

На правах рукописи

Хвостов Михаил Николаевич

**МАТРИЧНАЯ КОРРЕКЦИЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ  
ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ  
СТРУКТУРОЙ**

05.13.17 — Теоретические основы информатики

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор Ерохин В.И.

Москва — 2016

Работа выполнена в Борисоглебском филиале  
Федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования  
«Воронежский государственный университет».

Научный руководитель: **Ерохин Владимир Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное военное образовательное учреждение высшего образования «Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского» Министерства обороны Российской Федерации, старший научный сотрудник.

Официальные оппоненты: **Хачай Михаил Юрьевич**, доктор физико-математических наук, профессор РАН, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, заведующий Отделом математического программирования.

**Муравьева Ольга Викторовна**, кандидат физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский педагогический государственный университет», доцент кафедры теоретической информатики и дискретной математики математического факультета.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет».

Защита состоится «\_\_» \_\_\_\_\_ 2016г. в \_\_:\_\_ на заседании диссертационного совета Д 002.073.05 при Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», расположенном по адресу: 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, кор. 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук» и на сайте <http://web.frccsc.ru>.

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2016г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 002.073.05,  
д.ф.-м.н., профессор

В.В. Рязанов

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Линейные оптимизационные модели широко применяются в экономике и технике, задачах помехоустойчивого анализа экспериментальных данных, гарантирующего оценивания параметров, распознавания образов и классификации. Указанные модели представляют собой совокупность объектов двух классов: систем линейных алгебраических уравнений и задач линейного программирования, которые объединяет совместная математическая теория. Так, результаты, полученные для систем линейных алгебраических уравнений, имеют важное значение и для задач линейного программирования. Таким образом, для решения задач линейного программирования имеется достаточно мощный математический аппарат.

Однако на практике часто встречаются неразрешимые задачи линейного программирования. Основными причинами их возникновения являются погрешности (шум) в экспериментальных данных, ошибки округления, возникающие при вычислениях в арифметике с конечной разрядностью, а также нечеткость и противоречивость информации, используемой при построении указанных моделей. Такие задачи принято называть противоречивыми или несобственными.

В связи с тем, что несобственная задача линейного программирования не позволяет получить содержательную информацию об исследуемом процессе или явлении непосредственно, возникает необходимость в ее уточнении, изменении, в результате чего должна быть получена собственная задача, в некотором смысле «близкая» к исходной. Т.е. возникает задача предварительной обработки данных. Если рассматриваются модели малой размерности, то ситуация неразрешимости преодолевается достаточно простыми средствами: контроль правильности исходных данных с последующей их правкой, ослабление некоторых ограничений или их полное исключение из модели и т.д. Однако в случае модели высокой размерности или при автоматизированном (программном) формировании модели, необходимы более сложные (программно обеспеченные) средства коррекции данных. Таким образом, матричная коррекция может являться инструментом обработки данных (информации), позволяющим решать задачи линейного программирования с зашумленными, неопределенными, нечеткими данными, что позволяет ее включить в область исследования теоретических основ

информатики.

Несмотря на то, что изучение методов коррекции данных несобственных задач линейного программирования является относительно новым направлением развития теоретической информатики, предпосылки к исследованию проблем коррекции данных несобственных задач выпуклого программирования и противоречивых систем линейных алгебраических уравнений можно проследить еще в работах А.Н. Тихонова. Систематические же исследования в данной области были начаты в 80-х годах (XX века) И.И. Еремиными, его учениками и коллегами: Н.Н. Астафьевым, А.А. Ватолиным, Вл.Д. Мазуровым, Л.Д. Поповым, В.Д. Скариным, С.П. Трофимовым, В.Н. Фроловым и другими.

В работах перечисленных авторов рассматриваются несобственные задачи линейного и выпуклого программирования, вводятся соответствующая терминология и классификация несобственных задач линейного программирования, строится и исследуется теория двойственности, вводятся и исследуются дискретные аппроксимации решений – комитетные конструкции, предлагаются различные постановки и методы решения задач полной или частичной (правая часть системы уравнений или неравенств) параметрической коррекции и их содержательная, в основном экономическая, интерпретация. В большинстве исследований рассматривается коррекция по вектору правой части ограничений и коэффициентам вектора целевой функции.

В конце 90-х годов (XX в.) исследования в области коррекции несобственных задач линейного программирования были продолжены (а также продолжают в настоящее время) в ВЦ им. А.А. Дородницына РАН и Московском педагогическом государственном университете В.А. Гореликом, его учениками и коллегами: В.И. Ерохиным, В.А. Кондратьевой, О.В. Муравьевой, Р.Р. Ибатуллиным, Р.В. Печенкиным, И.А. Золтовой и другими. Указанными авторами широко исследовалась коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений при условии неотрицательности решения, а так же показана их тесная связь с задачами матричной коррекции несобственных задач линейного программирования.

Кроме того, коррекция допустимой области задачи линейного программирования без обеспечения непустоты допустимой области соответствующей двойственной задачи, не гарантирует собственность скорректи-

рованной линейной оптимизационной модели. Одними из первых трудов в области матричной коррекции двойственной пары задач линейного программирования были работы Еремина И.И., Ватолина А.А., Трофимова С.П., Астафьева Н.Н., Ерохина В.И. В настоящее время работы в области матричной коррекции двойственной пары задач линейного программирования активно ведутся Ерохиным В.И., Красниковым А.С., Баркаловой О.С. не только по критерию евклидовой нормы, но и по минимуму полиэдральных норм.

Однако применение теории двойственности приводит как к увеличению размерности решаемой задачи, так и к усложнению алгоритма ее решения. Поэтому, важным аспектом является как можно более точное определение области применимости методов оптимизации, основанных на коррекции только прямой задачи линейного программирования.

Следует отметить, что методы матричной коррекции данных, разработанные перечисленными выше авторами, фактически сводятся к коррекции допустимой области задач линейного программирования. Указанные методы опираются на лемму Тихонова и ее модификации на нормы, отличные от евклидовой, и поэтому имеют специальный вид (оптимальные матрицы коррекции оказываются одноранговыми). Между тем, структура данных прикладной задачи может иметь более сложный вид: быть блочной, разреженной, иметь фиксированные элементы, строки или столбцы, коррекция которых запрещена. Такие задачи рассматривались и раньше, однако до сих пор не выработано единого подхода к исследованию таких задач. Таким образом, для решения задач линейного программирования со специальной структурой требуется разработка специального математического аппарата.

В свою очередь, специальная структура матрицы коррекции задается расположением фиксированных элементов расширенных матриц задач линейного программирования. Необходимость в фиксировании элементов чаще всего возникает при обработке разреженных матриц, нулевые значения элементов которых соответствуют аргументам, не влияющим на конкретное уравнение системы ограничений, и при решении задач линейного программирования с системами ограничений, содержащими освобожденные от коррекции элементы в связи с физическим смыслом задачи. Разреженные матрицы возникают при моделировании явлений и процессов,

представляющих собой системы, состоящие из более мелких подсистем, слабо связанных между собой. Такая ситуация на практике возникает в случае наличия большого числа аргументов, связанных большим числом уравнений. Таким образом, задачи со структурной матричной коррекцией возникают чаще всего при изучении задач линейного программирования высокой размерности. Далее, если нет соответствующих оговорок, будем считать, что имеем задачу со специальной структурой, которая является задачей высокой размерности.

В большинстве исследований численные методы решения задачи математического программирования к которой сводится исходная задача матричной коррекции данных не рассматриваются. Исключениями могут служить работы В.А. Горелика, В.И. Ерохина, Р.В. Печенкина, И.А. Золтовой, Н.З. Ле в которых намечаются подходы к разработке соответствующих численных методов и алгоритмов матричной коррекции данных на основе TLN (Total Least Norm – алгоритм обобщенной наименьшей нормы) и метода Ньютона. К данному ряду работ можно отнести работы В.И. Ерохина и А.С. Красникова, исследовавших численные методы коррекции данных с применением метода Марквардта.

Тем не менее, чтобы матричная коррекция стала реально работающим инструментом анализа данных, формализуемых с помощью линейных оптимизационных моделей, необходимо более широко исследовать соответствующие численные методы и алгоритмы, добиваться их эффективности, проверять на большем количестве возникающих на практике задач.

Таким образом, актуальной **научной проблемой** является развитие методов и алгоритмов оптимальной матричной коррекции данных несобственных задач линейного программирования 1-го рода, позволяющих включать несобственные линейные оптимизационные модели в число допустимых и конструктивно используемых методов теоретической информатики.

**Объектом исследования** является проблема матричной коррекции данных несобственных задач линейного программирования, возникающих в задачах линейной оптимизации, связанных с многочисленными приложениями теоретической информатики (классификация, гарантирующее оценивание параметров и др.).

**Предмет исследования** составляют задачи коррекции данных несобственных задач линейного программирования 1-го рода с евклидовой и взвешенной евклидовой матричной нормой в роли критерия качества коррекции.

**Цель работы** состоит в построении математического аппарата оптимальной по минимуму евклидовой и взвешенной евклидовой матричной норме коррекции данных несобственных задач линейного программирования 1-го рода высокой размерности, структура которых определяется произвольным множеством фиксированных (некорректируемых) элементов, и разработке соответствующих вычислительных алгоритмов.

В основу исследования положена следующая **гипотеза**. Пусть несобственная линейная оптимизационная модель является результатом неточно заданных или противоречивых исходных данных. Причем, данная оптимизационная модель представляет собой несобственную задачу ЛП 1-го рода. Оптимальная матричная коррекция, сводимая к задаче оптимизации, позволяет получить оптимальные по минимуму евклидовой нормы матрицы коррекции  $H_1^*$  или  $[H_1^* - h_1^*]$ , гарантирующие собственность и **структурный вид** скорректированной линейной модели

$$(A + H_1^*)x = b, x \geq 0, c^\top x \rightarrow \max \quad \text{или} \quad (A + H_1^*)x = b + h_1^*, x \geq 0, c^\top x \rightarrow \max$$

и соответствующие оптимальные векторы  $x_1^*$  и  $u_1^*$ . Результатами оптимальной совместной матричной коррекции, сводимой к задаче оптимизации, позволяющей получить оптимальные по минимуму евклидовой нормы матрицы коррекции являются  $H_2^*$  или  $[H_2^* - h_2^*]$ , гарантирующие собственность и структурный вид скорректированных линейных модели

$$\left\{ \begin{array}{l} (A + H_2^*)x = b, x \geq 0, c^\top x \rightarrow \max, \\ u^\top (A + H_2^*) \geq c^\top, b^\top u \rightarrow \min, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} (A + H_2^*)x = b + h_2^*, x \geq 0, c^\top x \rightarrow \max, \\ u^\top (A + H_2^*) \geq c^\top, (b + h_2^*)^\top u \rightarrow \min, \end{array} \right.$$

и соответствующие оптимальные векторы  $x_2^*$  и  $u_2^*$ . Тогда  $H_1^*$  и  $H_2^*$ ,  $h_1^*$  и  $h_2^*$ ,  $x_1^*$  и  $x_2^*$ ,  $u_1^*$  и  $u_2^*$  попарно совпадают.

Для достижения поставленной цели и проверки правильности выдвинутой гипотезы были поставлены следующие **задачи**:

1. Получить и обосновать условия существования решения несобственных задач линейного программирования 1-го рода, не имеющих специальной структуры без коррекции двойственной задачи.

2. Опираясь на теоретические результаты, полученные при решении предыдущей задачи, получить и обосновать условия существования реше-

ния несобственных задач линейного программирования 1-го рода со специальной структурой в виде запрета на коррекцию отдельных элементов расширенной матрицы коэффициентов их ограничений.

3. Разработать, теоретически обосновать и проверить в вычислительных экспериментах эффективные алгоритмы решения перечисленных выше задач оптимальной коррекции данных.

**Методологическую основу исследования** составляют методы классической и вычислительной линейной алгебры, матричного анализа, математического программирования.

**Научная новизна** диссертации заключается в том, что получены и теоретически обоснованы:

1) условия существования решения задачи оптимальной по минимуму евклидовой и взвешенной евклидовой матричных норм коррекции данных несобственных задач линейного программирования 1-го рода, гарантирующего собственность скорректированных задач и учитывающего их структуру, выраженные в терминах коррекции допустимой области прямой задачи линейного программирования,

2) конструктивные формулы построения указанного решения,

3) соответствующие численные алгоритмы квазиньютоновского типа с аналитическим вычислением производных.

**Практическая значимость результатов.** Подходы, полученные при разработке моделей и алгоритмов, исследованных в данной работе, могут быть использованы для построения методов и алгоритмов, направленных на решение практических задач, связанных с экономикой, техникой, анализом данных, обнаружением закономерностей в данных и их извлечением, анализом текста, устной речи и изображений, распознаванием образов, фильтрацией, распознаванием и синтезом изображений.

#### **Основные положения, выносимые на защиту:**

- достаточные условия существования решения задач оптимальной по минимуму евклидовой и взвешенной евклидовой матричных норм коррекции данных несобственных задач линейного программирования 1-го рода, выраженные в терминах коррекции допустимой области прямой задачи;

- достаточные условия существования решения задач оптимальной по минимуму евклидовой и взвешенной евклидовой матричных норм коррекции данных несобственных задач линейного программирования 1-го рода,



выраженные в терминах коррекции допустимой области прямой задачи с учетом специальной структуры;

- редукции задач матричной коррекции данных оптимальной по минимуму евклидовой и взвешенной евклидовой матричных норм несобственных задач линейного программирования 1-го рода, учитывающие ограничения на структуру корректирующей матрицы, к задачам безусловной минимизации;

- эффективные алгоритмы решения задач оптимальной по минимуму евклидовой и взвешенной евклидовой матричных норм коррекции данных несобственных задач линейного программирования 1-го рода.

**Внедрение и апробация результатов исследования.** Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на XIV-я Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 2011), Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика» (Новосибирск, 2011), Научно-технической конференции молодых ученых Санкт-Петербургского технологического института (технического университета) «Неделя науки - 2013» (Санкт-Петербург, 2013), VII Московской международной конференции по исследованию операций ORM-2013 (Москва, 2013), семинаре по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации (CNSA & NDO) Санкт-Петербургского технологического института (технического университета) (Санкт-Петербург, 2014). Кроме того, основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на научно-методических семинарах кафедры прикладной математики информатики, физики и методики их преподавания Борисоглебского филиала федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет» и кафедры инноватики и информационных технологий Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета).

Получено свидетельство о регистрации алгоритма [10].

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы.

**Во введении** обосновывается актуальность темы исследования, определяется цель работы, выдвигается гипотеза, формулируются задачи, которые необходимо решить для реализации поставленной цели и проверки выдвинутой гипотезы, указывается методологическая основа исследования, раскрывается научная новизна и практическая значимость диссертационной работы, выдвигаются основные положения, выносимые на защиту, представлено основное содержание работы.

**В первой главе** рассматриваются постановки задач матричной коррекции без структурных ограничений, структурной, а так же структурной взвешенной матричной коррекции как двойственной пары несобственных задач линейного программирования (ЛП), так и несобственной задачи ЛП первого рода в следующих постановках

Пусть

$$L(A, b, c) : Ax = b, x \geq 0, c^T x \rightarrow \max \quad (1)$$

– некоторая задача линейного программирования в канонической форме,

$$L^*(A, b, c) : u^T A \geq c^T, b^T u \rightarrow \min \quad (2)$$

– двойственная ей задача линейного программирования в стандартной форме, где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $c, x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b, u \in \mathbb{R}^m$ . Символом  $\mathcal{X}(A, b) \triangleq \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$  обозначим допустимое множество задачи  $L(A, b, c)$ , а символом  $\mathcal{U}(A, c) \triangleq \{u \mid u^T A \geq c^T\}$  – допустимое множество задачи  $L^*(A, b, c)$ .

Задачи (1), (2) условимся рассматривать как несобственные, в силу чего хотя бы одно из множеств  $\mathcal{X}(A, b)$  или  $\mathcal{U}(A, c)$  является пустым. Задачей  $D^{[H \ -h]}$  матричной коррекции пары взаимно двойственных несобственных задач ЛП  $L(A, b, c)$  и  $L^*(A, b, c)$  будем называть задачу построения матрицы  $[H \ -h] \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ , обладающей минимальной евклидовой нормой и гарантирующей разрешимость скорректированных задач

$$\begin{cases} L(A + H, b + h, c) : (A + H)x = b + h, x \geq 0, c^T x \rightarrow \max, \\ L^*(A + H, b + h, c) : u^T (A + H) \geq c^T, (b + h)^T u \rightarrow \min. \end{cases}$$

Задачей  $D^H$  матричной коррекции только левых частей ( $h = 0$ ) пары взаимно двойственных несобственных задач ЛП  $L(A, b, c)$  и  $L^*(A, b, c)$  будем называть задачу построения матрицы  $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , обладающей минимальной евклидовой нормой и гарантирующей совместность скорректированных задач

$$\begin{cases} L(A + H, b, c) : (A + H)x = b, x \geq 0, c^\top x \rightarrow \max, \\ L^*(A + H, b, c) : u^\top (A + H) \geq c^\top, b^\top u \rightarrow \min. \end{cases}$$

Одновременно с задачами  $D^{[H \ -h]}$  и  $D^H$  будем рассматривать коррекцию противоречивой системы ограничений задачи  $L(A, b, c)$ , формализованную с помощью задач

$$P^{[H \ -h]} : \begin{cases} \|[H \ -h]\| \rightarrow \min, \\ \mathcal{X}(A + H, b + h) \neq \emptyset, \end{cases} \quad P^H : \begin{cases} \|H\| \rightarrow \min, \\ \mathcal{X}(A + H, b) \neq \emptyset, \end{cases}$$

где  $\|\cdot\|$  – евклидова матричная (далее, в зависимости от контекста, матричная или векторная) норма. Допустимые множества всех рассматриваемых задач матричной коррекции будем обозначать как  $\mathbf{FS}(\cdot)$ . Например,  $\mathbf{FS}(SD^{[H \ -h]})$  – допустимое множество решений задачи  $SD^{[H \ -h]}$ .

**Теорема 1.** (О достаточных условиях существования решения задачи  $D^H$ )

*Если  $\mathcal{X}(A, b) = \emptyset$ ,  $\mathcal{U}(A, c) \neq \emptyset$  (т.е.  $L(A, b, c)$  – несобственная задача ЛП 1-го рода),  $b \neq 0$ , задача  $P^H$  разрешима и матрица  $H^*$  является её решением, то задача  $D^H$  также разрешима и матрица  $H^*$  является её решением.*

**Теорема 2.** (О достаточных условиях существования решения задачи  $D^{[H \ -h]}$ )

*Если  $\mathcal{X}(A, b) = \emptyset$ ,  $\mathcal{U}(A, c) \neq \emptyset$  (т.е.  $L(A, b, c)$  – несобственная задача ЛП 1-го рода), задача  $P^{[H \ -h]}$  разрешима и матрица  $[H^* \ -h^*]$  является её решением, то задача  $D^{[H \ -h]}$  также разрешима и матрица  $[H^* \ -h^*]$  также является её решением.*

Пусть задачи  $L(A, b, c)$  и  $L^*(A, b, c)$  таковы, что  $\mathcal{X}(A, b) = \emptyset$ ,  $\mathcal{U}(A, c) \neq \emptyset$ . С несобственными задачами  $L(A, b, c)$  и  $L^*(A, b, c)$  будем связывать задачи  $SD^H$ ,  $SD^{[H \ -h]}$ ,  $SP^H$ ,  $SP^{[H \ -h]}$  структурной матричной коррекции, в которых матрице  $H$  или расширенной матрице  $[H \ -h]$  предписано иметь структуру нулевых и ненулевых элементов, задаваемую множествами индексов нулевых элементов

$\mathbf{K} = \{(i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}) \mid H_{i,j} = 0\}$  и  $\mathbf{k} = \{i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid h_i = 0\}$ .

Для реализации структурных требований к  $H$  и  $[H \quad -h]$  вводится ряд объектов:

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{i,j}) \left| \begin{array}{l} \mathcal{H}_{i,j} = 0 \text{ если } \{i, j\} \in \mathbf{K}, \\ \mathcal{H}_{i,j} = 1 \text{ в противном случае,} \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_i) \left| \begin{array}{l} \mathfrak{h}_i = 0 \text{ если } i \in \mathbf{k}, \\ \mathfrak{h}_i = 1 \text{ в противном случае.} \end{array} \right.$$

Как видно из представленных выше формул, матрица  $\mathcal{H}$  и вектор  $\mathfrak{h}$  – логические шаблоны для структуры нулевых и ненулевых элементов матрицы  $H$  и вектора  $h$ .

$$s(p, q) = (s_i) = \left| \begin{array}{l} p_j \text{ если } q_j \neq 0, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{h}(H) = \begin{bmatrix} s(H_{1*}^\top, \mathcal{H}_{1*}^\top) \\ \vdots \\ s(H_{m*}^\top, \mathcal{H}_{m*}^\top) \end{bmatrix} -$$

вектор, составленный из элементов строк  $H_{i*}$  в соответствии с шаблонами строк  $\mathcal{H}_{i*}$ , аналогично  $\mathfrak{h}([H \quad -h])$  – вектор, составленный из элементов строк  $[H_{i*} \quad -h_i]$  в соответствии с шаблонами строк  $[\mathcal{H}_{i*} \quad \mathfrak{h}_i]$ ,

$$X(x) = \begin{bmatrix} s^\top(x, \mathcal{H}_{1*}^\top) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^\top(x, \mathcal{H}_{2*}^\top) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & s^\top(x, \mathcal{H}_{m*}^\top) \end{bmatrix} -$$

матрица,  $i$ -я строка которой составлена из нулевых элементов и элементов вектора  $x$  в соответствии с шаблоном  $\mathcal{H}_{i*}$ . Выражения  $H(\mathfrak{h})$  и  $[H(\mathfrak{h}) \quad -h(\mathfrak{h})] = [H \quad -h](\mathfrak{h})$ , – это соответственно матрицы  $H$  и  $[H \quad -h]$ , восстановленные по вектору  $\mathfrak{h}$ .

**Теорема 3.** (О достаточных условиях существования решения задачи  $SD^H$ )

Если  $\mathcal{X}(A, b) = \emptyset, \mathcal{U}(A, c) \neq \emptyset$  (т.е.  $L(A, b, c)$  – несобственная задача ЛП 1-го рода),  $b \neq 0$ , задача  $SP^H$  разрешима и матрица  $H^*$  является

её решением, то задача  $SD^H$  также разрешима и матрица  $H^*$  является её решением.

**Теорема 4.** (О достаточных условиях существования решения задачи  $SD^{[H \ -h]}$ )

Если  $\mathcal{X}(A, b) = \emptyset, \mathcal{U}(A, c) \neq \emptyset$  (т.е.  $L(A, b, c)$  – несобственная задача ЛП 1-го рода), задача  $SP^{[H \ -h]}$  (с параметром  $\mathfrak{h} \neq 0$ ) разрешима и матрица  $[H^* \ -h^*]$  является её решением, то задача  $SD^{[H \ -h]}$  также разрешима и матрица  $[H \ -h]$  является её решением.

Как показывают вычислительные эксперименты, часто в задачах  $SD^H, SP^H, SD^{[H \ -h]}, SP^{[H \ -h]}$  и других задачах матричной коррекции оказывается оправданным использование взвешенной евклидовой нормы. Это связано с тем, что величина коррекция больших и малых по модулю коэффициентов систем ограничений равнозначна. Таким образом, при относительно небольшой по евклидовой норме матрице коррекции может быть получена задача ЛП совсем не «похожая» на исходную.

Пусть задачи  $L(A, b, c)$  и  $L^*(A, b, c)$  таковы, что  $\mathcal{X}(A, b) = \emptyset, \mathcal{U}(A, c) \neq \emptyset$ . С несобственными задачами  $L(A, b, c)$  и  $L^*(A, b, c)$  будем связывать задачи  $SwD^H, SwD^{[H \ -h]}, SwP^H, SwP^{[H \ -h]}$  структурной взвешенной матричной коррекции, в которых матрице  $H$  или расширенной матрице  $[H \ -h]$  предписано иметь структуру нулевых и ненулевых элементов, задаваемую множествами индексов нулевых элементов  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{k}$ , а также, весовые коэффициенты задаваемые матрицами  $\mathcal{W}$  и  $\mathfrak{w}$ . Вес каждого элемента  $H_{ij}$  и  $h_i$  задается элементами  $\mathcal{W}_{ij}$  и  $\mathfrak{w}_i$  соответственно, где  $\mathcal{W}$  – весовая матрица с размерами  $m \times n$  и  $\mathfrak{w}$  – весовая матрица с размерами  $m \times 1$ .

Критерий оптимальности матричной коррекции в данной форме при условии

$$\mathcal{W} = (\mathcal{W}_{ij} > 0 | i \in 1, \dots, m, j \in 1, \dots, n),$$

$$\mathfrak{w} = (\mathfrak{w}_i > 0 | i \in 1, \dots, m)$$

обладает почти максимальной общностью при использовании евклидовой нормы и является существенным условием ряда теоретических выкладок. Так, если некоторая прикладная задача может потребовать применения нулевых весов для отдельных элементов матриц  $H, [H \ -h]$ , то нулевые коэффициенты  $\mathcal{W}$  и  $\mathfrak{w}$  могут быть заменены некоторыми малыми (отно-

сительно данной задачи) положительными числами, уменьшение которых будет давать приближение к решению исходной задачи.

Решения задач в общем случае (при произвольных матрицах  $\mathcal{W}$  и  $\mathfrak{w}$ ) не могут быть записаны в терминах собственных векторов матриц, построенных использованием матрицы  $A$  и вектора  $b$ , так как произведением матриц по Адамару (« $\circ$ ») в общем случае не сводится к классическому матричному умножению.

Тогда для решения указанной проблемы вводятся следующие объекты:  $\omega(\mathcal{W}) = [\mathcal{W}_{1*} \ \dots \ \mathcal{W}_{m*}]^\top$  – вектор, составленный из элементов строк  $\mathcal{W}_{i*}$  и  $\omega([\mathcal{W} \ \mathfrak{w}]) = [[\mathcal{W}_{1*} \ \mathfrak{w}_1] \ \dots \ [\mathcal{W}_{m*} \ \mathfrak{w}_m]]^\top$  – вектор, составленный из элементов строк  $[\mathcal{W}_{i*} \ \mathfrak{w}_i]$ .

**Теорема 5.** (О достаточных условиях существования решения задачи  $SwD^H$ )

Если  $\mathcal{X}(A, b) = \emptyset, \mathcal{U}(A, c) \neq \emptyset$  (т.е.  $L(A, b, c)$  – несобственная задача ЛП 1-го рода),  $b \neq 0$ , задача  $SwP^H$  разрешима и матрица  $H^*$  является её решением, то задача  $SwD^H$  также разрешима и матрица  $H^*$  является её решением.

**Теорема 6.** (О достаточных условиях существования решения задачи  $SwD^{[H \ -h]}$ )

Если  $\mathcal{X}(A, b) = \emptyset, \mathcal{U}(A, c) \neq \emptyset$  (т.е.  $L(A, b, c)$  – несобственная задача ЛП 1-го рода), задача  $SwP^{[H \ -h]}$  (с параметром  $\mathfrak{h} \neq 0$ ) разрешима и матрица  $[H^* \ -h^*]$  является её решением, то задача  $SwD^{[H \ -h]}$  также разрешима и матрица  $[H^* \ -h^*]$  является её решением.

**Во второй главе,** основываясь на методе Бroyдена-Флетчера-Гольдфарба-Шенно, получен алгоритм минимизации целевых функции задачи оптимальной матричной коррекции данных несобственной задачи ЛП первого рода для всех перечисленных в предыдущей главе постановок:

$$P^H: \Phi(\tilde{x}) = \|H\|^2, H = (b - Ax) x^+,$$

$$P^{[H \ -h]}: \Phi(\tilde{x}) = \|H \ -h\|^2, [H \ -h] = \frac{(b - Ax) \cdot [x^\top \ 1]}{x^\top x + 1},$$

$$SP^H: \Phi(\tilde{x}) = \|H\|^2, H = H(X^+(x) \cdot (b - Ax)),$$

$$SP^{[H \ -h]}: \Phi(\tilde{x}) = \|H \ -h\|^2, [H \ -h] = [H \ -h] \left( X^+ \left( \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cdot (b - Ax) \right),$$

$$SwP^H: \Phi(\tilde{x}) = \|\mathcal{W} \circ H\|^2, H = H \left( \Omega^{-1}(\mathcal{W}) \cdot (X(x) \Omega^{-1}(\mathcal{W}))^+ \cdot (b - Ax) \right),$$

$$SwP^{[H \ -h]}: \Phi(\tilde{x}) = \|[W \ w] \circ [H \ -h]\|^2,$$

$$[H \ -h] = [H \ -h] \left( \Omega^{-1}([W \ w]) \cdot \left( X \left( \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \right) \Omega^{-1}([W \ w]) \right)^+ \cdot (b - Ax) \right),$$

где  $x = x(\tilde{x}) = [\tilde{x}_1^2 \ \dots \ \tilde{x}_n^2]^\top$ .

Получены формулы для аналитического вычисления градиента для перечисленных выше функций.

**В третьей главе** в качестве примера рассмотрена задача средней размерности bgdbg1 из системы netlib. Левая часть данной задачи представляет собой матрицу размером  $348 \times 407$ , включающую 1485 ненулевых элементов. Так же в задаче имеются дополнительные верхние ограничения на  $x$ . При представлении данной задачи в каноническом виде с учетом дополнительных верхних ограничений на аргумент, задача имеет размерность  $393 \times 674$ .

Так же, в качестве примера, рассмотрена задача средней mondou2 из хранилища несобственных задач линейного программирования netlib. Левая часть данной задачи представляет собой матрицу размером  $312 \times 604$ , включающую 1623 ненулевых элементов.

Используемый для матричной коррекции алгоритм был реализован в системе MATLAB 7.9 для компьютера с процессором Intel Core i3 M370, тактовой частотой 2,4 ГГц, оперативной памятью 3 Гб. Для указанных задач были найдены матрица коррекции, значение соответствующего ей аргумента и целевой функции. Основные результаты матричной коррекции описанных выше задач, рассмотренных во всех постановках, перечисленных в первой главе, представлены в таблице 1.  $Z$  – решаемая задача матричной коррекции, начальное приближение для которой генерировалось по правилу:  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^0 = (x_i^0) \mid x_i^0 = Sx \ \forall i \in 1, 2, \dots, n$ . При этом для задач структурной коррекции корректировались только ненулевые элементы. Для задач структурной взвешенной коррекции вес элемента матрицы коррекции определялся как квадрат обратного значения соответствующего элемента расширенной матрицы ограничений. Параметр сходимости для всех примеров  $\varepsilon = 1e - 8$ .  $T$  – время решения задачи в секундах.  $It$  – количество выполненных алгоритмом Бroyдена-Флетчера-Гольдфарба-Шенно итераций.  $\|\tilde{h}\|$  – евклидова норма полученной матрицы коррекции.

Таблица 1. Результаты вычислительных экспериментов

Z	Sx	It	T,с	$\ \bar{h}\ $
bgdbg1 $P^H$	16	860	1741,026	0,03004226
bgdbg1 $P^{[H-h]}$	16	863	1831,044	0,03007555
bgdbg1 $SP^H$	1	50000	54943,508	6,35600584
bgdbg1 $SP^{[H-h]}$	1	50000	55034,749	5,93852587
bgdbg1 $SwP^H$	1	34389	40772,617	6,12242995
bgdbg1 $SwP^{[H-h]}$	1	3277	4005,330	122,82760499
mondou2 $P^H$	$10^4$	99	188,352	0,01388127
mondou2 $P^{[H-h]}$	$10^4$	98	172,147	0,01396059
mondou2 $SP^H$	$10^4$	240	238,166	1,41423658
mondou2 $SP^{[H-h]}$	$10^4$	242	235,778	1,41423658
mondou2 $SwP^H$	$10^4$	240	313,639	1,41423658
mondou2 $SwP^{[H-h]}$	$10^4$	245	245,485	1147,79139297

**В заключении приведены основные результаты:**

1. Теоретически обосновано достаточное условие существования решения задачи матричной коррекции несобственной задачи линейного программирования 1-го рода, выражающееся в существовании решения задачи матричной коррекции допустимой области указанной задачи. Рассматриваются следующие разновидности матричной коррекции задач ЛП:

- без структурных ограничений по минимуму евклидовой нормы;
- со структурными ограничениями по минимуму евклидовой нормы;
- со структурными ограничениями по минимуму взвешенной евклидовой нормы.

2. Разработан алгоритм оптимальной матричной коррекции данных несобственной задачи ЛП первого рода, включающий в себя

- использование минимального по евклидовой или взвешенной евклидовой норме матричного решения обратной задачи линейного программирования;
- алгоритмический учет неотрицательности части переменных;
- использование штрафных функций в случае запрета коррекции отдельных строк корректируемой задачи;
- редукцию задачи матричной коррекции данных двойственной пары несобственных задач линейного программирования к вспомогательной задаче безусловной минимизации;
- применение расчетной схемы Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-



Шенно с использованием аналитического представления производной целевой функции задачи оптимальной матричной коррекции данных несобственной задачи ЛП первого рода с возможными ограничениями в виде некоторой совокупности фиксированных элементов.

3. В результате тестирования на несобственных задачах линейного программирования средней размерности из репозитория netlib/lp/infeas показана работоспособность полученного алгоритма.

Основное содержание диссертационной работы изложено в следующих публикациях:

1. *Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.* Минимальные по евклидовой норме матричные коррекции задач линейного программирования // Автоматика и Телемеханика. 2012. №2. С. 11-24. – 0,88 п.л. (авторский вклад – 33%).
2. *Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.* О достаточных условиях разрешимости задач линейного программирования при матричной коррекции их ограничений // Труды Института математики и механики. 2013. Т. 19. №2. С. 144-156. – 0,81 п.л. (авторский вклад – 33%).
3. *Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.* Квазиньютоновские алгоритмы матричной коррекции несобственных задач линейного программирования с произвольным множеством корректируемых коэффициентов // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). 2014. №23. С. 87-92. – 0,75 п.л. (авторский вклад – 33%).
4. *Хвостов М.Н.* О достаточных условиях разрешимости несобственных задач ЛП 1-го рода после матричной коррекции их допустимой области по минимуму взвешенной евклидовой нормы с учетом структурных ограничений // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. №2. С. 150-167. – 1,06 п.л. (авторский вклад – 100%).
5. *Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.* Минимальное матричное решение обратной задачи линейного программирования с использованием векторизации // Информационные и коммуникационные

- технологии в образовании. Сборник материалов X Международной научно-практической конференции в 2-х томах. Т. 2. Борисоглебск: ГОУ ВПО БГПИ, 2009. С. 207-211. (авторский вклад – 33%).
6. *Ерохин В.И., Хвостов М.Н.* Достаточные условия разрешимости несобственных задач линейного программирования после матричной коррекции их допустимой области // Материалы научно-практической конференции, посвященной 184-й годовщине образования СПбГТИ(ТУ). 2012. С 169-170. (авторский вклад – 50%).
  7. *Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.* Коррекция несобственных задач линейного программирования с разреженными матрицами коэффициентов // Материалы научной конференции, посвященной 185-й годовщине образования СПбГТИ(ТУ). 2013. С 264-265. (авторский вклад – 33%).
  8. *Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.* О разрешимости задачи линейного программирования при матричной коррекции ее допустимой области // VII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2013): Москва, 15 – 19 октября 2013 г.: Труды: Том 2 - М.: МАКС Пресс, 2013. С. 37-39. (авторский вклад – 33%).
  9. *Хвостов М.Н.* Применение штрафной функции при решении задачи структурной матричной коррекции несобственной задачи линейного программирования первого рода // Математические чтения РГСУ. Сборник материалов XXIII математической школы-семинара (28 января – 1 февраля 2014 года). - М.: Издательство РГСУ, 2015. С. 174 – 177. (авторский вклад – 100%).
  10. *Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.* Квазиньютоновский алгоритм структурной матричной коррекции несобственных задач линейного программирования с разреженными матрицами коэффициентов // Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование». Свидетельство о регистрации электронного ресурса №19696. 21 ноября 2013 г. (государственный информационный фонд неопубликованных документов ФНГУ ЦИТИС №50201351112). (авторский вклад – 33%).