

**«УТВЕРЖДАЮ»**

Директор ФГБУН Институт проблем  
управления им. В.А. Трапезникова РАН,  
член-корреспондент РАН



Д.А. Новиков



«25» марта 2022 г.

### **Отзыв ведущей организации**

на диссертационную работу Усова Александра Леонидовича «Использование кусочно-линейных ограничивающих функций в одномерной глобальной оптимизации», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09. «Дискретная математика и математическая кибернетика».

#### **Актуальность темы диссертации**

Диссертационная работа Усова А.Л. посвящена проблеме построения нижних и верхних оценок для функций от одной переменной. Данная проблема имеет ключевое значение в решении задач глобальной оптимизации, где такие ограничивающие функции используются как для оценки целевой функции на заданном интервале, так и для уменьшения области поиска глобального минимума. Наряду с тем, что одномерная глобальная оптимизация является самостоятельной и часто встречающейся задачей, к ней также может сводиться гораздо более сложная и распространенная на практике задача – поиск экстремума функции многих переменных. Например, метод оптимизации, основанный на заполняющих пространство кривых, позволяет свести многомерную задачу оптимизации к последовательности одномерных задач. Одномерная глобальная оптимизация также применяется в сепарабельном программировании, где целевая функция и ограничения являются суммой функций одной переменной. Таким образом, в настоящее время разработка новых методов глобальной одномерной оптимизации является актуальной и востребованной задачей. В диссертации разработан принципиально новый метод одномерной глобальной оптимизации, основанный на автоматическом синтезе кусочно-линейных оценок. Преимущество разработанного подхода состоит в том, что не накладывается таких ограничений на целевую функцию, как обязательное априорное знание константы Липшица, дифференцируемость или выпуклость (вогнутость) функции.

#### **Новизна исследований и результатов**

Научная новизна диссертационной работы заключается в разработке метода автоматического синтеза кусочно-линейных оценок одномерной функции по ее алгебраическому выражению (формуле). Было доказано, что кусочно-линейная оценка целевой функции может быть синтезирована из оценок элементарных функций, входящих в алгебраическое выражение функции. При построении оценок элементарных функций используются свойства их выпуклости и вогнутости. Существенное отличие данного подхода заключается в том, что на целевую функцию не накладывается обязательное



условие дифференцируемости, выпуклости (вогнутости), а также не требуется знание константы Липшица. В работе предложен новый метод глобальной оптимизации функции одной переменной на основе кусочно-линейных оценок и редукции области поиска глобального минимума, использующей эти оценки.

### **Значимость и достоверность результатов работы**

Теоретическая значимость диссертационной работы состоит в следующем:

1. разработана теория кусочно-линейных оценок одномерных функций;
2. разработаны методы построения кусочно-линейных оценок для суперпозиции функций;
3. определены базовые арифметических операций над кусочно-линейными оценками;
4. в определении базовых свойств кусочно-линейных оценок;
5. в доказательстве условий непрерывности кусочно-линейных оценок для суперпозиции функций.

Практическая значимость диссертационной работы заключается в следующем:

6. разработан алгоритм построения нижней и верхней кусочно-линейных оценок для функции одной переменной. В частности, был разработан алгоритм построения кусочно-линейных оценок для суперпозиции функций. Данные алгоритмы могут иметь широкое применение для решения задач глобальной оптимизации, систем нелинейных алгебраических уравнений и некоторых других задач;
7. на основе предложенных кусочно-линейных оценок и правил редукции области поиска минимума был разработан новый метод глобальной одномерной оптимизации;
8. разработан программный комплекс на языке программирования C++. Программный комплекс поддерживает вычисление интервальных, кусочно-линейных, липшицевых оценок целевой функции, а также автоматическое вычисление производной функции в точке и на заданном интервале. В комплекс были включены наборы тестовых задач, подтверждающие эффективность предложенного в диссертационной работе подхода;
9. программный комплекс был применен для решения задачи аппроксимации рабочих областей роботов параллельной структуры;
10. программный модуль интервальных вычислений, разработанный в диссертации, был внедрен в программном комплексе для решения задач глобальной оптимизации, созданном в рамках проекта Министерства науки и высшего образования Российской Федерации «Методы построения и моделирования сложных систем на основе интеллектуальных и суперкомпьютерных технологий, направленные на преодоление больших вызовов».

Достоверность результатов диссертационной работы подтверждается строгостью математических доказательств утверждений и теорем, вычислительными экспериментами, направленными на проверку точности кусочно-линейных оценок и эффективности их применения в методах глобальной оптимизации. Кроме того, достоверность и уровень результатов подтверждаются публикациями результатов исследования в трудах профильных конференций и научных изданий. Основные результаты опубликованы в 9 статьях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 3 в зарубежных журналах и 3 в сборниках трудов конференций. Четыре работы индексированы в базе данных научного



цитирования SCOPUS.

### **Содержание**

Текст диссертации состоит из введения, пяти глав, заключения и трех приложений. Во введении обосновывается актуальность исследования, приводится обзор научной литературы по теме исследования, формулируется цель и задачи работы, сформулированы научная новизна, практическая и теоретическая значимость работы.

В первой главе дана постановка задачи одномерной глобальной оптимизации, сделан обзор известных методов оценки одномерных функций и рассмотрены некоторые методы поиска глобального минимума.

Вторая глава посвящена теории построения кусочно-линейных оценок, их основным свойствам, а также арифметическим операциям над ними. Кроме того, разработана теория построения кусочно-линейных оценок для суперпозиции функции и рассмотрен вопрос непрерывности этих оценок.

В третьей главе рассмотрены алгоритмы, используемые для построения кусочно-линейных оценок, а также алгоритм редукции области поиска глобального экстремума.

В четвертой главе описаны вычислительные эксперименты, оценивающие точность кусочно-линейных оценок и эффективность их применения в методах глобальной оптимизации.

Пятая глава посвящена описанию архитектуры и основных модулей программного комплекса. С помощью программного комплекса были выполнены вычислительные эксперименты, подтвердившие эффективность кусочно-линейных оценок.

### **Замечания по работе**

1. В первой главе диссертации, при анализе существующих подходов в глобальной одномерной оптимизации, рекомендуется сравниться с методами, представленными в работах Сергеева и Касадо, а также Сахинидиса и Флаудаса.
2. Во второй главе диссертации утверждение 4 о суперпозиции кусочно-линейных функций дано без доказательства.
3. В тексте диссертационной работы используются одновременно термины “граница” и “оценка” для одного и того же понятия.
4. Метод одномерной глобальной оптимизации на основе кусочно-линейных оценок и редукции области поиска кусочно-линейных оценок лучше было представить в виде отдельного алгоритма.

Указанные замечания не снижают общей высокой оценки диссертационной работы А.Л. Усова.

### **Заключительная оценка**

Диссертационная работа Усова А.Л. «Использование кусочно-линейных ограничивающих функций в одномерной глобальной оптимизации» является законченным научным исследованием, которое содержит новые научные результаты и имеет важное теоретическое и практическое значение в области глобальной оптимизации.

Работа полностью соответствует требованиям ВАК РФ (п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24

сентября 2013 г. № 842), а ее автор Усов А.Л. заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09. «Дискретная математика и математическая кибернетика».

Диссертационная работа Усова А.Л. заслушана и рассмотрена, отзыв обсужден и одобрен на заседании Лаборатории № 7 Адаптивных и робастных систем им Я.З. Цыпкина ИПУ РАН 01 февраля 2022 г., протокол № 4.

Главный научный сотрудник Лаборатории № 7 ИПУ РАН,  
доктор технических наук

 Поляк Борис Теодорович

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления  
имени В. А. Трапезникова Российской академии наук

Почтовый адрес: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65

Телефон: 8 (495) 334-89-10

Адрес электронной почты: dan@ipu.ru

Web-сайт организации: www.ipu.ru

24.03.2022

ПОДПИСЬ   
ЗАКРЕПО  
ВЕД. ПРОФ. ИЕР   
ЗАЛОЖЕН: Л.Л.

