния наблюдателя для  $i$ -го канала;  $w_{zi}$  – псевдоуправление.

В соответствии с методами главы 4 для синтеза наблюдателя (6.27) формулируется вспомогательная задача оптимального слежения, в результате решения которой получаем итоговые соотношения для наблюдателя:

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}_i = \mathbf{A}_{r,i} \hat{\mathbf{z}}_i + \begin{bmatrix} f_i \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{B}_r \mathbf{B}_r^T \mathbf{M}_i^T (\hat{\mathbf{z}}_i - \mathbf{g}_{z,i}),$$

$$\mathbf{g}_{z,i} = (\mathbf{A}_{r,i} + \mathbf{M}_i \mathbf{C}_r^T Q_r \mathbf{C}_r) \mathbf{g}_{z,i} - \mathbf{M}_i \mathbf{C}_r^T Q_r \mathbf{Q}_i^T \mathbf{v} + \begin{bmatrix} f_i \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{A}_{r,i} = \begin{bmatrix} 0 & b_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  – матрица динамики редуцированной системы;  $\mathbf{B}_r = [0 \ 1]^T$  – матрица при управлении;  $\mathbf{C}_r = [1 \ 0]$  – матрица выхода, выбираемая так, чтобы первая компонента  $\hat{\mathbf{z}}_i$  соответствовала измеряемой комбинации;  $Q_r > 0$  – скалярный весовой коэффициент;  $\mathbf{M}_i$  – решение уравнения Риккати:

$$\mathbf{M}_i \mathbf{A}_{r,i}^T + \mathbf{A}_{r,i} \mathbf{M}_i - \mathbf{M}_i \mathbf{C}_r^T Q_r \mathbf{C}_r \mathbf{M}_i + \mathbf{B}_r \mathbf{B}_r^T = \mathbf{0}.$$

Результирующая оценка возмущения задаётся как  $\hat{t}_i = \hat{z}_{i,2}$  (второй элемент  $\hat{z}_i$ ). Собранный вектор оценок внешних воздействий, используемый далее для компенсации в управлении (6.14), имеет вид

$$\hat{t}_{wc}(t) = [\hat{t}_1(t), \hat{t}_2(t), \dots, \hat{t}_6(t)]^T. \quad (6.28)$$

Преимущество описанного подхода заключается в том, что наблюдатели не требуют явной модели возмущений, работают в реальном времени (параметры регуляторов) и позволяют по каждому каналу восстанавливать суммарное внешнее воздействие, что существенно упрощает последующую компенсацию в рамках МРС и повышает робастность системы.

### 6.3. Моделирование системы

#### 6.3.1. Описание модельного эксперимента

Для верификации предложенных алгоритмов управления было проведено компьютерное моделирование в среде MATLAB, описание комплекса программ моделирования функционально устойчивой системы управления АНПА приведено в Приложении А. В качестве объекта управления использовалась модель АНПА ММТ-300.

В качестве желаемой траектории выбрана траектория типа «галс» («tack»), имитирующая типовой режим работы АНПА при обследовании акватории. Параметры траектории заданы следующим образом:

- длина прямого участка  $L = 50$  м;
- скорость на прямых участках  $v = 0.8$  м/с;
- радиус поворота  $R_{\text{turn}} = 12$  м;
- время прохождения прямого участка  $t_{\text{straight}} = L/v \approx 62.5$  с;
- время поворота на  $180^\circ$   $t_{\text{turn}} = \pi R_{\text{turn}}/v \approx 47.12$  с;
- время полного цикла  $T_{\text{period}} = 2(t_{\text{straight}} + t_{\text{turn}}) \approx 219.24$  с.

Общее время моделирования  $T_f = 220$  с, что соответствует примерно двум полным циклам. Начальное положение аппарата совпадает с началом траектории:  $\mathbf{x}_0 = [0, 0, -5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ .

В качестве допустимого радиуса трубки безопасности  $K_{\text{dev}}$  предлагается значение в диапазоне 0.2–0.5 м. Данный выбор обусловлен, с одной стороны, характеристиками гидроакустической системы навигации с ультракороткой базой, входящей в состав ММТ-300. На малых удалениях от УКБ антенны (до 100 м) это обеспечивает точность плановых координат около 0.2 м; с увеличением дистанции до типовых рабочих значений (200–500 м) поперечная ошибка возрастает до 0.35–0.9 м. С другой стороны, необходимо обеспечить запас на неопределённость модели и внешние возмущения. Нижняя граница диапазона (0.2 м) соответствует жёстким требованиям к точности, предъявляемым при высокоточных подводных работах вблизи судна (например, детальное картографирование или позиционирование у подводных сооружений). Верхняя граница (0.5 м) выбрана из условия обеспечения робастности управления в типовых обзорных миссиях на рабочих дистанциях, где допустимы несколько бóльшие отклонения от номинальной траектории. При этом выбранные значения превышают радиус корпуса аппарата (0.15 м), что гарантирует отсутствие физических столкновений с препятствиями при движении в пределах трубки и оставляет конструктивный запас на возможные ошибки навигации. При моделировании выберем радиус трубки  $K_{\text{dev}} = 0.5$  м.

Параметры номинального регулятора:

- $\mathbf{Q}_{\text{pos}} = 10^3 \cdot \text{diag}(20, 20, 20, 5, 5, 5)$  – штраф по положению и углам;
- $\mathbf{R}_{\text{in}} = \text{diag}(0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$  – штраф за управление.

Возмущения генерировались в соответствии с моделями, описанными в 6.1.2. Числовые значения параметров были выбраны следующими:

- течение: процесс Орнштейна-Уленбека с коэффициентом возврата  $\alpha_c = 0.01$  и интенсивностью шума  $\sigma_c = 0.05$ . Реализации течения получались численным интегрированием с шагом  $\Delta t = 0.1$  с;

– волнение: формирующий фильтр второго порядка с доминирующей частотой  $\omega_0 = 0.5$  рад/с, коэффициентом затухания  $\xi = 0.1$  и масштабным коэффициентом  $K_w = 1.0$  (после масштабирования). Фильтр возбуждался белым шумом единичной интенсивности.

– аддитивный шум в динамике имел интенсивности  $\sigma_u = \sigma_v = \sigma_w = 0.01$ ,  $\sigma_p = \sigma_q = \sigma_r = 0.001$ , что соответствует СКО ускорений порядка  $0.01$  м/с<sup>2</sup> и  $0.001$  рад/с<sup>2</sup>.

– шумы измерений задавались в соответствии с таблицей 6.2 и реализовывались как белые шумы с соответствующими интенсивностями. Все случайные процессы генерировались с фиксированными начальными значениями генератора для обеспечения воспроизводимости результатов.

### 6.3.2. Результаты моделирования

На первом этапе моделировалось движение АНПА при отсутствии внешних возмущений и шумов. Номинальная система (6.10) с регулятором (6.11) обрабатывала заданную траекторию типа «галс». Результаты представлены на рис. 6.3, 6.4. Моделирование показало, что номинальное управление обеспечивает точное слежение с ошибкой по положению менее  $0.05$  м и по углам менее  $0.01$  рад. Номинальное управление лежит в допустимых пределах ( $|u_i| \leq 50$  Н для сил,  $|u_i| \leq 10$  Н·м для моментов).

На втором этапе в систему вводились возмущения (течение, волнение и аддитивный шум) и шумы измерений. Для оценки внешних воздействий использовались редуцированные наблюдатели, описанные в разделе 6.2.4. Каждый из шести наблюдателей строился для соответствующего канала и имел следующие параметры:

- вес в уравнении Риккати  $Q_r = 10^3$ ;
- интенсивность шума  $R_\tau = 10^{-3}$ .

Наблюдатели использовали измерения скоростей (первые шесть компонент вектора  $\mathbf{y}$ ) и известное управление  $\mathbf{u}_\xi = \mathbf{u}_{\text{nom}} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{t}}_{\text{wc}}$ .

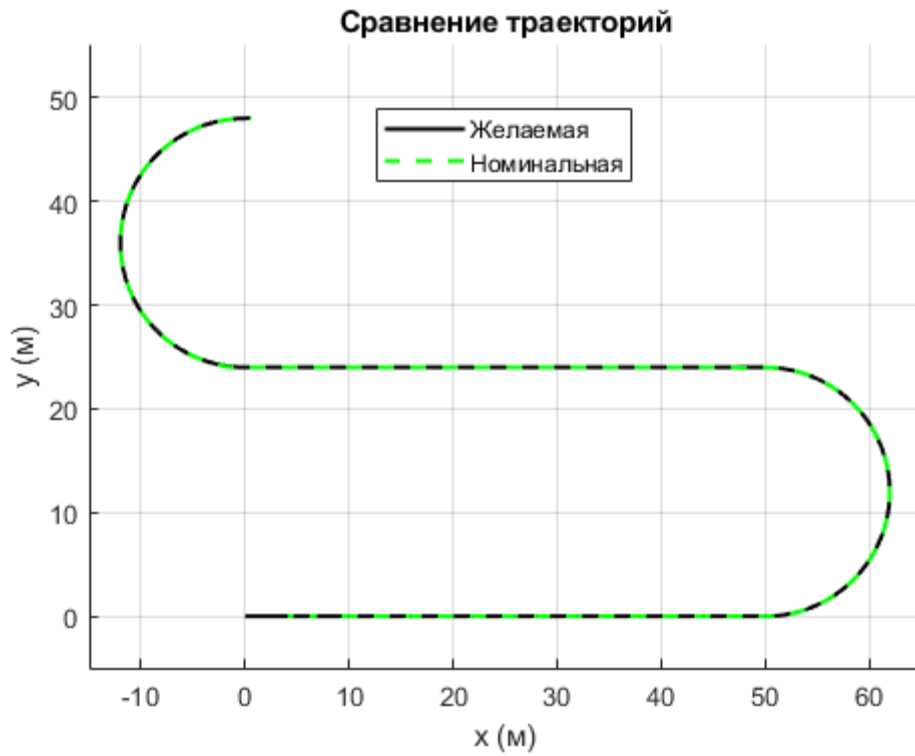


Рисунок 6.3. Графики траектории при номинальном управлении (без влияния возмущений)

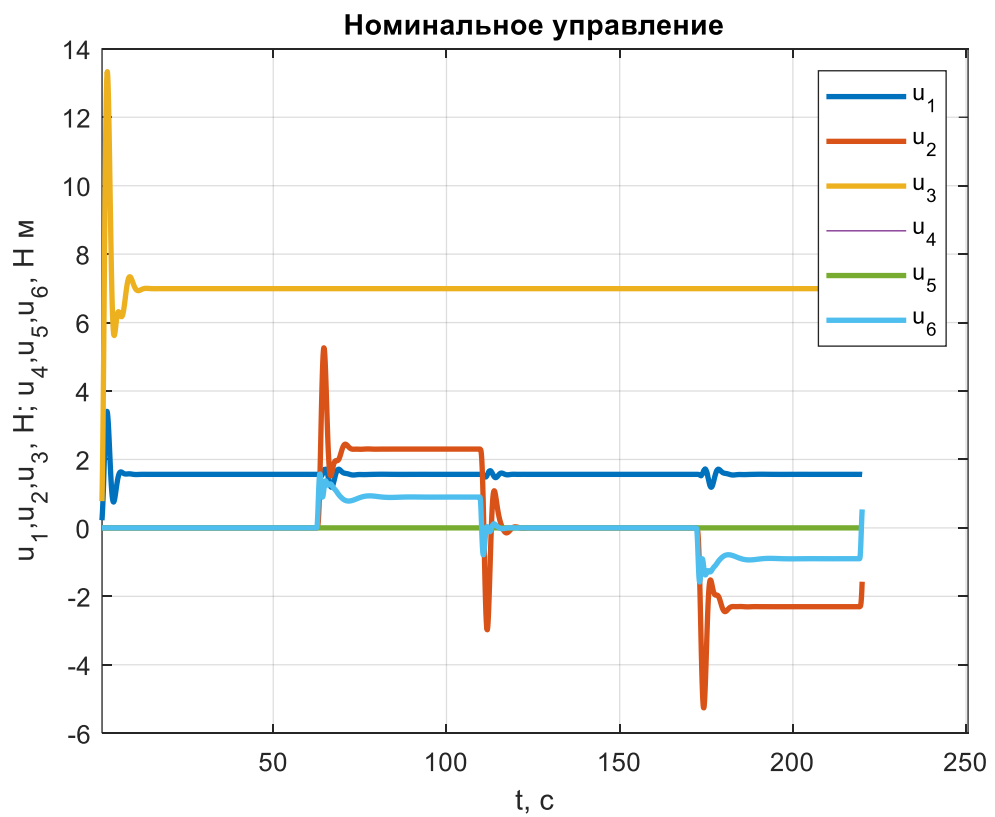


Рисунок 6.4. Графики сигналов номинального управления (без влияния возмущений)

На рис. 6.5 показаны графики истинных и оцененных возмущений; видно, что наблюдатели обеспечивают приемлемое качество оценивания. Эти оценки затем используются для активной компенсации возмущений. А для компенсации остаточной ошибки оценивания и некомпенсированных высокочастотных составляющих возмущений далее использовался регулятор уклонений на основе MPC.

### Оценка внешних возмущений

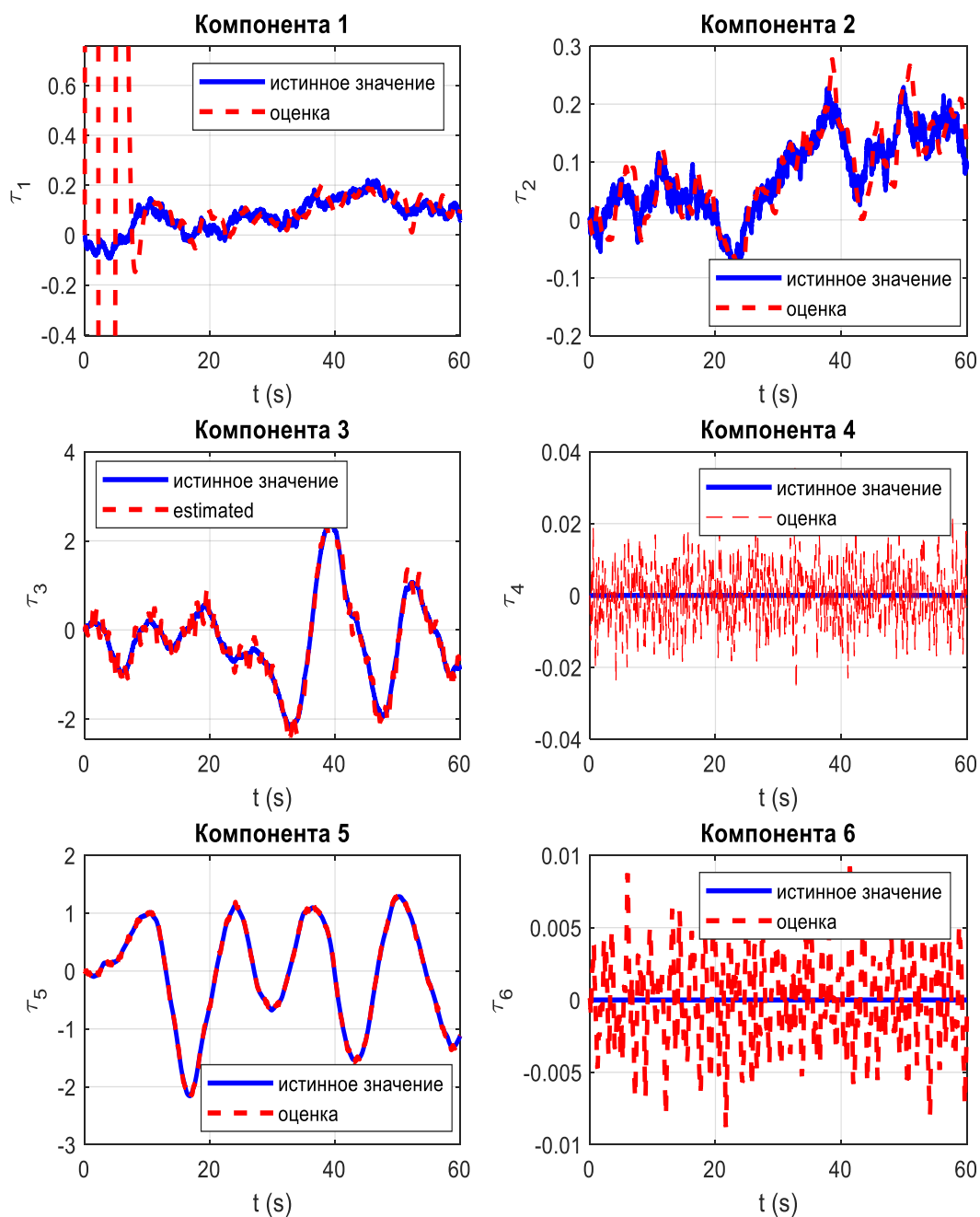


Рисунок 6.5. Графики истинных и оцененных возмущений

Модель уклонений (6.16) дискретизировалась с шагом  $\Delta t = 0.1$  с. Параметры MPC выбирались следующим образом:

- весовые матрицы:  $\mathbf{Q}_\delta = \text{diag}(10,10,10,10,10,10,0,0,0,0,0,0)$ ,  $\mathbf{R}_\delta = \mathbf{I}_6$ ;
- терминальный вес  $\mathbf{P}_\delta = 10\mathbf{Q}_\delta$ ;
- сужение трубки вычислялось с уровнем риска  $\beta = 0.05$  ( $\kappa \approx 1.96$ ).
- горизонт прогнозирования  $T_{MPC}$  определялся с коэффициентом безопасности  $\alpha = 0.8$ . Вычисление критического времени  $\tau^*$  на каждом шаге осуществлялось путём сканирования по  $\tau$  с шагом 0.1 с и поиска максимума собственного числа матрицы  $\mathbf{C}_{\text{dev}}(e^{\mathbf{A}_\delta \tau} \mathbf{L} e^{\mathbf{A}_\delta^\top \tau} - \mathbf{L}) \mathbf{C}_{\text{dev}}^\top$ . В среднем полученное значение характеристического времени выхода  $\tau^* = 12$  с.

Стратегический уровень функционирует параллельно с исполнительным и информационным, и включает в себя следующие компоненты: база эталонных сценариев (критических А-профилей), блок онлайн-сопоставления текущего процесса с базой, блок оценки риска и блок адаптации параметров с логикой переключения режимов.

Критические сценарии строятся на базе теории больших уклонений (см. главу 5) и позволяют найти наиболее вероятную траекторию уклонения, которая за конечное время  $\tau^*$  достигает границы допустимой трубки  $\|\mathbf{C}_{\text{dev}} \boldsymbol{\delta}\| = K_{\text{dev}}$ . Эта траектория, называемая А-профилем, обладает минимальным функционалом действия, т.е. требует наименьшей «энергии» возмущений для реализации. Время  $\tau^*$  интерпретируется как критическое – момент, когда система наиболее уязвима.

Для построения базы сценариев выполняется следующая offline-процедура. Вдоль номинальной траектории выбирается множество опорных моментов времени  $t_k$ . Для каждого такого момента вычисляется «замороженная» матрица  $\mathbf{A}_\delta(t_k)$  и решается задача поиска А-профилей для различных возможных направлений выхода в пространстве позиций (см. рис.6.6).

## Иллюстрация трубки и путей отклонения

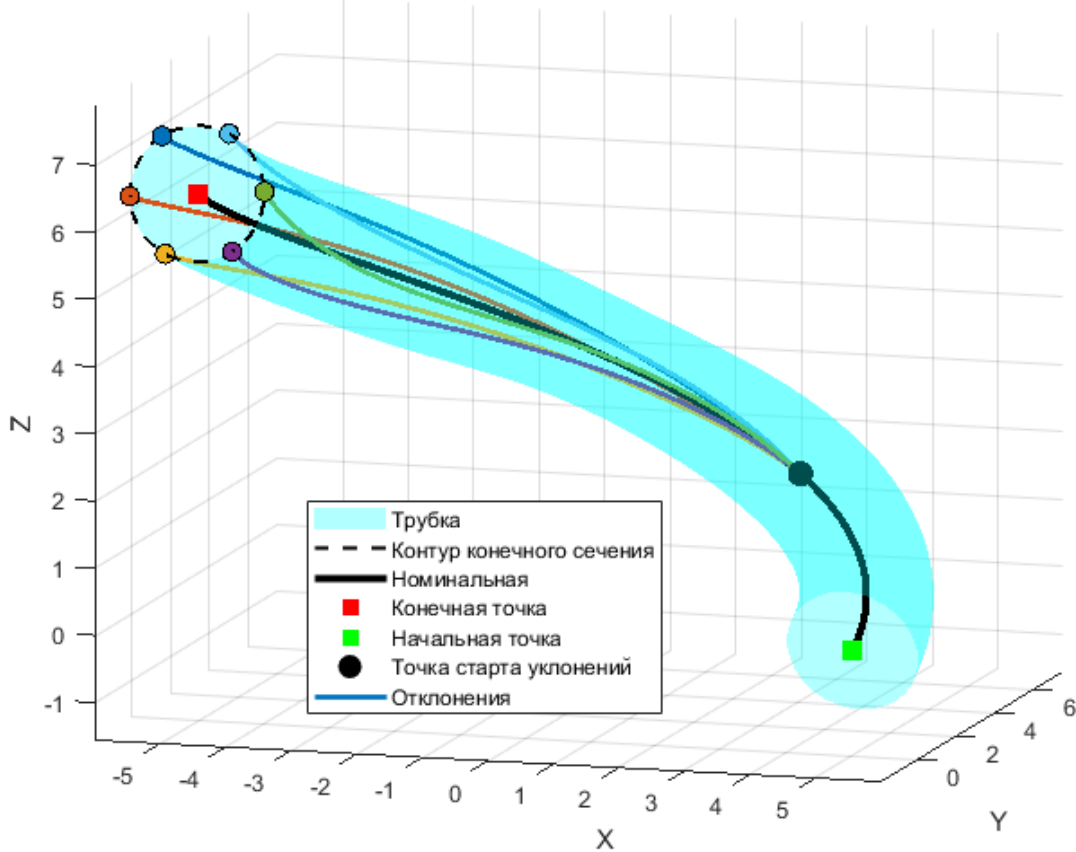


Рисунок 6.6. Иллюстрация вариантов А-профилей отклонений для различных возможных направлений выхода в пространстве позиций

Заметим, что поскольку А-профили  $\delta$  являются оптимальными, то в независимости от направления выхода для одного и того же значения  $K_{dev}$  нормы отклонения профиля  $\|C_{dev}\delta\|$  с точностью до погрешности вычисления не будут зависеть от направления выхода, т.е. будут одинаковыми (см. рис.6.7). Это позволяет для одного значения  $K_{dev}$  использовать только один профиль и выполнять сравнение не по траектории самого отклонения  $\delta_{pos} = C_{dev}\delta$  в пространстве, а именно по норме  $\|C_{dev}\delta\|$  его отклонения от номинальной траектории. Этот факт позволяет сократить размер базы сценариев и уменьшить вычислительные затраты блока онлайн-сопоставления и классификации сценариев.

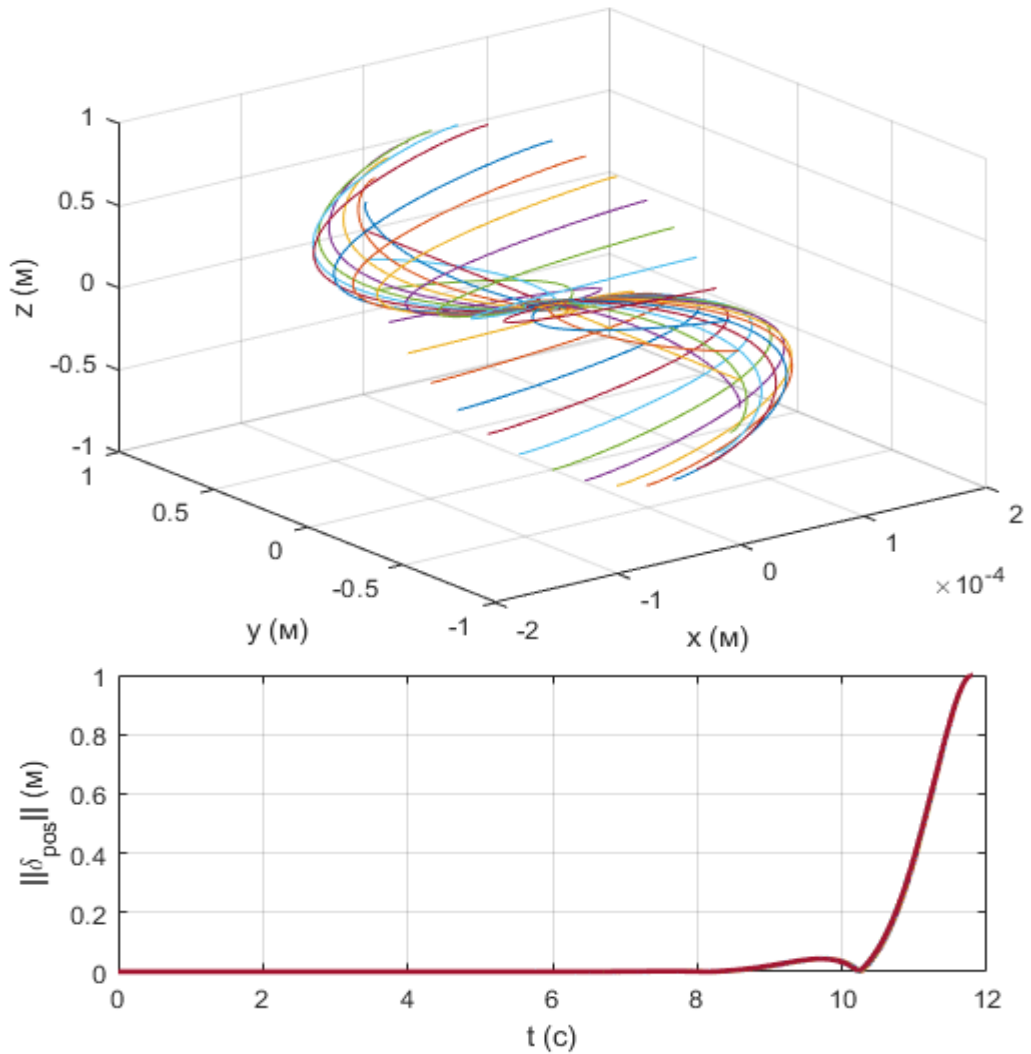


Рисунок 6.7. А-профили 36 траектории уклонений  $\delta_{pos} = \mathbf{C}_{dev}\delta$  с точками выхода на границу трубки радиусом  $K_{dev} = 1$  на плоском сечении трубки с шагом 10 градусов

В результате получается набор сценариев  $S_{j,k}$ , каждый из которых включает:

- временной профиль уклонения  $\delta_{j,k}(t)$  (обычно нормированный так, чтобы на конце он достигал  $K_{dev}$ );
- критическое время  $\tau_{j,k}^*$ ;
- направление выхода  $\mathbf{e}_j$ ;
- индикатор опасности  $V(S_{j,k}) = 1$  (для критических сценариев, таких как А-профили).

На рис. 6.8 показана совокупность профилей нормы отклонения для сценариев с различными значениями  $K_{\text{dev}}$  в диапазоне от 0.1 до 1. Важно, что критическое время выхода для всех этих сценариев одинаково и, согласно (5.23), определяется значением максимального собственного числа матрицы  $\mathbf{C}_{\text{dev}}(e^{\mathbf{A}_\delta(\tau-t)}\mathbf{L}e^{\mathbf{A}_\delta^T(\tau-t)} - \mathbf{L})\mathbf{C}_{\text{dev}}^T$ . Это время равно  $\tau^*$ , причем видно, что первые 8 секунд система накапливает возмущения, а затем в оставшиеся 3-4 секунды накопленные возмущения приводят к выходу нормы отклонения на границу  $K_{\text{dev}}$ . Идентичность в динамике различных А-профилей уклонений приводит к их параметризации только по величине  $K_{\text{dev}}$ . А поскольку блок онлайн-сопоставления и классификации предусматривает коэффициент масштабирования амплитуды, компенсирующий различие в интенсивности наблюдаемого и эталонного сценария, то получается, что для наполнения базы сценариев А-профилями уклонений достаточно взять один эталонный профиль единичной амплитуды (график А-профиля показан на рис.6.9).

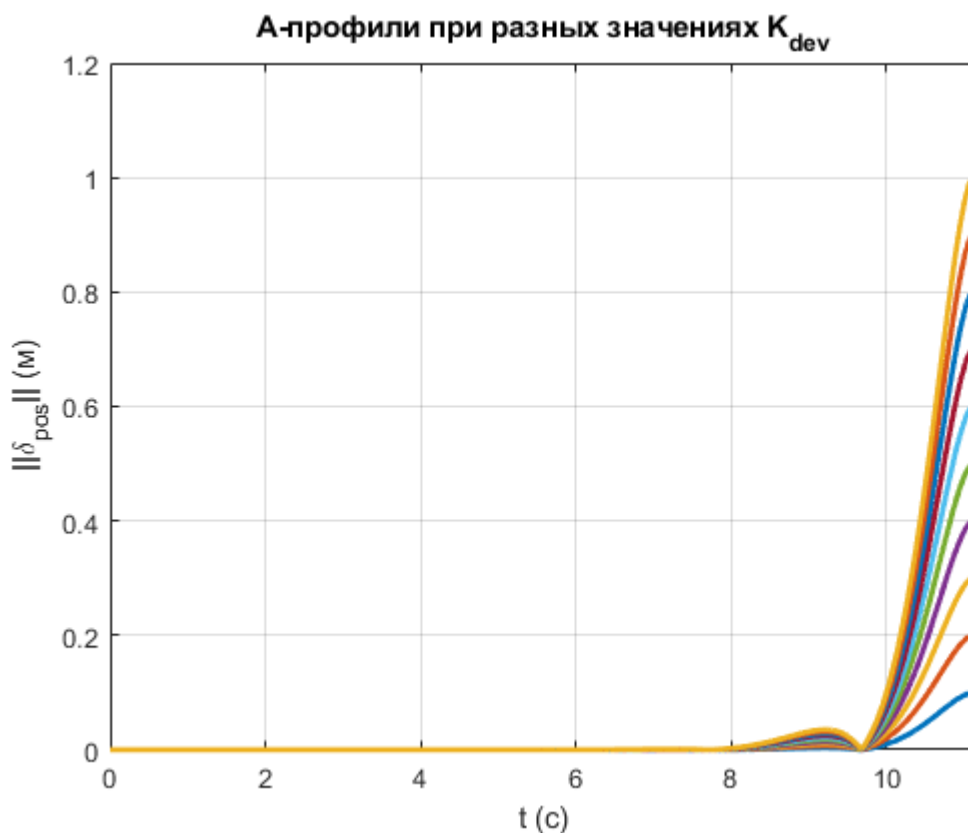


Рисунок 6.8. А-профили нормы отклонения для сценариев с различными значениями  $K_{\text{dev}}$  в диапазоне от 0.1 до 1

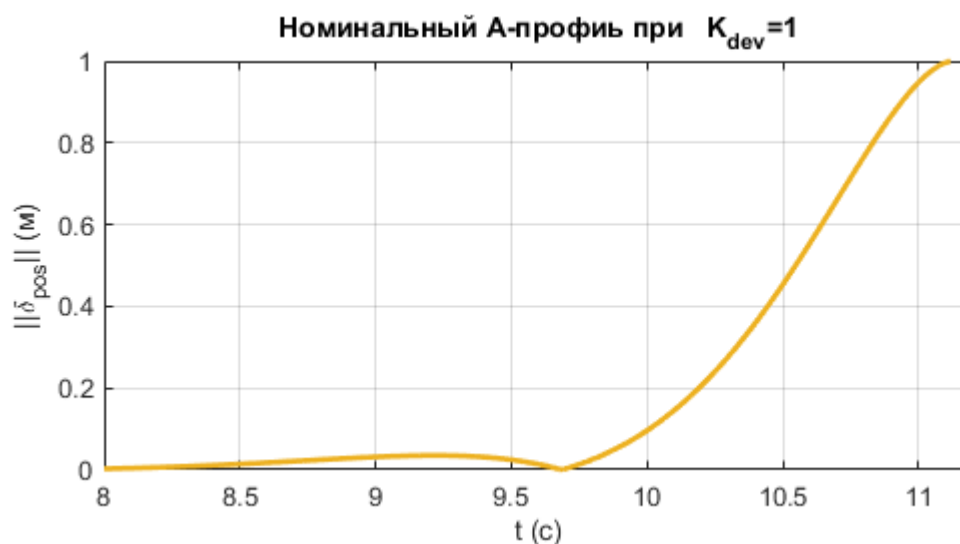


Рисунок 6.9. А-профиль нормы отклонения для критического сценария с  $K_{dev} = 1$ .

Дополнительно кроме критического сценария в базу добавляется номинальный сценарий с нулевыми отклонениями, т.е. номинальное движение системы. Также могут быть добавлены А-профили, не связанные с выходом с пределы трубки, а ориентированные на другие критические ситуации. Для АНПА это могут быть сценарии, связанные с отказом одного из движителей, когда критическое состояние определяется как момент, при котором норма отклонения от номинальной траектории впервые достигает  $K_{dev}$  или угол дифферента превышает 20 (при потере управляемости); потеря гидроакустической коррекции, моделируемая как накопление навигационной ошибки и выход за пределы трубки; а также исчерпание энергоресурса, выражаемое в невозможности удержаться в заданной трубке на оставшемся участке маршрута. В такого рода случаях целевое событие может формулироваться как достижение критического порога одной из переменных состояния (или их комбинации), что позволяет строить А-профили единообразно с помощью теории больших отклонений.

На каждом шаге управления  $t_k$  блок онлайн-сопоставления формирует скользящее окно истории наблюдений  $\mathbf{H}(t_k)$ , содержащее последние  $L$  отсчётов вектора позиционного отклонения  $\delta_{pos} = \mathbf{C}_{dev} \delta$ . Это окно сравнивается с каждым сценарием из базы.

Поскольку реальный процесс может начинаться с произвольной фазы внутри сценария, для каждого сценария  $S_i$  ищется оптимальный временной сдвиг  $\theta_i^*$  и масштабный коэффициент  $\gamma_i^*$ , минимизирующие СКО между окном и фрагментом сценария. Масштабирование необходимо для учёта возможной разницы в амплитуде уклонений (сценарий нормирован, а реальное отклонение может быть слабее или сильнее). В результате для каждого сценария получается минимальная ошибка  $E_i^{\min}$ . Затем ошибки преобразуются в веса сценариев, которые интерпретируются как апостериорные вероятности того, что текущий процесс развивается по данному сценарию. Чем меньше ошибка, тем больший вес получает сценарий. Интегральный показатель риска вычисляется как взвешенная сумма индикаторов опасности:  $p_{\text{risk}}(t_k) = \sum_i w_i V(S_i)$ .

Чтобы избежать резких флуктуаций, вызванных шумами, полученное значение подвергается экспоненциальному сглаживанию:

$$\tilde{p}_{\text{risk}}(t_k) = \alpha_{\text{risk}} \tilde{p}_{\text{risk}}(t_{k-1}) + (1 - \alpha_{\text{risk}}) p_{\text{risk}}(t_k),$$

с коэффициентом  $\alpha_{\text{risk}} \in (0,1)$  (в расчётах использовалось значение 0.3). Начальное сглаженное значение полагается нулевым.

На основе текущего риска  $\tilde{p}_{\text{risk}}$  система выбирает один из трёх предопределённых режимов управления:

- базовый режим – штатная ситуация, когда риск мал ( $\tilde{p}_{\text{risk}} < \beta_1$ );
- осторожный режим – повышенный риск ( $\beta_1 \leq \tilde{p}_{\text{risk}} < \beta_2$ );
- критический режим – высокая вероятность опасного события ( $\tilde{p}_{\text{risk}} \geq \beta_2$ ).

Значения порогов  $\beta_1$  и  $\beta_2$  выбираются эмпирически; в данной работе приняты  $\beta_1 = 0.5$  и  $\beta_2 = 0.7$ . Каждому режиму соответствует свой набор параметров исполнительного уровня: коэффициент безопасности  $\alpha$ , весовые матрицы  $\mathbf{Q}_\delta$  и  $\mathbf{R}_\delta$  в критерии (6.13), а также допустимый уровень риска  $\beta$ , используемый при сужении трубки. Используемые в работе значения этих параметров приведены в таблице 6.4.

Таблица 6.4. Параметры исполнительного уровня для различных режимов работы

Параметр		Базовый режим	Осторожный режим	Критический режим
<b>Номинальный регулятор</b>				
Вес ошибки положения и углов	$Q_{\text{pos},r} \cdot 10^3$	diag(20,20,20, 5,5,5)	diag(40,40,40, 10,10,10)	diag(80,80,80, 20,20,20)
Вес управления	$R_{\text{in}}$	diag(0.5,0.5,0.5, 0.5,0.5,0.5)	diag(1,1,1,1,1,1)	diag(0.5,0.5,0.5, 0.5,0.5,0.5)
<b>Регулятор уклонений (MPC)</b>				
Вес состояния уклонения	$Q_{\delta,r}$	diag(10,10,10,10, 10,10,0,0,0,0,0,0)	$10^3 \cdot Q_{\delta,\text{base}}$	$10^3 \cdot Q_{\delta,\text{base}}$
Вес управления	$R_{\delta}$	$I_6$	$I_6$	$0.1 \cdot I_6$
Шаг дискретизации MPC	$\Delta t_{\text{MPC}}$	0.05 с	0.025 с	0.025 с
<b>Параметры адаптивного горизонта</b>				
Коэффициент безопасности	$\alpha$	0.3	0.1	0.05
Допустимый уровень риска	$\beta$	0.05	0.025	0.01

Для предотвращения частых и необоснованных переключений используется механизм удержания режима. При обнаружении необходимости перехода в более опасный режим переключение происходит немедленно, и для нового режима запускается таймер удержания заданной длительности (например, 2 такта для осторожного и 4 такта для критического). Если система пытается вернуться в менее опасный режим, то переключение разрешается только после истечения времени удержания текущего режима. На каждом шаге это время уменьшается на величину шага дискретизации. Такой подход обеспечивает устойчивость работы системы к кратковременным выбросам риска.

На каждом шаге  $t_k$  блок адаптации, используя текущий режим  $r$ , формирует обновлённые параметры  $\mathbf{Q}_\delta(t_k)$ ,  $\mathbf{R}_\delta(t_k)$ ,  $\alpha(t_k)$  и  $\beta(t_k)$ . Эти параметры передаются в блок MPC управления отклонениями. Для вычисления горизонта прогноза  $T_{MPC}(t_k)$  используется критическое время  $\tau^*(t_k)$ , найденное по текущей матрице  $\mathbf{A}_\delta(t_k)$ . Таким образом, стратегический уровень непрерывно корректирует поведение исполнительного уровня в зависимости от текущей обстановки, что позволяет системе своевременно реагировать на возрастающую опасность и предотвращать выход траектории за допустимые пределы даже при редких и интенсивных возмущениях.

Для оценки эффективности предложенной трехуровневой системы в условиях случайных возмущений была проведена серия из 1000 статистических испытаний. В каждом испытании генерировались новые реализации всех случайных процессов (течения, волнения, шумов динамики и измерений) при фиксированных параметрах моделей. Симуляции выполнялись параллельно. Для каждой симуляции фиксировалось максимальное отклонение от номинальной траектории  $\max\|\mathbf{C}_{\text{dev}}\boldsymbol{\delta}(t)\|$  и факт выхода за пределы трубки  $K_{\text{dev}}$ . Моделировались варианты системы с включенным и выключенным стратегическим уровнем. Результаты представлены в таблице 6.3, гистограммы распределения на рис.6.10, 6.11.

Таблица 6.3. Результаты статистического моделирования

Показатель	Система без стратегического уровня	Система со стратегическим уровнем
Количество симуляций	1000	1000
Выходов за $K_{\text{dev}}$	71	0
Доля выходов, %	7.1	0
Среднее отклонение, м	0.3159	0.0927
Медиана, м	0.3022	0.0869
95-й процентиль, м	0.5556	0.1569

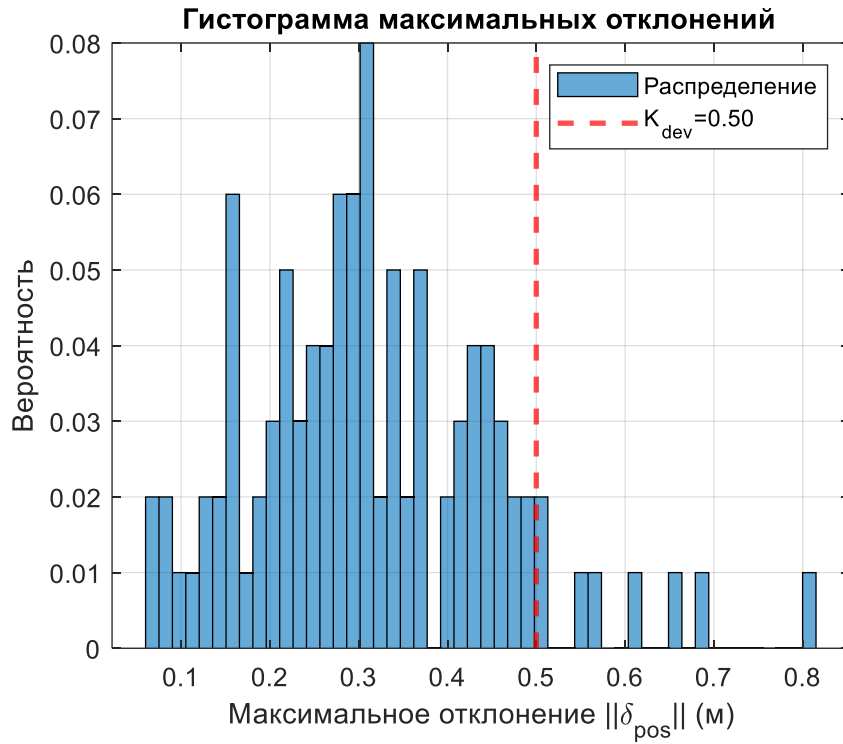


Рисунок 6.10. Гистограмма нормы максимальных отклонений для системы без стратегического уровня.

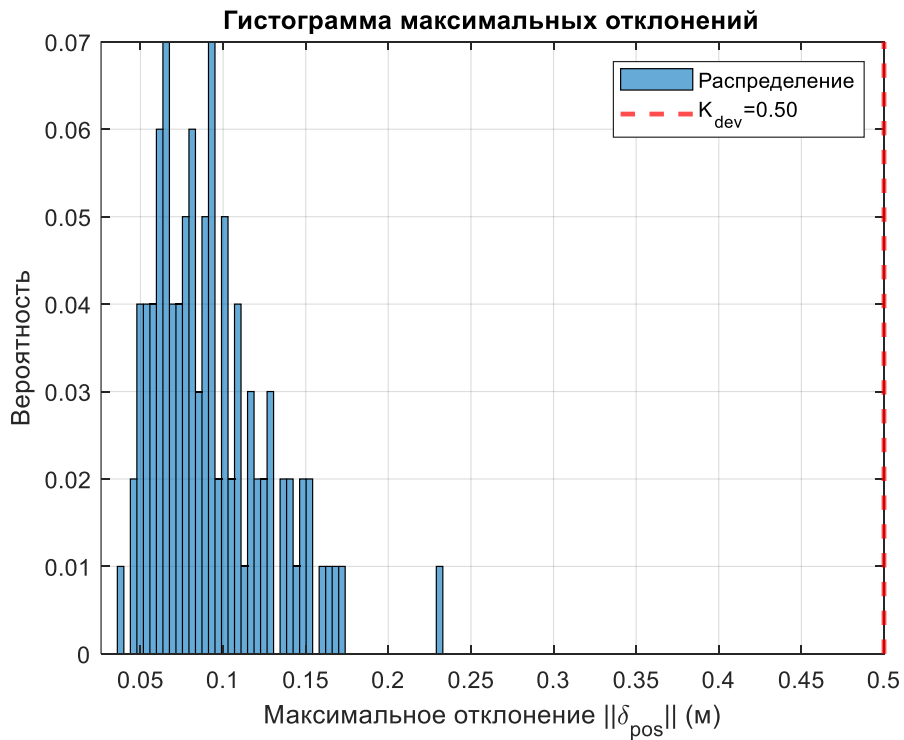


Рисунок 6.11. Гистограмма нормы максимальных отклонений для системы со стратегическим уровнем.

Видно, что использование исполнительного уровня с компенсацией уклонений через MPC с фиксированными параметрами доля выходов за допустимую границу может превышать заданный уровень риска. Причина заключается в том, что характер и интенсивность внешних возмущений меняются во времени, и регулятор с постоянными настройками не всегда способен адекватно реагировать на редкие, но потенциально опасные события. Для решения этой проблемы в разработанной иерархической функционально устойчивой системе управления вводится стратегический уровень, основная задача которого – на основе анализа текущей траектории отклонения идентифицировать развитие ситуации по одному из predetermined критических сценариев и своевременно адаптировать параметры регуляторов исполнительного уровня так, чтобы гарантировать нахождение траектории внутри безопасной области, т.е. обеспечить функциональную устойчивость.

На рис.6.12 показан результат моделирования системы при реализации одного из критических сценариев в результате действия возмущений (волнение, течения и аддитивный шум) с использованием функционально устойчивого управления. На верхнем графике показано изменение нормы отклонения реальной траектории от номинальной. Ниже показан график переключения режимов управления. Временные отрезки работы разных режимов обозначены разными цветами: зелёный – базовый режим; желтый – осторожный режим; красный – критический режим. Синим и красным пунктиром на этом графике показаны пороги  $\beta_1$  и  $\beta_2$  соответственно, определяющие переключение между режимами, черной линией показано значение интегрального показателя риска. На нижнем графике показаны наложенные фрагменты распознанных сценариев – красным обозначены участки графика нормы отклонения, на которых система зафиксировала совпадение с фрагментом А-профиля.

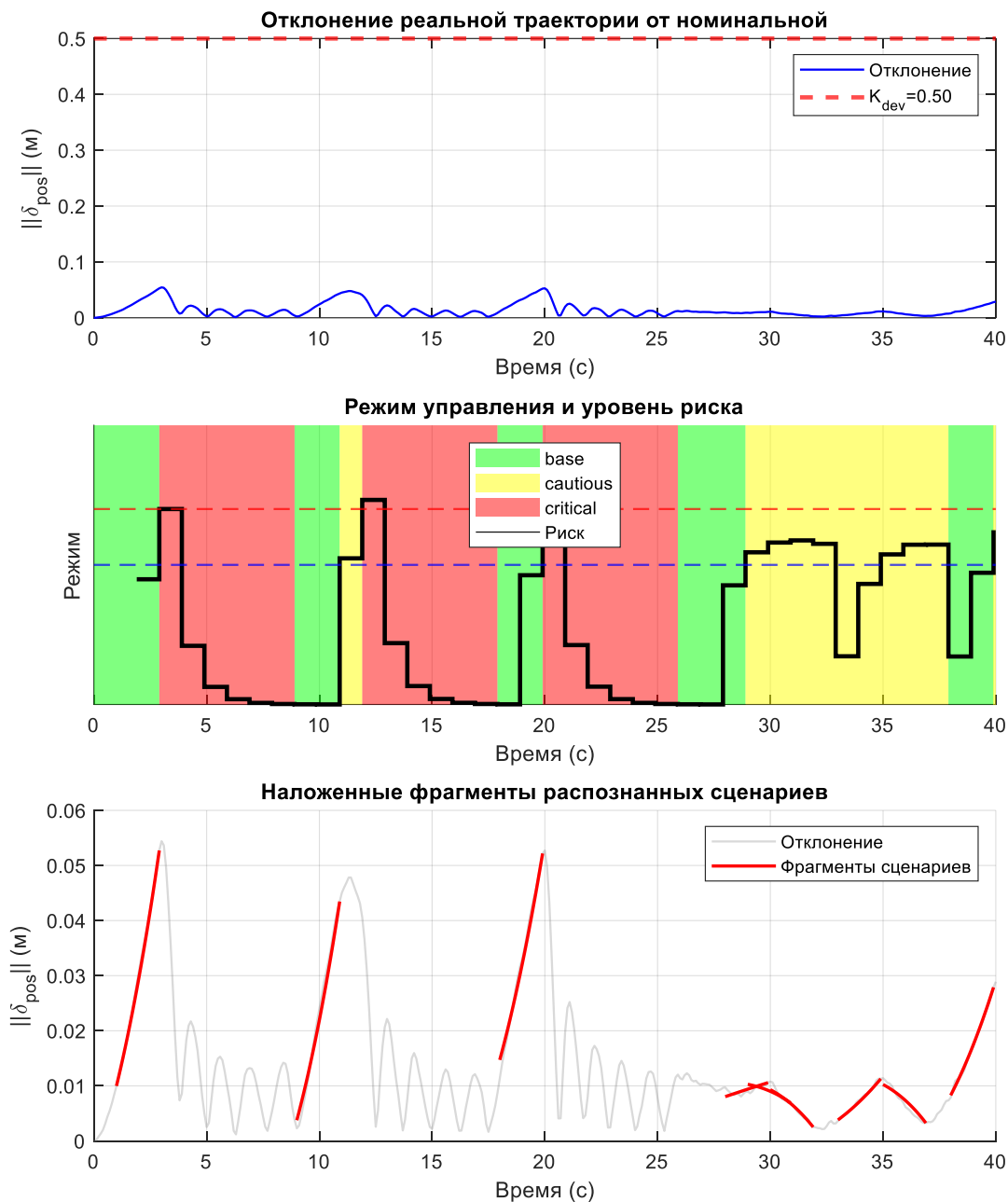


Рисунок 6.12. Результат моделирования функционально устойчивой системы управления.

На рис. 6.13 показаны графики номинального, корректирующего и общего управления. Видно, что результирующее управление не выходит за пределы ограничений (6.8).

Управления: номинальное, полное и корректирующее

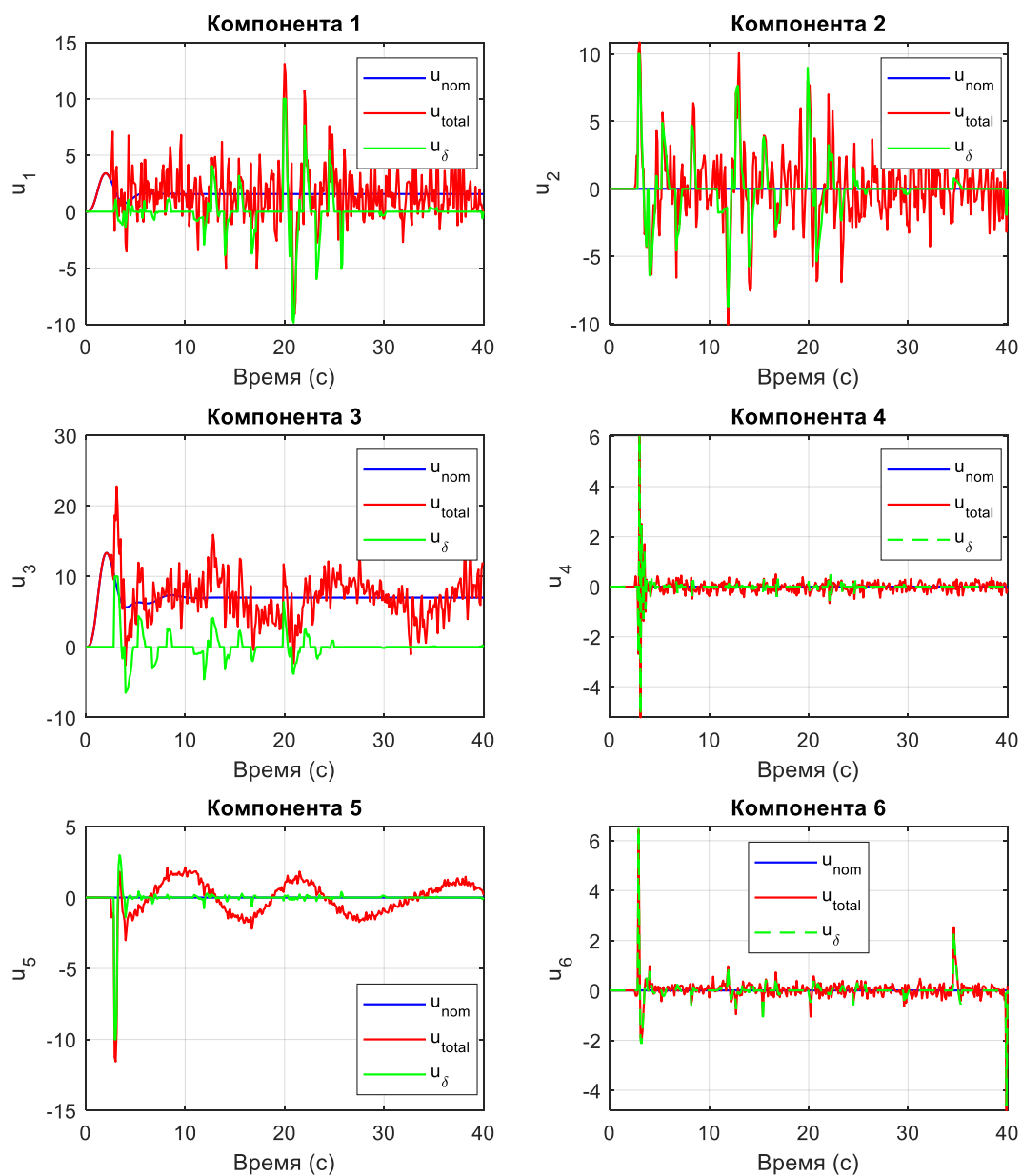


Рисунок 6.13. Графики управления функционально устойчивой системы

На рис.6.14 показаны графики оценки времени первого выхода и изменения горизонта прогнозирования в соответствии с оценкой интегрального индекса риска.

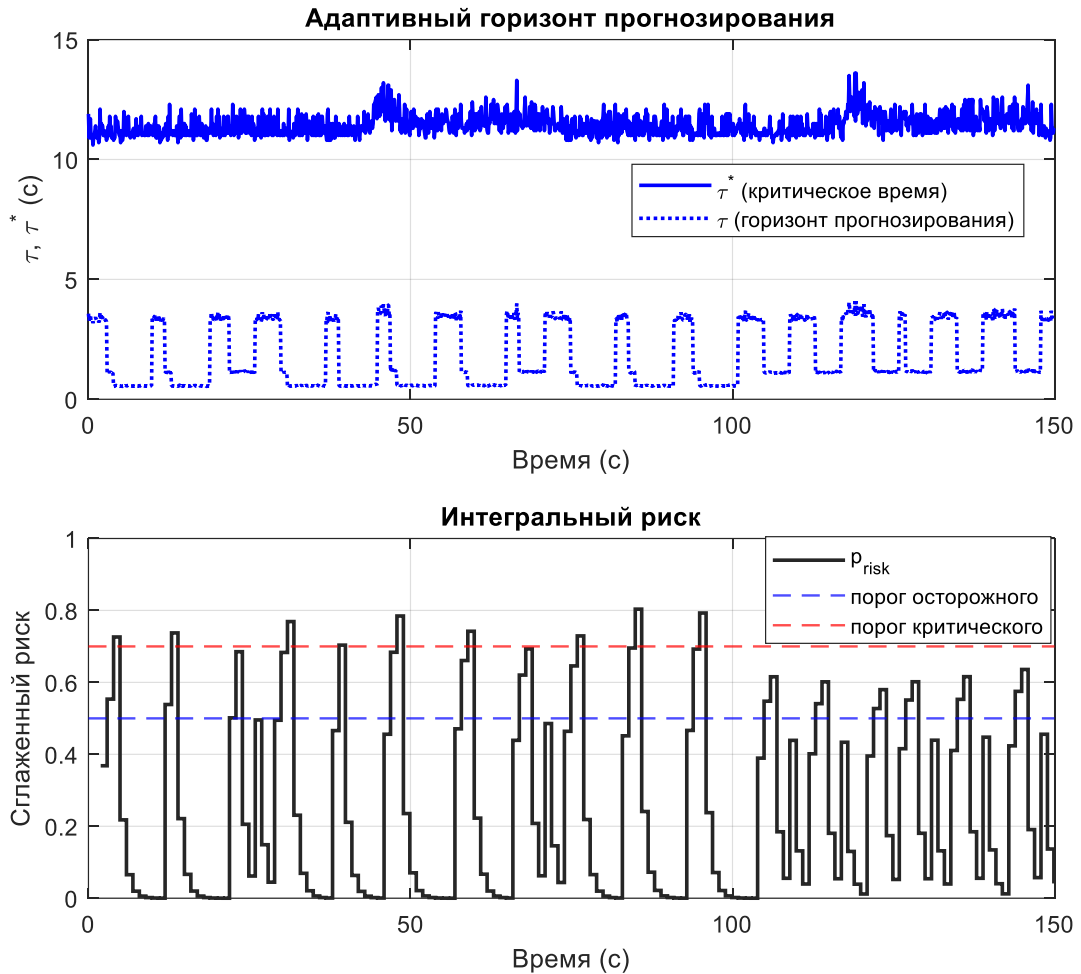


Рисунок 6.14. График адаптации горизонта прогнозирования

Адаптивный горизонт позволяет значительно снизить вычислительную нагрузку по сравнению с фиксированным длинным горизонтом, используемым во всех режимах. В базовом режиме ( $\alpha = 0.3$ ,  $\tau^* \approx 12$  с) горизонт составляет  $T_{MPC} \approx 3.6$  с (что соответствует длительности активной фазы А-профиля, см. рис.6.9), число шагов прогноза  $N = T_{MPC}/\Delta t_{MPC} = 72$  (при  $\Delta t_{MPC} = 0.05$  с). В критическом режиме ( $\alpha = 0.05$ ,  $T_{MPC} \approx 0.6$  с,  $\Delta t_{MPC} = 0.025$  с)  $N = 24$ . Размерность задачи квадратичного программирования (число переменных) пропорциональна  $18N$  (число переменных состояния 12, число переменных управления 6). Переход от  $N = 72$  к  $N = 24$  уменьшает число переменных в 3 раза, что в типичных алгоритмах QP (например, interior-point) сокращает время решения примерно в  $3^2 = 9$  раз.

Более существенный выигрыш достигается в осторожном и критическом режимах, где даже небольшое сокращение  $N$  даёт значительную экономию. Кроме того, в базовом режиме (где система проводит основное время) допустимо использовать более крупный шаг  $\Delta t_{MPC} = 0.05$  с (против 0.025 с в опасных режимах), что дополнительно уменьшает частоту пересчёта. Таким образом, адаптация горизонта прогнозирования позволяет динамически распределять вычислительные ресурсы, концентрируя их на кратковременных интервалах повышенной опасности и экономя их в штатных условиях. Это подтверждается результатами моделирования: при переходе от фиксированного горизонта к адаптивному общее время симуляции (на 1000 испытаний) сократилось на  $\approx 30\%$ , а в критических ситуациях решение MPC находилось на каждом шаге без ошибок несовместности.

Приведенные выше статистические испытания проводились при условии точного знания параметров модели АНПА (массы, моментов инерции, присоединённых масс, коэффициентов демпфирования и интенсивности шумов). Однако на практике гидродинамические коэффициенты всегда определены с некоторой погрешностью, а реальные условия эксплуатации могут приводить к изменению инерционных характеристик (например, вследствие установки дополнительного оборудования). Поэтому для комплексной оценки функциональной устойчивости разработанной системы управления была выполнена проверка ее работоспособности при параметрической неопределённости.

В научной литературе имеются количественные оценки погрешностей, возникающих при идентификации параметров АНПА различными методами (физическое моделирование, вычислительная гидродинамика, полуэмпирические формулы). Анализ этих данных показывает, что для параметров, вносящих наибольший вклад в динамику, типичные ошибки идентификации составляют единицы процентов, тогда как для малочувствительных коэффициентов неопределённость может быть существенно выше. В работе [211] вариации ключевых коэффициентов

(например, присоединённой массы по рысканию) в пределах  $\pm 10\%$  приводят к заметным изменениям отклика (3-5% по углу перерегулирования), что указывает на необходимость проверки робастности управления в таких пределах. Более поздние исследования [115] показали, что для высокочувствительных параметров ошибка идентификации может составлять менее 1%, а для низкочувствительных – до 533% (их влияние на динамику пренебрежимо мало). Таким образом, для большинства «важных» гидродинамических коэффициентов (масса, моменты инерции, линейное демпфирование, присоединённые массы по основным каналам) типичные ошибки идентификации находятся в пределах 2–10%. На основе этих данных были выбраны следующие диапазоны вариации параметров истинной динамики (при неизменной номинальной модели регулятора):

- масса и моменты инерции –  $\pm 10\%$ ;
- присоединённые массы (линейные и угловые) –  $\pm 15\%$ ;
- коэффициенты линейного демпфирования –  $\pm 15\%$ ;
- коэффициенты нелинейного демпфирования –  $\pm 20\%$ ;
- интенсивность аддитивного шума в динамике –  $\pm 20\%$ .

Выбранные интервалы охватывают типичные погрешности, возникающие при идентификации параметров АНПА на основе численного гидродинамического моделирования и полуэмпирических методов, а также учитывают возможность дополнительных эксплуатационных изменений (погрешности центровки, дополнительное оборудование и пр.).

Результаты моделирования одной из реализаций модели истинной динамики АНПА со случайным образом сгенерированными неопределенностями параметров в указанных пределах представлены ниже. На рис.6.15 показаны траектории движения АНПА с неопределенностью параметров в модели. Видно, что предложенная система управления обладает робастностью и сохраняет приемлемое качество.

На рис.6.16 показан фрагмент нормы отклонения возмущенной траектории от номинальной. Видно, что норма отклонения выше, чем при

номинальных параметрах модели (рис.6.12), но по-прежнему лежит в пределах трубки ( $K_{dev} = 0.5$  м).

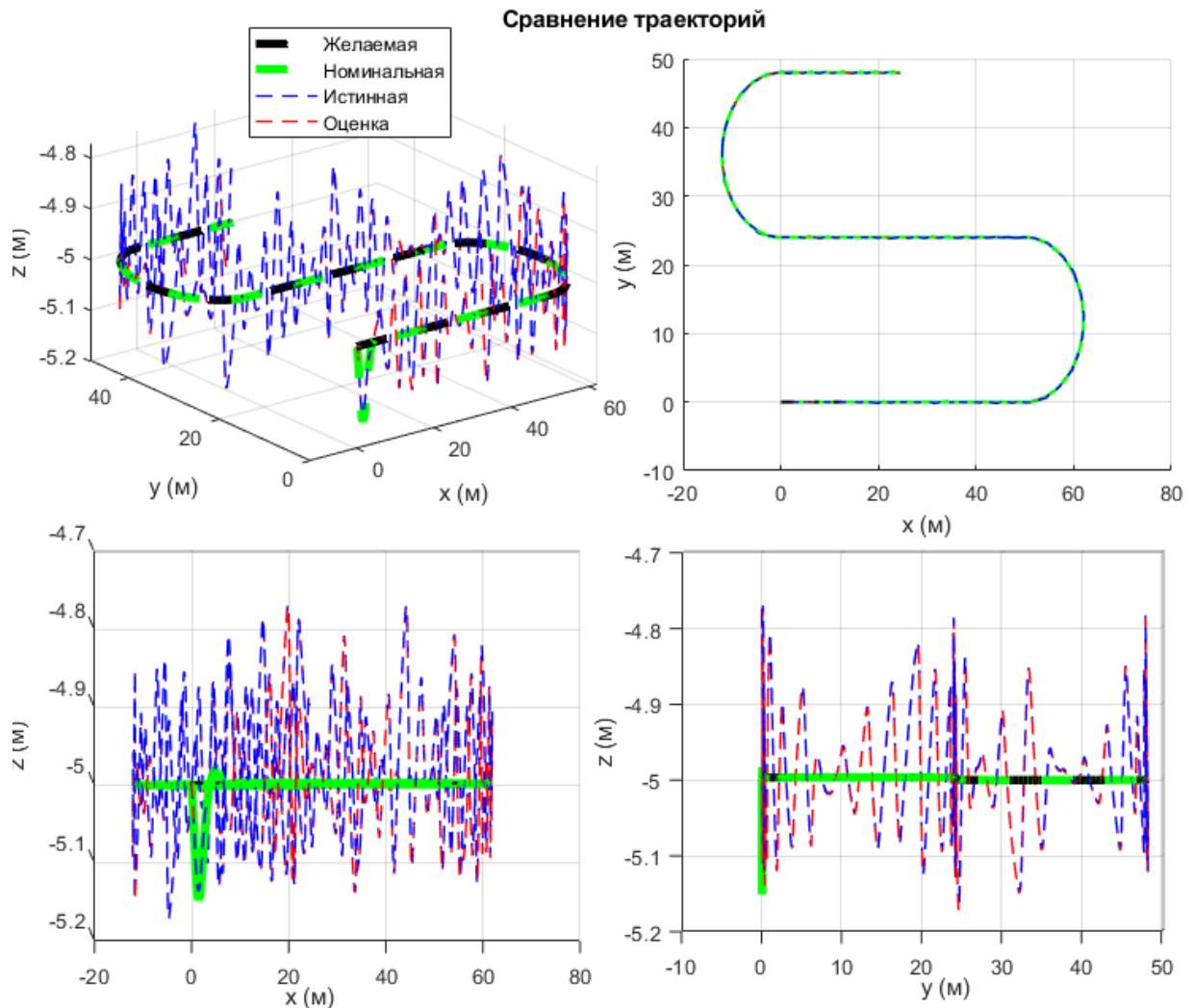


Рисунок 6.15. Графики траектории при неопределенности в модели истинной динамики АНПА

Для тестирования также было выполнено 1000 симуляций, в каждой из которых параметры истинной динамики АНПА генерировались независимо с равномерным распределением в указанных пределах, что позволяет оценить поведение системы при сочетании нескольких параметрических ошибок одновременно. Для каждой симуляции, как и ранее, фиксировалось максимальное отклонение от номинальной траектории  $\max\|C_{dev}\delta(t)\|$  и факт выхода за пределы трубки  $K_{dev}$ . В итоге доля выходов за пределы трубки

составила 2%, среднее отклонение, 0.35 м, медиана 0.3 м, 95-й перцентиль, 0.47 м. Гистограмма распределения приведена на рис.6.17.

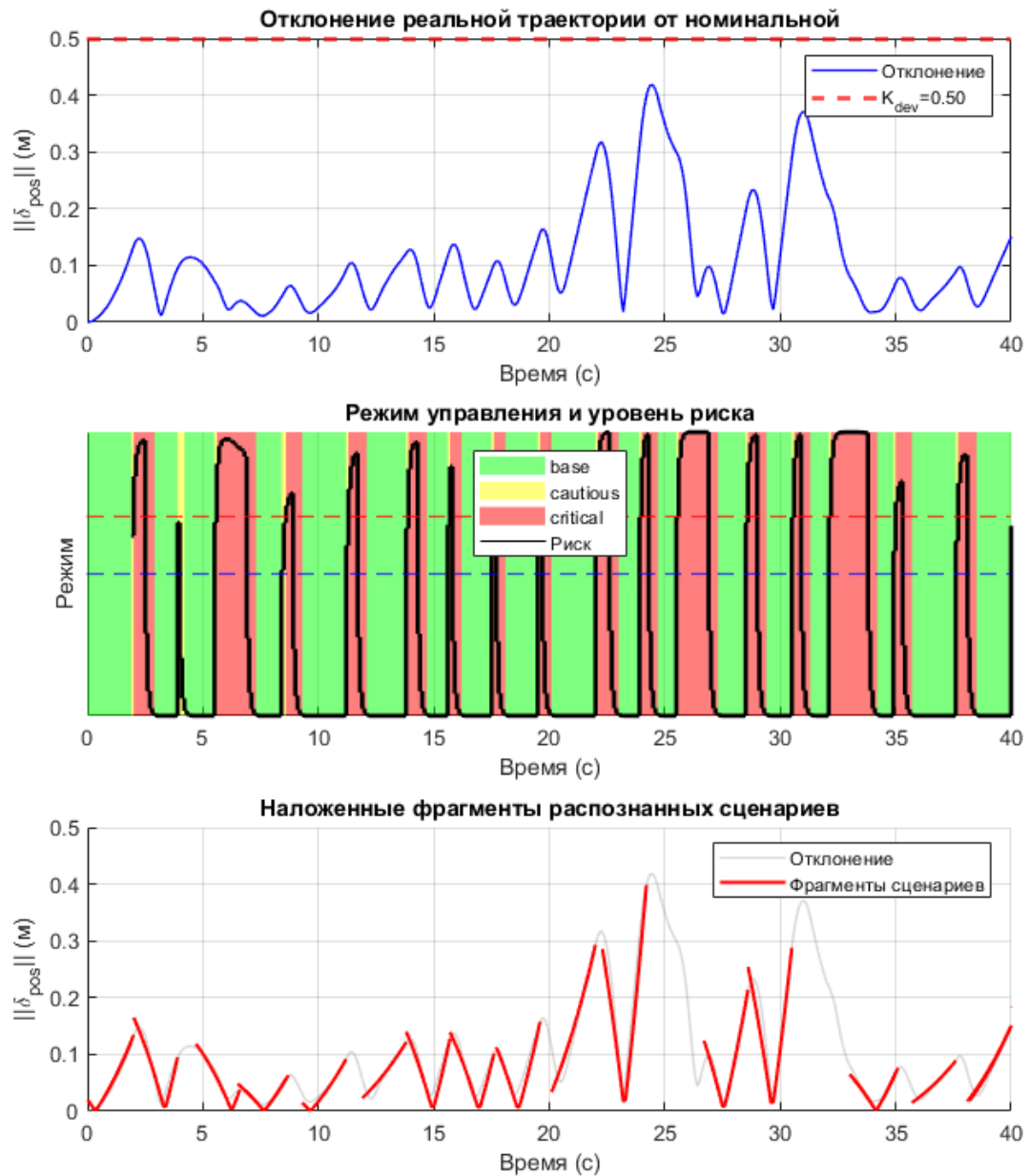


Рисунок 6.16. Фрагмент моделирования функционально устойчивой системы управления при неопределенности в модели истинной динамики АНПА.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что предложенная трехуровневая структура (номинальный регулятор – адаптивный MPC – ситуационное прогнозирование) обладает не только способностью подавлять типовые и редкие возмущения, но и устойчива к значительным

параметрическим неопределённостям. Это особенно важно для практического применения, поскольку точные гидродинамические коэффициенты для реального аппарата всегда известны лишь приближённо. Таким образом, функциональная устойчивость системы подтверждена как при точном знании модели, так и в условиях её неполноты.

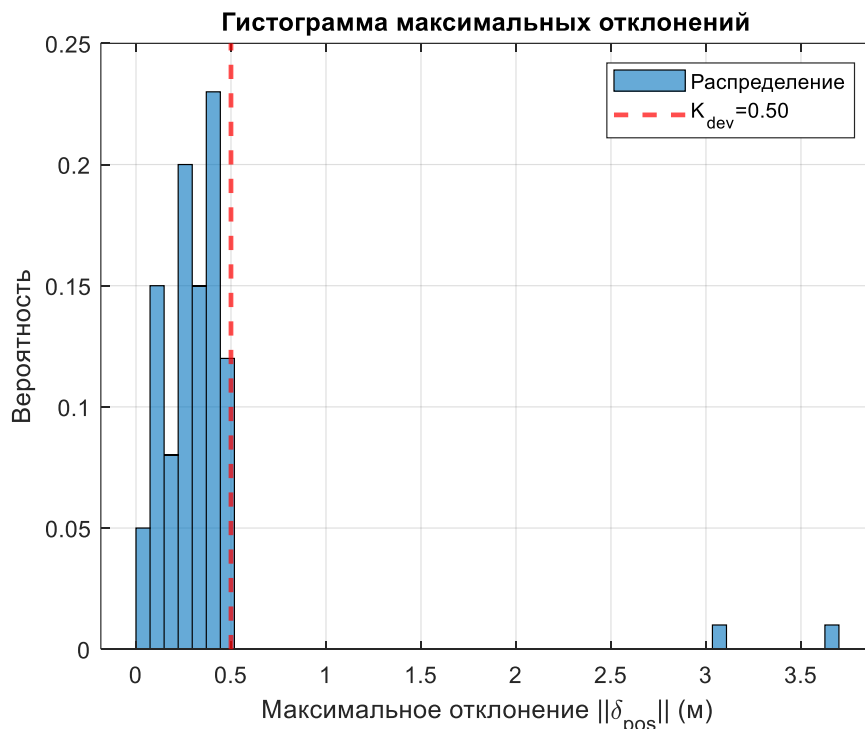


Рисунок 6.17. Гистограмма нормы максимальных отклонений при неопределенности в модели истинной динамики АНПА.

#### 6.4. Натурный эксперимент

Экспериментальная проверка базовых элементов разработанной системы функционально устойчивого управления проведена в Камышовой бухте, г. Севастополь (рис.6.18). Использовалась штатная программно-аппаратная платформа АНПА ММТ-300 в которой алгоритмы управления реализуются на языке скриптов и команд внутренней операционной системы аппарата.



Рисунок 6.18. Один из моментов выполнения эксперимента

Поскольку в реальной системе управления АНПА вектор сил и моментов  $\tau$  рассчитывается с учетом матрицы распределения движителей ( $T_{th}$ ) как  $\tau = T_{th}u_{th}$ , где  $u_{th} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$  – вектор, описывающий нагрузку движителей,  $T_{th} = [t_1 \quad \dots \quad t_6]$ ,  $t_i = \begin{bmatrix} f_i \\ r_i \times f_i \end{bmatrix}$ , где  $f_i$  – сила, создаваемая  $i$ -м движителем;  $r_i$  – геометрическое положение точки создаваемой силы  $i$ -го движителя

относительно центра масс подводного робота. Силы, создаваемые двигателями ММТ-300, зависят от программного управления, что приводит к параметрической форме  $t_i(c) = \begin{bmatrix} f_i(c) \\ r_i \times f_i(c) \end{bmatrix}$ , где  $c \in [-128; 128]$  – это программный код управления. При этом  $f_i(c)$  определяются с учетом геометрии АНПА как

$$f_1(c) = \begin{bmatrix} F(c) \cos(22^\circ) \\ 0 \\ F(c) \sin(22^\circ) \end{bmatrix}, f_2(c) = \begin{bmatrix} F(c) \cos(22^\circ) \\ F(c) \sin(22^\circ) \\ 0 \end{bmatrix}, f_3(c) = \begin{bmatrix} F(c) \cos(22^\circ) \\ 0 \\ -F(c) \sin(22^\circ) \end{bmatrix},$$

$$f_4(c) = \begin{bmatrix} F(c) \cos(22^\circ) \\ -F(c) \sin(22^\circ) \\ 0 \end{bmatrix}, f_5(c) = \begin{bmatrix} 0 \\ F(c) \\ 0 \end{bmatrix}, f_6(c) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F(c) \end{bmatrix}.$$

Функция  $F(c)$  определяется по статической характеристике двигателей и задает зависимость (например, при помощи полинома) между кодом управления и создаваемой силой. Такое представление позволяет определить выражение для сил и моментов в параметрической форме  $\tau(c) = T_{th}(c) \cdot u_{th}$ . Причем  $u_{th}$  здесь определяет процент нагрузки двигателей. При полной нагрузке  $u = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ .

Основная цель эксперимента – в реальных морских условиях подтвердить работоспособность подсистемы ситуационного прогнозирования и ее информационную совместимость со штатными средствами исполнительного уровня АНПА.

Допустимый радиус трубки безопасности  $K_{dev} = 0.5$  м выбран в соответствии с обоснованием, приведённым в разделе 6.3, и согласован с типовой точностью позиционирования УКБ-системы ММТ-300 на рабочих дистанциях. При моделировании было показано, что в усложнённых условиях без адаптации исполнительного уровня с учетом активного подавления возмущений выходы за границу 0.5 м происходят в 7.1 % реализаций. Натурный эксперимент проводился в благоприятных гидрометеорологических условиях (волнение до 1 балла, слабое течение),

поэтому подавление возмущений не требовалось, нарушение трубки не ожидалось, и его отсутствие не противоречит результатам моделирования.

Штатное взаимодействие программных компонентов комплекса построено на базе децентрализованной библиотеки с сетевым обменом по протоколу UDP. Движение задаётся универсальным сообщением `event::Command`, содержащим идентификатор команды и до пяти числовых параметров. Скрипт миссии формирует последовательность команд, обрабатываемых модулями автопилота. В эксперименте номинальная траектория состояла из 5 команд `TaskYaw`, описывающих прямолинейные галсы разной длины на скорости 0.8 м/с с разворотом в 90 градусов между ними. Глубина стабилизировалась штатными регуляторами вертикального канала. На протяжении всего движения никаких корректирующих команд `MovementCorrection` не подавалось – исполнительный уровень работал исключительно по предписанному скрипту.

Анализ отклонений от номинальной траектории выполнялся на прямолинейных участках галсов, где отклонение аппарата от заданного курса имеет большее значение для точности выполнения миссии. Криволинейные участки поворотов формируются штатным автопилотом по внутренней логике, которая не описывается явно в скрипте миссии и не задаёт аналитическую траекторию.

Координаты аппарата  $x, y, z$  определялись гидроакустической УКБ системой с периодичностью около 0.3 Гц и комплексовались с данными доплеровского лага и датчика глубины. На посту оператора функционировал диффузный ФК, синтезированный по математической модели ММТ-300. Он формировал непрерывную оценку вектора состояния, сглаживая шумы измерений и компенсируя эпизодические потери акустического контакта. По этой оценке вычислялся вектор позиционного уклонения  $\hat{\delta}_{pos}$  относительно номинальной траектории, и норма  $\|\hat{\delta}_{pos}\|$  подавалась на блок ситуационного прогнозирования.

Блок прогнозирования (реализован в среде MATLAB на вычислителе поста оператора) использовал базу, содержащую один эталонный А-профиль, построенный для  $K_{\text{dev}} = 1$  м. На каждом такте измерений вычислялся интегральный показатель риска  $p_{\text{risk}}$  путём сравнения нормы уклонения с масштабированным фрагментом профиля. Автоматическая выдача управляющих команд не производилась – стратегический уровень работал в режиме мониторинга, накапливая данные для последующей валидации алгоритмов прогнозирования.

По завершении миссии навигационные данные были выгружены с бортового накопителя в json(json) файле. Траектория была восстановлена в локальных прямоугольных координатах (рис.6.19) и наложена на карту местности (рис. 6.20).

Анализ результатов показал, что на прямолинейных участках штатный автопилот обеспечил максимальное отклонение от номинальной траектории 0.42 м, т.е. требование  $K_{\text{dev}} = 0.5$  м не было нарушено.

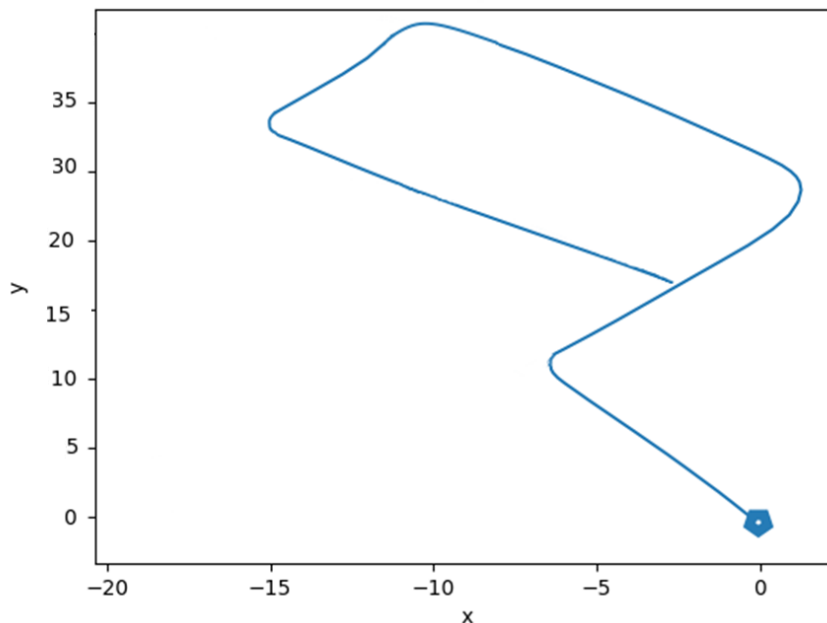


Рисунок 6.19. Траектория, построенная по навигационным данным

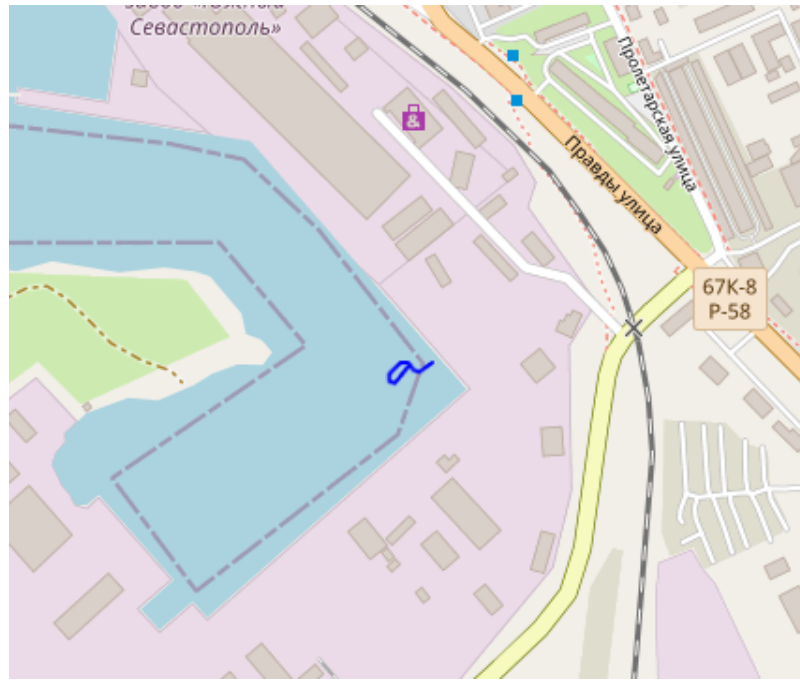


Рисунок 6.20. Фрагмент карты местности в районе эксперимента с нанесенной траекторией.

Такой результат согласуется с условиями эксперимента и не противоречит данным моделирования. Блок ситуационного прогнозирования на всём протяжении эксперимента удерживал показатель риска ниже порога  $\beta_1 = 0.5$ , не генерируя ложных тревог. Динамика  $p_{\text{risk}}$  качественно коррелировала с изменениями нормы уклонения: при возрастании  $\|\hat{\delta}_{pos}\|$  показатель риска увеличивался, при затухании – снижался. Такое поведение подтверждает адекватность механизма сравнения с А-профилем и корректность выбранных параметров прогнозирования.

Таким образом, натурный эксперимент подтвердил, что подсистема ситуационного прогнозирования функционирует корректно на реальной телеметрии ММТ-300. Тем самым создан надёжный фундамент для завершающего этапа – замыкания контура адаптивной коррекции исполнительного уровня.

## 6.5. Выводы по главе

В данной главе разработана трехуровневая система управления движением АНПА, обеспечивающая функциональную устойчивость в условиях случайных возмущений. На исполнительном уровне синтезированы:

- номинальный регулятор на основе метода оптимального следящего управления, формирующий опорную траекторию и управление;
- регулятор уклонений (МРС), использующий линеаризованную модель уклонений, адаптивный горизонт прогнозирования и детерминированные ограничения.

На информационном уровне построены:

- наблюдатели состояния (ФК с диффузной инициализацией) и возмущений (редуцированные наблюдатели), позволяющие в реальном времени оценивать полный вектор состояния и действующие внешние силы.

На стратегическом уровне реализовано ситуационное прогнозирование, включающее:

- базу А-профилей, построенных на основе ТБУ;
- блок онлайн-сопоставления текущей траектории уклонения с эталонными сценариями;
- блок оценки интегрального риска и логику адаптивного переключения между режимами (базовый, осторожный, критический) с механизмом удержания.

Моделирование на траектории типа «галс» с типовыми моделями течения, волнения и шумов в динамике и измерениях показало, что применение только исполнительного и информационного уровней позволяет снизить максимальные отклонения, однако в 7.1 % реализаций происходит выход за пределы допустимой трубки  $K_{dev} = 0.5$  м. Включение стратегического уровня с адаптацией параметров регуляторов обеспечило нулевое число выходов за трубку в серии из 1000 статистических испытаний. Среднее максимальное отклонение составило 0.0927 м, а 95-й процентиль –

0.1569 м, что значительно ниже заданного порога  $K_{dev} = 0.5$  м. Проверка работоспособности системы при неопределенностях в параметрах модели показала ее робастность, что важно для практического применения, поскольку точные параметры модели для реального АНПА всегда известны лишь приближенно. Экспериментальная проверка также подтвердила корректную работу подсистемы ситуационного прогнозирования на реальных данных телеметрии АНПА ММТ-300.

Полученные результаты позволяют утверждать, что предложенная трехуровневая структура и комплекс методов структурно-параметрического синтеза разрешают сформулированную научно-техническую проблему интеграции управления, наблюдения и прогнозирования. Статистическое моделирование с 1000 независимых реализаций внешних возмущений показало, что интеграция стратегического уровня, построенного на основе анализа больших отклонений, снизила долю критических выходов за пределы безопасной трубки с 7.1 % до нуля при одновременном уменьшении среднего и максимального отклонений. Это количественно доказывает, что система приобрела способность к упреждающему парированию редких опасных событий, принципиально недоступную для классических структур.

Результаты главы опубликованы в [107, 148, 188, 191].

## Заключение

В диссертационной работе решена важная научно-техническая проблема, имеющая существенное значение для развития теории и практики управления автономными подвижными объектами, заключающаяся в разработке теоретических основ, методов и алгоритмов структурно-параметрического синтеза функционально устойчивых систем управления, обеспечивающих гарантированное выполнение миссий в условиях действия малых гауссовских возмущений и риска редких критических событий (больших отклонений траектории).

В отличие от существующих подходов, ориентированных преимущественно либо на робастность, либо на адаптацию, в диссертации предложен общий подход к синтезу функционально устойчивых систем управления, объединяющий в рамках единого математического базиса контуры нелинейного оптимального управления, оценивания состояния и возмущений, прогнозирующего управления и упреждающего ситуационного прогнозирования. В качестве такого базиса использовано SDC-представление нелинейных систем, обеспечивающее единый формализм для построения регуляторов, наблюдателей и прогнозирующих моделей.

Разработанный подход развивает теорию структурно-параметрического синтеза сложных динамических систем и формализует принципы построения интеллектуальных систем управления, способных не только компенсировать текущие возмущения, но и прогнозировать развитие опасных сценариев с упреждающей адаптивной реконфигурацией исполнительного уровня. Тем самым обеспечивается переход от реактивных принципов управления к управлению с опережающим отражением угроз.

В ходе выполнения диссертационного исследования получены следующие основные научные результаты.

1. Разработаны теоретические основы структурно-параметрического синтеза функционально устойчивых систем управления автономными

подвижными объектами. Формализовано понятие функциональной устойчивости как интегрального свойства системы, объединяющего робастность, адаптивность и способность к упреждающему прогнозированию критических ситуаций. Предложена трехуровневая структура системы управления, включающая исполнительный, информационный и стратегический уровни, определены информационные потоки между уровнями, а также логические условия переключения режимов управления на основе оценки риска выхода системы за границы допустимой области.

2. Разработаны новые методы синтеза канонических преобразований нелинейных динамических систем в SDC-представлении, включая случай сингулярно возмущённых систем. Получены условия приведения систем к каноническим формам с Фробениусовой структурой, обеспечивающим упрощение процедур синтеза регуляторов и наблюдателей. Предложенные методы позволяют выполнять декомпозицию динамики, выделять подсистемы, чувствительные к отдельным компонентам возмущений, а также осуществлять линеаризацию обратной связью для широкого класса нелинейных объектов управления.

3. Разработаны новые методы решения задач нелинейного оптимального управления на конечных интервалах времени в SDC-представлении. Предложен метод синтеза точного терминального управления на основе обратного интегрирования дифференциальных уравнений оптимального управления с использованием терминального закона регулирования при движении в обратном времени. Разработан метод синтеза оптимального следящего управления на основе одноэтапной процедуры прямого интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений управления. Полученные результаты развивают методы нелинейного оптимального управления и обеспечивают снижение вычислительной сложности процедур синтеза.

4. Разработаны методы оценивания состояния и неизмеряемых возмущений нелинейных динамических систем. Предложен метод оценивания

состояния при полной неопределённости в начальных условиях на основе диффузного фильтра Калмана в SDC-представлении. Разработан метод синтеза наблюдателей возмущений, основанный на решении вспомогательной задачи оптимального следящего управления, обеспечивающий оценивание внешних воздействий и дефектов по критерию минимизации функционала невязки. Предложены редуцированные наблюдатели, позволяющие оценивать отдельные компоненты возмущений.

5. Разработан новый метод управления с прогнозирующей моделью, отличающийся адаптивным выбором горизонта прогнозирования на основе анализа больших уклонений. Впервые предложено определять горизонт прогнозирования через оценку времени первого выхода траектории возмущённой системы на границу допустимой области посредством минимизации функционала действия Вентцеля-Фрейдлина. Тем самым обеспечено конструктивное объединение аппарата теории больших уклонений и MPC-управления в рамках единой вычислительной процедуры.

6. Разработан метод ситуационного прогнозирования, основанный на распознавании типовых и редких сценариев развития управляемого процесса. В отличие от существующих подходов, метод учитывает не только типовые режимы функционирования, но и наиболее вероятные траектории выхода системы в критические состояния (А-профили), полученные из анализа больших уклонений. Установлено, что для фиксированного радиуса трубки, определяющей безопасную область, все А-профили имеют одинаковую динамику нормы уклонения, что позволяет использовать нормированный эталонный профиль с масштабированием, существенно сокращая размер базы. На основе сопоставления текущих оценок состояния с эталонными сценариями осуществляется оценка риска и адаптивный выбор режимов управления исполнительного уровня.

Работоспособность и эффективность предложенного подхода подтверждены результатами математического моделирования, статистического анализа методом Монте-Карло и натурных экспериментов с

автономным необитаемым подводным аппаратом ММТ-300. Проведённые исследования показали, что интеграция стратегического уровня, основанного на анализе больших уклонений, обеспечивает снижение вероятности критических выходов за границы безопасной области и позволяет реализовать механизм опережающего отражения опасных режимов движения.

Таким образом, в диссертации сформированы теоретические основы нового подхода к построению функционально устойчивых систем управления автономными подвижными объектами, основанного на интеграции методов нелинейного оптимального управления, оценивания состояния и возмущений, прогнозирующего управления и анализа редких событий в рамках единого SDC-формализма. Полученные результаты развивают теорию структурно-параметрического синтеза сложных динамических систем и создают научно-методическую основу для построения интеллектуальных автономных робототехнических комплексов нового поколения.

### **Перспективы дальнейшей разработки темы**

Полученные результаты создают основу для решения более сложных задач автономной робототехники. Наиболее перспективными направлениями дальнейших исследований являются:

- распространение предложенного подхода на групповое управление гетерогенными АПО с учётом взаимных опасных сближений;
- интеграция методов машинного обучения (прежде всего обучения с подкреплением) для решения задач оптимального управления и оценивания без необходимости знать матрицу динамики системы, а также для онлайн-пополнения базы сценариев новыми, не предусмотренными на этапе проектирования, профилями возмущенного процесса, что повысит адаптивность системы к неизвестным заранее режимам внешней среды.

Решение этих задач позволит создать полностью автономные, функционально устойчивые системы управления для широкого класса робототехнических платформ.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АНПА – автономный обитаемый подводный аппарат;
- АПО – автономный подвижный объект;
- АПУР – аппроксимирующая последовательность уравнений Риккати;
- БДПТ – бесколлекторный двигатель постоянного тока;
- ДЛ – доплеровский лаг;
- ЛОС – линеаризация обратной связью;
- МППМ – метод переходной матрицы;
- МР – мобильный робот
- МУР – метод на основе уравнения Ляпунова;
- МЭМС – микроэлектромеханическая система;
- НДУОУ – нелинейное дифференциальное уравнение оптимального управления;
- ПЛОС – приближенная линеаризация обратной связью;
- ПМЭ – принцип максимума энтропии;
- ПР – приближенное решение
- ТБУ – теория больших уклонений;
- РФК – расширенный ФК;
- СКО – среднеквадратичное отклонение;
- СТФК – сигма-точечный ФК;
- УКБ – ультракороткая база;
- ФД – функционал действия;
- ФК – фильтр Калмана;
- LQG управление – линейно-квадратично-гауссовское управление;
- MLD – метод управления, минимизирующего большие уклонения;
- MPC – управление с прогнозирующей моделью
- SDC – зависящие от состояния коэффициенты;
- SDC-метод – метод, разработанный на базе SDC-представления нелинейной системы;

SDC-параметризация – параметризация нелинейной системы с целью приведения ее к SDC-представлению;

SDC-подход – подход к решению задач на основе SDC-методов;

SDC-представление – представление нелинейной системы в форме пространства состояний с зависящими от состояния коэффициентами;

SDDRE – дифференциальное уравнение Риккати с зависящими от состояния коэффициентами;

SDRE – уравнение Риккати с зависящими от состояния коэффициентами;

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Агаев, Р. П. Теория управления: словарь системы основных понятий / Р. П. Агаев, Ф. Т. Алескеров, А. И. Алчинов, И. Н. Барабанов, В. Н. Бурков, С. Н. Васильев, В. М. Вишневецкий, А. А. Галяев, Д. А. Губанов, А. О. Калашников, Г. Н. Калянов, М. Ф. Каравай, Е. В. Каршаков, С. А. Краснова, О. П. Кузнецов, В. В. Кульба, А. А. Лазарев, В. Г. Лебедев, А. В. Макаренко, А. С. Мандель, Р. В. Мещеряков, А. И. Михальский, Д. А. Новиков, А. Ф. Пащенко, А. А. Рощин, А. В. Толок, В. А. Уткин, М. П. Фархадов, М. В. Хлебников, А. Г. Чхартишвили, А. В. Щепкин. – М.: ЛЕНАНД, 2024. – 128 с.
2. Агеев, М. Д. Автономные подводные роботы: системы и технологии / М. Д. Агеев, Л. В. Киселев, Ю. В. Матвиенко и др. – М.: Наука, 2005. – 398 с.
3. Белинская, Ю. С. Построение нелинейной обратной связи в задаче слежения для модели колесного робота, основанное на технике SDDRE / Ю. С. Белинская, Д. А. Макаров // Программные системы: теория и приложения. – 2023. – Т. 14, № 4. – С. 189–206.
4. Бородакий, Ю. В. О функциональной устойчивости информационно-вычислительных систем / Ю. В. Бородакий, А. А. Тарасов // Известия ТРТУ. – 2006. – № 7(62). – С. 5–12.
5. Брайсон, А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Ю-ши Хо. – М.: Мир, 1972. – 521 с.
6. Васильева, А. Б. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления / А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев // Математический анализ. Итоги науки и техники. – 1982. – Т. 20. – С. 3–77.
7. Вентцель, А. Д. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений / А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
8. Гельфанд, И. М. Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд. – М.: Наука, 1966. – 272 с.

9. Дмитриев, М. Г. Сингулярные возмущения в задачах управления / М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 1. – С. 3–51.
10. Дубовик, С. А. Асимптотические методы в задачах супервизорного управления автономных подводных роботов / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2023. – № 1. – С. 155–170.
11. Дубовик, С. А. Асимптотические методы синтеза алгоритмов контроля и управления для бортовых систем автономных объектов / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2026. – Т. 27, № 4. – С. 198–206.
12. Дубовик, С. А. Асимптотический метод прогнозирования рисков в задачах стохастического контроля и управления / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2022. – Т. 23, № 8. – С. 395–405.
13. Дубовик, С. А. Асимптотический метод синтеза системы двухуровневой стабилизации движения / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов // Материалы 9-й Мультиконференции по проблемам управления, конференция «Управление в морских и аэрокосмических системах» (УМАС-2016). – Санкт-Петербург, 04–06 октября 2016 г. – СПб.: ЦНИИ Электроприбор, 2016. – С. 86–89.
14. Дубовик С.А. Асимптотическая семантизация данных в системах управления // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20, № 8. – С. 461-471.
15. Дубовик, С. А. Двухуровневые системы стабилизации движения морских измерительных средств на заданных траекториях / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов // Тезисы докладов Международной научно-технической конференции «Системы контроля окружающей среды (СКОС–2017)». – Севастополь, 06–09 сентября 2017 г. – Севастополь: ИПТС, 2017. – С. 36.
16. Дубовик, С. А. Композиционный on-line синтез управлений для бортовых систем летательных аппаратов / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов //

Сборник тезисов докладов II Всероссийской научно–практической конференции «АВИАТОР». – Воронеж, 11–13 февраля 2015 г. – Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2015. – С. 121–123.

17. Дубовик, С. А. Композиционный синтез для бортовых систем управления летательных аппаратов / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов // Информационные технологии и управление. – 2015. – № 1. – С. 5–15.

18. Дубовик, С. А. Метод «замораживания» в синтезе терминального управления многомерной системой / С. А. Дубовик // Радиоэлектроника и информатика. – Харьков, 2002. – № 4. – С. 62–65.

19. Дубовик, С. А. Мониторинг и анализ опасных сближений автономных подводных аппаратов при движении в группе / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов, И. Ю. Липко // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2025. – Т. 26, № 1. – С. 12–21.

20. Дубовик, С. А. Мониторинг относительного положения автономных подводных аппаратов в группе на основе анализа больших уклонения / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов, И. Ю. Липко // Экстремальная робототехника: труды 35–й Международной научно–технической конференции. – Санкт–Петербург, 2024. – С. 150–156.

21. Дубовик, С. А. Робастность и когнитивность в задачах стабилизации динамических систем на основе асимптотических методов / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов // Перспективные системы и задачи управления: сборник материалов 11 Всероссийской научно–практической конференции. – 4–8 апреля 2016 г. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – Т. 2. – С. 107–116.

22. Дубовик, С. А. Система контроля крена судна на базе анализа больших уклонений / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов, И. Ю. Липко // Управление и обработка информации в технических системах : материалы XII Всероссийской научно–практической конференции и VIII молодежной школы–семинара. – Домбай, 4–7 апреля 2017 г. – Ростов–на–Дону: Изд–во Южного федерального университета, 2017. – С. 196–208.

23. Дубовик, С. А. Система оперативного контроля крена судна на волнении: пат. 195040 U1 Рос. Федерация / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов, И. Ю. Липко. – 14.01.2020.

24. Дубовик, С. А. Ситуационное управление в стохастических системах / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов, И. Ю. Липко // Всероссийская научная конференция по проблемам управления в технических системах. – 2019. – Т. 1. – С. 69–72.

25. Дубовик, С. А. Функционалы действия в качестве критериев для двухуровневых систем управления / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов, И. Ю. Липко // Материалы 10-й Всероссийской мультikonференции. – Дивноморское, Геленджик, 11–16 сентября 2017 г. – Ростов–на–Дону: Изд–во ЮФУ, 2017. – Т. 2. – С. 72–74.

26. Дубовик, С. А. Функционально устойчивые системы управления: асимптотические методы синтеза: монография / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов. – М.: ИНФРА–М, 2020. – 249 с.

27. Дэвис, М. Х. А. Линейное оценивание и стохастическое управление / М. Х. А. Дэвис. – М.: Наука, 1984. – 208 с.

28. Жирабок, А. Н. Идентификация дефектов в нелинейных динамических системах и их датчиках на основе скользящих наблюдателей / А. Н. Жирабок, А. В. Зуев, О. Сергиенко, А. Е. Шумский // Автоматика и телемеханика. – 2022. – № 2. – С. 63–89.

29. Жирабок, А. Н. Идентификация дефектов в нелинейных системах на основе скользящих наблюдателей с ослабленными условиями существования / А. Н. Жирабок, А. В. Зуев, В. Ф. Филаретов, А. Е. Шумский // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2022. – № 3. – С. 21–30.

30. Жирабок, А. Н. Интервальный подход к идентификации в линейных системах на основе методов оптимального управления / А. Н. Жирабок, А. В. Зуев, А. А. Кабанов, В. Ф. Филаретов // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2026. – № 5. – С. 117–124.

31. Жирабок, А. Н. Каноническая форма Жордана в задачах диагностирования и оценивания / А. Н. Жирабок, А. В. Зуев, В. Ф. Филаретов, А. Е. Шумский, Чун Ир Ким // Автоматика и телемеханика. – 2022. – № 9. – С. 36–54.
32. Жирабок, А. Н. Линейные методы при диагностировании нелинейных систем / А. Н. Жирабок, С. А. Усольцев // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 7. – С. 149–159.
33. Жирабок, А. Н. Метод идентификации дефектов в нелинейных системах на основе методов оптимального управления / А. Н. Жирабок, А. В. Зуев, А. А. Кабанов, В. Ф. Филаретов // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2025. – № 5. – С. 102–109.
34. Жирабок, А. Н. Методы и алгоритмы диагностирования и отказоустойчивого управления динамическими системами / А. Н. Жирабок, А. Е. Шумский. – Владивосток: ДВГТУ, 2009. – 196 с.
35. Зубер, И. Е. Канонические преобразования и стабилизация нелинейных дискретных систем управления / И. Е. Зубер // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. – 2004. – Вып. 1, № 1. – С. 6–13.
36. Зубер, И. Е. Синтез канонических преобразований подобия для нелинейных нестационарных динамических систем управления / И. Е. Зубер // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2003. – № 4. – Р. 38–51.
37. ИУПМ.361192.005 РЭ: Руководство по эксплуатации / ФГБУН «Институт проблем морских технологий ДВО РАН». – [Владивосток], 2022. – 61 с.
38. Кабанов, А. А. Влияние качки на точность горизонтальных смещений судна / А. А. Кабанов, В. А. Крамарь, А. В. Титов // Морские интеллектуальные технологии. – 2023. – № 1-1 (59). – С. 261–267.
39. Кабанов, А. А. Выбор параметризации матриц нелинейной системы для методов state-dependent управления / А. А. Кабанов //

Автоматизация и измерения в машино-приборостроении. – 2023. – № 3 (23). – С. 23–37.

40. Кабанов, А. А. Идентификация возмущений в линейных системах на основе оптимального астатического наблюдателя / А. А. Кабанов, А. В. Зуев, А. А. Проценко // Экстремальная робототехника: международная научно-техническая конференция. – Санкт-Петербург, 2024. – С. 307–308.

41. Кабанов, А. А. Идентификация возмущений в электроприводах робототехнических систем на основе оптимального астатического наблюдателя / А. А. Кабанов, А. В. Зуев, А. А. Проценко // Морские интеллектуальные технологии. – 2024. – № 4, ч. 4. – С. 91–97.

42. Кабанов, А. А. Идентификация дефектов в линейных системах на основе методов оптимального управления / А. А. Кабанов, А. В. Зуев, А. Н. Жирабок, В. Ф. Филаретов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2022. – Т. 65, № 5. – С. 335–342.

43. Кабанов, А. А. Метод идентификации дефектов в нелинейных системах / А. А. Кабанов, А. Н. Жирабок, А. В. Зуев, В. Ф. Филаретов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2025. – Т. 68, № 8. – С. 668–679.

44. Кабанов, А. А. Метод идентификации дефектов в нестационарных динамических системах / А. А. Кабанов, А. Н. Жирабок, А. В. Зуев, А. А. Проценко // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2026. – № 74. – С. 107–114.

45. Кабанов, А. А. Идентификация дефектов в приводах на основе методов оптимального управления / А. А. Кабанов, А. В. Зуев, А. Н. Жирабок, В. Ф. Филаретов, В. А. Крамарь // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2022. – № 1. – С. 192–204.

46. Кабанов, А. А. Композиционный синтез нелинейных сингулярно возмущенных систем на основе метода линеаризации обратной связью / А. А. Кабанов // Труды X Международной конференции «Идентификация систем и

задачи управления» SICPRO'15. – Москва, 26–29 января 2015 г. – М.: Институт проблем управления РАН, 2015. – С. 548–556.

47. Кабанов, А. А. Линеаризация обратной связью непрерывных и дискретных многомерных систем / А. А. Кабанов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2017. – Т. 18, № 6. – С. 363–370.

48. Кабанов, А. А. Линеаризация обратной связью нелинейных систем на основе канонического преобразования подобия / А. А. Кабанов, В. А. Крамарь // Материалы Всероссийской конференции по проблемам управления в технических системах. – Санкт–Петербург, 26–29 октября 2015 г. – СПб.: ЛЭТИ, 2015. – С. 10–13.

49. Кабанов, А. А. Мера устойчивости к сингулярным возмущениям и робастные свойства линейных систем / С. А. Дубовик, А. А. Кабанов // Проблемы управления и информатики. – 2010. – Вып. 3. – С. 17–28.

50. Кабанов, А. А. Метод идентификации дефектов: подход на основе методов оптимального управления / А. А. Кабанов, А. В. Зуев, А. Н. Жирабок, В. Ф. Филаретов // Автоматика и телемеханика. – 2023. – № 9. – С. 82–94.

51. Кабанов, А. А. Оптимальный регулятор точного приведения в ноль дискретных объектов / А. А. Кабанов // Вестник СевНТУ. Автоматизация. – 2010. – Вып. 108. – С. 94–99.

52. Кабанов, А. А. Приближенная линеаризация обратной связью на основе сингулярно возмущенного подхода / А. А. Кабанов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2015. – № 8. – С. 515–522.

53. Кабанов, А. А. Разработка подхода к синтезу наблюдателей для оценки возмущений в линейных системах на основе методов оптимального управления / А. А. Кабанов, В. Ф. Филаретов, А. В. Зуев, А. Н. Жирабок // Сборник трудов 15–ой Мультиконференции по проблемам управления. – Санкт–Петербург, 2022. – С. 212–215.

54. Кабанов, А. А. Решение сингулярно возмущенной непрерывной задачи асимптотически точного терминального приведения в ноль / А. А.

Кабанов // Оптимизация производственных процессов: сб. науч. тр. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2010. – Вып. 12. – С. 202–210.

55. Кабанов, А. А. Синтез оптимального следящего управления на конечном интервале времени для нелинейных систем на основе SDC–метода / А. А. Кабанов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2025. – Т. 26, № 11. – С. 579–587.

56. Кабанов, А. А. Синтез робастных систем стабилизации на основе теории сингулярных возмущений / А. А. Кабанов // Оптимизация производственных процессов: сб. науч. тр. – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2013. – Вып. 14. – С. 73–79.

57. Кабанов, А. А. Система робастного субоптимального управления движением мобильного робота / А. А. Кабанов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2013. – № 4. – С. 14–18.

58. Кабанов, А. А. Численные методы контроля редких событий в нелинейных стохастических системах / А. А. Кабанов, С. А. Дубовик // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2021. – Т. 22, № 6. – С. 291–297.

59. Кабанов, А. А. SDC методы оптимального управления нелинейными системами на конечном интервале времени / А. А. Кабанов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2026. – Т. 69, № 1. – С. 22–33.

60. Квакернаак, Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М.: Мир, 1977. – 456 с.

61. Козырев, В. Г. Оптимальный регулятор почти точного приведения в ноль / В. Г. Козырев // Вестник СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление. – Севастополь, 1998. – Вып. 14. – С. 18–22.

62. Краснова, С.А. Блочный синтез систем управления роботами-манипуляторами в условиях неопределенности / С. А. Краснова, В. А. Уткин, А. В. Уткин. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 208 с.

63. Краснова, С.А. Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения / С. А. Краснова, В. А. Уткин, А. В. Уткин // Автоматика и телемеханика. – 2017. – № 12. – С. 26–53.
64. Краснова, С.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем / С. А. Краснова, В. А. Уткин. – М.: Наука, 2006. – 272 с.
65. Мироновский, Л. А. Функциональное диагностирование динамических систем / Л. А. Мироновский. – М.; СПб.: МГУ–ГРИФ, 1998. – 256 с.
66. Лазарев, В. Б. Комплексная программа стенда имитации качки судна: свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019662838 / В. Б. Лазарев, С. А. Дубовик, А. А. Кабанов, И. Ю. Липко, А. Е. Осадченко, А. Н. Путин, В. П. Тыщенко. – 03.10.2019.
67. Мирошник, И. В. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами / И. В. Мирошник, В. О. Никифоров, А. Л. Фрадков. – СПб.: Наука, 2000. – 549 с.
68. Монахов, Ю. М. Функциональная устойчивость информационных систем: учебное пособие: в 3 ч. / Ю. М. Монахов. – Владимир: Изд-во Владимирского гос. ун-та, 2011. – Ч. 1: Надежность программного обеспечения. – 58 с.
69. Никифоров, В. О. Интеллектуальное управление в условиях неопределенности: учебное пособие / В. О. Никифоров, О. В. Слита, А. В. Ушаков. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011. – 226 с.
70. Поляк, Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
71. Попков, Ю. С. Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем / Ю. С. Попков, О. Н. Киселев, Н. П. Петров, Б. Л. Шмутьян. – М.: Энергия, 1976. – 440 с.
72. Попков, Ю. С. Оценивание характеристик рандомизированных динамических моделей данных (энтропийно–робастный подход) / Ю. С.

Попков, А. Ю. Попков, Ю. Н. Лысак // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 5. – С. 83–90.

73. Пухальский, А. А. Большие отклонения стохастических динамических систем. Теория и приложения / А. А. Пухальский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 511 с.

74. Пшихопов, В. Х. Позиционно-траекторное управление подвижными объектами / В. Х. Пшихопов, М. Ю. Медведев. – Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2015. – 354 с.

75. Пшихопов, В. Х. Алгоритмы адаптивного и робастного позиционно-траекторного управления воздушными судами / В. Х. Пшихопов, М. Ю. Медведев, Б. В. Гуренко // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2016. – № 2. – С. 20–33.

76. Теплухин, Р.Г. Современные методы автономной навигации беспилотных надводных аппаратов / Р.Г. Теплухин, М.П. Фархадов, И.И. Лычков, А.О. Санько // Управление большими системами: сборник трудов. – 2025. – Вып. 118. – С. 132-207.

77. Филаретов, В.Ф. Устройства и системы управления подводных роботов / В.Ф. Филаретов, А.В. Лебедев, Д.А. Юхимец. – М. : Наука, 2005. – 270 с.

78. Ференко, Е. Приближенный поиск ближайших соседей в больших данных: обзор методов хеширования / Е. Ференко, Ц. Цинь, Ш. Тэн, В. Чжан, Д. Лю, Я. Хоу // Journal of Frontiers of Computer Science & Technology. – 2020. – Т. 14, № 7. – С. 1073–1093.

79. Флеминг, У. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / У. Флеминг, Р. Ришел. – М.: Мир, 1978. – 316 с.

80. Фрейдлин, М. И. Функционал действия для одного класса случайных процессов / М. И. Фрейдлин // Теория вероятностей и ее применения. – 1972. – Т. 17, № 3. – С. 536–541.

81. Хасминский, Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях параметров / Р. З. Хасминский. – М.: Наука, 1981. – 256 с.
82. Alba-Flores, R. Real-time infinite horizon linear-quadratic tracking controller for vibration quenching in flexible beams / R. Alba-Flores, E. Barbieri // 2006 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics. – Taipei, 2006. – P. 38–43.
83. Ashchepkov, L. T. Optimal Control / L. T. Ashchepkov, D. V. Dolgy, T. Kim, R. P. Agarwal. – Cham: Springer, 2021. – 326 p.
84. Banks, H. T. Nonlinear feedback controllers and compensators: a state dependent Riccati equation approach / H. T. Banks, B. M. Lewis, H. T. Tran // Computational Optimization and Applications. – 2007. – Vol. 37. – P. 177–218.
85. Bao, Y. Learning-Based Adaptive-Scenario-Tree Model Predictive Control with Probabilistic Safety Guarantees Using Bayesian Neural Networks / Y. Bao, K. J. Chan, A. Mesbah, J. M. Velni // 2022 American Control Conference (ACC). – Atlanta, GA, 2022. – P. 3260–3265.
86. Bao, Y. Learning-based Adaptive-scenario-tree Model Predictive Control with Improved Probabilistic Safety Using Robust Bayesian Neural Networks / Y. Bao, K. J. Chan, A. Mesbah, J. M. Velni // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2023. – Vol. 33, № 5. – P. 3312–3333.
87. Barbieri, E. On the infinite-horizon LQ tracker / E. Barbieri, R. Alba-Flores // Systems & Control Letters. – 2000. – Vol. 40, № 2. – P. 77–82.
88. Berkovitz, L. D. Nonlinear optimal control theory / L. D. Berkovitz, N. G. Medhin. – Boca Raton: CRC Press, 2013. – 400 p.
89. Blevins, R. D. Applied fluid dynamics handbook / R. D. Blevins. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1984. – 558 p.
90. Brosque, C. Safety, quality, schedule, and cost impacts of ten construction robots / C. Brosque, et al. // Journal of Information Technology in Construction. – 2022. – Vol. 27. – P. 409–434.

91. Brunovský, P. A classification of linear controllable systems / P. Brunovský // *Kybernetika*. – 1970. – Vol. 6, № 2. – P. 173–188.
92. Busawon, K. K. Control design using Jordan controllable canonical form / K. K. Busawon // *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. – Sydney, 2000. – P. 3386–3391.
93. Calafiore, G. C. Robust Model Predictive Control via Scenario Optimization / G. C. Calafiore, L. Fagiano // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2013. – Vol. 58, № 1. – P. 219–224.
94. Calafiore, G. C. The scenario approach to robust control design / G. C. Calafiore, M. C. Campi // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2006. – Vol. 51, № 5. – P. 742–753.
95. Camacho, E. F. Model predictive control / E. F. Camacho, C. Bordons Alba. – 2nd ed. – Berlin: Springer, 2004. – 280 p. – (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing).
96. Campi, M. C. The exact feasibility of randomized solutions of uncertain convex programs / M. C. Campi, S. Garatti // *SIAM Journal on Optimization*. – 2008. – Vol. 19, № 3. – P. 1211–1230.
97. Chen, L. Indexing Metric Spaces for Exact Similarity Search / L. Chen, Y. Gao, X. Song, Z. Li, Y. Zhu, X. Miao, C. S. Jensen // *ACM Computing Surveys*. – 2022. – Vol. 55, № 6. – P. 1–39.
98. Cloutier, J. R. Nonlinear regulation and nonlinear  $H_\infty$  control via the state-dependent Riccati equation technique: Part 1, theory; part 2: examples / J. R. Cloutier, C. N. D'Souza, C. P. Mracek // *Proceedings of the First International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*. – Daytona Beach, 1996. – P. 117–141.
99. Danik, Y. The Construction of Stabilizing Regulators Sets for Nonlinear Control Systems with the Help of Padé Approximations / Y. Danik, M. Dmitriev // *Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems* / eds. A. K. Abramian, I. V. Andrianov, V. A. Gaiko. – Cham: Springer, 2021. – Vol. 139. – P. 45–62. – (Advanced Structured Materials).

100. Danik, Yu. E. Construction of Parametric Regulators for Nonlinear Control Systems Based on the Pade Approximations of the Matrix Riccati Equation Solution / Yu. E. Danik, M. G. Dmitriev // IFAC–PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, № 32. – P. 815–820.

101. Ding, H. Querying and mining of time series data: experimental comparison of representations and distance measures / H. Ding, G. Trajcevski, P. Scheuermann, X. Wang, E. Keogh // Proceedings of the VLDB Endowment. – 2008. – Vol. 1, № 2. – P. 1542–1552.

102. Ding, S. X. Data–Driven Design of Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Control Systems / S. X. Ding. – London: Springer, 2014. – 382 p. – (Advances in Industrial Control).

103. Donsker, M. D. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. I / M. D. Donsker, S. R. S. Varadhan // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1975. – Vol. 28. – P. 1–47.

104. Donsker, M. D. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. II / M. D. Donsker, S. R. S. Varadhan // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1975. – Vol. 28. – P. 279–301.

105. Donsker, M. D. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. III / M. D. Donsker, S. R. S. Varadhan // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1976. – Vol. 29, № 4. – P. 389–461.

106. Donsker, M. D. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. IV / M. D. Donsker, S. R. S. Varadhan // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1983. – Vol. 36, № 2. – P. 183–212.

107. Dubovik, S. A. Highly Autonomous Underwater Vehicle Control Systems Synthesis via Asymptotic Methods / S. A. Dubovik, A. A. Kabanov // 2023 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). – Sochi, 2023. – P. 879–884.

108. Dubovik, S. A. Profiles of critical states in diagnostics of controlled processes / S. A. Dubovik, A. A. Kabanov // MATEC Web of Conferences. – 2018. – Vol. 224. – P. 04024.
109. Dubovik, S. A. Quasipotentials in Synthesis of Control Systems Based on Knowledge / S. A. Dubovik, A. A. Kabanov // 2017 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). – St. Petersburg, 2017. – P. 1–5.
110. Dubovik, S. A. Robustness and cognition in stabilization problem of dynamical systems based on asymptotic methods / S. A. Dubovik, A. A. Kabanov // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 803, № 1. – P. 012035.
111. Dubovik, S. A. Situational Control in Stochastic Systems / S. A. Dubovik, A. A. Kabanov, I. U. Lipko // 2019 3rd International Conference on Control in Technical Systems (CTS). – St. Petersburg, 2019. – P. 64–68.
112. Dubovik, S. A. Situational Forecasting and Control in Multi-Agent Systems / S. A. Dubovik, A. A. Kabanov // 2024 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). – Sochi, 2024. – P. 729–733.
113. Dupuis, P. A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations / P. Dupuis, R. S. Ellis. – New York: Wiley, 1997. – 479 p.
114. Edwards, C. Sliding mode observers for fault detection and isolation / C. Edwards, S. Spurgeon, R. Patton // Automatica. – 2000. – Vol. 36. – P. 541–553.
115. Elmezain, M. Magnitude sensitivity analysis for parameter identification applied to an autonomous underwater vehicle / M. Elmezain, G. El-Bayoumi, B. Elhadidi, O. Mohamady // Ocean Engineering. – 2024. – Vol. 311, Part 2. – P. 118918.
116. Fanelli, F. Development and Testing of Navigation Algorithms for Autonomous Underwater Vehicles / F. Fanelli. – Cham: Springer, 2020. – 120 p.
117. Fleming, W. H. Risk sensitive optimal control and differential games / W. H. Fleming, W. M. McEneaney // Stochastic Theory and Adaptive Control / eds.

T. E. Duncan, B. Pasik–Duncan. – Berlin: Springer, 1992. – P. 185–197. – (Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 184).

118. Fleming, W. H. Stochastic control and large deviations / W. H. Fleming // *Future Tendencies in Computer Science, Control and Applied Mathematics* / eds. A. Bensoussan, J. P. Verjus. – Berlin: Springer, 1992. – P. 291–300. – (Lecture Notes in Computer Science; vol. 653).

119. Floquet, T. On the robust fault detection via a sliding mode disturbance observer / T. Floquet, J. Barbot, W. Perruquetti, M. Djemai // *International Journal of Control*. – 2004. – Vol. 77. – P. 622–629.

120. Fossen, T. I. Guidance and control of ocean vehicles / T. I. Fossen. – New York: John Wiley and Sons, 1999. – 494 p.

121. Fossen, T. I. Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control / T. I. Fossen. – 2nd ed. – Hoboken: Wiley, 2021. – 704 p.

122. Freidlin, M. I. Random Perturbations of Dynamical Systems / M. I. Freidlin, A. D. Wentzell. – 3rd ed. – Heidelberg: Springer, 2012. – Vol. 260. – 409 p. – (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften).

123. Gajic, Z. Optimal Control of Singularly Perturbed Linear Systems and Applications / Z. Gajic. – 1st ed. – Boca Raton: CRC Press, 2001. – 328 p.

124. Gao, Z. Scaling and Bandwidth-Parameterization Based Controller Tuning / Z. Gao // *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. – Denver, CO, 2003. – Vol. 6. – P. 4989–4996.

125. Gomroki, M. M. Nonlinear control to maneuver a two-craft Coulomb formation at libration points / M. M. Gomroki, O. Tekinalp // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. – Kissimmee, Florida, 2015. – P. 1555.

126. Gomroki, M. M. Two ASRE approaches with application to spacecraft coulomb formations / M. M. Gomroki, F. Topputo, O. Tekinalp, F. Bernelli–Zazzera // *Astrodynamics Network AstroNet–II*. – Cham: Springer, 2016. – P. 109–120.

127. Grancharova, A. Explicit Nonlinear Model Predictive Control: Theory and Applications / A. Grancharova, T. A. Johansen. – Berlin: Springer, 2012. – 386 p.

128. Guardabassi, G. O. Approximate linearization via feedback: an overview / G. O. Guardabassi, S. M. Savaresi // *Automatica*. – 2001. – Vol. 37. – P. 1–15.
129. Guerrero–Sánchez, M. E. Nonlinear control strategies for a UAV carrying a load with swing attenuation / M. E. Guerrero–Sánchez, R. Lozano, P. Castillo, O. Hernández–González, C. García–Beltrán, G. Valencia–Palomo // *Applied Mathematical Modelling*. – 2021. – Vol. 91. – P. 709–722.
130. Guo, B. Active Disturbance Rejection Control for Nonlinear Systems: An Introduction / B. Guo, Z. Zhao. – 1st ed. – Wiley, 2016. – 384 p.
131. Haim, L. Optimized State-Dependent Riccati Equation Method for Spacecraft Attitude Estimation and Control / L. Haim, D. Choukroun // *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. – Minneapolis, 2012. – P. 4557.
132. Han Jingqing. From PID to Active Disturbance Rejection Control / Jingqing Han // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. – 2009. – Vol. 56, № 3. – P. 900–906.
133. Hassan, M. F. Observer-based controller for discrete-time systems: a state dependent Riccati equation approach / M. F. Hassan // *International Journal of Systems Science*. – 2012. – Vol. 43, № 8. – P. 1495–1512.
134. Hasselmann, K. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP) / K. Hasselmann, et al. // *Ergänzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift*. – 1973. – Vol. A8, № 12. – P. 1–95.
135. Hautus, M. Strong detectability and observers / M. Hautus // *Linear Algebra and its Applications*. – 1983. – Vol. 50. – P. 353–368.
136. Hayat, S. Unmanned aerial vehicles (UAVs): practical aspects, applications, challenges, and future trends / S. Hayat, et al. // *Microprocessors and Microsystems*. – 2023. – Vol. 99. – P. 104846.
137. Henson, M. A. Nonlinear process control / M. A. Henson, D. E. Seborg. – New Jersey: Prentice Hall, 1997. – 432 p.

138. Heydari, A. Approximate closed-form solutions to finite-horizon optimal control of nonlinear systems / A. Heydari, S. N. Balakrishnan // 2012 American Control Conference (ACC). – Montreal, 2012. – P. 2657–2662.
139. Heydari, A. Closed-form solution to finite-horizon suboptimal control of nonlinear systems / A. Heydari, S. N. Balakrishnan // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2015. – Vol. 25, № 15. – P. 2687–2704.
140. Heydari, A. Optimal online path planning for approach and landing guidance / A. Heydari, S. N. Balakrishnan // AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference. – Portland, OR, 2011. – P. 1–11.
141. Heydari, A. Path planning using a novel finite horizon suboptimal controller / A. Heydari, S. N. Balakrishnan // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2013. – Vol. 36, № 4. – P. 1210–1214.
142. Hollnagel, E. Resilience Engineering: Concepts and Precepts / E. Hollnagel, D. Woods, N. Leveson. – Aldershot: Ashgate, 2006. – 410 p.
143. Isidori, A. Nonlinear Control Systems / A. Isidori. – 3rd ed. – London: Springer, 1995. – 564 p. – (Communications and Control Engineering).
144. Jacobson, D. H. Optimal stochastic linear systems with exponential performance criteria and their relation to deterministic differential games / D. H. Jacobson // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1973. – Vol. 18. – P. 124–131.
145. Jouffroy, J. A tutorial on incremental stability analysis using contraction theory / J. Jouffroy, T. Fossen // Modeling, Identification and Control. – 2010. – Vol. 31, № 3. – P. 93–106.
146. Jung, J. Hardware-in-the-loop simulations of spacecraft attitude synchronization using the state-dependent Riccati equation technique / J. Jung, S. Y. Park, S. W. Kim, Y. Eun, Y. K. Chang // Advances in Space Research. – 2013. – Vol. 51, № 3. – P. 434–449.
147. Kabanov, A. Cooperative control of underwater vehicle-manipulator systems based on the SDC method / A. Kabanov, V. Kramar, I. Lipko, K. Dementiev // Sensors. – 2022. – Vol. 22, № 13. – P. 5038.

148. Kabanov, A. Leader-Follower Motion Control System for a Group of AUVs via Hybrid Measurement Sparse LBL Navigation / A. Kabanov, K. Dementiev, V. Kramar // *Journal of Marine Science and Engineering*. – 2026. – Vol. 14, № 4. – P. 358.
149. Kabanov, A. The Design of Optimal Lateral Motion Control of an UAV Using the Linear–Quadratic Optimization Method in the Complex Domain / A. Kabanov, S. Dudnikov, A. Dmitriev // *International Review of Aerospace Engineering*. – 2020. – Vol. 13, № 6. – P. 217–227.
150. Kabanov, A. A. Approximate Feedback Linearization Based on the Singular Perturbations Approach / A. A. Kabanov // *Mechatronics, Automation, Control*. – 2015. – Vol. 16. – P. 515–522.
151. Kabanov, A. A. Approximate Feedback Linearization Control of Nonlinear Singular Perturbed Systems / A. A. Kabanov // *International Symposium Automated Systems and Technologies AST2015*. – St. Petersburg, 25–26 May 2015. – SPb.: Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 2015. – P. 199–206.
152. Kabanov, A. A. Canonical transformation and feedback linearization of state–dependent coefficients nonlinear systems / A. Kabanov // *International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018)*. – Mersin, Turkey, 2018. – P. 020021.
153. Kabanov, A. A. Composite Control for Nonlinear Singularly Perturbed Systems Based on Feedback Linearization Method / A. A. Kabanov // *WSEAS Transactions on Systems*. – 2015. – Vol. 14. – P. 215–221.
154. Kabanov, A. A. Composite Control of Nonlinear Singularly Perturbed Systems via Approximate Feedback Linearization / A. A. Kabanov, V. V. Alchakov // *International Journal of Automation and Computing*. – 2020. – Vol. 17, № 4. – P. 610–620.
155. Kabanov, A. A. Cooperative Control of Underwater Manipulators Based on the SDRE Method / A. A. Kabanov, V. A. Kramar // *2021 International Russian Automation Conference (RusAutoCon)*. – Sochi, 2021. – P. 515–520.

156. Kabanov, A. A. Design and Modeling of an Experimental ROV with Six Degrees of Freedom / A. A. Kabanov, V. A. Kramar, I. Ermakov // Drones. – 2021. – Vol. 5, № 4. – Art. 113.
157. Kabanov, A. A. Feedback linearization of singularly perturbed systems on the basis of canonical similarity transformations / A. A. Kabanov // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 1015, № 3. – P. 032173.
158. Kabanov, A. A. Feedback Linearization of Nonlinear Singularly Perturbed Systems with State-dependent Coefficients / A. A. Kabanov // International Journal of Control, Automation, and Systems. – 2020. – Vol. 18, № 7. – P. 1743–1750.
159. Kabanov, A. A. Feedback linearized trajectory-tracking control of a mobile robot / A. A. Kabanov // MATEC Web of Conferences. – 2017. – Vol. 129. – P. 03029.
160. Kabanov, A. A. Finite-Time State-Dependent Coefficient Method for Optimal Control of Nonlinear Systems / A. A. Kabanov // 2022 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). – Sochi, 2022. – P. 712–717.
161. Kabanov, A. A. Full-state linearization of systems via feedback using similarity transformation / A. A. Kabanov // 2016 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). – Moscow, 2016. – P. 1–5.
162. Kabanov, A. A. Methods of modeling and probabilistic analysis of large deviations of dynamic systems / A. A. Kabanov, S. A. Dubovik // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1661, № 1. – P. 012044.
163. Kabanov, A. A. Modified SDRE Method for Finite-time Nonlinear Optimal Control Problem / A. A. Kabanov // 2022 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). – Sochi, 2022. – P. 639–643.
164. Kabanov, A. A. Optimal Control Method for Disturbances Identification / A. A. Kabanov, I. A. Ermakov // 2025 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM): proceedings. – Sochi, 2025. – P. 542–547.

165. Kabanov, A. A. Parameterization of Nonlinear System Matrices for Implementation of State-Dependent Coefficient Control Methods / A. A. Kabanov // 2023 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). – Sochi, 2023. – P. 912–917.
166. Kabanov, A. A. Position–Force Control Approach for an Underwater Vehicle–Manipulator System / A. A. Kabanov, A. Dementiev // 2023 International Conference on Ocean Studies (ICOS). – Vladivostok, 2023. – P. 79–84.
167. Kabanov, A. A. SDC-method of large deviations analysis for nonlinear system / A. A. Kabanov, S. A. Dubovik // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1333, № 3. – P. 032032.
168. Kabanov, A. A. Simulation of Rare Events in Stochastic Systems / A. A. Kabanov, S. A. Dubovik // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 2096, № 1. – P. 012151.
169. Kabanov, A. A. Synthesis of Diagnostic Observers for Linear Systems Based on Optimal Control Methods / A. A. Kabanov, A. V. Zuev, A. N. Zhirabok, V. F. Filaretov // 2022 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD). – Lisbon, 2022. – P. 1–5.
170. Kabanov, A. A. The Optimal Astatic Observer for the Identification of Disturbances in Electric Drives of Robotic Systems / A. A. Kabanov, A. V. Zuev, A. A. Protsenko // 2024 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). – Sochi, 2024. – P. 601–605.
171. Kabanov, A. A. The Optimal Astatic Observer for the Identification of Disturbances in Nonlinear Robotic Systems / A. A. Kabanov, A. V. Zuev, A. N. Zhirabok, A. A. Protsenko // Proceedings of the 2024 International Conference on Ocean Studies (ICOS). – Vladivostok, 8–11 Oct. 2024. – P. 76–80.
172. Kabanov, A. A. The SDC Kalman Filter for Nonlinear System with Uncertainty in Initial Conditions / A. A. Kabanov, V. A. Kramar // 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). – Sochi, 2020. – P. 1015–1019.

173. Kabanov, A. A. Trajectory-Tracking Control of Mobile Robot via Feedback Linearization / A. A. Kabanov, S. Stoyanov, E. N. Kabanova // Proceedings of the Second International Scientific Conference “Intelligent Information Technologies for Industry” (IITI'17). – Cham: Springer, 2017. – Vol. 2. – P. 32–41. – (Advances in Intelligent Systems and Computing; vol. 680).
174. Kang, W. Approximate linearization of nonlinear control systems / W. Kang // Systems & Control Letters. – 1994. – Vol. 23. – P. 43–52.
175. Kappos, E. Large deviations in dissipative dynamics: an optimal control approach / E. Kappos. – Berkeley: Electronics Research Laboratory, University of California, 1986. – (Report UCB/ERL M86/86).
176. Khalil, H. K. Nonlinear systems / H. K. Khalil. – 3rd ed. – New Jersey: Prentice Hall, 2002. – 750 p.
177. Khamis, A. Nonlinear optimal tracking with incomplete state information using finite-horizon State Dependent Riccati Equation (SDRE) / A. Khamis, D. S. Naidu // 2014 American Control Conference (ACC). – Portland, OR, 2014. – P. 2420–2425.
178. Khamis, A. Nonlinear Optimal Tracking with Incomplete State Information Using State Dependent Riccati Equation / A. Khamis, D. S. Naidu, D. Zydek // Progress in Systems Engineering / eds. H. Selvaraj, D. Zydek, G. Chmaj. – Cham: Springer, 2015. – P. 27–33.
179. Kim, S. Nonlinear optimal control design for underactuated two-wheeled inverted pendulum mobile platform / S. Kim, S. J. Kwon // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. – 2017. – Vol. 22, № 6. – P. 2803–2808.
180. Kim, S.-H. Electric motor control: DC, AC, and BLDC motors / S.-H. Kim. – Amsterdam: Elsevier, 2017. – 440 p.
181. Kokotovic, P. V. Singular perturbation methods in control: analysis and design / P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, J. O'Reilly. – Orlando: Academic Press, 1986. – 371 p.

182. Korayem, M. H. Finite time SDRE control design for mobile robots with differential wheels / M. H. Korayem, S. R. Nekoo, A. H. Korayem // *Journal of Mechanical Science and Technology*. – 2016. – Vol. 30, № 9. – P. 4353–4361.

183. Korayem, M. H. Finite-time state-dependent Riccati equation for time-varying nonaffine systems: Rigid and flexible joint manipulator control / M. H. Korayem, S. R. Nekoo // *ISA Transactions*. – 2015. – Vol. 54. – P. 125–144.

184. Korayem, M. H. Nonlinear optimal control via finite time horizon state-dependent Riccati equation / M. H. Korayem, S. R. Nekoo // *2014 Second RSI/ISM International Conference on Robotics and Mechatronics (ICRoM)*. – Tehran, 2014. – P. 878–883.

185. Korayem, M. H. State-dependent differential Riccati equation to track control of time-varying systems with state and control nonlinearities / M. H. Korayem, S. R. Nekoo // *ISA Transactions*. – 2015. – Vol. 57. – P. 117–135.

186. Korayem, M. H. Suboptimal tracking control of nonlinear systems via state-dependent differential Riccati equation for robotic manipulators / M. H. Korayem, S. R. Nekoo // *2015 3rd RSI International Conference on Robotics and Mechatronics (ICROM)*. – Tehran, 2015. – P. 25–30.

187. Kouvaritakis, B. *Model Predictive Control: Classical, Robust and Stochastic* / B. Kouvaritakis, M. Cannon. – Cham: Springer, 2016. – 384 p.

188. Kramar, V. Autonomous Underwater Vehicle Navigation via Sensors Maximum-Ratio Combining in Absence of Bearing Angle Data / V. Kramar, A. Kabanov, K. Dementiev // *Journal of Marine Science and Engineering*. – 2023. – Vol. 11, № 10. – P. 1847.

189. Kramar, V. A Mathematical Model for a Conceptual Design and Analyses of UAV Stabilization Systems / V. A. Kramar, A. A. Kabanov, S. Dudnikov // *Fluids*. – 2021. – Vol. 6, № 5. – Art. 172.

190. Kramar, V. Multiloop Multirate Continuous-Discrete Drone Stabilization System: An Equivalent Single-Rate Model / V. Kramar, A. Kabanov, V. Alchakov // *Drones*. – 2021. – Vol. 5, № 4. – Art. 129.

191. Kramar, V. Optimal State Estimation in Underwater Vehicle Discrete-Continuous Measurements via Augmented Hybrid Kalman Filter / V. Kramar, K. Dementiev, A. Kabanov // *Journal of Marine Science and Engineering*. – 2025. – Vol. 13, № 5. – P. 933.
192. Krasnova, S. A. Cascade Synthesis of Observers of Mixed Variables for Flexible Joint Manipulators Tracking Systems under Parametric and External Disturbances / S. A. Krasnova, A. S. Antipov, D. V. Krasnov, A. V. Utkin // *Electronics*. – 2023. – Vol. 12, Iss. 8. – P. 1930.
193. Krener, A. J. Adaptive Horizon Model Predictive Control / A. J. Krener // *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC): proceedings*. – Miami Beach, 2018. – P. 2696–2701.
194. Krishnamoorthy, D. Multistage Model Predictive Control with Online Scenario Tree Update Using Recursive Bayesian Weighting / D. Krishnamoorthy, S. Skogestad, J. Jaschke // *2019 18th European Control Conference (ECC)*. – Naples, Italy, 2019. – P. 1443–1448.
195. Krishnan, R. *Electric motor drives: modeling, analysis, and control* / R. Krishnan. – Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001. – 656 p.
196. Leidereiter, C. Quadrature-Based Scenario Tree Generation for Nonlinear Model Predictive Control / C. Leidereiter, A. Potschka, H. G. Bock // *IFAC Proceedings Volumes*. – 2014. – Vol. 47, № 3. – P. 11087–11092.
197. Lewis, F. L. *Optimal Control* / F. L. Lewis, D. L. Vrabie, V. L. Syrmos. – 3rd ed. – Hoboken, NJ: Wiley, 2012. – 560 p.
198. Li, X. R. Multiple-Model Estimation with Variable Structure: Likely Model Set Algorithm / X. R. Li, Y. Zhang ; ed. O. E. Drummond. – Orlando, FL, 1998. – P. 234–246.
199. Liang, Y.-W. Analysis of SDC matrices for successfully implementing the SDRE scheme / Y.-W. Liang, L.-G. Lin // *Automatica*. – 2013. – Vol. 49, № 10. – P. 3120–3124.
200. Lin, L. G. Fast SDDRE-based maneuvering-target interception at prespecified orientation / L. G. Lin, R. S. Wu, P. K. Huang, M. Xin, C. T. Wu, W.

W. Lin // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. – 2023. – Vol. 31, № 6. – P. 2895–2902.

201. Lin, L.-G. Computational Enhancement of the SDRE Scheme: General Theory and Robotic Control System / L.-G. Lin, M. Xin // *IEEE Transactions on Robotics*. – 2020. – Vol. 36, № 3. – P. 875–893.

202. Loganathan, A. A systematic review on recent advances in autonomous mobile robots / A. Loganathan, et al. // *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. – 2023. – Vol. 120. – P. 105876.

203. Makarov, D. SDDRE based approximate solution in trajectory tracking control problem for a model of two-wheeled differentially driven mobile robot / D. Makarov // *2021 14th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD)*. – Moscow, 2021. – P. 1–5.

204. Makarov, D. A. Synthesis of Control and State Observer for Weakly Nonlinear Systems Based on the Pseudo-Linearization Technique / D. A. Makarov // *Automatic Control and Computer Sciences*. – 2019. – Vol. 53, № 7. – P. 824–829.

205. Mdoe, Z. Stability Properties of the Adaptive Horizon Multi-Stage MPC / Z. Mdoe, D. Krishnamoorthy, J. Jäschke // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2023. – Vol. 68, № 5. – P. 3105–3112.

206. Mufti, I. H. Solution of ill-conditioned linear two-point boundary value problems by the Riccati transformation / I. H. Mufti, C. K. Chow, F. T. Stock // *SIAM Review*. – 1969. – Vol. 11, № 4. – P. 616–619.

207. Naidu, D. S. *Optimal control systems* / D. S. Naidu. – Boca Raton: CRC Press, 2003. – 275 p. – (Electrical Engineering Handbook).

208. Naidu, D. S. *Singular Perturbation Methodology in Control Systems* / D. S. Naidu. – London: P. Peregrinus on behalf of the Institution of Electrical Engineers, 1988. – 304 p.

209. Nasiri, N. Application of combined finite-time state-dependent Riccati equation terminal sliding mode control to robotic manipulators / N. Nasiri, A. Fakharian, M. B. Menhaj // *2024 10th International Conference on Artificial Intelligence and Robotics (ICAIRO)*. – Qazvin, 2024. – P. 215–220.

210. Nazari, S. Robust SDC parameterization for a class of Extended Linearization systems / S. Nazari, B. Shafai // 2011 American Control Conference. – San Francisco, CA, 2011. – P. 3742–3747.
211. Nekoo, S. R. Experimental Backward Integration for State-Dependent Differential Riccati Equation (SDDRE): A Case Study on Flapping–Wing Flying Robot / S. R. Nekoo, A. Ollero // Control Engineering Practice. – 2024. – Vol. 151. – P. 106036.
212. Nekoo, S. R. Tutorial and Review on the State-dependent Riccati Equation / S. R. Nekoo // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. – 2019. – Vol. 8, № 2. – P. 109–166.
213. Ocone, D. Asymptotic stability of the optimal filter with respect to its initial condition / D. Ocone, E. Pardoux // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1996. – Vol. 34. – P. 226–243.
214. Ornelas-Tellez, F. Reduced-order Observer for State-dependent Coefficient Factorized Nonlinear Systems / F. Ornelas-Tellez, A. Y. Alanis, J. D. Rios, M. Graff // Asian Journal of Control. – 2019. – Vol. 21, № 3. – P. 1216–1227.
215. Owis, A. H. Satellite formation control using the approximating sequence Riccati equations / A. H. Owis, M. A. Amer // Theory and Applications of Mathematics & Computer Science. – 2013. – Vol. 3, № 2. – P. 103–113.
216. Pathak, K. Applications, challenges, and solutions of unmanned aerial vehicles / K. Pathak, et al. // Frontiers in Robotics and AI. – 2023. – Vol. 10. – Article 112345.
217. Paull, L. AUV navigation and localization: A review / L. Paull, S. Saeedi, M. Seto, H. Li // IEEE Journal of Oceanic Engineering. – 2014. – Vol. 39, № 1. – P. 131–149.
218. Pearson, J. D. Approximation methods in optimal control I. Sub-optimal control / J. D. Pearson // International Journal of Electronics. – 1962. – Vol. 13, № 5. – P. 453–469.

219. Perrault, D. Sensitivity of AUV response to variations in hydrodynamic parameters / D. Perrault, N. Bose, S. O'Young, C. D. Williams // *Ocean Engineering*. – 2003. – Vol. 30, No. 6. – P. 779–811.
220. Pham, K. D. Cost Cumulant Control: State-Feedback, Finite-Horizon Paradigm with Application to Seismic Protection / K. D. Pham, M. K. Sain, S. R. Liberty // *Journal of Optimization Theory and Applications*. – 2002. – Vol. 115, № 3. – P. 685–710.
221. Pierson, W. J. A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii / W. J. Pierson, L. Moskowitz // *Journal of Geophysical Research*. – 1964. – Vol. 69, № 24. – P. 5181–5190.
222. Rawlings, J. B. Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design / J. B. Rawlings, D. Q. Mayne, M. M. Diehl. – 2nd ed. – Madison: Nob Hill Publishing, 2022. – 770 p.
223. RD Instruments. Acoustic Doppler Current Profiler Principles of Operation: A Practical Primer. – San Diego: RD Instruments, 2011. – 56 p.
224. Rigatos, G. G. Extended Kalman Filtering for Fuzzy Modeling and Multi-Sensor Fusion / G. G. Rigatos, S. G. Tzafestas // *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*. – New York: Taylor & Francis, 2007. – P. 251–266.
225. Rios, H. Non-minimum phase switched systems: HOSM based fault detection and fault identification via Volterra integral equation / H. Rios, D. Efimov, J. Davila, T. Raissi, L. Fridman, A. Zolghadri // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. – 2014. – Vol. 28. – P. 1372–1397.
226. Rucz, P. Design and Implementation of Nonlinear Control Systems for Rotary and Fixed Wing UAVs / P. Rucz, Z. Belső, B. Gáti, I. Koller, A. Turóczy // *Repüléstudományi Közlemények*. – 2015. – Vol. 27, № 3. – P. 277–300.
227. Runolfsson, T. Optimal control of a stochastic system with an exponential-of-integral performance criterion / T. Runolfsson // *Systems & Control Letters*. – 1994. – Vol. 22, № 6. – P. 451–456.

228. Rusnak, I. Stability of the SDDRE based estimator for stochastic nonlinear system / I. Rusnak // 2016 IEEE International Conference on the Science of Electrical Engineering (ICSEE), 2016. – P. 1–5.

229. Rykov, V. Sensitivity Analysis of Risk Characteristics of Complex Engineering Systems: An Application to a Subsea Pipeline Monitoring System / V. Rykov, O. Kochueva, M. Farkhadov, E. Zaripova, A. Zhaglova // Journal of Marine Science and Engineering. – 2023. – Vol. 11, No. 2. – Art. 352.

230. Sain, M. K. Cumulant minimization and robust control / M. K. Sain, C. H. Won, B. F. Spencer // Stochastic Theory and Adaptive Control / eds. T. E. Duncan, B. Pasik–Duncan. – Berlin: Springer, 1992. – P. 411–425. – (Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 184).

231. Sain, M. K. Cumulants and Risk-Sensitive Control: A Cost Mean and Variance Theory with Application to Seismic Protection of Structures / M. K. Sain, C. H. Won, B. F. Spencer, S. R. Liberty // Advances in Dynamic Games and Applications / eds. J. A. Filar, V. Gaitsgory, K. Mizukami. – Boston: Birkhäuser, 2000. – P. 427–459.

232. Salvador, S. Toward accurate dynamic time warping in linear time and space / S. Salvador, P. Chan // Intelligent Data Analysis. – 2007. – Vol. 11, № 5. – P. 561–580.

233. Sangsuk-Iam, S. Analysis of continuous-time Kalman filtering under incorrect noise covariances / S. Sangsuk-Iam, T. Bullock // Automatica. – 1988. – Vol. 24. – P. 659–669.

234. Sannuti, P. Singular perturbation analysis of cheap control problems / P. Sannuti, H. Wason // The 22nd IEEE Conference on Decision and Control. – San Antonio, 1983. – P. 231–236.

235. Sastry, S. Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control / S. Sastry. – New York: Springer–Verlag, 1999. – 824 p.

236. Schmid, M. A New Stochastic Control Paradigm Employing Large Deviations Theory / M. Schmid, J. L. Crassidis // AIAA Scitech 2019 Forum. – San Diego, 2019. – P. 2335.

237. Siciliano, B. Springer Handbook of Robotics / B. Siciliano, O. Khatib. – Berlin: Springer, 2016. – 2228 p.
238. Skorohod, B. Diffuse Algorithms for Neural and Neuro-Fuzzy Networks: With Applications in Control Engineering and Signal Processing / B. Skorohod. – United Kingdom: Elsevier, 2017. – 220 p.
239. Song, J. Improved Multiple-Model Adaptive Estimation Method for Integrated Navigation with Time-Varying Noise / J. Song, J. Li, X. Wei, C. Hu, Z. Zhang, L. Zhao, Y. Jiao // *Sensors*. – 2022. – Vol. 22, № 16. – P. 5976.
240. Sun, Z. Robust Self-Triggered MPC with Adaptive Prediction Horizon for Constrained Nonlinear Systems / Z. Sun, G. Zheng, Z. Chen // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2019. – Vol. 64, № 9. – P. 3573–3589.
241. Topputo, F. Approximate Solutions to Nonlinear Optimal Control Problems in Astrodynamics / F. Topputo, F. Bernelli-Zazzera // *ISRN Aerospace Engineering*. – 2013. – Vol. 2013. – P. 1–7.
242. Topputo, F. Optimal Selection of the Coefficient Matrix in State-Dependent Control Methods / F. Topputo, M. Miani, F. Bernelli-Zazzera // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2015. – Vol. 38, № 5. – P. 861–873.
243. Uhlenbeck, G. E. On the theory of the Brownian motion / G. E. Uhlenbeck, L. S. Ornstein // *Physical Review*. – 1930. – Vol. 36, № 5. – P. 823–841.
244. Von Alt, C. Autonomous Underwater Vehicles / C. Von Alt, M. Purcell, R. Stokey // *Proceedings of OCEANS 2003*. – San Diego, 2003. – P. 124–130.
245. Wang, L. Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB / L. Wang. – London: Springer, 2009. – 378 p.
246. Wang, X. A novel sliding mode observer for state and fault estimation in systems not satisfying matching and minimum phase conditions / X. Wang, C. Tan, D. Zhou // *Automatica*. – 2017. – Vol. 79. – P. 290–295.
247. Wang, Y. Adaptive Sliding Mode Fault-Tolerant Fuzzy Tracking Control with Application to Unmanned Marine Vehicles / Y. Wang, B. Jiang, Z.-G. Wu, S. Xie, Y. Peng // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. – 2021. – Vol. 51, № 11. – P. 1–10.

248. Whittle, P. Risk sensitive optimal control / P. Whittle. – Chichester: Wiley, 1990. – 246 p. – (Wiley–Interscience Series in Systems and Optimization).
249. Woods, D. D. Four Concepts for Resilience and the Implications for the Future of Resilience Engineering / D. D. Woods // Reliability Engineering & System Safety. – 2015. – Vol. 141. – P. 5–9.
250. Wu, Y. Review Survey of underwater robot positioning navigation / Y. Wu, et al. // Ocean Engineering. – 2019. – Vol. 182. – P. 194–212.
251. Wu, Y. Survey of underwater robot positioning navigation / Y. Wu, X. Ta, X. Li et al. // Applied Ocean Research. – 2019. – Vol. 90. – Art. 101845.
252. Yamada, K. Approximate Feedback Linearization for Nonlinear Systems and Its Application to the ACROBOT / K. Yamada, A. Yuzawa // Proceedings of the 2002 American Control Conference. – Anchorage, AK, 2002. – Vol. 2. – P. 1672–1677.
253. Zhirabok, A. N. Sliding Mode Observers for Fault Detection in Linear Dynamic Systems / A. N. Zhirabok, A. E. Shumsky, A. V. Zuev // IFAC–PapersOnLine. – 2018. – Vol. 51, № 24. – P. 1403–1408.
254. Zhirabok, A. Sliding mode observers for fault identification in linear systems not satisfying matching and minimum phase conditions / A. Zhirabok, A. Zuev, V. Filaretov, A. Shumsky // Archives of Control Sciences. – 2021. – Vol. 31, № 2. – P. 253–266.
255. Zhirabok, A. N. Method of Fault Identification in Nonlinear Systems Based on Optimal Control Methods / A. N. Zhirabok, A. V. Zuev, A. A. Kabanov, V. F. Filaretov // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2025. – Vol. 64, № 5. – P. 805–813.
256. Zuber, I. E. Modal Stabilization of a Certain Class of Nonlinear Nonstationary Systems / I. E. Zuber, A. Kh. Gelig // Vestnik St.Petersburg University. Mathematics. – 2015. – Vol. 48, № 3. – P. 140–146.
257. Zuber, I. E. Stabilization of Nonlinear Systems by Similarity Transformations / I. E. Zuber // International Journal of Stochastic Analysis. – 1998. – Vol. 11, № 4. – P. 519–526.

258. Çimen, T. Global optimal feedback control for general nonlinear systems with nonquadratic performance criteria / T. Çimen, S. P. Banks // *Systems & Control Letters*. – 2004. – Vol. 53, № 5. – P. 327–346.
259. Çimen, T. Nonlinear optimal tracking control with application to super-tankers for autopilot design / T. Çimen, S. P. Banks // *Automatica*. – 2004. – Vol. 40, № 11. – P. 1845–1863.
260. Çimen, T. State-dependent Riccati equation (SDRE) control: A survey / T. Çimen // *IFAC Proceedings Volumes*. – 2008. – Vol. 41, № 2. – P. 3761–3775.
261. Çimen, T. Survey of State-Dependent Riccati Equation in Nonlinear Optimal Feedback Control Synthesis / T. Çimen // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2012. – Vol. 35, № 4. – P. 1025–1047.
262. Çimen, T. Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state-dependent Riccati equation (SDRE) method / T. Çimen // *Annual Reviews in Control*. – 2010. – Vol. 34, № 1. – P. 32–51.
263. Øksendal, B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* / B. Øksendal. – 6th ed. – Berlin: Springer, 2003. – 384 p.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### А.1 Акт внедрения ФГБУН «Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук»



МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ И ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ  
Дальневосточного отделения Российской академии наук  
(ИАПУ ДВО РАН)

Радио ул., д. 5, Владивосток, 690041

Тел./факс (423) 2310439, 2310452 E-mail: director@iacp.dvo.ru http: www.iacp.dvo.ru  
ОКПО 02698217, ОГРН 1022502127878 ИНН/КПП 2539007627/253901001

УТВЕРЖДАЮ  
директор ИАПУ ДВО РАН  
(должность руководителя государственного органа  
(организации) или уполномоченного им лица)  
чл.-корр. РАН Р.В. Ромашко  
(подпись, учёная степень, инициалы, фамилия)  
« 16 » мая 2026 г.

#### АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы  
Методы и алгоритмы управления автономными подвижными объектами  
на основе структурно-параметрического синтеза  
Кабанова Алексея Александровича

Комиссия в составе председателя, заведующего лабораторией аэрокосмических и морских робототехнических комплексов (№66) д.т.н. А. В. Зуева и членов: старшего научного сотрудника лаборатории № 66 к.т.н. А. А. Проценко и старшего научного сотрудника лаборатории № 66 к.т.н. И. В. Горностаева составила настоящий акт в том, что результаты диссертационной работы А. А. Кабанова «Методы и алгоритмы управления автономными подвижными объектами на основе структурно-параметрического синтеза» использованы при выполнении научно-исследовательских работ по созданию систем управления электроприводами робототехнических комплексов, а именно:

1. Методы и алгоритмы оценивания неизмеряемых возмущений на основе сведения к вспомогательной задаче оптимального следящего управления, включая астатические наблюдатели, использованы при разработке системы управления электроприводом подводного манипулятора.

2. Канонические преобразования нелинейных систем к SDC-форме использованы при построении редуцированных наблюдателей для движителей подводного робота.

Председатель комиссии: Зуев д.т.н. А. В. Зуев

Члены комиссии:

Проценко / к.т.н. А. А. Проценко

Горностаев / к.т.н. И. В. Горностаев

## А.2 Акт внедрения АО «Научно-Производственное Предприятие Подводных Технологий «Океанос»

«УТВЕРЖДАЮ»

Генеральный директор  
АО «НПП ПТ «Океанос»

 /Иванова Е.Н./

« 09 » апреля 2026 г.



АКТ

о внедрении результатов диссертации  
Кабанова Алексея Александровича

Комиссия в составе:

- председателя – Маевского Андрея Михайловича, кандидат технических наук, старший научный сотрудник,
  - членов комиссии
    - Волошина Сергея Борисовича, заместителя генерального директора, главного конструктора;
    - Терещатова Константина Алексеевича, начальника конструкторского отдела;
    - Овчинникова Олега Александровича, инженера электронщика,
- составила настоящий акт о нижеследующем.

Существо внедрения:

В ходе опытно-конструкторских работ по созданию системы управления автономным необитаемым подводным аппаратом (АНПА) использованы следующие разработки Кабанова А.А., полученные в рамках диссертационного исследования:

- метод и алгоритм оценивания внешних возмущений (морских течений, волновых нагрузок) на основе оптимальных наблюдателей. Позволяют восстанавливать неизмеряемые силы и моменты без явной модели возмущений и реализовывать их активную компенсацию в контуре управления.


- алгоритм управления с учётом прогнозирования критических отклонений. Алгоритм обеспечивает: расчёт в реальном времени оценки вероятности выхода траектории аппарата за пределы допустимой области и упреждающее переключение параметров регулятора при высоком уровне риска.


Внедрение позволит обеспечить долгосрочную устойчивую работу аппарата при внезапных изменениях гидродинамической обстановки (резкое усиление течения, смена направления волны) за счёт упреждающего управления. Внедрение выполнено без дополнительных аппаратных затрат, в рамках существующего бортового вычислителя.

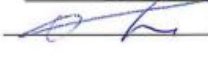
Председатель комиссии:

 /Маевский А.М./

Члены комиссии:

 /Волошин С.Б./

 /Терещатов К.А./

 /Овчинников О.А./

### А.3 Акт внедрения ПАО «Дальприбор»

«УТВЕРЖДАЮ»  
 Генеральный директор  
 ПАО «Дальприбор»  
 Р.Э. Литков/  
 « 22 » \_\_\_\_\_ 2026 г.



АКТ

о внедрении результатов научно-исследовательской работы  
 (диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук)  
 выполненной к.т.н., доцентом  
 Кабановым Алексеем Александровичем

Комиссия в составе: председателя – гл. конструктора, к.т.н. Д.Д. Минаева, членов комиссии – зам. гл. конструктора, к.т.н. Чудакова А.И., вед. специалиста, к.т.н. Мальцева Ю.В. – составила настоящий акт о следующем.

В рамках работ по исследованию методов выделения движущихся объектов на изображениях, получаемых от гидроакустических станций, использован SDC-фильтр Калмана с диффузной инициализацией – метод, разработанный Кабановым А.А. в диссертационной работе. При решении задач обработки гидроакустической информации – отслеживания свободно дрейфующих объектов по редким и зашумлённым измерениям – классический расширенный фильтр Калмана требует предварительного задания начальных координат, скорости и ускорения сопровождаемого объекта. Однако в реальных условиях гидроакустического наблюдения объект может появиться в любой точке зоны обзора в произвольный момент времени, и его начальное состояние полностью неизвестно. Именно для этого класса задач разработанный Кабановым А.А. метод позволяет начинать сопровождение без какой-либо априорной информации, используя диффузную инициализацию ковариационной матрицы. Помимо этого, применение SDC-представления нелинейной динамики объекта обеспечивает более устойчивый прогноз на длинных интервалах между гидроакустическими обновлениями по сравнению с пошаговой линеаризацией ЕKF.

В результате внедрения указанного метода достигнута устойчивая работа алгоритма трекинга в условиях полной неопределённости начальных данных. Данный результат признан целесообразным для использования при модернизации программного обеспечения гидроакустических комплексов типа «Манжетка» и их перспективных модификаций.

Председатель комиссии:

Члены комиссии:

\_\_\_\_\_/Д.Д. Минаев/  
 \_\_\_\_\_/А.И. Чудаков/  
 \_\_\_\_\_/Ю.В. Мальцев/



## А.4 Акт внедрения ООО «РОБОКОРП»



ООО «РОБОКОРП»  
299053, г. Севастополь  
ул. Руднева, д. 41, офис Н-41  
Эл. почта: info@robocorp.com  
Сайт: robocorp.com

«УТВЕРЖДАЮ»

Генеральный директор  
ООО «РОБОКОРП», к.т.н.



А.А. Чуклин/  
2026 г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационного исследования  
Кабанова Алексея Александровича

Комиссия в составе:

председателя – Черёмухина Юрия Дмитриевича, к.т.н,


членов комиссии – Васильева Дениса Михайловича, Ермакова Игоря Александровича, составила настоящий акт о том, что в ООО «РОБОКОРП» при разработке информационно-управляющих систем подводных роботов использованы следующие методы и алгоритмы, полученные в диссертационной работе Кабанова А.А.:

1. Метод и алгоритм SDC-фильтра Калмана с диффузной инициализацией – применены в системе позиционирования автономных (АНПА) и телеуправляемых (ТНПА) подводных аппаратов. Обеспечивают высокоточную оценку координат и углов ориентации при полном отсутствии априорной информации о начальном состоянии («холодный старт»).

2. Метод и алгоритм прогнозирующего управления с адаптивным горизонтом и компенсацией возмущений – использованы для построения системы управления движением АНПА МХ-1.

Созданные алгоритмы позволят обеспечить гарантированную работоспособность навигационной системы сразу после включения аппарата без предварительного задания начальных координат, повысить точность удержания на точке и качество отработки сложных пространственных траекторий в условиях нестационарных гидродинамических возмущений.

Председатель комиссии:

 /Ю.Д. Черёмухин/

Члены комиссии:

 /Д.М. Васильев/

 /И.А. Ермаков/

## А.5 Акт внедрения АНО «Институт морского приборостроения и робототехники»

АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ  
«ИНСТИТУТ МОРСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ И  
РОБОТОТЕХНИКИ»  
ул. Университетская, д. 31, пом. 2.8,  
г. Севастополь, 299053

ИНН / КПП 9200000727 / 920001001

30.09.2025 № 87/05/1  
На № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ»

Директор  
АНО «Институт морского  
приборостроения и робототехники»

/С.Ю. Дудников/



09 2025 г.

### АКТ

о внедрении результатов диссертационного исследования  
Кабанова Алексея Александровича

Настоящим подтверждается, что в АНО «Институт морского приборостроения и робототехники» при создании перспективных автономных необитаемых подводных аппаратов, их элементов и подсистем использованы следующие результаты диссертационной работы Кабанова А.А.:

1. Метод ситуационного прогнозирования на основе анализа больших уклонений с адаптацией параметров регулятора;

2. SDC-фильтр Калмана с диффузной инициализацией для оценки состояния при полной неопределённости начальных условий;

Потенциальные эффекты от использования:

1. Снижение вероятности выхода АНПА в критические режимы (потеря управляемости, столкновение) за счёт упреждающего распознавания опасных сценариев.

2. Сокращение времени выхода на штатный режим управления при «холодном старте» благодаря диффузной инициализации фильтра.

3. Снижение вычислительной нагрузки бортового контроллера до 20% за счёт адаптивного выбора горизонта прогнозирования в штатных режимах, что подтверждено модельными экспериментами.

4. Возможность работы системы управления без априорных данных о начальном положении, что критически важно при аварийном всплытии и перезапуске.

Достигнутые технические эффекты подтверждены в ходе стендовых испытаний.

ГК, научный руководитель АНО «ИМПР»  /Д.Б. Генович /  
(должность, подпись, расшифровка)

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б.

### Описание комплекса программ моделирования функционально устойчивой системы управления АНПА

#### Б.1. Общее назначение комплекса

Комплекс программ предназначен для математического моделирования движения автономного необитаемого подводного аппарата (АНПА) типа ММТ-300 в возмущённой среде с одновременным синтезом и исследованием алгоритмов управления, наблюдения состояния и оценки внешних возмущений. Основу составляет нелинейная модель движения АНПА в инерциальной системе координат с вектором состояния  $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\eta}^T, \mathbf{v}^T]^T \in \mathbb{R}^{12}$ , где  $\boldsymbol{\eta} = [x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T$  – положения и углы Эйлера,  $\mathbf{v} = [u, v, w, p, q, r]^T$  – линейные и угловые скорости в связанной системе координат.

Комплекс реализует полный цикл исследований: от загрузки параметров аппарата и генерации стохастических возмущений до статистического анализа по методу Монте-Карло с  $N$  независимыми симуляциями. Все модули написаны на языке MATLAB и используют средства параллельных вычислений (parfor) для ускорения массовых расчётов.

#### Б.2. Структура комплекса

Комплекс состоит из 28 файлов-функций и скриптов, разделённых по функциональному назначению на шесть групп.

##### Б.2.1 Модель аппарата и параметры

Модель динамики описана в подразделе 6.1.1. В таблице Б.1 представлены файлов-функции и скрипты, реализующие эту модель.

Таблица Б.1. Файлы-функции и скрипты для модели динамики АНПА

Файл	Назначение
defineParameters.m	Загрузка гидродинамических параметров АНПА ММТ-300: масса, моменты инерции, присоединённые массы, коэффициенты линейного и квадратичного демпфирования, параметры восстанавливающих сил, шумы измерений, весовые матрицы регулятора и МРС, параметры трёх режимов управления (base/cautious/critical)
kinematicMatrix.m	Кинематическая матрица Якоби $\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})$ для преобразования скоростей из связанной системы в инерциальную
coriolisMatrix.m	Матрица Кориолиса–центробежных сил $\mathbf{C}(\mathbf{v})$ с учётом присоединённых масс
dampingMatrix.m	Матрица гидродинамического демпфирования $\mathbf{D}(\mathbf{v})$ с линейной и квадратичной составляющими
restoringForces.m	Вектор восстанавливающих сил и моментов $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$

### Б.2.2 Генерация траекторий и возмущений

Генератор желаемых траекторий реализован двумя файлами: createTrajectory.m и trajectoryGenerator.m (см. табл. Б.2). Принцип работы: createTrajectory.m создаёт структуру параметров trajParam по заданному типу, а trajectoryGenerator.m вычисляет в произвольный момент времени  $t$  желаемые значения  $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ ,  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_d(t)$  и скорости в связанной системе  $\mathbf{v}_d(t) = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_d)\dot{\boldsymbol{\eta}}_d$ . Поддерживается 4 типа траекторий, указанных в таблице Б.3. Траектория «task» наиболее сложная: один цикл состоит из 4 фаз – два прямых участка и два полукруговых поворота на  $180^\circ$ . За один цикл аппарат смещается по  $Y$  на  $4R_{turn} = 48$  м. Курс  $\psi$  вычисляется аналитически: на прямых – константа (0 или  $\pi$ ), на поворотах – линейно изменяется с угловой скоростью  $\pm\pi/t_{turn}$ .

Таблица Б.2. Файлы-функции для генератора траекторий

Файл	Назначение
createTrajectory.m	Создание структуры параметров траектории; поддерживаемые типы: circle, helix, line, task
trajectoryGenerator.m	Вычисление желаемого положения $\boldsymbol{\eta}_d(t)$ , скорости $\dot{\boldsymbol{\eta}}_d(t)$ и производных по запросу в произвольный момент времени

Генерация возмущений выполняется в соответствии с моделями из 6.1.2 реализована в файле `generate_disturbances.m`, где формируется три независимых стохастических воздействия (волнение, течение и аддитивный белый шум) на интервале  $[0, T_f]$ . Все три процесса генерируются заранее на всём горизонте, а затем оборачиваются в `function handle` через функцию `interp1` – это позволяет передавать их в ODE-решатель как непрерывные функции времени. В цикле Монте-Карло каждая симуляция инициализируется своим параметром `rng(n, 'twister')` для воспроизводимости.

Таблица Б.3. Типы реализованных траекторий в генераторе

Тип	Описание	Ключевые параметры
<code>circle</code>	Окружность в горизонтальной плоскости, постоянная глубина $z = -5$ м	$R = 20$ м, $v = 1,5$ м/с, $\omega = v/R$
<code>helix</code>	Винтовая линия — окружность с одновременным погружением	$R = 20$ м, $v_h = 1,2$ м/с, $v_z = 0,3$ м/с
<code>line</code>	Прямолинейное движение вдоль заданного направления	$v = 1,5$ м/с, направление $[1; 0; 0]$
<code>tack</code>	Галсовое (челночное) движение с продвижением по оси $Y$ — используется в основном скрипте	$v = 1,2$ м/с, $L = 50$ м, $R_{turn} = 12$ м

### Б.2.3 Номинальная система и предварительные вычисления

Этот блок охватывает три последовательных этапа, которые выполняются один раз до запуска цикла Монте-Карло. Состав файлов показан в табл. Б.4.

Файл `nominal_modeling.m` моделирует номинальное движение с оптимальным регулятором. После моделирования номинального движения для каждого узла временной сетки вычисляется линеаризованная матрица  $\mathbf{A}_{lin}(t)$  – якобиан правой части уравнений движения в точке номинальной траектории. Затем вычисляется оптимальная матрица обратной связи  $\mathbf{K}(t)$ , и формируется матрица замкнутой системы уклонений  $\mathbf{A}_\delta(t)$ . Полученный трёхмерный массив  $\mathbf{A}_\delta(t)$  размера  $12 \times 12 \times N_{nom}$  ( $N_{nom}$  – это количество узлов временной сетки номинальной траектории) хранится в памяти и в дальнейшем используется в MPC-регуляторе уклонений и при генерации базы сценариев.

Таблица Б.4. Файлы-функции для номинальной системы

Файл	Назначение
nominal_modeling.m	Скрипт моделирования номинальной (невозмущённой) системы с оптимальным следящим регулятором (по методу раздела 3.2) с замороженным решением уравнения Риккати на горизонте $\Delta t_c$ , что снижает вычислительную нагрузку, не теряя точности для медленно меняющейся нелинейной системы; результат waypoints на равномерную сетку.
ode_rhs_nominal_kabanov_opt.m	Правая часть ДУ номинальной системы в расширенном пространстве $[\mathbf{x}_{nom}; \mathbf{u}_{nom}; \mathbf{g}; \dot{\mathbf{g}}]^T$
A_delta_computation.m	Скрипт вычисления матриц $\mathbf{A}_\delta(t) = \mathbf{A}_{lin}(t) - \mathbf{BK}(t)$ для системы уклонений на временной сетке номинала; $\mathbf{K}(t)$ — матрица обратной связи из решения уравнения Риккати
compute_A_lin_body.m	Численный якобиан линеаризованной правой части в связанных координатах

### Б.2.4 Наблюдатели и оценка возмущений

В системе реализованы два независимых наблюдателя, работающих параллельно в каждом шаге ODE (см.табл.Б.5).

Таблица Б.5. Файлы-функции для наблюдателей

Файл	Назначение
ode_rhs_full_MPC.m	Полная правая часть ДУ возмущённой системы содержит истинную динамику, SDC-фильтр Калмана для оценки состояния, 6 редуцированных наблюдателей возмущений, номинальную систему
compute_nu_dynamics_from_meas.m	Вычисление правой части уравнений движения по скоростям (из измерений) для редуцированных наблюдателей

SDC-фильтр Калмана – это полноразмерный (12-мерный) непрерывный фильтр, который восстанавливает полный вектор состояния  $\mathbf{x}_\xi$  по зашумлённым измерениям. Расчет матрицы ковариации ошибки оценивания

фильтра реализован согласно подразделу 6.2.4 и хранится в расширенном векторе состояния как 78-элементный вектор (верхняя треугольная часть). Оценка  $\hat{\mathbf{x}}_\xi$  используется регулятором для формирования номинального управления.

Редуцированные наблюдатели возмущений представляют собой 6 независимых наблюдателей второго порядка (по одному на каждый канал скорости), построенных по материалам подраздела 6.2.5. Каждый наблюдатель оценивает пару скорость и внешнее возмущение в своём канале — на основе «известного» члена  $f_i = \mathbf{Q}_i^T \dot{\mathbf{v}}_{meas}$ , где  $\dot{\mathbf{v}}_{meas}$  вычисляется функцией `compute_nu_dynamics_from_meas.m`.

### **Б.2.5 MPC-регулятор уклонений и анализ риска**

Раздел объединяет программные файлы для двух взаимосвязанных механизмов: упреждающую оценку риска на основе базы сценариев и корректирующее управление методом tube-based MPC, которые вместе обеспечивают вероятностную безопасность движения в условиях неопределённости (см. табл.Б.6). Подготовительная часть выполняется один раз до начала моделирования. Функция `build_scenarios_parametric` строит библиотеку А-профилей уклонений, решая для каждого значения радиуса трубки задачу оптимального перевода в наихудшем направлении выхода — тем самым заранее формализуется представление о том, как именно система «уходит» за допустимые границы. Критическое время этого выхода определяется функцией `compute_tau_star`, опирающейся на теорию больших уклонений, а сам функционал действия для линейной стохастической системы вычисляет `computeActionFun`. Ковариационный анализ во всех этих вычислениях опирается на вспомогательную функцию `luqr_solve`.

В режиме реального времени на каждом шаге управления функция `match_scenarios_online` сопоставляет наблюдаемую историю уклонения с профилями из базы и вычисляет интегральный показатель риска. Если риск превышает пороги, система переключает режим работы, меняя горизонт

прогноза и жёсткость ограничений. Непосредственно корректирующее управление вырабатывает `mpc_solve_tube_local`.

Таблица Б.6. Файлы-функции для MPC-регулятора и анализа риска

Файл	Назначение
<code>mpc_solve_tube_local.m</code>	Решение задачи квадратичного программирования (QP) для tube-based MPC на системе уклонений за горизонт $N_{hor}$ шагов; ограничения на состояние заданы суженным радиусом трубки
<code>build_scenarios_parametric.m</code>	Генерация базы сценариев опасных уклонений путём решения задачи оптимального перевода в наихудшем направлении выхода за границу
<code>match_scenarios_online.m</code>	Онлайн-сопоставление скользящего окна наблюдаемых уклонений с базой сценариев методом softmax; вычисление интегрального показателя риска
<code>compute_tau_star.m</code>	Поиск критического времени $\tau^*$ — момента наиболее вероятного первого выхода за пределы трубки, основанный на функционале действия теории больших уклонений
<code>computeActionFun.m</code>	Вычисление функционала действия для стохастической системы уклонений
<code>lyap_solve.m</code>	Решение алгебраического уравнения Ляпунова

### Б.2.6 Вспомогательные функции и постобработка

Ниже в табл. Б.7 дана информация о вспомогательных функциях

Таблица Б.7. Вспомогательные функции

Файл	Назначение
<code>riccati_mat_to_vec.m</code> <code>riccati_vec_to_mat.m</code>	/ Упаковка и распаковка верхнетреугольной части матрицы Риккати в вектор (78 элементов для $12 \times 12$ ) для передачи через ODE-решатель
<code>ode_progress.m</code>	Функция обратного вызова ODE-решателя для отображения прогресса
<code>plot_results.m</code>	Скрипт визуализации результатов одиночной симуляции
<code>plot_scenario_match.m</code>	Визуализация совпадений сценариев и истории риска

### Б.3. Главный скрипт и алгоритм работы

Главный скрипт `main_MPC_par_for.m` реализует следующую последовательность:

1. Инициализация. Загрузка параметров `defineParameters`, задание флагов возмущений, типа траектории, шага  $\Delta t_c$  с, горизонта  $T_f$  с.

2. Номинальная симуляция. Скрипт `nominal_modeling` интегрирует невозмущённую систему с регулятором Кабанова, результат интерполируется на равномерную сетку.

3. Предвычисление  $\mathbf{A}_\delta(t)$ . Скрипт `A_delta_computation` вычисляет матрицы системы уклонений вдоль номинальной траектории.

4. Генерация базы сценариев. Функция `build_scenarios_parametric` строит набор опасных профилей уклонений; результат кешируется в файле `directional_scenarios.mat`.

5. Монте-Карло. В цикле `parfor` запускается  $N_{sim}$  независимых симуляций; для каждой генерируются уникальные реализации возмущений, выполняется поэлементное интегрирование ОДУ с обновлением MPC-управления каждые  $\Delta t = 0,1$  с.

6. Статистика. Вычисляются доля выходов за трубку  $K_{dev} = 0,2$  м, гистограмма максимальных отклонений, средние и квантили.

7. Визуализация. Для первых `max_plots` аварийных траекторий строятся 3D-траектории, графики управлений, уклонений и режимов.

8. Расширенный вектор состояния в правой части ОДУ `ode_rhs_full_MPC` имеет размерность 162:  $\mathbf{x}_{true}$ : истинное состояние, размерность 12;  $\hat{\mathbf{x}}$ : оценка SDC-фильтра, размерность 12;  $\mathbf{x}_{nom}$ : состояние номинальной системы, размерность 12;  $\mathbf{u}_{nom}$ : номинальное управление, размерность 6;  $\mathbf{p}$ : верхняя треугольная часть матрицы  $\mathbf{P}$ , размерность 78;  $\mathbf{z}_{red}$ : состояния редуцированных наблюдателей, размерность 12;  $\mathbf{g}_{z,red}$ : вспомогательные переменные наблюдателей, размерность 12;  $\mathbf{g}$ :

вспомогательная переменная астатического номинального регулятора, размерность 18.

#### **Б.4. Требования и зависимости**

Для работы комплекса необходимы следующие инструментальные средства:

- MATLAB R2020b и выше;
- Optimization Toolbox (функция `quadprog` для решения задачи QP в MPC);
- Control System Toolbox (функция `icare` для алгебраического уравнения Риккати);
- Parallel Computing **Toolbox** (цикл `parfor` для Монте-Карло).

Все файлы комплекса должны быть размещены в одном рабочем каталоге MATLAB. Точкой входа является скрипт `main_MPC_par_for.m`. При первом запуске автоматически генерируется и сохраняется база сценариев `directional_scenarios.mat`; при последующих запусках база загружается из файла для экономии времени.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В.

## Зарегистрированные патенты и свидетельства

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**ПАТЕНТ**

НА ПОЛЕЗНУЮ МОДЕЛЬ

№ 195040

**Система оперативного контроля крена судна на волнении**

Патентообладатель: *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Севастопольский государственный университет" (RU)*

Авторы: *Дубовик Сергей Андреевич (RU), Кабанов Алексей Александрович (RU), Липко Иван Юрьевич (RU)*

Заявка № 2019120148

Приоритет полезной модели 26 июня 2019 г.

Дата государственной регистрации в Государственном реестре полезных моделей Российской Федерации 14 января 2020 г.

Срок действия исключительного права на полезную модель истекает 26 июня 2029 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

 Г.П. Ивлиев


## РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2019662838

Комплексная программа стенда имитации качки судна

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Севастопольский государственный университет» (RU)*

Авторы: *Лазарев Виктор Борисович (RU), Дубовик Сергей Андреевич (RU), Кабанов Алексей Александрович (RU), Липко Иван Юрьевич (RU), Осадченко Александр Евгеньевич (RU), Путин Александр Николаевич (RU), Тыщенко Владислав Петрович (RU)*

Заявка № 2019617973

Дата поступления 01 июля 2019 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 03 октября 2019 г.



Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

*Г.П. Ивлиев* Г.П. Ивлиев

## РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2026664443

**Программный комплекс расчета и моделирования  
функционально устойчивой системы управления  
автономным обитаемым подводным аппаратом**

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Севастопольский государственный университет» (RU)*

Автор(ы): *Кабанов Алексей Александрович (RU)*

Заявка № **2026663550**

Дата поступления **28 апреля 2026 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **15 мая 2026 г.**



*Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ  
Сертификат 00a570e1f7a4d3d531b4b8818e75f29506  
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**  
Действителен с 04.09.2025 по 28.11.2026

*Ю.С. Зубов*