

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЧЕЧЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ АХМАТА АБДУЛХАМИДОВИЧА КАДЫРОВА»

На правах рукописи  


**ИЛЬЯСОВ Руслан Хизраилевич**

**МЕТОДОЛОГИЯ  
СПЛАЙН-МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА  
ПОТОКОВ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ  
С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ**

Специальность 08.00.13 – Математические и инструментальные  
методы экономики

Диссертация на соискание учёной степени  
доктора экономических наук

Научный консультант:  
доктор экономических наук, профессор  
Плотников Владимир Александрович

Грозный – 2022

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОТОКОВ В ТРАНСФОРМИРУЮЩИХСЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ	20
1.1 Лингвистический и статистический способы представления потоков в экономических системах	20
1.2 Запасы и потоки – объекты научного исследования состояний и изменений в экономических системах	24
1.3 Абсолютная точность аналитического представления – основа валидности моделей задачам адаптивного управления потоками в экономике	32
1.4 Особая роль и специальные достоинства потоков в изучении трансформирующихся экономических систем	45
Глава 2. МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРУКТУРНО-ВАРИАТИВНОЙ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ «КУСОЧНЫМИ» ФУНКЦИЯМИ	52
2.1 Недостатки методов классической эконометрики, обнаруживающиеся при моделировании динамики экономических потоков	52
2.2 Математическая и методологическая экстраполяция императивов современного экономического развития в структуру эконометрических моделей	60
2.3 Методы сплайн-моделирования и исследования потоков в трансформационных экономических системах	79
2.4 Многоаспектная роль производных в моделировании и анализе потоков	108
2.5 Классификация энциклопедических возможностей системы компьютерной математики Maple 17, необходимых для работы с экономическими потоками	116
Глава 3. СПЛАЙН-МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ СТРУКТУРНО-ВАРИАТИВНЫХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ МЕЖДУ ПОТОКАМИ	124
3.1 Эффективность перехода от сравнения дискретных данных в отдельных точках к сравнению отрезков функций применительно к исследованию взаимосвязей между потоками	124
3.2 Сплайн-параметрическое моделирование взаимосвязей	135
3.3 Анализ взаимосвязи потоков при возможном наличии точек переключения регрессии интерполированием сплайнами	138
3.4 Производные как инструмент исследования «латентных» корреляций в колебаниях скорости потоков	148

3.5	Анализ динамической конкуренции потоков в экономике	163
<b>Глава 4.</b>	<b>ФАЗОВЫЙ АНАЛИЗ ЦИКЛИЧНОСТИ ПОТОКОВ В ЭКОНОМИКЕ</b>	<b>185</b>
4.1	Потоки в циклической теории развития экономики	185
4.2	Фазовое представление запасов и потоков в динамических системах	188
4.3	Моделирование и фазовый анализ цикличности потоков	197
4.4	«Хроноскопия» фаз экономического цикла	202
4.5	Фазовый анализ циклов роста в экономике России	207
<b>Глава 5.</b>	<b>АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ МЕТОДАМИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ</b>	<b>215</b>
5.1	Экономическая физика и физическая экономика: поиск экономических аналогов физического движения	215
5.2	Первые производные моделей экономического движения – экономические аналоги физических импульсов	220
5.3	Вторые производные моделей экономического движения – составная часть «экономических сил»	230
5.4	Кинетическая и потенциальная энергии потоков в экономике	232
5.5	Сплайн-технологии факторного анализа стоимости потоков	234
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>		<b>244</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ</b>		<b>250</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

**Актуальность темы.** Цифровизация процессов производства, накопления, рыночного обмена и распределения в масштабах планеты требует разработки новой методологии моделирования и исследования потоков в трансформационной экономике. Классические модели и методы, сглаживанием динамики абстрагирующиеся от учёта малых изменений, были эффективны при исследовании инерционных процессов в экономических системах с устойчивой структурой. Точность моделируемых процессов в экономике по требованию (*on-demand economy*) становится необходимой для выявления локальных замедлений и ускорений роста, для управления экономическими системами в режиме реального времени. Развитие методологии моделирования потоков сплайнами должно повысить эффективность автоматизированного адаптивного управления процессами в экономических системах.

Экономические системы в масштабах экономики государства, отрасли, предприятия можно представить состоящими из статической и динамической частей. Запасы, также известные как уровни накопления, состояния, фонды, используются для представления результатов реальных процессов, определяя статическую часть экономической системы. В то же время, качество современного развития характеризуется не только величинами состояний, сколько их изменениями – потоками, определяя динамику экономической системы.

Опора на быстро протекающие экономические процессы заставляет присмотреться к «основополагающим в экономической теории трём типам экономических показателей внутри некоей категории «количество» – это «переменные», «потоки» и «запасы». Экономисты обоснованно различают их, исходя, в частности, из их динамических особенностей» [93].

Диссертационное исследование посвящено разработке и развитию методологии построения динамических сплайн-моделей переменной

структурой, их исследованию, аппаратной реализации и верификации для работы с экономическими потоками с получением нового динамического экономического качества анализа.

«*Динамические модели*» - это инструмент для изучения экономической динамики, науки об экономических показателях во временном аспекте, их текущем анализе, взаимных связях, цикличности и конкуренции. В диссертации рассматриваются динамика и динамические модели не самих показателей или запасов, а той их подвижной части, которая называется «*экономическими потоками*». Для изучения потоков в экономических системах с переменной структурой предложена методология сплайн-моделирования с поиском численных, аналитических и графических решений в евклидовом и фазовом пространствах.

Новая методология строится на моделировании потоков сплайнами. Сплайн-моделирование позволяет привлечь к изучению экономической динамики методы дифференциального исчисления, сплайн-параметрического анализа взаимосвязей, фазового анализа цикличности, динамического изучения конкуренции, находит экономические аналоги физического движения.

Главное отличие сплайн-методологии от подходов классической эконометрики состоит в абсолютно точном следовании моделей эмпирическим данным, в изучении взаимосвязей, циклов и тенденций развития через модели скорости и ускорения экономического движения. Обращение к производным сплайн-моделям, работающим с экономическими тенденциями, позволяет более точно находить, анализировать и визуализировать конъюнктуры, вычислять «латентные» корреляции потоков, их конкуренцию на рынке, изучать сезонность и цикличность потоков в фазовом пространстве, пользоваться их физическими эквивалентами. Точность, достоверность и наглядность методов исследования достигаются моделированием потоков без ошибок аппроксимации, взаимной релевантностью полученных в системе компьютерной математики Maple 17

аналитических, количественных и графических решений.

**Степень разработанности темы.** Вербальные понятия о запасах и потоках в экономике, о взаимосвязях между ними появились достаточно давно. Перечислим монографии известных учёных экономистов, исследовавших потоки в экономике. Лоуренс Харрис (*Laurence Harris*) преуспел с «запасами» и «потоками» в денежной теории, в частности, в управлении денежными потоками и при манипуляциях с запасами. Известный экономист Ирвинг Фишер (*Irving Fisher*) широко пользовался этими понятиями также в количественной теории денег. Поток денежной массы им интерпретировался как денежный оборот. Джон Кеннет Гэлбрейт (*John Kenneth Galbraith*) в своей книге<sup>1</sup> предлагает разделять понятия запасов и потоков и по-разному их использовать в экономическом анализе. Вспомним Эдвина Эмиля Уитта (*Edwin Emil Witte*) и его модель 1963 г. с прямым использованием понятий «запасы» и «поток». В экономической практике бытует фраза: «Поток – это производная запаса»<sup>2</sup>.

В том или ином качестве многие российские учёные-экономисты работали с запасами и потоками: С.В. Рязанцев, В.Д. Богатырёв, С.М. Сергеев, Е.С. Вакуленко, Н.В. Мкртчян, К.К. Фурманов, Л.И. Александрова, А.И. Алексеева, В. Анташов, И.М. Бабук, О.С. Белокрылова, Ю.В. Васильев, А.Г. Войтов, Р.Р. Гаяутдинов, О.Е. Геоманова, М.Е. Дорошенко, Н.П. Кетова, Л.В. Костылева, Л.В. Кунцман, Г.М. Куманин, А.В. Малеева, Л.А. Николаева, В.Н. Овчинников, И.Е. Рудакова, Г. Уварова, В.М. Усоскин, Л.И. Ушицкий, И.П. Чёрная.

Методы дифференциального исчисления находят своё применение в экономических исследованиях, чаще в анализе предельных величин. Перечислим отечественных учёных, обращавшихся к производным в экономических исследованиях: В.В. Тарасова, В.Е. Тарасов, А.А. Первозванский, Т.Н. Первозванская, В.А. Колемаев, О.А. Волгина, В.И.

<sup>1</sup> Новое индустриальное общество : [пер. с англ.] / Джон Гэлбрейт. - Москва : АСТ ; Санкт-Петербург : Транзиткнига, 2004 (Тип. изд-ва Самар. Дом печати). – 602 с.

<sup>2</sup> Жак С.В. Математические модели менеджмента и маркетинга. – Ростов-на-Дону: ЛаПО, 1997. – 316 с.

Левин, Г.В. Хомкалов, И.Г. Торгашина, К.В. Демьянов, Е.Н Братищева. Наиболее точно о роли производной в изучении динамики написал Ф. Энгельс, подчёркивая, что «дифференциальное исчисление даёт естественному возможностям изображать математически не только состояния, но и процессы: движение»<sup>3</sup>.

Объёмен и содержателен обзор работ по динамическим экономическим моделям, временному анализу конъюнктур и развитию новых эконометрических методов, абстрагирующихся от сглаживающих процедур. Развитие методов сплайн-методологии начинается с истории организующих её математических конструктов, сплайн-функций или многозвенников. Впервые к сплайнам с получением математических результатов обратился Леонард Эйлер, разработав «метод ломаных». В качестве теории аппроксимация сплайнами впервые появилась в 1949 г. в статье<sup>4</sup> И.Д. Шёнберга и А. Уитни.

Обращение к сплайнам в экономических исследованиях было очень редким. Одним из первых научных трудов в этом направлении была монография<sup>5</sup> Д. Пуарье – в ней исследовались проблемы моделирования сплайнами структурных скачков в экономике. Первая отечественная работа<sup>6</sup> по экономическим приложениям сплайнов в концепции последовательных экономических структурно-переменных моделей появилась в 1987 г. В ней отмечена выдающаяся роль сплайнов как моделей с последовательно варьируемой структурой.

Начиная с 1999 года работы российских учёных заметно расширили спектр новых подходов к моделированию и анализу структурно-вариативной динамики. Ряд публикаций И.Г. Винтизенко, В.С. Яковенко, Ф.Б. Боташевой,

---

<sup>3</sup> Энгельс Ф., см. Маркс К. и Энгельс Ф., Соч., 2 изд., т. 20, с. 587

<sup>4</sup> Schoenberg I.J., Whitney A. Sur la positivite des determinants de translations de functions de frequence de Polya avec une application au probleme d'interpolation par les functions "spline" // Comptes Rendus. – 1949. – Volume 228. – P. 1996-1998

<sup>5</sup> Poirier Dale J. The Econometrics of Structural Change. With Special Emphasis on Spline Functions. – Amsterdam: – New York: – Oxford: North-Holland Publishing Company, 1976. – 183 p.

<sup>6</sup> Сплайн-функции в экономико-статистических исследованиях / Ответственный редактор Б.Б. Розин. Сборник статей. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, ИЭОПП СО АН СССР, 1987. – 206 с.

А.В. Чадранцева, И.М. Брусневой, А.Б. Давыдова, С.И. Бутова, З.К. Куловой и др. рельефно обрисовал ту роль, которую новая исследовательская платформа с её парадигмой, «кусочной» и циклической концепциями, сплайнами, фазовым пространством и фазовыми преобразованиями экономической динамики, полиформными моделями, системами компьютерной математики – характерными чертами нового экономического знания – начинает играть в динамических разделах экономической науки. Свод полученных экономико-математических знаний был представлен в научной монографии «Новая эконометрика» в 2018 г. [187].

Для аналитического преобразования динамики запасов и потока, для выявления «латентных» взаимосвязей между потоками, изучения их сезонности и цикличности, изучения воздействия «событийных составляющих» динамики, поиска эконофизических характеристик экономического движения требуется переход к точным, структурно-вариативным моделям с непрерывным временем [93].

**Целью** исследования является разработка, научное обоснование и развитие методологии кусочно-полиномиального моделирования экономических потоков, совершенствование методов анализа тенденций, цикличности и взаимосвязей между потоками в экономических системах с переменной структурой.

В соответствии с поставленной целью в диссертационной работе решаются следующие **задачи**:

- 1 сформулировать теоретические основы аналитического описания и исследования потоков в современных трансформационных экономических системах;
- 2 обозначить требования к математическому аппарату аналитического представления и определить способы взаимного преобразования динамики запасов и потока;
- 3 предложить методологию сплайн-моделирования потоков с поиском численных, аналитических и графических решений в евклидовом и фазовом

- пространствах;
- 4 обозначить требования к инструментальным средствам моделирования и анализа динамики потоков;
- 5 оценить аналитичность производных при изучении экономических тенденций, выявлении «латентных» корреляций в динамике потоков, исследовании динамической конкуренции, фазовом анализе сезонности и цикличности, при использовании физических эквивалентов потоков в экономике;
- 6 разработать метод сплайн-параметрического моделирования и анализа взаимосвязей между потоками, изучить эффективность метода при исследовании «латентных» корреляций;
- 7 оценить эффективность сплайн-методологии при анализе динамической конкуренции потоков в экономических системах;
- 8 адаптировать метод фазового анализа к моделированию и исследованию цикличности потоков в экономике;
- 9 дополнить категориальный аппарат экономической теории терминами и динамическими характеристиками физического движения. Разработать и применить аналитические модели экономического движения к факторному анализу стоимости потоков.

**Теоретической и методологической основами** диссертационной работы являются труды отечественных и зарубежных учёных по математическому моделированию экономической динамики, анализу тенденций, сезонности и цикличности, методам управления сложными социально-экономическими системами. Исследование базируется на положениях общей теории систем, конвергенции теории динамического экономического сигнала и теории его составной части – экономических потоков, а также на построениях эконометрической теории.

**Научная новизна полученных результатов** заключается в разработке методологии математического моделирования динамических потоков сплайнами, в создании инструментальной платформы анализа потоков в

трансформационных экономических системах, в получении точных количественных, аналитических и графических результатов исследования.

**Наиболее существенные результаты исследования, обладающие научной новизной, полученные лично соискателем:**

1 Сформулированы теоретические основы аналитического описания и исследования потоков в современных трансформационных экономических системах. Рассмотрены особенности экономического движения, структурированы проблемы аналитического описания динамических потоков в условиях глобальной нестабильности, рекурсивности, сетевого характера и цикличности современной экономики.

2 Обозначены требования к математическому аппарату аналитического представления и определены способы взаимного преобразования динамики запасов и потока. Моделирование динамики экономических показателей предложено выполнять полиформными функциями, отличающимися подстройкой своей структуры к меняющимся во времени условиям хозяйствования. Обоснована необходимость сохранения точности эмпирического сигнала при переходе от изучения динамики состояний (запасов) в экономических системах к изучению динамики изменений – потоков. При моделировании динамики состояний (динамики задолженности по кредитам, запасов денежной массы, запасов энергоресурсов и др.), показана эффективность сохранения абсолютной точности данных, что является необходимым условием перехода к изучению реальных изменений в запасах – потоков платежей, эмиссии денег, потоков добычи и экспорта нефти и др.

3 Разработаны сплайн-модели и предложены методы анализа потоков в евклидовом и фазовом пространствах. Показано, интерполирование сплайнами обеспечивает сохранение точности результатов при реализации известного механизма преобразования динамики запасов в потоки. Обращение к новому разделу экономического знания – методологии сплайн-моделирования и исследования динамики потоков дало более точный

источник знаний о тенденциях и факторах развития экономических систем. Методология сплайн-интерполяционного моделирования динамики адаптирована к научно-обоснованному решению задач управления потоками в экономических системах с переменной структурой. В частности, доказана эффективность сплайн-моделирования для управления нерегулярными потоками – изменениями в запасах за временные интервалы произвольной длины. В условиях цифровизации это должно найти практическое применение в адаптивном управлении нерегулярными потоками в режиме реального времени, например, потоками платежей по кредиту, реализации товаров, потоками экспорта и др.

4 Обозначены требования к инструментальным средствам исследования. Моделирование и анализ динамики потоков выполнены в системе компьютерной математики Maple 17, обеспечившей абсолютную точность сплайн-моделирования, анализа и визуализации. Система при исследовании потоков стала эталоном инструментария, позволившим автоматически и экономно выполнять расчёты в рациональных числах без ошибок округления, строить аналитические модели и преобразовывать их без сглаживаний реальной динамики, визуализировать результаты в евклидовом и фазовом пространствах.

5 Оценена эффективность методов дифференциального исчисления при изучении экономических тенденций, выявлении «латентных» корреляций в динамике потоков, исследовании динамической конкуренции, фазовом анализе сезонности и цикличности, при обращении к физическим эквивалентам экономических потоков. Выявлено, что экономические потоки, как первые производные запасов, находят раньше, более рельефно и точно особые точки, «точки возврата», точки начал и причин изменения запаса как динамического показателя, через них операцией интегрирования определяется сам уровень запаса. Моделирование кубическими сплайнами позволило работать с динамикой запасов и потоков в моделях с непрерывным временем, широко используя аналитический потенциал производных –

аналогов мгновенной скорости и ускорения изменений в запасах.

6 Разработан метод сплайн-параметрического моделирования и анализа взаимосвязей между потоками. На примере потоков в экономике России показана возможность существования «скрытых» или «латентных» взаимосвязей, не проявляющихся в динамике экономических показателей внутри коротких временных интервалов – методы классической эконометрики оказываются для их исследования недостаточно эффективными. Сплайн-методология выявляет «латентные» корреляции «тенденций», сравнивая колебания скорости развития процессов. Анализ первых производных моделей экономической динамики становится эффективным и для выявления точек переключения регрессии.

7 Оценена эффективность сплайн-методологии при анализе динамической конкуренции потоков в экономических системах. В диссертации предложен и детально исследован математический аппарат построения динамического «коэффициента конкуренции», детализирующего изменение роли каждого экономического потока в рыночном противостоянии. «Коэффициент конкуренции» наглядно и количественно показывает относительность вклада с течением времени того или иного производителя или экспортёра в совокупный, динамично меняющийся результат на рынке, в динамике определяет амплитуду и скорость взаимного «вытеснения» потоков.

8 Адаптирован метод фазового анализа к моделированию и исследованию цикличности потоков в экономике. Фазовое пространство агрегировано для погружения в него модельного континуума экономических потоков. Фазовый анализ открывает возможности многомерного исследования цикличности и периодичности динамических потоков в экономике. Фазовый анализ динамики экономических потоков позволил точнее определять амплитуду, периоды и фазы циклов.

9 Дополнен категориальный аппарат экономической теории терминами «экономический импульс», «экономическая сила», «экономическая потенциальная энергия» и «экономическая кинетическая энергия» потоков по

анalogии с динамическими характеристиками физического движения. Разработанные аналитические модели «экономического импульса» применены к факторного анализу стоимости потоков. Сплайн-моделирование потоков позволило интерпретировать производные как скорость и ускорение экономического движения по аналогии с физическим, определять его количественные характеристики – скорость, ускорение, импульс, масса, сила и др.

На примере потоков экспорта нефти предложен метод аналитического представления «экономического импульса» как первой производной сплайн-модели динамики товарооборота. Построенная модель «экономического импульса» позволяет в динамике анализировать зависимость тенденций стоимости потока экспорта от двух взаимосвязанных факторов – скорости изменений физических объёмов экспорта и экспортных цен на нефть.

**Теоретическая значимость исследования** заключается в развитии научной методологии, позволяющей заменять экономические показатели доминантных процессов экономики на экономические потоки, исследовать корреляционные и конкурентные взаимодействия потоков с «погружением» в математические конструкты, евклидово и фазовое пространства, с их цифровизацией и моделированием. Динамика потоков в экономике оказывается более информативной, чем динамика состояний или запасов.

Разработан континуум концептуально новых структурно-переменных математических моделей динамики потоков экспорта России, колебаний курса национальной валюты, изменений запасов денежной массы, задолженности по жилищным кредитам и др. – полиформных, которыми моделируется поведение экономических потоков как первых производных запасов и апробируется замена ими экономических показателей.

Стратегический характер поддержки принятия решений реализуется разработкой принципиально новой математической оболочки в модельном континууме – последовательно-переменной структуры полиформных моделей на базе сплайнов. Точное совпадение эмпирического материала и

модели во всех узловых точках, наилучшая и оптимальная (через минимум кривизны по теореме Холлидея) «сшивка» фрагментов сплайна в единый ансамбль, определили высокую точность и релевантность моделей.

Программный инструментарий исследования базируется на универсальной системе компьютерной математики, экономно выполняющей математические и логические операции – аналитически, графически и численно.

Результаты, полученные лично автором, развивают методологию моделирования и анализа потоков в сложных экономических системах. Методы сплайн-методологии могут служить платформой для совершенствования технологии адаптивного управления развитием динамических систем.

**Практическую значимость исследования** имеют методические разработки автора по математическому моделированию и анализу, совершенствованию информационного инструментария принятия управлений решений, релевантных практике, при работе с экономическими потоками. Особо выделим развитие методологии сплайн-моделирования для работы в современной сетевой, стохастичной и турбулентной цифровой экономике. Математические полиформные модели стали универсальным инструментом для исследования экономических потоков. Методы новой методологии могут повысить научную обоснованность разрабатываемых программ развития и технологий управления процессами на макро- и микроуровне. Континуум построенных моделей формирует научно-исследовательскую платформу для экспертов и лиц, принимающих решения по оперативному управлению режимами функционирования экономических систем.

Основные положения и результаты исследования использованы в работе департамента макроэкономического прогнозирования и сводного анализа Министерства экономического, территориального развития и торговли Чеченской Республики, тепличного комплекса «ЮгАгроХолдинг»,

в ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет им. А.А. Кадырова» в образовательном процессе подготовки магистрантов по направлению 38.04.01 «Экономика» в следующих дисциплинах: «Анализ временных рядов и прогнозирование» и «Эконометрика».

**Обоснованность и достоверность** полученных результатов исследования обеспечены анализом трудов отечественных и зарубежных учёных в сфере моделирования, анализа и управления процессами в экономических системах, применением в ходе исследования апробированных научных методов, корректным теоретическим и экономико-математическим обоснованием приведённых утверждений, непротиворечивостью полученных автором результатов, их соответствием теоретическим и методическим положениям в части развития методологии моделирования, анализа и управления потоками в экономике.

В структуру исследования инкорпорирована система компьютерной математики *Maple 17*. Привлекаемые математические методы моделирования и информационные технологии обработки данных обеспечили аналитическую строгость, количественную точность и наглядность эконометрических построений.

**Апробация работы.** Отдельные промежуточные результаты исследования и итоговые достижения обсуждались на международных, всероссийских и региональных конгрессах, научно-практических конференциях и симпозиумах: на IV Всероссийской (Национальной) научно-практической конференции «Индустря 5.0, цифровая экономика и интеллектуальные экосистемы» (Санкт-Петербург, 2021); на XIII-ой научно-практической конференции с международным участием «Инновации и экономика промышленности» (Санкт-Петербург, 2021); на XVIII-ой Всероссийской с международным участием научно-практической конференции «Теория и практика экономики и предпринимательства» (Гурзуф, 2021); на Международной научно-практической конференции «International Conference on Management in Financial Economy» (Ростов-на-

Дону, 2021); на Второй международной научно-практической конференции «Аграрная экономика в условиях глобализации и интеграции» (Москва, 2019); на II-ом Открытом российском статистическом конгрессе «Статистика – язык цифровой цивилизации» (Ростов-на-Дону, 2018); на Международной научно-практической конференции, посвящённой 80-летию Чеченского государственного университета (Грозный, 2018); на VII-ой Международной научно-практической конференции «Многополярная глобализация и Россия» (Ростов-на-Дону, 2018); на Всероссийской научно-практической конференции, посвящённой 45-летию образования Института экономики и финансов ЧГУ (Грозный, 2017); на Международном научном е-симпозиуме «Математические и инструментальные методы экономики: теория и практика» (Москва, 2014); на IX-ой Всероссийской научной конференции «Краевые задачи и математическое моделирование» (Новокузнецк, 2008); на IV-ой Международной научно-практической конференции «Экономическое прогнозирование: модели и методы» (Воронеж, 2008) и др.

**Личный вклад.** Все положения, выносимые на защиту, изложенные в диссертации, принадлежат лично автору. В работах, выполненных совместно, автор принимал непосредственное участие в определении направления исследования, в выборе методов и оценке качества полученных результатов анализа.

**Публикации.** По теме диссертации автором опубликовано 60 работ, общим объёмом 77.6 п.л., из них лично автора – 55.6 п.л., в том числе 2 монографии, 16 статей в научных периодических изданиях, рекомендованных ВАК, 6 в изданиях, индексируемых в WoS и Scopus, 36 в сборниках и материалах конференций.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация изложена на 287 страницах машинописного текста, состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованных материалов из 331 наименования, в том числе 284 отечественных и 47 зарубежных источников, иллюстрирована 3 таблицами, 86 рисунками.

## **Основные положения, выносимые на защиту:**

- 1 Сформулированные теоретические основы аналитического описания процессов в трансформационных системах показали необходимость эконометрического моделирования динамики состояний без ошибок аппроксимации в узловых точках или, иначе, без остатков. Сохранённые в модели динамики состояний реальные значения, становятся информационным источником для построения релевантных реальным процессам моделей динамики изменений в экономических системах – моделей потоков.
- 2 Обозначены требования к математическому аппарату аналитического представления и определены способы взаимного преобразования динамики запасов и потока. Оценена эффективность моделирования динамики потоков в трансформирующихся экономических системах сплайн-функциями, отличающимися подстройкой своей структуры к меняющимся во времени условиям хозяйствования на каждом темпоральном участке.
- 3 Разработаны и предложены методы сплайн-методологии для моделирования потоков и поиска численных, аналитических и графических решений в евклидовом и фазовом пространствах – методика анализа «латентной» корреляции потоков, метод фазового анализа сезонности и цикличности потоков, в том числе циклов роста, метод изучения динамической конкуренции потоков, предложен метод факторного анализа стоимости потоков с привлечением экономических аналогов количественных характеристик физического движения.
- 4 Абсолютная точность сплайн-моделирования, анализа и визуализации реализованы моделированием и анализом динамики запасов и потоков в системе компьютерной математики *Maple 17*. В системе *Maple 17* построены аналитические модели динамики ВВП России и стран мира, потоков добычи и экспорта нефти, запасов денежной массы, задолженности по кредитам, среднедушевых доходов населения России др.
- 5 В работе выявлен и оценён аналитический потенциал методов

дифференциального исчисления при изучении экономических тенденций, выявлении «латентных» корреляций в динамике потоков, исследовании динамической конкуренции, фазовом анализе сезонности и цикличности потоков, при обращении к физическим эквивалентам экономических потоков. Выявлено, что экономические потоки, как первые производные запасов, находят раньше, более рельефно и точно особые точки, «точки возврата», точки начал и причин изменения запаса как динамического показателя, через них операцией интегрирования определяется сам уровень запаса. Моделирование кубическими сплайнами позволило работать с динамикой запасов и потоков в моделях с непрерывным временем, широко используя аналитический потенциал производных – аналогов мгновенной скорости и ускорения изменений в запасах.

6 Разработан и применён метод сплайн-параметрического моделирования и анализа взаимосвязей между потоками. На примере потоков в экономике России показана возможность существования «скрытых» или «латентных» взаимосвязей, не проявляющихся в динамике экономических показателей внутри коротких временных интервалов. Сплайн-анализ позволил выявить «латентные» корреляции «тенденций», сравнивая колебания скорости развития процессов. Анализ первых производных моделей экономической динамики становится эффективным и для выявления точек переключения регрессии. В исследовании выявлены и исследованы «латентные» корреляции между потоками экспортного энергоресурсов и динамикой курса рубля, между потоками экспортной нефти в различные группы стран и др.

7 Оценена эффективность сплайн-методологии при анализе динамической конкуренции потоков в экономических системах. В диссертации предложен и детально исследован математический аппарат построения динамического «коэффициента конкуренции», детализирующего изменение роли каждого экономического потока в рыночном противостоянии. «Коэффициент конкуренции» позволил в динамике определять амплитуду и скорость взаимного вытеснения потоков в экономических системах.

8 Фазовое пространство предложено использовать для одновременного представления динамики состояний (запасов) и мгновенной скорости изменений (потока). В фазовом пространстве построены модели цикличности экспорта нефти, ВВП России, доказанных запасов нефти США, выявлены циклы роста в динамике запасов денежной массы, среднедушевых доходов населения России, задолженности по ипотечным жилищным кредитам и др., предложена методика точного определения амплитуды и периодов циклов, разработана методика «хроноскопирования» фаз циклов.

9 Категориальный аппарат экономической теории дополнен терминами «экономический импульс», «экономическая сила», «экономическая потенциальная энергия» и «экономическая кинетическая энергия» потоков по аналогии с динамическими характеристиками физического движения. Построены аналитические модели «экономического импульса» стоимости потока. Построенная аналитическая модель «экономического импульса» позволила предложить новый метод факторного анализа стоимости потоков.

# **ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОТОКОВ В ТРАНСФОРМИРУЮЩИХСЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

## **1.1 Лингвистический и статистический способы представления потоков в экономических системах**

**Лингвистическое описание запасов и потока.** В методологическом поле теории управления сложными социально-экономическими динамическими системами с позиций системного, ресурсно-результативного и балансового подходов сформировано концептуальное представление о сущности изучаемых и моделируемых новых объектов управления – экономических потоков. Экономические потоки – как показатели последовательно-непрерывных изменений в экономических системах – расширяют, дополняют и уточняют теоретико-методологический базис представления и моделирования экономических конъюнктур. Потоки формируют область точно моделируемых и хорошо анализируемых процессов, обогащают подход к более точному и эффективному управлению сбалансированной эволюцией в рамках существующей хозяйственной политики.

В диссертации обосновано, что важнейшая проблема эффективного выявления и моделирования динамических особенностей экономики состоит в исследовании сущности, особенностей, состава и математической взаимосвязи разных компонент экономических систем. В этой проблеме выдающееся место занимает презентация экономических потоков – как наиболее динамичных их представителей.

Считается, что экономические показатели состоят из трёх компонент, т.е. их можно разделить на переменные экономической конъюнктуры, запасы (активы) и потоки. Сначала это «экономические переменные» - ставка процента ( $i$ ), уровень цен ( $P$ ), уровень безработицы ( $u$ ) и другие экономические показатели. Их анализ, преобразования и расчёт составляют основу классической экономической динамики.

Вторыми из экономических показателей следует выделить запасы –

«накопители», «активы» или «фонды» (*stocks*). С точки зрения экономической теории запас – показатель, определяющий некоторое его неизменное или слабо изменяющееся состояние или «количество», измеренное в данный момент времени. Накопители представляют собой объекты реального мира, в которых сосредотачиваются некоторые ресурсы: знания, идеи, фонды, источники рабочей силы и т.д. Они определяют состояние объекта на некоторую конкретную дату и в полной мере характеризует экономическое состояние. Запасы, таким образом, характеризуют некие статические количества, одномоментно зафиксированные объёмы показателей. Запас может иметь место на рынке благ (товаров или услуг) или на рынке ресурсов.

Третий вид экономических показателей – потоки. Философия развития потребовала усовершенствовать, модифицировать, математически описать и использовать известные методы представления потоков. В экономических системах потоки (*flows*) представляются как «активные элементы системы, количество или объём исследуемого показателя, изменяющегося за определённую единицу (период, интервал) времени. Потоки воспроизводят передачу ценностей субъектами друг другу в процессе экономической деятельности. Потоки удобно представлять отношением изменения показателя к интервалу прошедшего при этом времени, с потоком связываются параметры скорости изменения запасов» [130].

В словаре современной экономической науки даётся такое определение потока: «Поток (*flow – F*) – экономическая величина, которая измеряется в движении, с учётом того периода времени, для которого делается расчёт». [177]. Размерностью потока считают объём, делённый на время.

Потоки и запасы тесно взаимосвязаны: величина потока в экономическом кругообороте, кругообороте благ и доходов обусловлена перманентными приращениями запаса. Потоки «доходов-расходов» и «ресурсов-продукции» осуществляются одновременно в противоположных направлениях и бесконечно повторяются. По происхождению потоков экономика может рассматриваться как закрытая (замкнутая) или открытая

система – в первом случае доходы одних экономических агентов предстают как расходы других. Приходящие извне и уходящие туда же потоки в процессе кругооборота называются «инъекциями» и «утечками».

Задача о бассейне (обычной ванне) – классический пример в экономике, часто иллюстрирующий экономические понятия потока и запаса. Если количество (или уровень) воды в ванне (запас – *stock* –  $S$ ) принимать за некий экономический показатель (запасы энергоресурсов, денежная масса, национальное богатство, задолженность по кредиту и пр.), то в любых мыслимых ситуациях и коротких временах количество (уровень) воды меняется незначительно. Вода, поступающая через кран, – поток – *flow* –  $F$ . Объёмы струй (потоков) в единицу времени, питающих ванну, или объёмы струй в единицу времени, покидающих её, гораздо динамичнее, а следовательно – более информативны.

Например, накопленный в экономике капитал – запас – результат накопления потока инвестиций; а динамический объём инвестиций – поток. Запас и поток – богатство и доход; сальдо и обороты, состояния и изменения. Запас определяет глобальное (часто – финансовое) состояние экономического объекта и, как правило, представляет собой результат накопления каких-либо потоков. Запас может быть товарным, технологическим, страховым, текущим. Существуют нормы запаса – запас называется нормативным, сверхнормативным, капитальным.

**Статистическое описание показателей типа «запасы» и «потоки».**  
В системе национальных счетов (СНС) поясняется взаимосвязь между запасами и потоком – «потоки являются результатом накопления от предыдущих операций с некоторым потоком и другими потоками в данном периоде. Потоки являются непрерывными добавлениями к запасам и изъятиями из них. Динамику показателей типа запаса (*stock variables*) представляют с помощью моментных временных рядов, а динамику показателей типа потока (*flow variables*) – с помощью интервальных временных рядов» [93].

В научном исследовании В.А. Бессонова поясняется, что «временной ряд, сформированный из первых разностей уровней моментного ряда, становится интервальным, а временной ряд, сформированный из сумм нарастающим итогом всех членов интервального ряда, начиная с некоторого фиксированного периода до текущего, преобразуется в моментный» [18].

Динамику показателей типа «запасы» «представляют моментными временными рядами, к ним можно отнести статистические данные об объемах денежной массы на начало года, стоимости основных фондов на конец года, величине государственного долга, численности населения на конкретный момент времени и другие показатели. В качестве примеров переменных типа потока, которым соответствуют интервальные временные ряды, можно привести объемы добычи, потребления и экспорта энергоресурсов, изменение стоимости основных фондов, естественное и механическое движение населения, потоки платежей за некоторые интервалы времени. Чтобы получить полную и последовательную систему, все изменения экономической стоимости между двумя измерениями запасов должны быть представлены в потоках» [93].

Чувствуя размытость верbalного определения потока и запасов, экономисты пытаются количественно как-то «оконтурить» их. Так называемая «цифровизация» позволяет перевести лингвистические конструкции запасов и потоков в точные математические – аналитические, графические и численные эквиваленты. Математические методы исследования экономических потоков плодотворны и потому, что позволяют обратиться к хорошо разработанному математическому методу «потоки в сетях» с его концепцией максимальных потоков и минимальных разрезов. Привлечение метода «потоков в сетях» открывает совершенно потрясающие возможности анализа и синтеза оптимальных экономических сетей.

Эволюция современной экономики в условиях ускорения, глобализации и трансформации ограничивает применимость стандартных эконометрических процедур анализа, разработанных для более стабильных

условий. Необходимость исследования колебаний непрерывной и последовательной динамики процесса вызывает к жизни особенности экономического развития через «чувствительные» к изменениям конъюнктуры экономические потоки. Таким образом, в турбулентных случаях более эффективным может стать максимально точное математическое описание изменений (потоков) по сравнению с анализом моделей сглаженной динамики состояний (запасов).

## **1.2 Запасы и потоки – объекты научного исследования состояний и изменений в экономических системах**

Деление на запасы и потоки связано со способом измерения и учёта экономических показателей во времени. Построение моделей непрерывных потоков становится возможным интерполированием динамики запасов дифференцируемой функцией. Переход к показателям потока в дискретных моделях выполняется расчётом цепных приростов запаса:  $F_i = S_i - S_{i-1}$  (табл.1). В моделях с непрерывным временем преобразование функции запаса

в поток выполняется дифференцированием:  $F = \frac{dS}{dt}$ .

Здесь стоит вспомнить физический смысл первой производной: «Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Воспользуемся обозначениями  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ . Пусть для определённости  $\Delta x > 0$ . Отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , равное изменению переменной  $y$  на отрезке  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ , отнесённому к единице измерения переменной  $x$ , естественно называть величиной средней скорости изменения  $y$  на отрезке  $[x_0, x_0 + \Delta x]$  относительно  $x$ . При стремлении  $\Delta x$  к нулю, т.е. при стягивании отрезка  $[x_0, x_0 + \Delta x]$  к точке  $x_0$ , отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  даёт величину средней скорости изменения  $y$  во всём меньшем и меньшем отрезке, содержащем точку

$x_0$ . На интерпретации производной как величины скорости изменения одной величины относительно другой и основано применение производной к изучению физических явлений» [171].

Таблица 1

Динамика потока ежеквартальных платежей и накопленного потока

Кварталы	1 кв. 2010	2 кв. 2010	3 кв. 2010	4 кв. 2010	1 кв. 2011	2 кв. 2011
Поток платежей, за квартал	485.55	201.78	-612.22	-108.34	96.09	396.45
Накопленный поток (запас), на конец квартала	535.55	737.33	125.11	16.77	112.86	509.31
Кварталы	3 кв. 2011	4 кв. 2011	1 кв. 2012	2 кв. 2012	3 кв. 2012	4 кв. 2012
Поток платежей, за квартал	-311.61	560.03	110.41	1114.65	1111.38	1173.69
Накопленный поток (запас), на конец квартала	197.7	757.73	868.14	1982.79	3094.17	4267.86

Если представить «положение некоторой точки функцией  $S = f(t)$ , где  $S$  – пройденный путь, а  $t$  – время движения, то дифференцированием функции  $S$  получим мгновенную скорость движения в момент времени  $t$ :  $v(t) = S'(t)$ . Аналогично, если представить состояние (запас)  $S$  в некоторый момент времени  $t$  функцией  $S = f(t)$ , то дифференцированием функции  $S$  получим мгновенную скорость изменений в запасах в момент времени  $t$ :  $v(t) = S'(t)$ . Таким образом, первая производная динамики запасов есть мгновенная скорость их изменения – поток» [130].

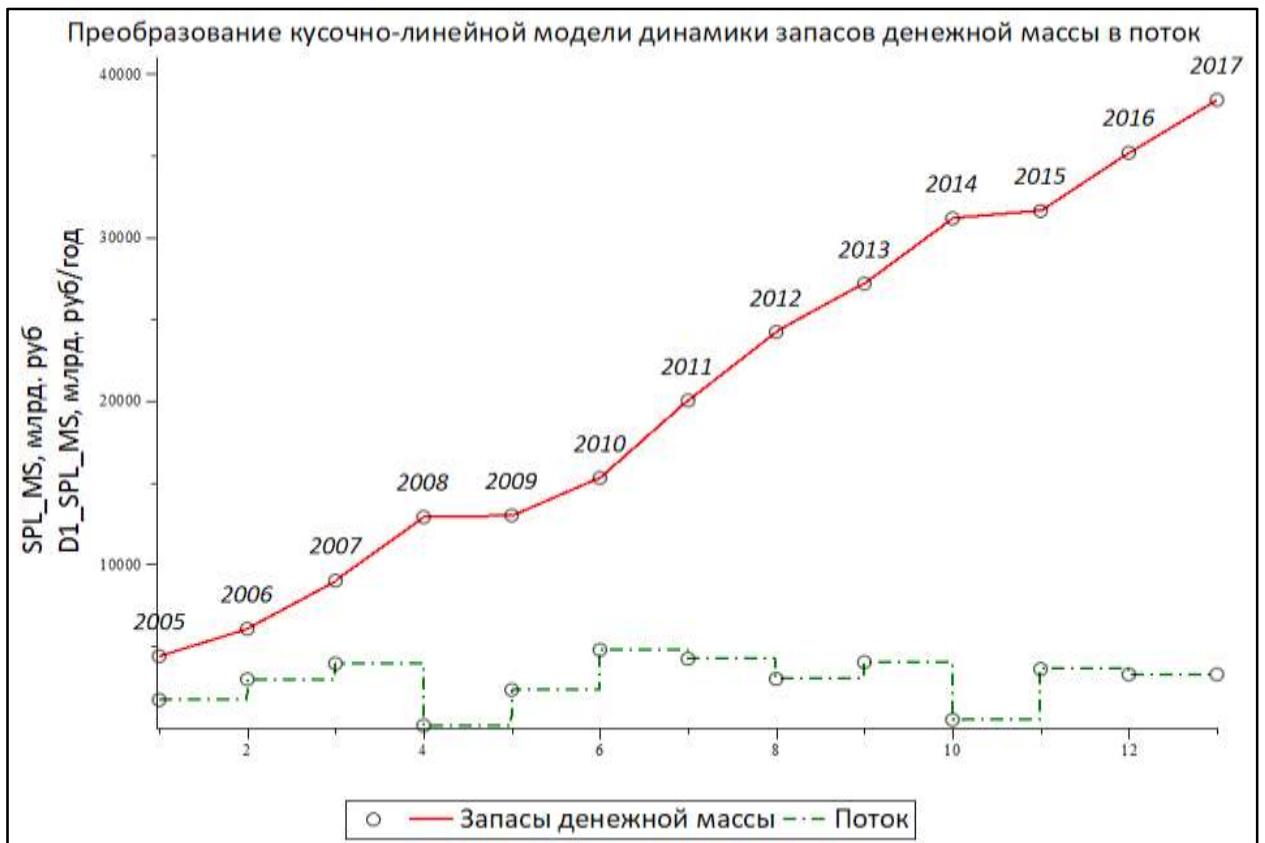
Например, если  $K(t)$  представляет собой размер основного капитала в момент времени  $t$ , то первая производная  $K'(t)$  – это скорость изменения  $K$  в момент времени  $t$ . Предположим, что капитал никогда не изнашивается и увеличивается по мере появления новых инвестиций. Если обозначить поток инвестиций в новый капитал через  $I(t)$ , то  $K'(t) = I(t)$  – первая производная функции капитала, то есть поток инвестиций. Для большей строгости можно учесть износ капитала. Амортизация – это поток сокращений стоимости

основного капитала из-за износа и устаревания. Если обозначить поток амортизации капитала через  $D(t)$ , то изменение запаса капитала будет представлять собой поток чистых инвестиций  $K'(t) = I(t) - D(t)$ . Способы описания запасов и потоков различаются для дискретных моделей классической эконометрики и непрерывных моделей новых эконометрических методов.



**Рисунок 1.1 – Визуализация дискретной динамики потока ежеквартальных платежей (вспомогательная ось, тыс. руб.\квартал) и накопленного потока платежей – запаса (основная ось, тыс. руб. на конец квартала)**

Интерполирование кусочно-линейной функцией моделирует динамику запасов денежной массы с точным совпадением с реальными данными в узловых точках. Интерполирование динамики линейными функциями между узловыми точками предполагает изменения в запасах с постоянной скоростью (Рис. 1.2).



**Рисунок 1.2 – Преобразование кусочно-линейной модели динамики запасов денежной массы ( $M_2$ ) в поток дифференцированием**

Механизм преобразования динамики запасов в поток хорошо иллюстрируется на примере кусочно-линейной интерполяции дискретных данных о запасах денежной массы ( $M_2$ ) в экономике России:

$$SPL\_MS = \begin{cases} 2676 + 1678t & t < 2 \\ 154 + 2939t & t < 3 \\ -2723 + 3898t & t < 4 \\ 12441 + 107t & t < 5 \\ 1516 + 2292t & t < 6 \\ -13196 + 4744t & t < 7 \\ -9339 + 4193t & t < 8 \\ 525 + 2960t & t < 9 \\ -8754 + 3991t & t < 10 \\ 26556 + 460t & t < 11 \\ -7588 + 3564t & t < 12 \\ -3676 + 3238t & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

Дифференцированием кусочно-линейной функции  $SPL\_MS$  модель динамики запасов денежной массы преобразуется в кусочно-постоянную

модель потока  $D1\_SPL\_MS$ :

$$D1\_SPL\_MS = \begin{cases} 1678 & t < 2 \\ 2939 & t < 3 \\ 3898 & t < 4 \\ 107 & t < 5 \\ 2292 & t < 6 \\ 4744 & t < 7 \\ 4193 & t < 8 \\ 2960 & t < 9 \\ 3991 & t < 10 \\ 460 & t < 11 \\ 3564 & t < 12 \\ 3238 & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (2)$$

Значения полученной функции постоянны внутри каждого интервала времени между узловыми точками и численно равны цепным приростам запасов денежной массы. Пример наглядно демонстрирует соответствие механизма аналитического преобразования непрерывной модельной функции запасов в поток дифференцированием лингвистической и статистической интерпретации взаимосвязи между дискретными запасами и потоком. В то же время необходимо подчеркнуть, что первая производная функции запасов, или иначе, поток, есть мгновенная скорость изменения запасов.

Примем за научную аксиому: «поток – это первая разность или первая производная функции запаса» [93]. Если обозначить через  $F$  – *flow* – функцию потока, а через  $S$  – *stock* – функцию запаса, тогда:

$$F(t) = \Delta S(t) / \Delta t \text{ или } F(t) = dS(t) / dt = S'. \quad (3)$$

При построении моделей динамики эмпирические данные запасов, относящихся к конкретным моментам времени, а также изменений запасов (потоков) за определённый промежуток времени изначально имеют дискретную форму. Дискретное представление потоков удобно использовать в бухгалтерском учёте, что позволяет сводить их в таблицы, а сами расчёты выполнять в электронных таблицах, например, в *Excel*. В некоторых случаях

дискретная форма данных считается достаточной и для целей экономического анализа. В то же время дискретное представление не позволяет проводить глубокий динамический анализ потоков, получать точные или приближённые аналитические формулы для интерполяции и экстраполяции экономических конъюнктур, вычислять непрерывно «наклоны» и особые точки.



**Рисунок 1.3 – Преобразование кусочно-непрерывной модели динамики запасов денежной массы (M2) в поток дифференцированием. Непрерывное представление динамики потока и накопленного потока платежей (запаса). Накопленный поток или интеграл потока – запас**

Численное интегрирование непрерывной функции потока позволяет определить изменения в запасах за временной интервал произвольной длины, не зависящей от расположения узловых точек процесса. Например, поток (изменение) денежной массы (M2) с февраля 2005 по февраль 2006 года определим интегрированием сплайн-модели:

```

D1_SPL_MS= ((99185273/175630)*t^2-(99185273/87815)*t+541245983/263445 t ≤ 2
              (33696385/35126)*t^2-(237778577/87815)*t+27343597/7527 t ≤ 3
              -(932233753/175630)*t^2+(3064368457/87815)*t-13902635758/263445 t ≤ 4
              (1057725587/175630)*t^2-(376574531/6755)*t+33856388402/263445 t ≤ 5
              -(29994791/35126)*t^2+(1143028807/87815)*t-11432344423/263445 t ≤ 6
              -(317150137/175630)*t^2+(2146085899/87815)*t-2922836893/37635 t ≤ 7
              -(163676167/175630)*t^2+(1071768109/87815)*t-1311360208/37635 t ≤ 8
              (122503165/35126)*t^2-(5137767827/87815)*t+65334909776/263445 t ≤ 9
              -(1093508173/175630)*t^2+(2043289631/17563)*t-141947005981/263445 t ≤ 10
              (1357844687/175630)*t^2-(2859416089/17563)*t+225755923019/263445 t ≤ 11
              -(168391085/35126)*t^2+(9900720787/87815)*t-24786828187/37635 t ≤ 12
              (202744313/175630)*t^2-(202744313/6755)*t+52147346099/263445 12 < t

```

```
> evalf(int(D1_SPL_MS, t = 13/12 .. 25/12));  
1729.0596
```

Изменения в запасах денежной массы ( $M_2$ ) с 2005 по 2017 гг. определим интегрированием функции потока  $D1\_SPL\_MS$  на интервале с  $t=1$  до  $t=13$ .

```
> evalf(int(D1_SPL_MS, t = 1 .. 13));  
34064.0000
```

Полученное значение накопленного запаса за 2005-2017 годы отличается от накопленных запасов денежной массы ( $M_2$ ) на конец 2017 года на величину  $C=4354$  – значение запасов денежной массы на начало 2005 года:

> 4354+34064;

38418 Непрерывное представление потоков оказывается более эффективным – теперь удаётся выяснить, что происходит внутри шага (временного интервала), когда осуществляются затраты, а также сохраняется информация о других темпоральных особенностях непрерывного потока. В экономических исследованиях есть смысл перехода от дискретного представления данных к непрерывной форме с целью обнаружения и более эффективного анализа закономерностей.

38418 Обозначим поток непрерывной функцией  $F(t)$ , описывающей динамику экономического показателя внутри некоторого интервала

времени  $\Delta t$ . В этом случае накопленный объём показателя  $S$  (запас) к моменту времени  $T$  можно определить интегрированием функции

$$\text{потока: } S = \int_0^T F(t)dt.$$

Выясняется, что математические построения обнаруживают естественные для верbalного аппарата заблуждения, например, сложение или вычитание запасов и потоков – величин разных размерностей – вещь невозможная. Запас может складываться с поступающими или уходящими потоками через сумму интегралов от нескольких  $i$ -тых потоков, интегрирование выполняется от начального до конечного времени накопления запаса – от  $S_L$  до  $S_H$ :

$$S_H = S_L \pm \int \sum F_i(t)dt, \quad (4)$$

где  $S_L$  – начальное значение функции запаса;

$S_H$  – конечное значение функции запаса;

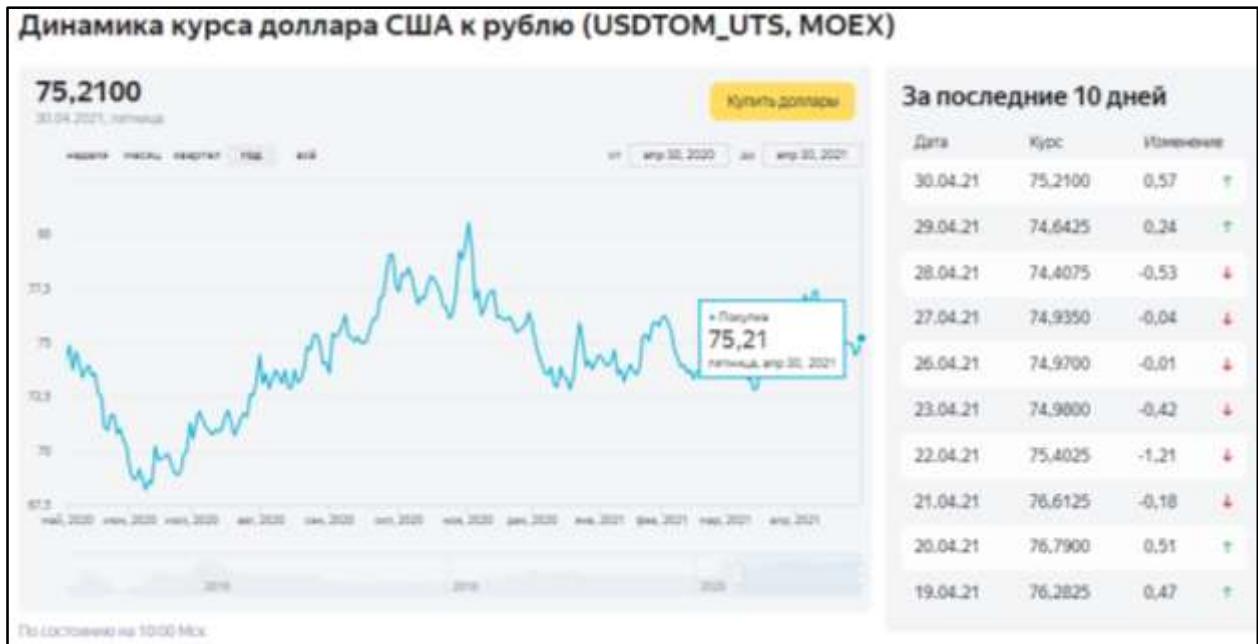
$\sum$  – по всем  $i$ -тым потокам на этом интервале;

$F_i(t)$  – один из  $i$ -тых потоков.

Переменный уровень запаса может сопрягаться с переменным уровнем динамического потока. Математически это сопряжение реализуется операцией интегрирования.

Если обратиться к математическим и инструментальным методам в экономике, то с точки зрения математики потоки, и запасы в экономике – переменные величины «одного сорта», и те, и другие суть функции, изменяющиеся во времени. В экономической литературе этот факт отмечается терминами: «переменные запаса» и «переменные потока». В этом смысле, переменные экономической конъюнктуры, отнесённые к конкретному моменту времени, также являются показателями типа запас. Например, это может быть курс валюты на конкретный момент времени, экспортная цена на нефть, уровень безработицы и другие экономические показатели. Тогда изменения в последовательных значениях экономических

переменных интерпретируются как потоки. Например, значения курса доллара США к рублю на конкретную дату являются показателями типа «запас», а изменения курса валюты представляют собой показатель типа «поток» (Рис. 1.4).



**Рисунок 1.4 – Динамика ежедневных курсов доллара США к рублю и ежедневных изменений курса.** Источник: <https://yandex.ru/>

### 1.3 Абсолютная точность аналитического представления – основа валидности моделей задачам адаптивного управления потоками в экономике

Повышение эффективности оперативного управления потоками в цифровой экономике возможно соблюдением точности их модельного представления. В первую очередь это связано с ростом детерминированности информационных, финансовых, товарных и др. потоков в экономике за счёт повышения достоверности информации о потребностях производителей, потребителей, поставщиков товаров и услуг. Например, запросы потребителей товаров или услуг формируются в режиме стриминга, что порождает потоки производства, транспортировки и реализации товаров и услуг «по требованию». При этом значительно снижается неопределённость в планировании запасов – ресурсов для производства, наличия запасов товара

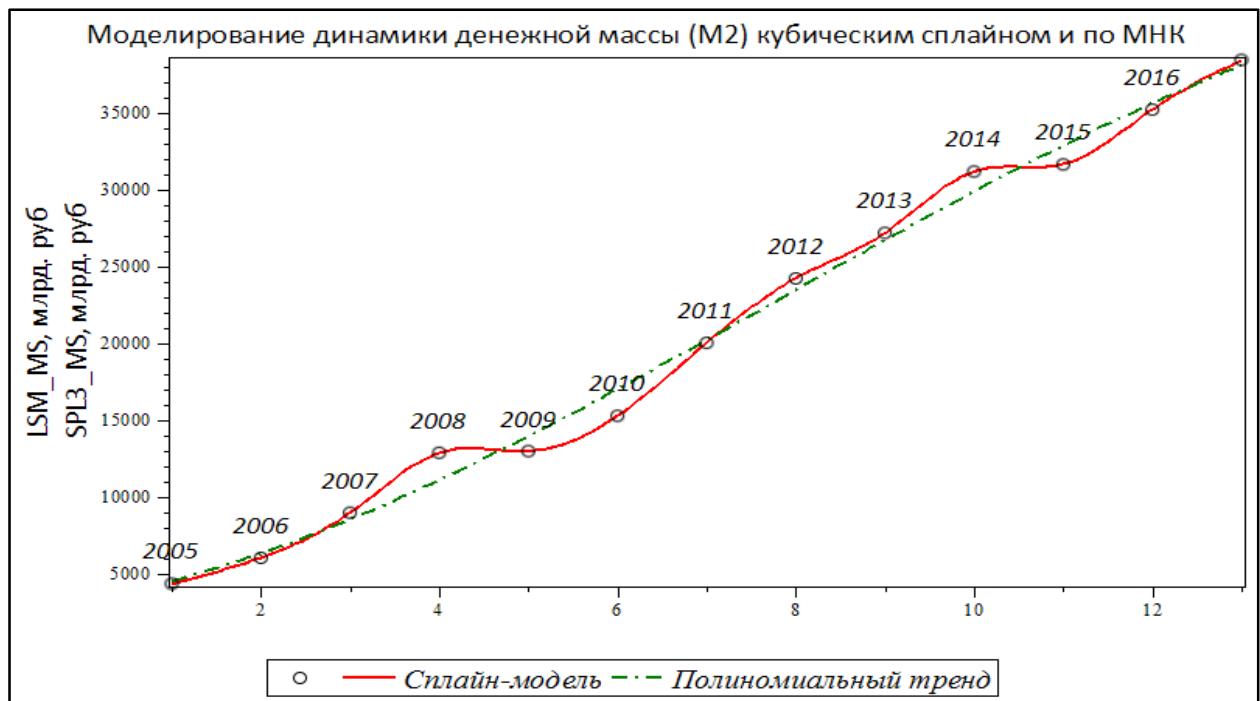
на складе, численности трудовых и объёмов финансовых ресурсов и т.д. В условиях цифровизации становятся востребованы методы системного динамического моделирования, локального анализа непрерывных изменений и адаптивного управления потоками в режиме реального времени. Моделирование потоков в цифровой экономике требует точных методов их аналитического описания, что должно сохранить в модели информацию даже о малых изменениях.

Классические эконометрические методы для аналитического описания динамики состояний пользуются удобными для линейной парадигмы регрессионными уравнениями. При таком подходе исследователь абстрагируется от локальных изменений в состояниях изучаемой системы, отображая в строящихся моделях обобщённую или усреднённую внутри некоторого интервала времени траекторию развития [117]. В условиях цифровизации экономики, очевидно, применимость стандартных эконометрических процедур анализа, разработанных для более стабильных условий, ограничивается. Важным отличием методов новой методологии к анализу и «...управлению экономической системой становится её восприятие не как объекта с фиксированными состояниями, а как процесса последовательных изменений» [131]. При этом возникает необходимость учитывать изменения в состояниях за временные интервалы любой длины, а не только между равномерно-распределёнными моментами времени. На практике это может быть, например, возможность управлять нерегулярными потоками платежей, товаров, запросов и др. в режиме реального времени.

Оценим сохранение точности эмпирических данных о состояниях процесса на примере моделирования динамики денежной массы ( $M2$ ) сплайнами и аппроксимацией по методу наименьших квадратов. Аппроксимацией по методу наименьших квадратов получим полиномиальную модель третьей степени:

$$LSM\_MS = -\frac{42533}{3432}t^3 + \frac{2326669}{8008}t^2 + \frac{11914897}{12012}t + \frac{468928}{143}. \quad (5)$$

Классическая эконометрическая модель проводит свои траектории мимо точек реальных состояний, а качество приближения в среднем проверяется коэффициентом детерминации. Аналитический образ полученной модельной кривой остаётся достаточно далёким от истинной аналитики и контролируется чаще субъективными оценками исследователя. Как видно на рисунке 1.5, кривая полиномиального тренда проходит мимо реальных значений о состояниях процесса в узловых точках – запасах денежной массы на начало каждого года. Необходимо заметить, что генерируемые методом наименьших квадратов ошибки аппроксимации нивелируют информацию о последовательных изменениях состояний – приростах денежной массы – отоках.



**Рисунок 1.5** – Полиномиальная (GREEN, штрих-пунктир) и кубическая сплайновая (RED, сплошная линия) аппроксимации динамики запасов денежной массы (M2) в экономике России, млрд. рублей, на начало года.

Дифференцируем уравнения регрессии до получения первой производной – гновенной скорости изменения запасов денежной массы – отока:

$$D1\_LSM\_SM = -\frac{42533}{1144}t^2 + \frac{2326669}{4004}t + \frac{11914897}{12012}. \quad (6)$$

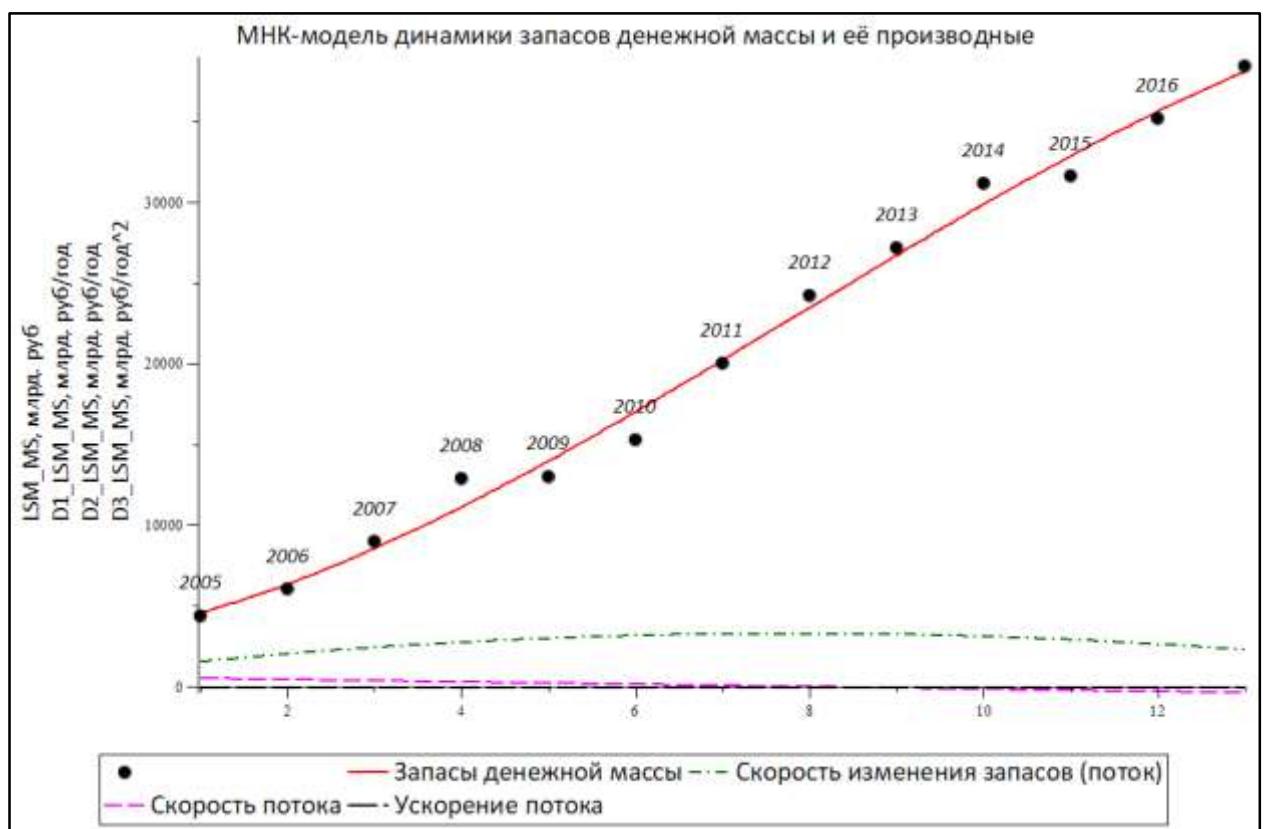
Первая производная  $D1\_LSM\_SM$  модельной кривой  $LSM\_MS$

демонстрирует равномерное изменение запасов денежной массы по параболической траектории, абстрагируясь от колебаний реального процесса (Рис. 1.6).

Вторая производная уравнения динамики запасов денежной массы характеризует собой скорость потока:

$$D2\_LSM\_SM = -\frac{42533}{572}t + \frac{2326669}{4004}. \quad (7)$$

В нашем примере вторая производная демонстрирует линейные изменения скорости потока, отодвигая аналитику от истины ещё далее [103].



**Рисунок 1.6 – Полиномиальная модель динамики запасов денежной массы (M2) и её производные**

Третья производная уравнения процесса, полученного моделированием по методу наименьших квадратов, становится постоянной на всём исследуемом интервале:

$$D2\_LSM\_MS = -\frac{42533}{572}. \quad (8)$$

Отсюда результаты исследования корреляций, цикличности, сезонности и конкуренции потоков будут страдать неприемлемыми для

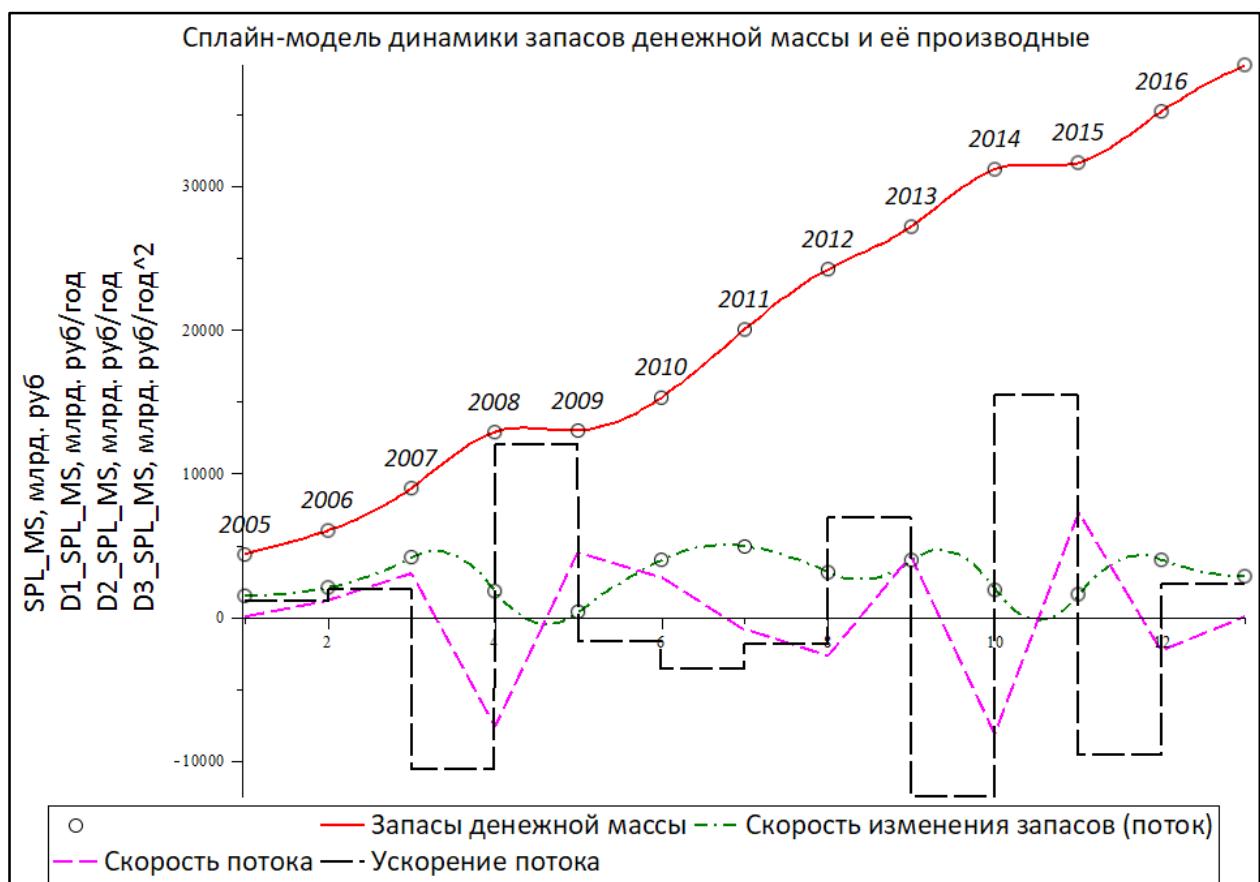
эффективного управления расхождениями с реальностью.

Решение задачи «управления потоками в режиме реального времени, в первую очередь, заставляет отказаться от сглаживающих процедур, искажающих реальную динамику. Второй аргумент – механизм взаимного количественного преобразования запасов и потока, также требующий сохранения точности в модельном представлении исходных данных. Следующим аргументом к моделированию потоков без ошибок аппроксимации является необходимость поиска корреляций в колебаниях скорости – ускорениях или замедлениях роста. Это позволяет нам выделить три ключевых требования к моделирующим динамику потоков функциям – нулевая погрешность аппроксимации, адаптивность, непрерывность. Одновременно выделенным требованиям удовлетворяют сплайн-функции третьей степени, известные своей гибкостью, наилучшим интерполяционным поведением, а также непрерывностью как самой функции, так и первых двух производных» [87, 131].

Метод моделирования динамики с нулевой погрешностью аппроксимации во всех узловых точках заметно отличается от классического подхода, требующего минимизировать суммы отклонений модельного и реального процессов в узловых точках. В этом проявляется концептуальное различие методов классической эконометрики и методов методологии сплайн-моделирования. Классические подходы к моделированию процессов объясняют необходимость сглаживания динамики гипотезой о вероятностной природе данных и равенством нулю среднего значения остатков. На наш взгляд, сглаживание эмпирической динамики можно оправдать для целей выявления долгосрочных тенденций развития. Для решения задач адаптивного управления потоками в экономических системах более эффективным представляется подход, согласно которому все измеренные и зафиксированные данные о состояниях исследуемой системы должны быть отражены в моделях без ошибок аппроксимации. Сглаживанием динамики состояний (запасов) в исследуемой динамике, строящаяся модель нивелирует

данные о реальных изменениях в динамике состояний – потоках.

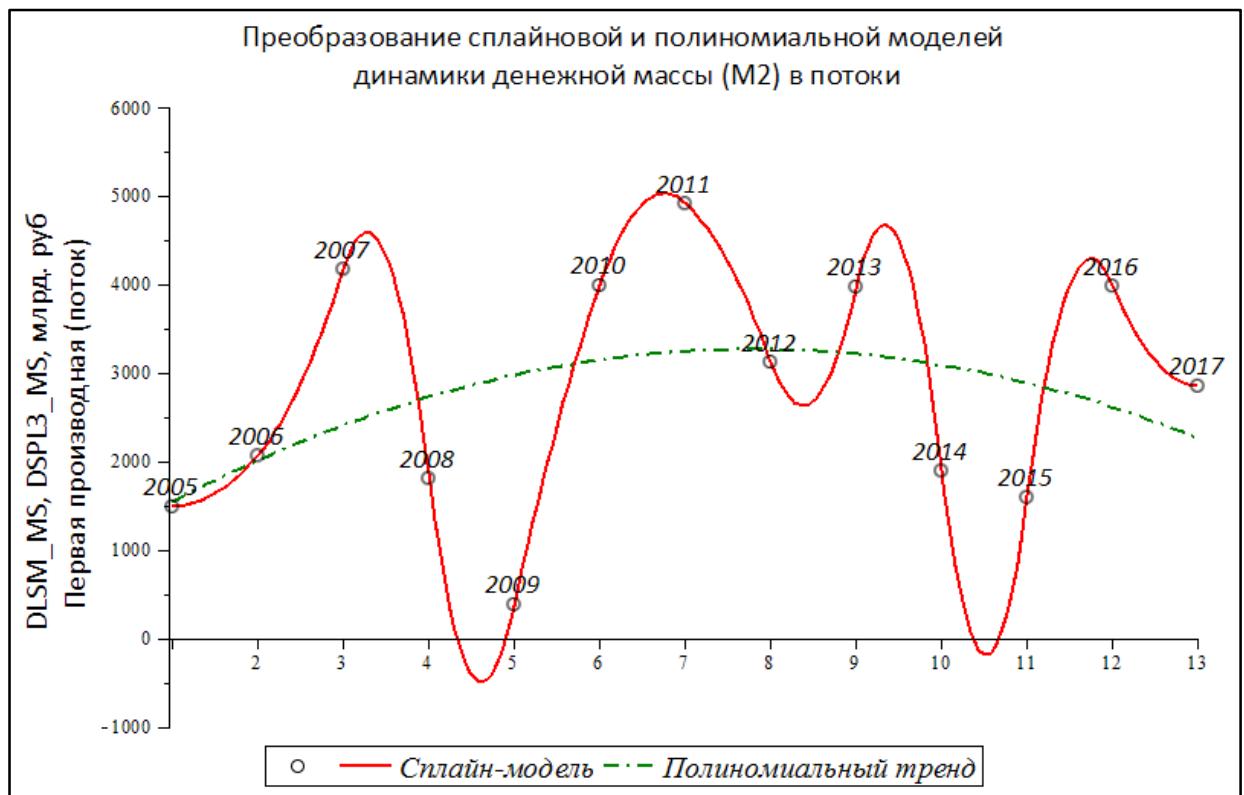
Новая концепция предлагает выполнять аналитическое моделирование потоков сплайнами, используя значения переменной из экономической «решётчатой функции» (таблицы) без ошибок аппроксимации. Сплайн аналитичен одновременно со всеми своими производными, которые даже нет необходимости получать дифференцированием «извне» и вычислять – они составляют неотъемлемую часть сплайновой конструкции. Таким образом, большей точности и валидности, нежели сплайновым аппаратом, на всех стадиях математического и инструментального построения модели получить абсолютно невозможно. Из сплайн-интерполяционной модели динамики состояний (запасов) могут быть получены модели потока, скорости и ускорения потока дифференцированием (рис. 1.7).



**Рисунок 1.7 – Сплайн-модель динамики запасов денежной массы (M2) и её производные**

Результаты анализа показывают, что «построенные по МНК модели, абстрагируясь от «случайных» колебаний в исследуемой динамике, утрачивают информацию о реальных состояниях экономической системы в

конкретные моменты времени (Рис. 1.8). Преобразование динамики состояний в таких моделях в динамику изменений (потоки) углубляет различия между модельным и реальным процессами. В условиях цифровой экономики источником знаний о закономерностях развития становятся и малые изменения на локальных временных участках развития. Сглаживание или абстрагирование от реальных колебаний в динамике не позволит эффективно управлять процессами в режиме реального времени» [131].



**Рисунок 1.8** – Первые производные моделей динамики запасов денежной массы – потоки

Как уже было сказано, сглаживание динамики состояний (запасов) приводит к искажению реальных изменений в состояниях – потоках. Очевидно, искажения могут наблюдаться как в изменениях (потока) между последовательными моментами времени, так в общем объёме накопленного потока за весь исследуемый интервал времени.

Сравним искажения в потоках, которые могут появиться при интерполировании динамики запасов сплайнами, с погрешностями полиномиальной аппроксимации. При сплайн-интерполяции искажения в потоках могут быть результатом лишь интерполяционного поведения модели

между узловыми точками. В узловых точках совпадение модельного и реального процессов абсолютное. При моделировании динамики запасов по методу наименьших квадратов источниками существенных искажений в потоках могут быть как отклонения между модельными и реальными процессами в узловых точках, так и поведение модельной кривой в промежутках между узлами. При этом, в общем объеме накопленного потока за весь исследуемый интервал времени искажения МНК-модели должны минимизироваться взаимопогашением и стремлением к нулю суммы квадратов отклонений.

Оценим точность в определении изменений в запасах денежной массы (M2) численным интегрированием сплайн-интерполяционной  $D1\_SPL\_MS$  и полиномиальной  $D1\_LSM\_MS$  моделей потока. Здесь уместно вспомнить физический смысл определённого интеграла, «согласно которому перемещение  $S$  движущейся со скоростью  $V(t)$  точки за интервал времени  $[t-1, t]$  можно определить интегрированием по формуле:

$$S = \int_{t-1}^t V(t) dt .$$

В нашем случае, изменения в запасах  $F$ , происходящие с переменной скоростью за интервал времени  $[t-1, t]$  можно определить интегрированием:

$$F = \int_{t-1}^t D1\_SPL\_MS(t) dt - \text{для сплайн-модели};$$

$$F = \int_{t-1}^t D1\_LSM\_MS(t) dt - \text{для МНК-модели» [93].}$$

Для сравнимости оценок выполним численное интегрирование сплайн-интерполяционной и полиномиальной моделей потока в границах, совпадающих с узлами исходного процесса. Это позволит нам сравнить результаты интегрирования с точными значениями цепных приростов денежной массы. Как показали расчёты, потоки денежной массы (M2),

определенные интегрированием модели  $\int_{t-1}^t D1\_SPL\_MS(t)dt$  с абсолютной

точностью совпали с цепными приростами запасов денежной массы (M2) на всех временных интервалах (таб. 2).

Сумма всех последовательных изменений в запасах денежной массы, определённая интегрированием от начального до конечного времени накопления запаса составила:

$$F_{2005/2017} = \int \sum F_i(t)dt = 34064.0000 \text{ млрд. руб.}$$

Накопленный на конец 2017 года запас с учётом запаса денежной массы на конец 2005 года составил:

$$S_H = S_L \pm \int \sum F_i(t)dt = 4354 + 34064.0000 = 38418 \text{ млрд.руб.},$$

где  $S_L = 4354$  млрд. руб. – значение запаса на конец 2005 г.;

$S_H = 38418$  млрд. руб. значение запаса на конец 2017 г.;

$\sum$  – по всем  $i$ -тым потокам на интервале от 2005 по 2917 г.;

$F_i(t)$  – один из  $i$ -тих потоков.

Таблица 2  
Оценка точности сплайн-интерполяционной и полиномиальной моделей

t	Денежная масса (M2), млрд. руб. на конец года	Цепные приrostы (поток), млрд. руб./год	$\int_{t-1}^t D1\_SPL\_MS(t)dt$ млрд. руб./год	$\int_{t-1}^t D1\_LSM\_MS(t)dt$ млрд. руб./год	Абсолютное отклонение (гр. 5-гр.3), млрд. руб./год	Относительное отклонение ((гр. 6/гр.3)*100), %
1	2	3	4	5	6	7
2005	4354	-	-	-	-	-
2006	6032	1678	1678,0000	1776,7940	98,794	5,9
2007	8971	2939	2939,0000	2209,1633	-729,8367	-24,8
2008	12869	3898	3898,0000	2567,1743	-1330,8257	-34,1
2009	12976	107	107,0000	2850,8269	2743,8269	2564,3
2010	15268	2292	2292,0000	3060,1211	768,1211	33,5
2011	20012	4744	4744,0000	3195,0569	-1548,9431	-32,7
2012	24205	4193	4193,0000	3255,6344	-937,3656	-22,4
2013	27165	2960	2960,0000	3241,8534	281,8534	9,5
2014	31156	3991	3991,0000	3153,7140	-837,286	-21,0
2015	31616	460	460,0000	2991,2163	2531,2163	550,3
2016	35180	3564	3564,0000	2754,3601	-809,6399	-22,7
2017	38418	3238	3238,0000	2443,1456	-794,8544	-24,5
$\Sigma$	-	34064	34064,0000	33499,0603	-564,9397	-1,7

Полиномиальное сглаживание исходной динамики запасов денежной массы (М2) привело к заметным искажениям в потоках. Так, абсолютные отклонения модельных значений потока от реальных наблюдаются в диапазоне от 98.794 до 2743.8269 млрд. руб./год. В относительном выражении отклонения колеблются от 5.9% до 2564.3% в год. В то же время, за счёт взаимопогашения знакопеременных изменений, суммарное отклонение между расчётыми и фактическими запасами денежной массы на конец 2017 года составило сравнительно небольшое значение – 564,9397 млрд. руб. или 1,7% [131].

Важной для эффективного управления потоками в цифровой экономике является возможность их оценивания для временных интервалов переменной длины. Для сравнения двух подходов выполним численное интегрирование сплайн-интерполяционной и полиномиальной моделей потока на отрезках переменной длины:

с 31.12.2005 г. по 30.06.2010 г.;

с 01.07.2010 г. по 30.06.2014 г.;

с 02.07.2014 г. по 31.12.2017 г.

Границы отрезков интегрирования в нашем примере выберем, не всегда совпадающими с узловыми точками исходного процесса. Сумму полученных интегралов для сплайн-интерполяционной и полиномиальной моделей потока сравним с итоговым приростом запасов за 2005-2017 гг.

```
> evalf(int(D1_SPL_MS, t = 1 .. 5.5));
9315.0989

> evalf(int(D1_SPL_MS, t = 5.5 .. 9.5));
15736.0624

> evalf(int(D1_SPL_MS, t = 9.5 .. 13));
9012.8387

> 9315.0989 + 15736.0624 + 9012.8387 ;
34064.0000
```

Таким образом, сумма изменений в запасах денежной массы, определённая интегрированием сплайн-модели внутри интервалов

переменной длины, составила:

$$F_{1/13} = \int_1^{13} F_i(t) dt = \int_1^{5.5} F_i(t) dt + \int_{5.5}^{9.5} F_i(t) dt + \int_{9.5}^{13} F_i(t) dt = 9315.0989 + 15736.0624 + 9012.8387 = 34064.0000 \text{ млрд.руб.}$$

Накопленный на конец 2017 года запас с учётом запаса денежной массы на конец 2005 года составил:

$$S_H = S_L \pm \int_1^{13} F_i(t) dt = 4354 + 34064.0000 = 38418 \text{ млрд. руб.};$$

Интегрированием полиномиальной модели потока внутри интервала с 2005-2017 гг. с разбивкой на отрезки времени в 4.5 года, 4 года и 3.5 года, получим следующие результаты:

```
> evalf(int(D1_LSM_MS, t = 1 .. 5.5));
10912.5047
> evalf(int(D1_LSM_MS, t = 5.5 .. 9.5));
12836.6415
> evalf(int(D1_LSM_MS, t = 9.5 .. 13));
9749.9142
> 10912.5047 + 12836.6415 + 9749.9142;
33499.0604
```

Сумма накопленного потока денежной массы, определённая интегрированием полиномиальной модели потока, составила:

$$F_{1/13} = \int_1^{13} F_i(t) dt = \int_1^{5.5} F_i(t) dt + \int_{5.5}^{9.5} F_i(t) dt + \int_{9.5}^{13} F_i(t) dt = 10912.5047 + 12836.6415 + 9749.9142 = 33499.0604 \text{ млрд.руб.}$$

Накопленный на конец 2017 года запас денежной массы, с учётом его величины на конец 2005 года составил:

$$S_H = S_L \pm \int_1^{13} F_i(t) dt = 4354 + 33499.0604 = 37853.0604 \text{ млрд. руб.};$$

Суммарные отклонения запасов денежной массы (M2), рассчитанных интегрированием на отрезках переменной длины, совпадают с результатами интегрирования на отрезках равной длины – погрешность составила в абсолютном выражении 564.9396 млрд. руб. или 1.7% в относительном выражении. Однако, задачи управления потоками в режиме реального времени требуют совпадения модельных и реальных значений с высокой

точностью не только в итоговых или обобщённых результатах, но и внутри каждого временного интервала.

Требование абсолютной точности исходного статистического материала в условиях высокой интенсивности изменений в современной экономике становится полезным и при исследовании «событийных составляющих» динамики. Эволюция динамики экономических временных рядов выражается в высоких темпах спада или роста показателей, приводящих к появлению выбросов. Выбросы, регистрируя реакцию объекта исследования на некоторые события, могут быть достаточно информативными, обнаруживая причины структурных изменений в динамике исследуемого процесса или в параметрах взаимосвязей в экономике. В современных условиях часты случаи воздействия неординарных (политических, социальных...) событий на динамику экономических потоков. Например, в последние годы, это – внезапное решение об отмене авиасообщения между некоторыми странами, приостановка работы крупного нефтеперерабатывающего комплекса, ввод торговых санкций и др. Сплайновые математические модели, адаптируясь к малым и экстремальным изменениям в экономической динамике, позволяют изучать локальные реакции процесса на вариацию факторных признаков [117], [205], [322].

Среди множества моделей, которые обязаны проходить точно через все точки исходного «решётчатого» представления, сплайновая модель должна отличаться в лучшую сторону тем, что кривая её решения будет проходить с минимальной кривизной отрезков, а сами «куски» сплайн-функции будут адаптироваться к последовательно-переменной структуре эмпирического процесса внутри темпоральных участков.

В абсолютно точном прохождении модельной кривой через все узловые точки эмпирического сигнала некоторые экономисты обнаруживают противоречие с гипотезой о стохастичности процессов в экономике. Предлагаемый новый подход к математическому описанию динамики

предполагает, что «стохастика экономики проявляется в структуре разброса узловых точек в таблице или по решётчатой функции экономического показателя на плоскости или в многомерном пространстве. Раз экономическая переменная и время одномоментно измерены и помещены в таблицу или на график, то «новая» модель будет детерминированной и – если пользоваться концепцией МНК – всегда даст коэффициент детерминации, равный единице, и сумму квадратов невязок, равную нулю» [105].

Изменения в современной экономике становятся столь быстрыми, турбулентными и сложными, что для их исследования приходится обращаться к новой парадигме аналитического моделирования и новым подходам изучения. Ключом в одном из них оказываются экономические потоки, их динамика и корреляции. Поскольку потоки, как первые производные переменных, более подвижны, они раньше предсказывают изменения экономического показателя, позволяют находить корреляцию не только абсолютных показателей экономического движения, но и выявлять её в особенностях замедления или ускорения развития.

Для эффективного оценивания незначительных по абсолютной величине изменений экономических показателей стоит обращаться к динамике потоковых моделей. Именно в динамике экономических потоков наглядно отображаются изменения скорости развития, исследование которых требует обращения к новым эконометрическим инструментам, в частности, к «декомпозиции» экономической динамики дифференцированием.

Важным условием валидности вновь построенных моделей практике становится требование минимальности кривизны в интерполяционном поведении модели. И это потому, что если методы классической эконометрики сравнивают дискретные состояния процесса и модели в отдельных точках, то потоки требуют сравнения изменений на временных интервалах.

## **1.4 Особая роль и специальные достоинства потоков в изучении трансформирующихся экономических систем**

В современных условиях качество динамического развития характеризуется не столько величинами состояний, сколько скоростью их изменений – потоком. В системной динамике запасы (также известные как уровни, накопления или переменные состояния) используются для представления реальных процессов (например, численности персонала, запасов материала, знаний, денег), определяя статическую часть системы. Поток определяет скорость изменения запасов и, таким образом, определяет динамику системы. Внимание исследователей больше привлекает изучение динамических изменений в экономических системах, чем анализ состояний. Модели потоков в экономике позволяют более углублённо исследовать факторы устойчивости в развитии, локальные и реакции системы на воздействия «событийных составляющих» динамики, обнаруживать «латентные» для динамики состояний корреляции.

В динамических системах часто бывает необходимым сравнивать процессы, представленные различными по своей природе показателями типа запас и поток. Каждый из таких процессов имеет различия относительно времени, к которому относятся их данные – конкретные моменты времени для показателей типа запас и интервалы времени для показателей типа поток. Тогда становится актуальной задача приведения сравниваемых показателей к сопоставимому виду. Для приведения к сопоставимому виду дискретных данных достаточны широко известные методы разностной аппроксимации [324]. В системах с непрерывным временем данные приводятся к сопоставимому виду, восстанавливая непрерывные функции по рядам табличных данных. Дифференцированием функции, моделирующей динамику запасов, выполняется их преобразование в динамические модели потока. Обратное преобразование возможно интегрированием функции, моделирующей динамику потока.

Непрерывное описание процессов привносит значительный рост аналитических возможностей по сравнению с моделированием дискретных состояний. В условиях турбулентной и ускоряющейся экономики становится важным исследовать темпоральные особенности скоростей, ускорений или замедлений развития, что требует непрерывного представления процессов методами, уходящими от примитивного сглаживания эмпирического сигнала. Актуальность непрерывного представления процессов диктуется и цифровизацией экономики – она заметно расширила возможности непрерывного доступа населения к услугам и товарам – «...доступа в режиме стриминга. Учёт состояний (запасов) в экономических системах при этом становится свободным от привязки к конкретным календарным датам, а изменения состояний (потоки) могут учитываться за временные интервалы произвольной длины. Например, может потребоваться определить изменение задолженности по кредиту с 10 числа прошлого месяца по 25 число текущего, а не за целый месяц. Моделирование потоков при этом должно удовлетворять важному требованию – аналитическое описание непрерывными функциями, некритичными к вариативности шага интерполяции» [131]. Характеризуя поток как экономическую величину, которая измеряется в движении, для её исследования более эффективной становится непрерывная модель динамики. Если дискретная форма представления запасов и потоков более пригодна для моделей классической эконометрики, то «новая эконометрика» предлагает описывать запасы и потоки непрерывно, гладкими, структурно-вариативными сплайновыми функциями.

В предлагаемой новой концепции к моделированию и анализу процессов в экономике источником точной информации о последовательных изменениях в системе становятся потоки – производные динамики состояний. Привлечение производных в изучение динамических систем также требует описания процессов в нём непрерывно. Тогда модели динамики состояний в динамических системах могут быть «декомпозированы» дифференцированием на модели последовательных изменений в состояниях

– потока, скорости и ускорения потока. Динамические модели потоков помогают исследовать такие характеристики экономической системы, как скорость развития, структурную вариативность поведения во времени, особенности воздействия потоков на замедления или ускорения экономического развития. Модели потоков позволяют оценить эффективность экономических систем – производственной, финансовой, логистической..., оптимизировать их конструктивные параметры. Модели непрерывного потока эффективны для анализа систем с переменной структурой.

Важное значение приобретают в последнее время методы непрерывного представления потоков в задачах управления запасами. Постановка и решение задачи управления запасами является серьезной проблемой для менеджеров. Это связано с тем, что отсутствие запасов часто приводит к потере одного или нескольких клиентов или к избыточному хранению, что приводит к повышению стоимости хранения и может привести к повреждению товара. Таким образом, необходимо определить, какие экономически обоснованные объемы товара следует заказывать с использованием наиболее релевантных моделей динамики, таких как модель Уилсона, при этом использовать оценки рыночных колебаний и сезонности спроса. Всегда рекомендуется при работе с запасами сохранять порог безопасности, потому что лучше потерять в стоимости поставок, нежели навсегда потерять клиента. Модели с непрерывным временем позволяют управлять запасами более эффективно – непрерывные потоки минимизируют запасы без прерываний. Кроме того, модель непрерывного потока позволяет сократить затраты на хранение.

Особая роль потоков обнаруживается при исследовании локальных корреляций между процессами. Часто можно заметить, что колебания значений факторного признака вызывают лишь незначительные колебания значений результативного признака, особенно если данные представлены значениями показателей типа запас. В то же время потоки (первые

производные функции запаса или приrostы запасов) этих процессов могут коррелировать друг с другом гораздо заметнее [122].

Всё больший интерес у экономистов-аналитиков в условиях глобализации вызывают исследования экономической конкуренции (раздел 5). Существующие методы исследования конкуренции имеют вербальный характер, описывая дискретные состояния конкурирующих участников рынка. Обычно при анализе конкурентных преимуществ оценивают потенциал участников антагонистического взаимодействия – ими могут быть количественные показатели «запаса» экономических возможностей сторон на дискретные моменты времени. Методы «новой эконометрики» предлагают оценивать конкуренцию в динамике, количественно, аналитически и графически представляя темпоральные особенности взаимного воздействия экономических «потоков». Складываясь, доли участия всех игроков образуют общий итог, динамично меняющийся при вариации индивидуальных показателей каждого игрока – сумма локальных объёмов этого итога динамично претерпевает изменения. Тогда динамические особенности взаимного вытеснения «игроков» из общего баланса могут быть представлены тенденциями потоков, образующих «общий поток». Количественной характеристикой «успешности» некоторого игрока в конкурентной борьбе за рынок может выступать «коэффициент вытеснения» потока.

Современные экономические исследования динамики всё чаще прибегают к методам естественных наук, в частности, к методам исследования физического движения. В экономике нашли свое эффективное применение фазовый анализ, интерпретация первой и второй производных как скорости и ускорения движения, «экономические потоки» описываются по аналогии с физическими потоками и др. Физические характеристики движения, к которым относятся скорость, ускорение, масса, импульс, сила и пр., должны найти свое эффективное применение и при исследовании экономических конъюнктур. Появились новые экономические науки –

физическая экономика и эконофизика – во многом ещё с вербальными понятиями экономических «импульсов» и «сил». «Новая эконометрика» нашла для них аналитические описания, позволяющие рассчитывать геометрические и количественные характеристики экономического движения по аналогии с физическим.

Одним из примеров использования термина «импульс» в экономике является определение «кредитного импульса», представляющего собой поток выпущенного кредита. При расчёте кредитного импульса применяется классический способ перехода от показателей типа «запас» к показателям типа «поток», рассчитывая абсолютные приrostы исследуемого показателя в единицу времени. Поиск новых, более эффективных методов описания турбулентного стохастического экономического движения привёл к понятию «экономический поток», которое имеет аналогию с физическим потоком, характеризующим непрерывные изменения количеств или объёмов исследуемого показателя за определенный период времени. Возможности «тонкого» исследования экономических процессов прирастают методами естественных наук, становится важным дать экономическую интерпретацию понятий «экономическое движение», «экономический импульс», «экономическая сила», «мощность потока», «экономическая кинетическая энергия», «экономическая потенциальная энергия», «тенденция», «интенсивность» и др. на конкретных примерах экономической динамики. Представление экономического движения в виде непрерывного потока должно позволить исследовать воздействие «экономического импульса» или «экономической силы» на экономические конъюнктуры количественно, аналитически и графически.

Ещё древнегреческий философ Аристотель указывал в своём труде «Политика» на важность эффективного накопления и использования экономических благ. Он считал искусство приобретения частью науки о домохозяйстве и допускал, что «её существование обеспечивается занятыми накоплением средств, необходимых для жизни и полезных для

государственной и семейной общиной»<sup>7</sup>. Видим, что интерес к процессам накопления активов или запасов существовал у общества с давних времён, а в настоящее время в эпоху глобальных возможностей и сопутствующих глобальных рисков важность исследования такого рода процессов только возросла. Английский экономист Дж. М. Кейнс в своей теории регулирования капиталистической экономики обращал внимание на количественные закономерности в соотношениях таких макроэкономических величин, как национальный доход, капитальные вложения, занятость, потоки потребления, запасы сбережений и др. Мы находим философские основания важности и необходимости эффективного управления не только накоплением запасов, но и связанных с ними потоков – товарных, денежных и др. Философская репрезентативность предлагаемых методов достигается пониманием необходимости учитывать взаимосвязь между процессами накопления экономических благ (запасов) и потребления (потоками).

В современном турбулентном экономическом мире, в «рваной» экономике при высоких скоростях инфотелекоммуникационных взаимодействий значительно возрастает роль «тонких» методов исследования динамики потоков. Под «тонкостью» методов экономического анализа будем полагать использование производных экономических показателей; спектрального состава экономического сигнала и его изменений, свойство стационарности и нестационарности; анализ четырёх статистических «моментов» и коэффициента вариации. «Тонкими» будут синергетические идеи с их «долговременной экономической памятью», «цветом шума», теорией фракталов и хаоса. Математическая репрезентативность «тонких» методов обеспечивается точностью сохранения статистики запасов, что при переходе к производным функции запасов сохраняются все локальные характеристики потока – ускорения или замедления роста, обнаруживаются временные участки изменения их структуры.

Экономическую репрезентативность методов дополняет

---

<sup>7</sup> Аристотель. Сочинения: В 4 т. Т. 4. – М.: Мысль, 1983. С. 376–644.

эконофизический контент с экономическими аналогами характеристик физического движения – скорости, ускорения, импульсов и др. В этом контенте полезно проявятся основные законы сохранения Природы. «Тонкими» будут построения и анализ экономических потоков в фазовом пространстве, где взаимосвязь между запасами и потоками может быть представлена аналитически и графически. К «тонким» отнесём методы многомерной статистики, множественной корреляции, дисперсионного, кластерного и факторного анализа; таксономии; главных компонент; распознавания образов. «Тонким» окажется анализ модели после выстраивания точного совпадения траекторий процесса и модели в узлах.

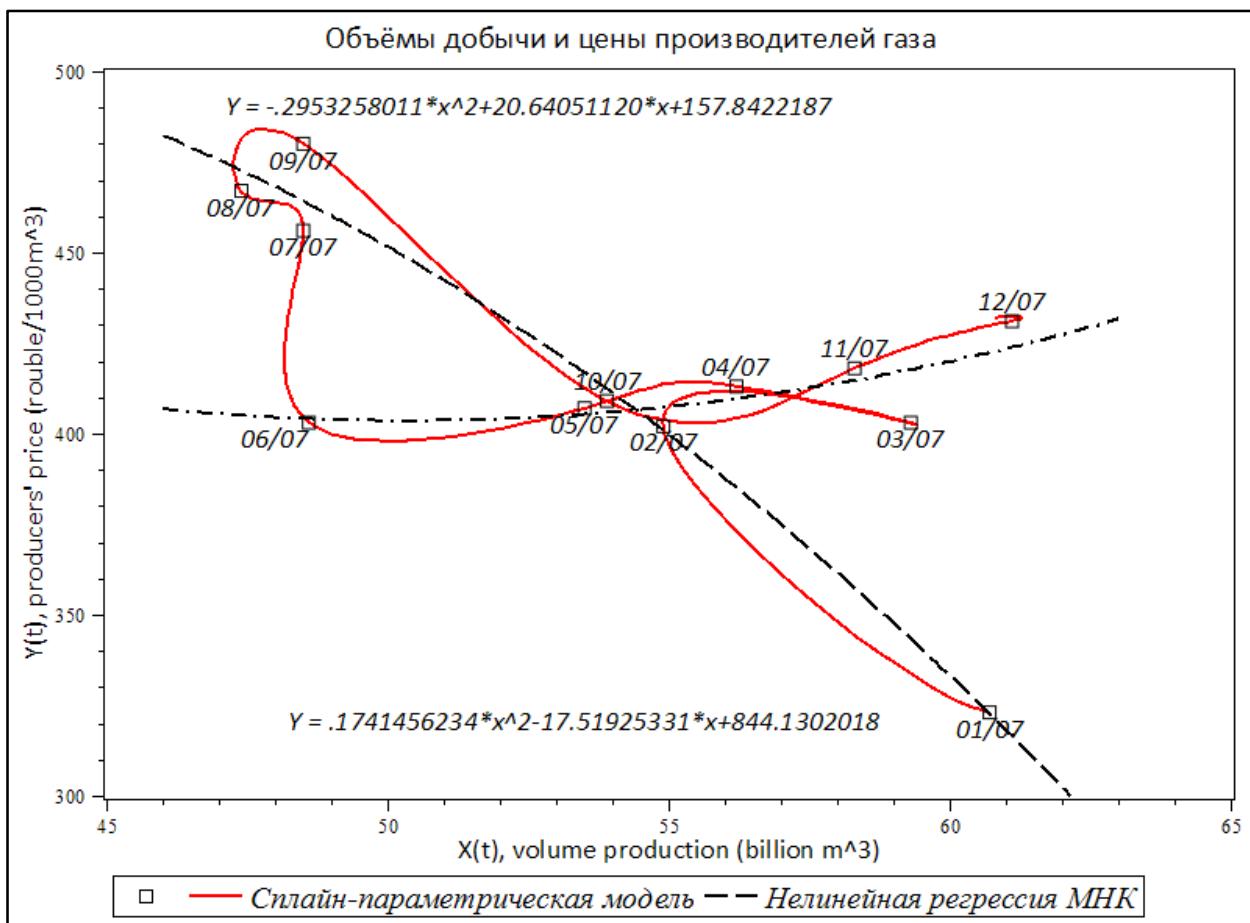
## **ГЛАВА 2. МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРУКТУРНО-ВАРИАТИВНОЙ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ КУСОЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ**

### **2.1 Недостатки методов классической эконометрики, обнаруживающиеся при моделировании динамики экономических потоков**

Экономические системы представляются сложными и адаптивными, в которых динамика дискретных состояний или непрерывных изменений может иметь очень разную природу. В частности, потоки в экономике могут демонстрировать в течение некоторого времени плавную динамику роста, а затем могут происходить резкие неожиданные изменения. Нелинейность имеет особое значение при изучении сопряженных экономических систем, в которых могут обнаруживаться сильные обратные связи, реализуемые через «энергию» потоков.

Пример нелинейности в проявлении связи представлен на рисунке 2.1. Цикл взаимной связи цен производителей природного газа и потока его добычи разбит на две части, моделируемых полиномами второй степени. Просчитанные методом наименьших квадратов (*least square*) тренды соответствуют двум отличающимся параметрами связи периодам: первый период – начало года и осень, цены производителей падают при увеличении потока добычи газа; второй период – весна и лето, цены производителей практически не меняются при колебаниях потока добычи природного газа. Сплайн-параметрическая модель демонстрирует более сложную циклическую эволюцию связи.

Динамические потоки в экономике (потоки экспорта, добычи, производства, инвестиций), как и физические потоки, обладают энергией, необходимой для развития. В то же время потоки могут испытывать катастрофическое воздействие «выбросов», а иногда и сами потоки могут генерировать кратковременное и сильное воздействие на экономические конъюнктуры, запуская тем самым механизм развития кризисов в экономике.



**Рисунок 2.1** – Сплайн-портрет двумерной параметрической зависимости цен производителей природного газа и потока его добычи в России

Становится важным учитывать при моделировании потоков нелинейных характер динамического развития, сохранять в моделях экстремальные эмпирические значения с тем, чтобы исследовать механизмы стабилизации тенденций, оптимального накопления «экономической энергии» потоков, механизмы защиты от катастрофических изменений конъюнктуры. С помощью структурно-вариативных моделей необходимо изучать возможности преодоления или адаптации к некоторым пороговым значениям, которые могут «переключать» экономические системы в совершенно иной режим функционирования.

Модели классической эконометрики не позволяют изучать нелинейность экономической динамики, часто демонстрирующей появление резких колебаний, фрактальность как в поведении развития некоторого отдельного процесса, так и в параметрах взаимного воздействия процессов. Возникает необходимость в моделях, способных фиксировать нелинейные

изменения и их возникновение. В условиях цифровизации становится необходимым изучение воздействия событийных составляющих на динамику потоков в экономических системах. Анализ их воздействия возможен моделированием динамики адаптивными функциями, не требующими абстрагирования от или сглаживания выбросов в исследуемой динамике. Известно, что изучение закономерностей развития процессов в экономических системах в первую очередь диктуется задачами эффективного управления, в современных условиях «...следует обращаться к методам выявления как глобальных тенденций, так и локальных реакций процесса на колебания факторных признаков» [117].



**Рисунок 2.2 –** Прямая пропорциональность в изменениях ВВП России и объёмов экспорта нефти является хрестоматийной, но сравнение скорости их потоков выявляет интересные динамические особенности связи. Первая производная, являясь скоростью экономического движения, более рельефно демонстрирует локальные отклики процесса на вариацию факторного признака.

Сохранение абсолютной точности эмпирического сигнала позволяет исследовать численно, графически, и аналитически «событийные составляющие» динамики. Сначала «выбросы» в динамике ВВП России

(рис. 2.2) обнаруживаются в 2008-2009 гг. как результат реакции на снижение скорости потока экспорта нефти. На неслучайный характер чувствительности ВВП России к изменениям нефтегазовой конъюнктуры указывает повторение «кризиса» в экономике России в 2014-2015 гг., продемонстрировавшей более сильную реакцию на снижение скорости потока экспорта нефти. Нарастающая амплитуда колебаний скорости потоков может говорить о росте неустойчивости в экономике России.

Всё чаще постулируется, что современный мир состоит из движения, основой которого является системное циклическое движение. Требования к появлению новых методов изучения взаимосвязей ускоряющихся и усложняющихся процессов в современной экономике определены волатильностью структур экономических систем, в немалой степени отягощённых межстрановыми политическими противоречиями, недобросовестной конкуренцией, догматами идеологического противостояния в ущерб коллективному экономическому и социальному прогрессу. Актуальной проблемой остаётся систематизация и структурирование экономической динамики в масштабах планетарной хозяйственной системы – в мировой пространственной экономике. По этой причине модели современной экономической динамики должны иметь собственную переменную структуру.

При выборе математических методов моделирования экономических систем переменной структуры и корреляций между процессами необходимо учитывать возможные изменения параметров связи. Известны недостатки обработки и аналитического описания эмпирической динамики методами классической эконометрики, в частности, чувствительность к количеству данных, искажения данных сглаживанием и усреднениями, потеря временной последовательности данных в моделях регрессии и др. Естественно, эти недостатки сохраняются и в моделях классической эконометрики при их компьютерной реализации [105].

Сформулированные Рагнаром Фришем ещё в 1929 г. принципы «старой

эконометрики» можно считать действительно старыми [75]. Методы «старой эконометрики» не обнаруживают готовность изменять концептуальную основу в соответствии с новыми требованиями современной экономики – с её сетевым характером, волатильностью, турбулентностью, спонтанностью, ускорением и усложнением, рекурсивностью.

Проблемой «старой эконометрики» всегда был выбор и назначение вида и степени полинома, приближающего отчётные данные от «решётчатой» функции. По этому поводу хорошо сказано в [255] «Трудно сказать, какой из методов даст лучшие результаты в большинстве случаев. По всей вероятности, выбор зависит от обстоятельств, включая предпочтения лица, пользующегося результатами».

Смелость волонтаристского приближения исследователь пытается оценить через среднеквадратическую характеристику некоего коэффициента – «коэффициента детерминации». Вычисление и минимизация суммы квадратов невязок, управление «смещениями», «поворотами» и «растяжениями» модельной кривой улучшает ситуацию, которую желательно оптимизировать, максимизируя величину «коэффициента детерминации», некоего измерителя качества или критерия оценивания, приближая её к единице. По величине «коэффициента детерминации» исследователь получает некий намёк о лучшем или худшем качестве всей модели.

Слабости «старой эконометрики» – в ограниченности её основного инструмента – метода наименьших квадратов (МНК), не лучшего способа работы с «решётчатыми» функциями. Одним из недостатков моделей МНК можно считать заметные отклонения тренда от эмпирического процесса, особенно чувствительные к наличию «выбросов» в исследуемой динамике.

Модели МНК относительно слабо «адаптируются» к нелинейной динамике, недостаточно гибко приближаясь к траектории эмпирического процесса в узловых точках. Наконец, метод наименьших квадратов очень чувствителен к наличию экстремальных точек в данных – один или два «выброса» могут иногда серьезно исказить результаты анализа. Это делает

валидацию модели, особенно в отношении «выбросов», критически важной для получения обоснованных ответов на вопросы, мотивирующие построение модели. Кривая регрессии (модель) проводится в общем случае «мимо» узловых точек «решётчатой» функции (рис. 2.3).

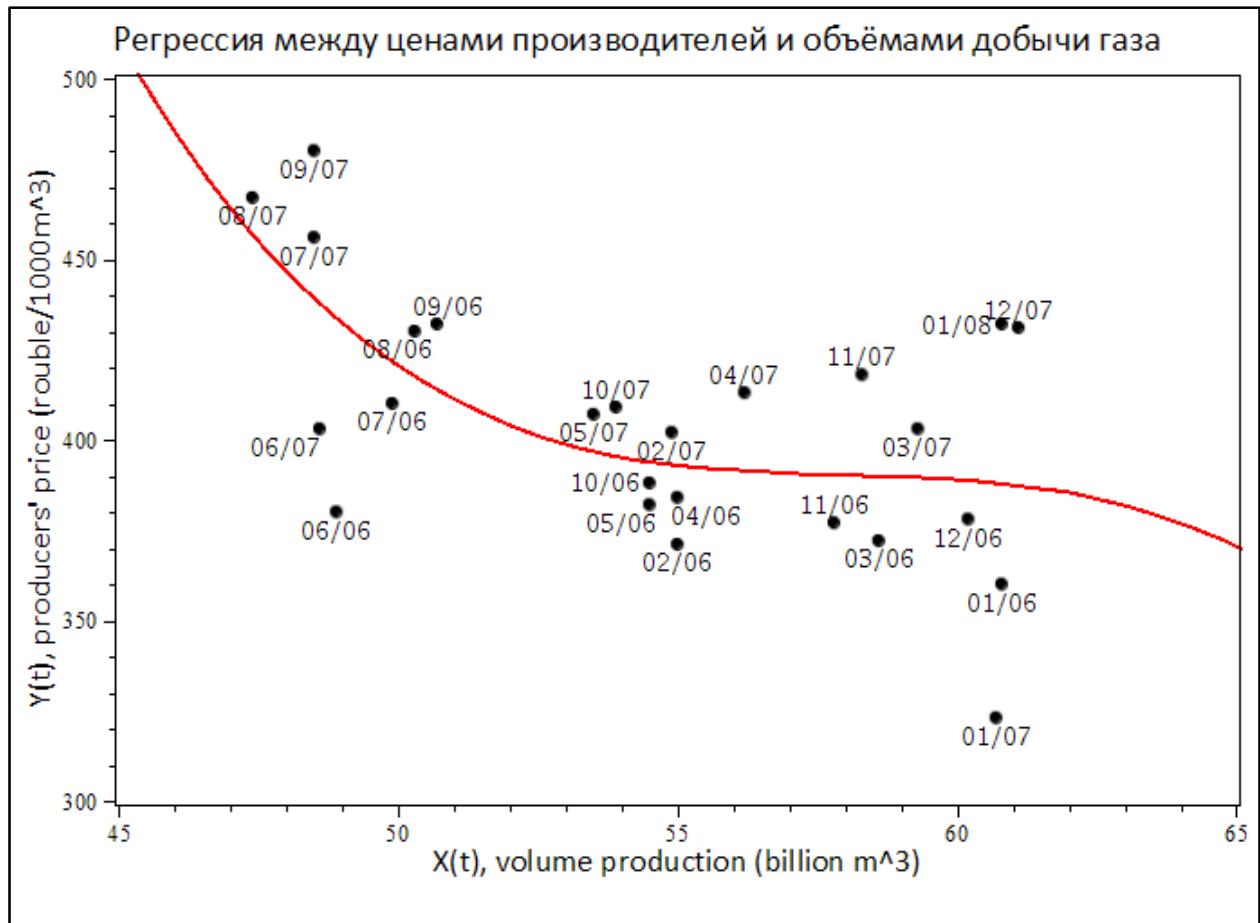


Рисунок 2.3 – Регрессия между ценами производителей природного газа (Y) и потоком его добычи в России (X) в 2006-2007 гг.

Однако создатели «старой эконометрики» полагают – «наилучшим образом», с этой целью минимизируется «необъяснённая» часть уравнения регрессии. Исследователь заменяет природную кривую неким эрзацем, удобным с точки зрения уровня своего математического образования и только из-за простоты подвернувшейся под руку моноформулы. Существенным недостатком такого подхода является необходимость описывать зависимость одной и той же моделью во всем диапазоне данных. Работа с «ложным» экономическим сигналом, разные выверты, ухищрения, дополнения и улучшения не могут принципиально исправить ситуацию – процесс и модель разные:

*«Oh, East is East, and West is West,*

*And never the twain shall meet»*

*Joseph Rudyard Kipling*

Что в переводе «вместе им не сойтись» или «и с мест они не сойдут» [159].

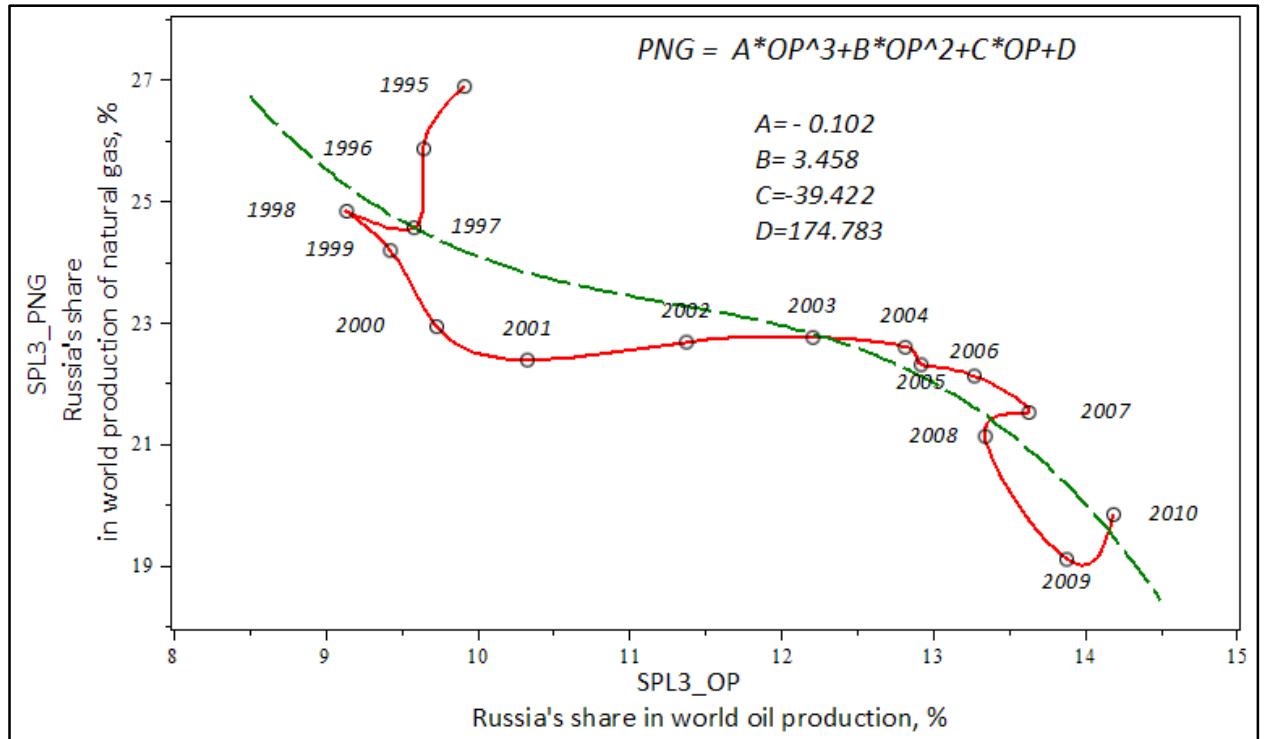
Усложнение современных сетевых экономических конъюнктур, ускорение экономических процессов, их стохастичность и повышающаяся неопределенность потребовали коренного пересмотра устаревших подходов, методологии математического моделирования, эконометрического аппарата, обработки и визуализации результатов. В «старой эконометрике» столь неисчислимы проблемы сходимости и точности. Дальнейшее перечисление трудностей регрессионных приближений и институциональных промахов метода наименьших квадратов было бы чёрной неблагодарностью по отношению к их уважаемым авторам.

Основной задачей методов новой методологии, как и методов классической эконометрики, с появления которой прошло почти сто лет, остаётся наполнение эмпирическим, количественным и аналитическим содержанием априорные экономические рассуждения [252], [253], [295].

Кратко, но системно, всесторонне попытаемся описать теоретическую платформу исследования – методологию сплайн-моделирования и анализа потоков – как новую динамическую науку со своей парадигмой, оригинальными концепциями, идемпотентными особенностями переменных экономического сигнала при обращении к современным экономическим конъюнктурам. Она обладает многими непривычными для классической эконометрики свойствами, новыми математическими конструктами, позволяет работать как в евклидовом, так и в фазовом пространствах.

Абстрагирование методов классической эконометрики от точного модельного представления динамики состояний стало ограничением для аналитического, количественного и графического представления потоков. Это потребовало от нас искать новые методы представления процессов в

экономических системах, обобщённые в парадигме новых эконометрических методов [29], [48], [52], [187], [283]. Степенные полиномы третьей степени в составе кубических сплайнов оказались весьма подходящими для эконометрического исследования динамических потоков.



**Рисунок 2.4** – Полиномиальная (green, пунктир) и сплайн-параметрическая (red, сплошная линия) модели взаимосвязи доли объёмов добычи природного газа и нефти в России в общемировом итоге.

Анализ полиномиальной и сплайн-параметрической моделей взаимосвязи (рис. 2.4) «демонстрируют растущую роль России в удовлетворении мирового спроса на нефть на фоне снижения доли добычи природного газа. Сплайн-параметрическое представление связи позволяет увидеть на фоне обобщённой регрессии и локальные особенности исследуемой взаимосвязи внутри каждого интервала времени. Так, в 1995 – 1997 гг. доля добычи природного газа снижалась при незначительном снижении доли России в общемировой добыче нефти. Поведение сплайна в 1997 – 1998 гг. и вовсе демонстрирует кратковременный рост доли России в мировой добыче природного газа при снижении доли добычи нефти. С 1998 по 2001 гг. снижение доли России в мировой добыче природного газа происходит пропорционально увеличению доли нефти. Пример конкуренции

энергоресурсов в удовлетворении мирового спроса» [135].

Развитие методов сплайн-методологии начинается с истории организующих её математических конструктов, сплайнов или многозвенников, в частности. Впервые к сплайнам для получения математического результата обратился Леонард Эйлер, прибегнув к «Методу ломаных». В качестве теории аппроксимация сплайнами занимались И.Д. Шёнберг, А. Уитни, Д. Пуарье [322, 328] и др. Экономическим применением сплайнов была посвящена монография, переведённая в Советском Союзе в 1981 г. [205].

Единственная отечественная работа по экономическим приложениям сплайнов в концепции последовательных экономических структурно-переменных моделей появилась в 1987 г. в Новосибирском Академгородке [227], она впервые отметила выдающуюся роль сплайнов как моделей с последовательной переменно-изменяемой структурой.

Начиная с 1999 года в работах научной школы по экономической цикломатике начали разрабатывать новые подходы к моделированию и анализу экономической динамики [20-32], [47-61], [152-157], [207-213], [232-239], [248], [259-263], [277-283]. Разрабатываемая методология моделирования и анализа (с её парадигмой, «кусочной» и циклической концепциями, сплайнами, фазовым пространством и фазовыми преобразованиями динамики, прочими характерными чертами нового экономического знания) начинают играть в динамических разделах экономической науки.

## **2.2 Математическая и методологическая экстраполяция императивов современного экономического развития в структуру эконометрических моделей**

Какие математические и инструментальные методы предлагает закрепить на новой исследовательской платформе методология сплайн-моделирования и анализа потоков? Прежде всего, мы опирались на

знаменитую фразу Карла Поппера: «Вне чистой логики и чистой математики вообще доказать ничего нельзя» [200]. Поэтому многие откровения сплайн-методологии и пути к ним мы назвали «научными». Следующие императивы послужили основаниями отличий сплайн-методологии от методов классической эконометрики, существенными для исследования потоков:

**Primus.** Базовым отличием новых эконометрических методов моделирования динамики от классических является требование использовать все значения исследуемого показателя из таблицы так, чтобы модельная линия проходила через все узловые точки с нулевой погрешностью. Эконометрическая модель в новой парадигме должна быть непрерывной, адаптивной с последовательно-переменной структурой, с наилучшим интерполяционным поведением. Тогда удаётся точнее и глубже анализировать динамические характеристики потоков, наблюдать их ускорения и замедления, обнаруживать цикличность, определять участки структурных изменений, изучать эконофизические характеристики.

**Secundus.** Современный философ, экономист и бывший трейдер Н.Н. Талеб считает, что «выброс» лежит вне сферы регулярных ожиданий, ничто в прошлом не может убедительно указать на его возможность, поэтому он несёт в себе чрезвычайное воздействие [230]. Действительно, внезапные чрезвычайные воздействия могут существенно изменить динамику потоков, переводя экономические системы в новые режимы функционирования. Методология моделирования сплайнами не основывается на «нормальном» законе, который не выполняется для многих распределений – экономических в том числе [43].

**Tertius.** В новой методологии последовательно-переменную динамику потоков предлагается строить адаптивными, кусочно-вариативными функциями. Аналитичность сплайн-функций при моделировании экономических потоков даёт возможность через свои производные обращаться к методам фазового анализа, математического и графического представления взаимосвязи запасов и потоков. Важно, чтобы гладкий

«моделирующий полином имел малый порядок – это позволит экономисту сопоставлять составные части аналитики формулы и формы рисунка с экономическим содержанием» [93].

*Quartus.* Естественно, режимы функционирования экономической системы могут трансформироваться на разных временных участках, проявляясь вариативностью модельной структуры потоков. Строящиеся модели должны демонстрировать репрезентативность динамическим характеристикам потоков в трансформационных экономиках типа российской, в которых в некоторые непредсказуемые моменты времени могут существенно меняться условия хозяйствования. Российские экономисты говорят о трёхкратном изменении в год базовых экономических условий хозяйствования в стране. Отсюда появляется «кусочная» концепция.

Адаптация моделирующей функции к последовательным во времени изменениям экономической системы становится возможной кусочной аппроксимацией. В противном случае потребовалась бы индивидуальная модель для каждого темпорального фрагмента, в итоге оказалось бы множество разнородных моделей с наилучшим совпадением «временного класса» модели и «временного класса» процесса на очередном отрезке отчётного периода. Потом этот набор моделей нужно было бы «связать» в точках перехода для всего исследуемого отчётного интервала так называемыми «переключателями» и лишней головной болью. Концепции «новой эконометрики» реализуется на практике выбором для аналитического представления нелинейной динамики универсальных моделей с последовательно изменяющейся структурой.

*Quintus.* Универсальная «кусочная» концепция представления динамики экономических потоков с переменной структурой реализуется использованием сплайн-функций [7]. Сплайн, сплайн-функция и процесс сплайн-моделирования оказались эффективными для непрерывного представления динамики запасов и потоков в экономике. Привлекаемый в экономический анализ математический конструкт должен гарантировать

точность получаемых результатов. Сплайны широко использовались в математических исследованиях. Выполнение этого положения оказывается очень полезным для сохранения точности при исследовании экономических потоков, динамические характеристики которых часто выявляются лишь замедлениями или ускорениями роста. Производные, сплайн-функции, фазовый анализ достаточно распространены и используются в научных исследованиях, в математике, в физике, реализованы в научных и технических приложениях.

**Sextus.** Часто в методах сплайн-методологии употребляется термин «тонкость» экономического анализа. «Тонкость» – обращение динамического анализа не столько к самим экономическим показателям, сколько к их производным, спектральному составу, четырём статистическим моментам, прочим классическим статистическим свойствам, к широкому спектру синергетических и эконофизических форм. «Тонкие» конструкты обращаются к более глубоким свойствам показателя как на временных участках, так и в итоге.

Методы сплайн-моделирования и анализа потоков демонстрирует парадигму к «нормальному» закону – основе метода регрессии и наименьших квадратов классической эконометрики. Она, в частности, привлекает внимание к новым синергетическим понятиям: скрытая периодичность, дробная квазипериодичность, «лептоэксцесс», «цвет шума», «устойчивый паретиан», «дробная фрактальная размерность», «фрактальные распределения», неклассическая статистика Г.Э. Херста, «показатель Г.Э. Херста», «фрактальный R/S-анализ Г.Э. Херста», наличие «долговременной памяти», «H-траектория (траектория Г.Э. Херста)» и «R/S-траектория», персистентность (трендоустойчивость) и антиперсистентность временных рядов. Многочисленные исследования находят всё больше примеров и доказательств тому, что многие процессы в экономике не следуют «нормальному» закону. При этом результаты, полученные с использованием практически единственного количественного инструмента классической

эконометрики – метода наименьших квадратов, часто оказываются неверными [29], [43], [195], [198].

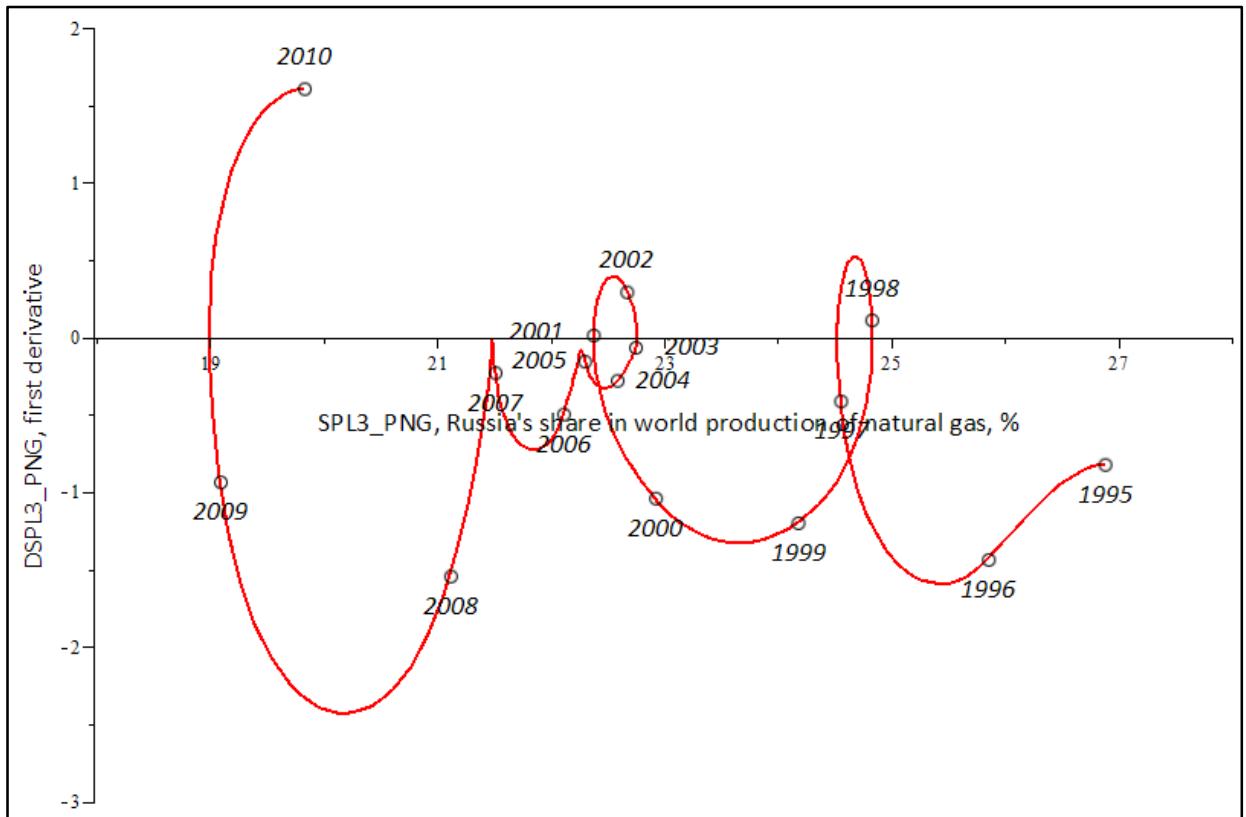
*Septimus.* В классической эконометрике регрессионные соотношения и построения теряют значение временной координаты, того времени, когда были получены отдельные узловые точки. Это губительно для многих аспектов (качество, прогноз, точность) динамических исследований. Новый математический конструкт сохраняет время каждого дискретного отсчёта, что позволило хронометрировать процесс, углубить представление о его динамике, хроноскопировать циклы, облегчить переход к более валидным прогнозам.

В экономике процессы с различающимися постоянными времени чрезвычайно сложно агрегированы. Система, внутри которой имеется инерционное демпфирующее звено с большой постоянной времени, приводит к снижению амплитуды распространяющихся паразитных колебаний. Для большего отношения «постоянная времени/частота возбуждения» характерны меньшие колебания и меньшая волатильность вторичного сигнала в системе.

Необходимость интуитивного «угадывания» формы и аналитической формулы при моделировании регрессионных кривых делает метод наименьших квадратов для исследователя неконструктивным. Неточными, слишком «грубыми», часто на практике – примитивно линейными оказываются закономерности, выявляемые методом наименьших квадратов. Происходит это из-за того, что и в аппарате «старой эконометрики», и в модели нет одномоментного согласования кривой с исходными узлами.

Решением становится моделирование исследуемой динамики кусочно-непрерывными функциями, адаптивно приспосабливающимися к структурно-вариативной динамике. Во-первых, они, обладая невысокими степенями модельной функции не привносят дополнительную сложность в процесс интерпретации своих параметров. Во-вторых, прохождение модельной линии в точности через все «узлы» эмпирического процесса сохраняет его локальные динамические изменения. В-третьих, дифференцируемость

модельной функции позволяет переходить к поиску корреляций в ускорениях или замедлениях процесса [103]. Сплайн-модели отличаются универсальностью и аналитичностью, модели сплайн-функциями строятся автоматически, становятся явно известными все её производные, траектории в евклидовом и фазовом пространствах также проводятся автоматически.



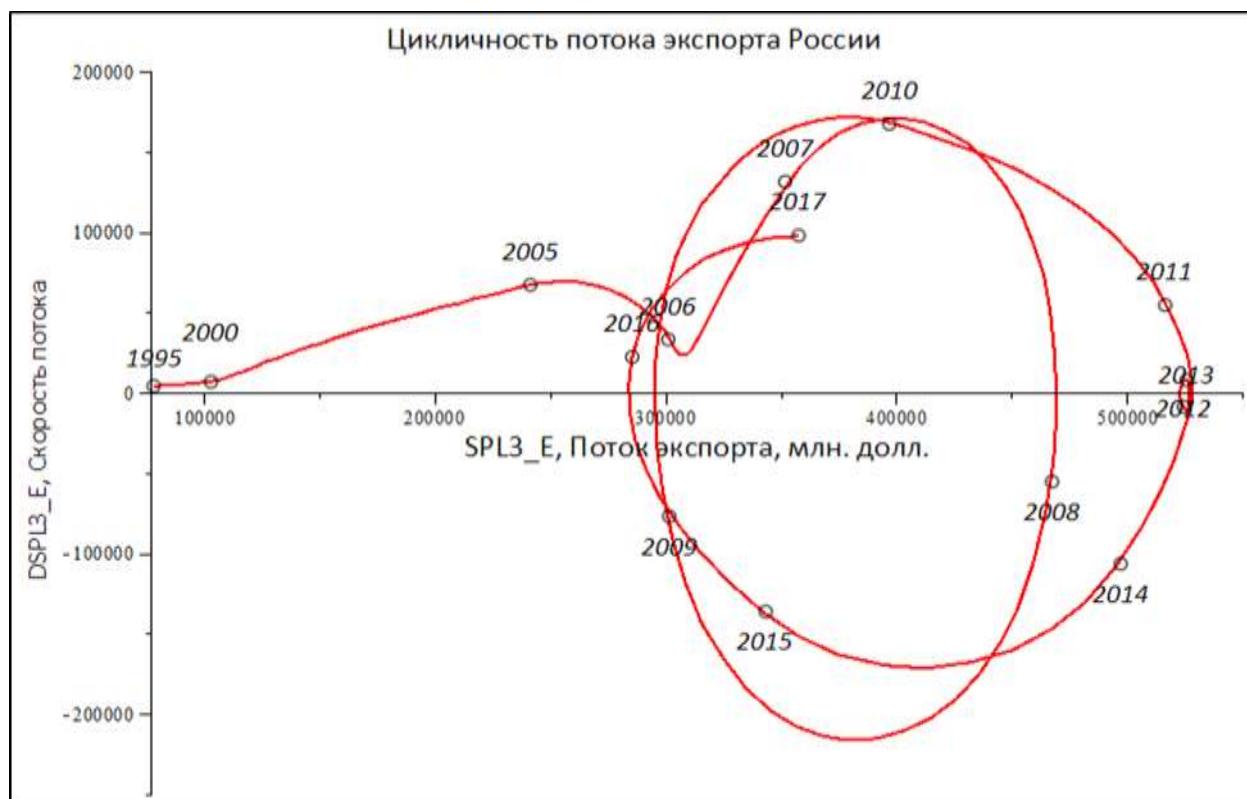
**Рисунок 2.5 – Фазовое представление динамики доли России в общемировой добыче природного газа с 1995 по 2010 гг.**

***Octavus.*** Описание динамической системы как системы двух элементов - фиксированных состояний и последовательных изменений нашло своей отражение в фазовых траекториях. В фазовом пространстве удаётся одновременно представлять динамику состояний (запасов) и их последовательных изменений (потоков). Аналитически представление взаимосвязи запасов и потока реализуется с помощью фазовой траектории взаимосвязи функции состояний и её первой производной – функции скорости изменения состояний (рис. 2.5). Фазовая траектория обнаруживает несколько смещающихся влево циклических участков. Смещение циклов влево свидетельствует о снижении доли России в удовлетворении общемирового спроса на природный газ. Максимальная скорость снижения

доли России в общемировой добыче природного газа в 2008 г. Кривая фазовой траектории в основном проходит ниже нулевой отметки первой производной – в области отрицательных значений скорости потока.

Для динамических потоков фазовые траектории могут быть представлены и в пространстве трёх измерений с координатными осями: «показатель» (динамика запасов), её «первая производная» (динамика изменений запасов или поток) и по третьей оси – «независимая переменная», в качестве которой удобно выбирать время.

**Nonus.** Являясь ответвлением научного знания, экономическая цикломатика [61] содержит своими инструментами в методологии сплайн-моделирования и анализа потоков. Исследования находят высокую эффективность фазовых траекторий при описании экономической цикличности, отображая периодичность потоков в экономике круговыми или спиралевидными конструкциями (рис. 2.6).



**Рисунок 2.6 – Фазовая траектория циклического потока экспорта России с 1995 по 2017 гг.** Линейный рост с 1995 по 2006 гг., сменившийся цикличностью колебаний скорости потока. Первый цикл обнаруживается с 2006 по 2009 гг., продолжительностью в три года. Второй, более продолжительный цикл экспорта России, – с 2009 по 2016 гг.

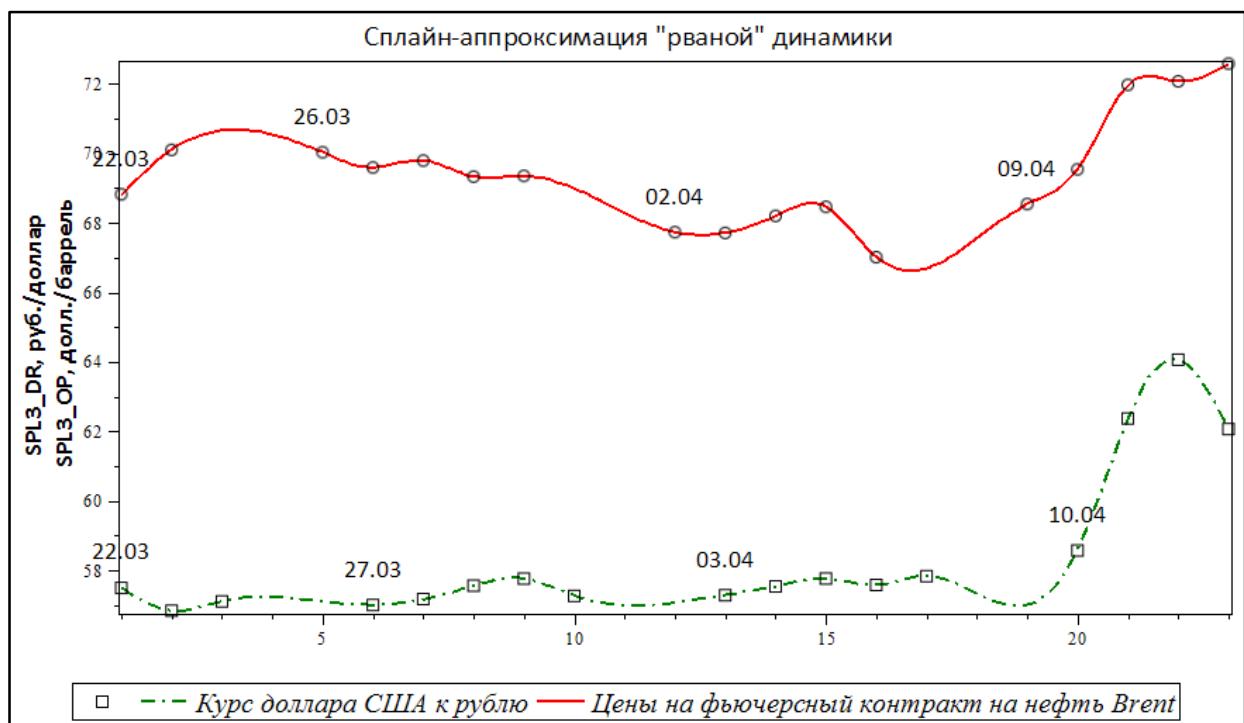
*Decimus.* Сплайн-моделирование позволило исследовать динамическую конкуренцию экономических потоков, впервые получившую математические эквиваленты с аналитическим описанием, графическими образами и числовыми характеристиками. Исследование взаимосвязей в экономических системах требует изучать конкуренцию потоков в динамике. Динамическая конкуренция потоков на рынке демонстрирует поиск непрерывных решений, отражающих баланс интересов участников рыночного взаимодействия, его достижение лежит в плоскости экономического или социально-ориентированного сотрудничества представителей фирм, ассоциаций, международных консорциумов, стран. [283].

*Undecimus.* Широко используемая в новой методологии интерпретация производных как скорости и ускорения движения, нашла эффективное применение при описании экономических потоков по аналогии с физическими. Исследователи экономической динамики всё чаще прибегают к методам естественных наук, обнаруживая в экономическом развитии аналогии с физическим движением. Физические характеристики движения – скорость, ускорение, импульс, масса, сила и др. – находят по аналитическому описанию своё местоположение при исследовании экономических конъюнктур, позволяя рассчитывать количественные характеристики потоков в экономике [26], [29], [191].

*Duodecimus.* При исследовании динамических потоков очень полезным оказалось известное свойство сплайнов восстанавливать пропущенные значения, а также генерировать новые в промежутках между «узловым» точками процесса (рис. 2.7).

Природа получения первичных статистических данных может привести к появлению временных рядов с узлами, расположение которых неравномерно во времени. Задача моделирования и анализа процессов с «рваной» динамикой решается с помощью интерполяционных функций, например, сплайнов. Сплайны на рядах динамики позволяют эффективно

восстанавливать пропущенные значения и заменяют дискретные данные непрерывными моделями процессов. Например, при исследовании взаимосвязи между потоками экспорта нефти в страны дальнего зарубежья и в страны СНГ, удалось исследовать корреляцию на коротких темпоральных участках двух процессов, ослабляя ограниченность регрессионного метода классической эконометрики [130]. Другой пример демонстрирует способность восстанавливать сплайновой интерполяцией пропущенных значений «рваной» динамики цен на нефть и курса доллара, статистика которых за некоторые дни отсутствовала, а отсчёты во времени были неравномерными.



**Рисунок 2.7** – О свойствах «равнодушия» кубической сплайн-интерполяции к вариативности шага и отсутствию некоторых значений регулярной «решётки». Сплайн-модели временных рядов российской макроэкономической динамики: экспортных цен на нефть Brent (RED, сплошная линия); курс доллара США к рублю (GREEN, штрих-пунктир). Система компьютерной математики MAPLE 17

**Tertius Decimus.** Потоком, с математической точки зрения, можно считать изменения во времени любого экономического показателя и его модельной переменной. Тогда при исследовании экономического движения следует учитывать не только дискретные состояния или зафиксированные

значения экономического показателя, но и скорость и ускорения их изменений – производные функции движения.

Производные экономического движения, важные при построениях моделей динамики запасов и потоков в фазовом пространстве, могут быть получены автоматически благодаря аналитичности нового исследовательского аппарата.

*Quartus Decimus.* При исследовании динамических потоков важное значение приобретает одновременное соблюдение точности моделирующей функцией и точности расчётов инструментального средства вычислений. Это условие продиктовано предложенной парадигмой исследования, отказывающейся от всякого ухудшения эмпирического сигнала – различных сглаживаний и усреднений. Расчёты позволяют оценить качество интерполяции динамики кубическим сплайном и точность расчётов в системе Maple 17.

Главная и важная для исследования особенность системы – возможность работать с простыми дробями (рациональными числами). Maple по умолчанию вычисляет выражения, содержащие точные величины, получая при этом точные результаты, а не числовые приближения, свойственные некоторым другим программам. В Maple реализованы широкие возможности символьных и численных вычислений. Символьные вычисления преобразованием выражений в более простые и понятные формы облегчают процесс моделирования экономических процессов и взаимосвязей между ними.

*Quintus Decimus.* Нежелательное последствие аппроксимационных построений в методологии сплайн-моделирования, скорее техническая, нежели парадигматическая её особенность, – любая аппроксимация заставляет сравнивать близкие величины, при этом их разность мала. Если приходится на неё делить и ещё многократно, то накапливающиеся ошибки округления затмевают результат. Поэтому в инструментальный аппарат методологии сплайн-моделирования вовлечены вычисления в простых

дробях, принципиально без ошибок округления и накопления таких ошибок. Тому, что вычисления в простых дробях столь точны и удобны, мы всецело обязаны системам компьютерной математики, составляющим информационное обеспечение «новой эконометрики».

*Sextus Decimus.* Обязательным техническим достижением «новой эконометрики» является повсеместное использование графических двумерных и трёхмерных образов, толщины, цвета и типа линий, типа штриховки, цвета заливки... как в темпоральном, так и в фазовом пространстве. Недаром классики [284] говорят, что «визуальное восприятие есть визуальное мышление» и оно «будит мысль»

Рассмотрим императивы, послужившие основой отличий новой методологии аналитического представления и исследования динамических потоков от методов «классической» эконометрики.

**Глобальная сложность современных рыночных конъюнктур.** Глобальные политические кризисы в современном мире тесно переплетаются с экономическими кризисами, часто являясь и источником последних. В последние годы это усилило нестабильность в динамике мировых экономических потоков, испытывающих непредсказуемые воздействия «событийных составляющих» динамики. Примерами могут служить потоки экспорта-импорта, финансовые потоки, туристические потоки и др. Это приводит к росту конкуренции потоков в условиях масштабных изменений запасов производственных ресурсов, ограниченностью доступа некоторых стран к новейшим технологиям производства, заметного различия научно-технического потенциала, сильной зависимости национальных экономик от глобальной финансовой системы.

Очевидно, экономическая глобализация происходит под воздействием общемировых тенденций – углубления международного разделения труда, научно-технического прогресса в области проектирования, производства, логистики и средств связи, транснационального характера развития технологий. Для стран с развитой экономической системой, элементы

которой органично взаимосвязаны друг с другом, характерна высокая степень устойчивости к внешним факторам. Для трансформационной экономики типа российской, глобализация иногда воспринимается как источник рисков. В то же время цифровизация мировой экономики не позволяет национальным трансформационным экономикам в полной мере ориентироваться на изоляцию и потенциал внутреннего рынка. В современных условиях можно получать информацию о процессах практически непрерывно, в режиме реального времени, принимая решения синхронно с потоком поступающих сведений. Следующие системы телекоммуникаций позволяют координировать и сращивать потоки международных инвестиций, товаров и услуг. Информационная интеграция обеспечивает прогресс в области обмена и внедрения технологий. Учитывая динамические особенности потоков, объёмы которых меняются перманентно, они уже содержат в себе информацию о накапливаемом к некоторому моменту времени запасе. Таким образом, потоки более информативны, они также позволяют раньше увидеть и учесть экономические тенденции.

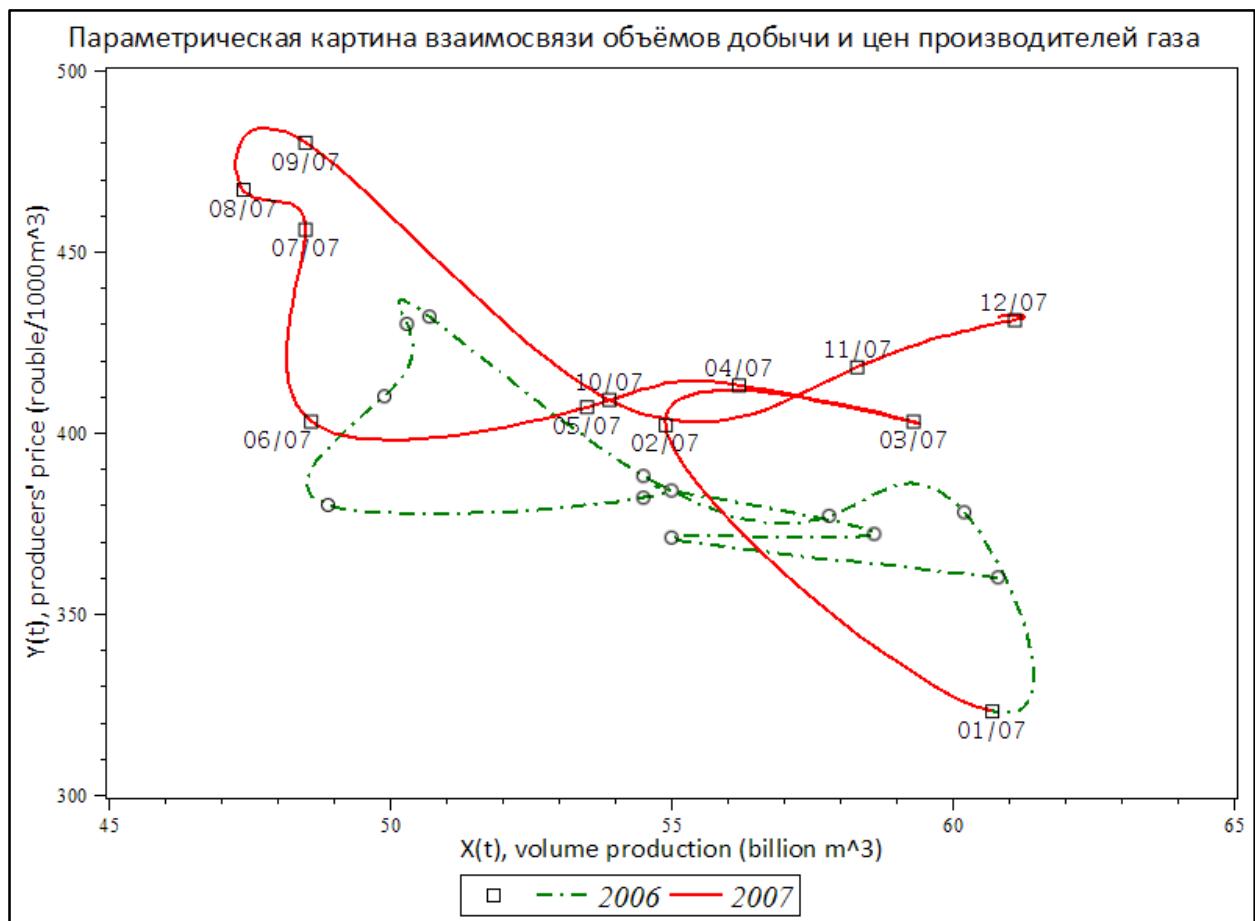
Другим движущим источником глобализации выступают многие формы экономической либерализации, либерализации международной торговли с вызывающими ограничениями политики протекционизма. В результате существенно снижаются тарифы и устраняются барьеры в торговле товарами и услугами, усиливаются потоки капитала и других факторов производства.

Глобализация воздействует на планетарную экономику через экономику всех стран. Она влияет на производство товаров и оказание услуг, на использование рабочей силы, на инвестиции, технологии и их движения из одной страны в другую. Это отражается на эффективности производства, производительности труда и конкурентоспособности. В частности, глобализация экономических потоков – как положительное явление, приводит к росту международной конкуренции.

Глобализация мировой экономики преобразует международное пространство в единое целое, где снижаются барьеры для потоков

информации, технологий, товаров, трудовых ресурсов, в то же время усиливается глобальная конкуренция и риски для отдельных стран.

**Сетевая структура экономики и её рекурсивность.** Тенденции современной усложняющейся и глобализующейся сетевой экономики, трудно описывать методами линейной парадигмы. Всё чаще экономическое движение представляется хаотичным и подверженным влиянию значительных рисков. Поэтому при исследовании динамики экономических показателей большую актуальность приобретает определение в их структуре критерия изменчивости (волатильности). На рисунке 2.8 пример локальной хаотичности и глобальной упорядоченности экономических конъюнктур. Траектории взаимосвязи не обнаруживают устойчивости параметров связи внутри исследуемых лет, при глобальной детерминированности демонстрируется фрактальность эволюции связи по годам.



**Рисунок 2.8 – Параметрическая картина взаимосвязи потоков добычи (млрд. м<sup>3</sup>) и цен производителей природного газа (руб./1000 м<sup>3</sup>) в России в 2006 – 2007 гг.**

Дополнительную сложность в условиях всеобщей цифровизации потоков информации вызывает экспоненциальный рост количества факторов, вызывающих множество цепочек последовательных событий с непредсказуемым результатом – эффект, который Нассим Николас Талеб [230] называет «рекурсивностью». Рекурсивность можно объяснить как феномен, посредством которого экономическая система способна создавать новые формы или структуры посредством взаимодействий между субъектами, которые становятся новым факторами будущих изменений. Задачей рекурсивного метода становится определение возможных состояний системы в будущем на основании известных состояний, анализ функций перехода между состояниями, часто требуется восстановление некоторых прошлых или промежуточных состояний системы (рис. 2.8).

Сетевой характер взаимосвязей в современной экономике позволяет хозяйствующим субъектам из любых точек земного шара соединяться в реализации общих интересов напрямую, что было невозможно при иерархической модели. Переход от иерархических к сетевым структурам послужил причиной усложнения и динамики экономических потоков – финансовых, товарных, потоков рабочей силы и т.д. Теперь производители, экспортёры, перевозчики, торговые агенты, предприниматели, потребители выходят по всему миру на прямые связи друг с другом. В глобальную мировую конкуренцию теперь включается множество заметно различающихся по «мощности» потоков производства товаров и услуг, финансовые потоки, потоки трудовой миграции и многие другие, состав которых непрерывно меняется. Растущее число взаимодействующих потоков в экономической системе может приводить к появлению новых точек бифуркации, а небольшие изменения экономического фона приводить к значительным возмущениям [168]. При этом вызывает больший интерес и приобретает большее значение в современной экономике не анализ экономического «потенциала» стран (активов или запасов), отраслей экономики, предприятий и т.д., а динамические характеристики их изменений

– потоков. Всё меньше нас интересуют дискретные состояния, больший интерес вызывает анализ динамических изменений, отображением в потоках обнаруживающих даже малые и медленные изменения экономических активов.

**Зримые черты переходных, (трансформационных) экономик.** Обзор и анализ трансформационной экономической динамики стран мира показывает, что в переходных экономиках наблюдается «рваный» характер динамики, когда в случайные моменты времени вносятся или изменяются ключевые параметры экономического движения. Особенно актуально это для трансформационной экономики России, в которой наблюдается одновременное сосуществование элементов старой командно-административной системы, новой рыночной и параллельно происходит цифровизация экономики. Это создаёт серьёзные противоречия внутри национальной экономической системы, порождающие «рваный» характер траекторий развития.

Назовём не поводы, а истинные причины обращения к методологии моделирования потоков сплайн-функциями, которые мы в дальнейшем назовём «полиформными» [143], [148], [150].

В.А. Кардаш в своих работах указывает на необходимость вовлечения таких свойств реального мира, как системная организация и всеобщая взаимосвязь процессов в предметную область математического анализа. В частности, дифференциальные уравнения нашли полезное применение в экономических исследованиях – они оказались мощным универсальным инструментом описания сложных динамических процессов. Поистине, ценные результаты были получены в научных исследованиях при решении задач классической механики с помощью дифференциальных уравнений. Уже обыкновенное дифференциальное уравнение  $F(X, Y, Y') = 0$  позволяет исследовать глубинные свойства процесса  $Y(X)$ , связывая между собой параметры  $X, Y$  и некоторый закон движения ( $Y'$  или приращение  $\Delta Y$ ).

Современные исследования моделей нелинейной динамики также

привлекают аппарат дифференциальных уравнений – мы находим полезное применение дифференциальных уравнений при описании взаимосвязи между динамическими изменениями запасов и их потоков в экономике, при фазовом анализе цикличности потоков, при поиске эконофизических характеристик экономического движения. Скоординированность условно-элементарных процессов определяется упорядоченными причинно-следственными связями определённой конфигурации. Дифференциальные уравнения не могут отображать упорядоченность внутренних связей агрегированной системы.

Таким образом, при анализе динамических потоков мы предлагаем строить математические модели, состоящие из отдельных взаимосвязанных частей, их далее можно назвать «полиформными». Виктор Алексеевич Кардаш в своих работах называл такие модели «составными», «обобщёнными» или «множеством условно-элементарных процессов» [148].

**Новые подходы при изучении современной экономической динамики.** Экзогенные и эндогенные «возмущения» темпоральной структуры изучаемого экономического сигнала делают его существенно вариативным, случайным, далее цикличным. Сложная динамика экономических потоков требует привлечения новых, точных и наукоёмких методов исследования – «отнесём к ним аппроксимацию сплайнами, дифференциальное исчисление, фрактальную геометрию, методы экономической физики и фазовый анализ с моделированием, символьными вычислениями и визуализацией решений в системах компьютерной математики» [277, 278].

Анализ процессов мировой и, в частности, российской экономики показывает частое появление внезапных изменений структуры – «событийных составляющих динамики» [18]. Изучение экономической динамики на временных интервалах, когда потоки характеризуются критическими значениями параметров требует поиска новых, более точных методов аналитического представления, анализа и визуализации тенденций. Для динамических моделей экономических потоков действительно

характерны многокритериальность или множественность критериев, частая смена тенденций развития, частое возникновение «событийных составляющих» в динамике, высокая вариативность структуры связей между процессами, цикличность и периодичность развития.

Обычно «событийные составляющие» динамики обнаруживаются «выбросами», заметно выделяющимися на фоне общей тенденции развития. Однако, исследуя динамику запасов в экономике «событийные составляющие» могут сохранять не столь явный, «скрытый» характер, так как запасы обычно демонстрируют небольшую подвижность или динамичность своих абсолютных изменений. Более заметными «выбросы» становятся при переходе к динамическим моделям экономических потоков – скорости изменения запасов.

Исследование «событийных составляющих» в динамике экономических потоков становится актуальным привлечением адекватных исследуемым процессам адаптивных или структурно-вариативных математических моделей. Необходимостью принятия решений по управлению запасами и их потоками в экономике определяется поиск математических методов моделирования экономического движения, способы аналитического представления взаимосвязи между запасами и их потоками, позволяющие обнаруживать, количественно и графически представлять глобальную и локальную реакции развития на вариацию факторов.

К экзогенным изменениям параметров структуры экономического потока внутри отчётного горизонта отнесём (нередкую в российской экономике) смену экономических законов, таможенных пошлин, международных соглашений, экспортно-импортных квот, размеров субсидий, процентных ставок, тарифов, ставок налогов, ввод экономических санкций...

Структурная вариативность, волатильность и турбулентность современной экономики стали движущей, живительной силой «новой эконометрики». Всегда при построении моделей с переменной структурой требуется соблюдение условия непрерывности как показателя, так и всех его

производных в точках переключения. А это прямо ведёт к необходимости построения сплайновых моделей экономических процессов.

**Нелинейность современной экономической эволюции.** Многие современные исследования находят в развитии экономических процессов противоречия с нормальным законом распределения [43]. Эта особенность наблюдается в статистике финансовых потоков, потоков добычи, экспорта и потребления энергоресурсов, демографических потоков и прочих процессов. Доминантные конъюнктуры в экономике демонстрируют достаточно сложное и вариативное сочетание их разновеликих динамических или темпоральных компонент.

Динамичность современных экономических показателей, меняющиеся во времени и пространстве их связи – всё это определяет необходимость поиска новых методов моделирования процессов с переменной структурой. Экономико-статистические модели потоков, в зависимости от того, учитываются или не учитываются структурные изменения экономических показателей, подразделяются на модели со стационарной и переменной структурой. Динамично и непрерывно эволюционирующая внешняя среда требует исследования новых проблем мирового экономического развития со многими разветвлёнными сетевыми взаимосвязями потоков производства, экспорта, потребления строгими математическими методами с аналитическим и графическим представлением.

При моделировании сложных динамических систем, какими представляются не только физические, но и экономические потоки, необходимо разобраться в характере их колебательного отклика. Если вариация показателей исследуемого процесса ограничена малым диапазоном своих значений, то в общем случае можно сделать предположение о линейности системы. Тогда процедура анализа значительно упрощается за счет использования методов известной классической («линейной») парадигмы, которая подчинена «нормальному» закону. Напротив, когда система ведет себя внутренне нелинейно по отношению к колебаниям

факторного признака, при моделировании стоит опираться на методы нелинейной динамики [43].

Усложнение, глобальная интеграция, ускорение информационных, логистических, финансовых и др. процессов в современной экономике, более явное проявление сетевого и рекурсивного начал, исчерпание адекватных новым тенденциям возможностей классических методов, вторжение в экономическую «науку математических методов «нелинейной динамики» – всё это привело исследователей к новой «нелинейной» парадигме. Здесь обнаруживаются исследовательские конструкты экономической физики, фрактальной геометрии и теории хаоса», возникает необходимость математической и статистической обработки данных в новых интеллектуальных и точных системах компьютерной математики [277, 278].

Истоки нелинейной динамики можно найти в работах Анри Пуанкаре, в которых было выявлена невозможность аналитического решения большинства нелинейных, а весь набор решений предлагалось исследовать в так называемом фазовом пространстве, охватываемом множеством переменных, необходимых для полного описания состояний системы. Также, исследуя проблему трех тел, А. Пуанкаре заметил, что даже небольшие возмущения могут глубоко влиять на решение. Для исследования нелинейной динамики Пуанкаре ввел понятия фазового портрета, сечения Пуанкаре, периодической орбиты, бифуркации, неподвижной точки и т. д. Другой важной особенностью «нелинейной» парадигмы является наличие в динамике временных рядов «долговременной памяти» - иначе, отсутствие независимости наблюдений. Это утверждение особенно справедливо для экономических потоков, так как их динамика зависит от прошлых состояний, определяющих истощение или накопление запасов – источников или накопителей самих потоков. Например, исследования показывают, что текущие объемы экспорта энергоресурсов коррелируют с объемами экспорта в прошлые периоды времени, колебания экспортных цен также имеют «долгую память». Признаки рыночных заказов следуют за процессом «долгой

памяти» [311].

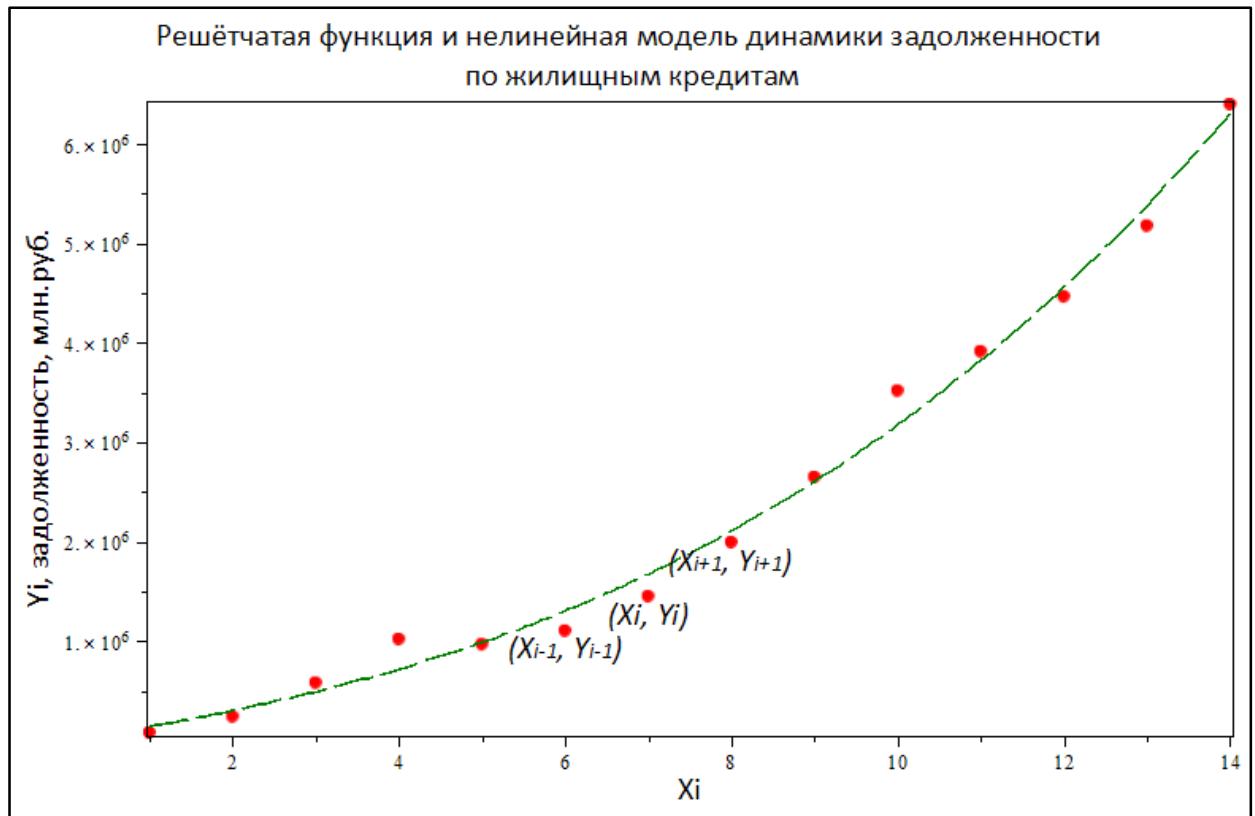
Можно лингвистически исследовать ориентированный на порядок рынок, где инвесторы устанавливают ставки, запрашивают и подают лимитные или рыночные ордера в соответствии с экзогенно установленными правилами. Правила торговли многократно обновляются путем обучения и адаптации инвесторов. В определённый момент времени инвесторы «оглядываются» на прошлые результаты своих прогнозов. Они «осознают» свои ошибки в прогнозах и обновляют методы прогнозирования до новых, имитируя стратегии более успешных инвесторов. Успех других инвесторов измеряется их прошлыми предсказаниями точности, так что инвесторы учатся у прошлого и адаптируют свое поведение для улучшения своих будущих показателей на рынке [310]. «Долговременная память» обнаруживается в динамике многих экономических процессов – в торговле, в финансовом менеджменте, она характерна также для временных рядов урожайности сельскохозяйственных культур, временными рядами индексов цен и др.

Для математического моделирования и анализа нелинейной экономической динамики предлагается новая исследовательская платформа, на которой должны быть реализованы методы сплайн-моделирования и анализа потоков в экономике.

## **2.3 Методы сплайн-моделирования и исследования потоков в трансформационных экономических системах**

При исследовании динамических потоков важен способ аналитического представления процесса – он должен сохранять статистику реального процесса в «узловых» точках, наилучшим образом строя и траектории интерполяционных переходов между «узлами», оптимальной «сшивкой» участков структурно-вариативной траектории позволять исследовать непрерывные изменения динамики, дифференцированием переходить от

анализа абсолютных изменений к изучению скорости и ускорения развития, переводить модели взаимосвязей в фазовое пространство. Предлагаемая новая исследовательская «платформа» предполагает, что аппроксимация «мономоделью» не позволяет сохранить динамические характеристики потока, что ухудшает качество анализа цикличности, сезонности, сглаживаются локальные реакции потоков на воздействие «выбросов», становится сложным наглядное представление изменений структуры динамического процесса. В моделях динамических потоков в переходных, трансформационных экономиках «временной класс» последовательно меняется на протяжении исследуемого диапазона данных – он может быть представлен суперпозицией нескольких «временных классов» (рис. 2.9).

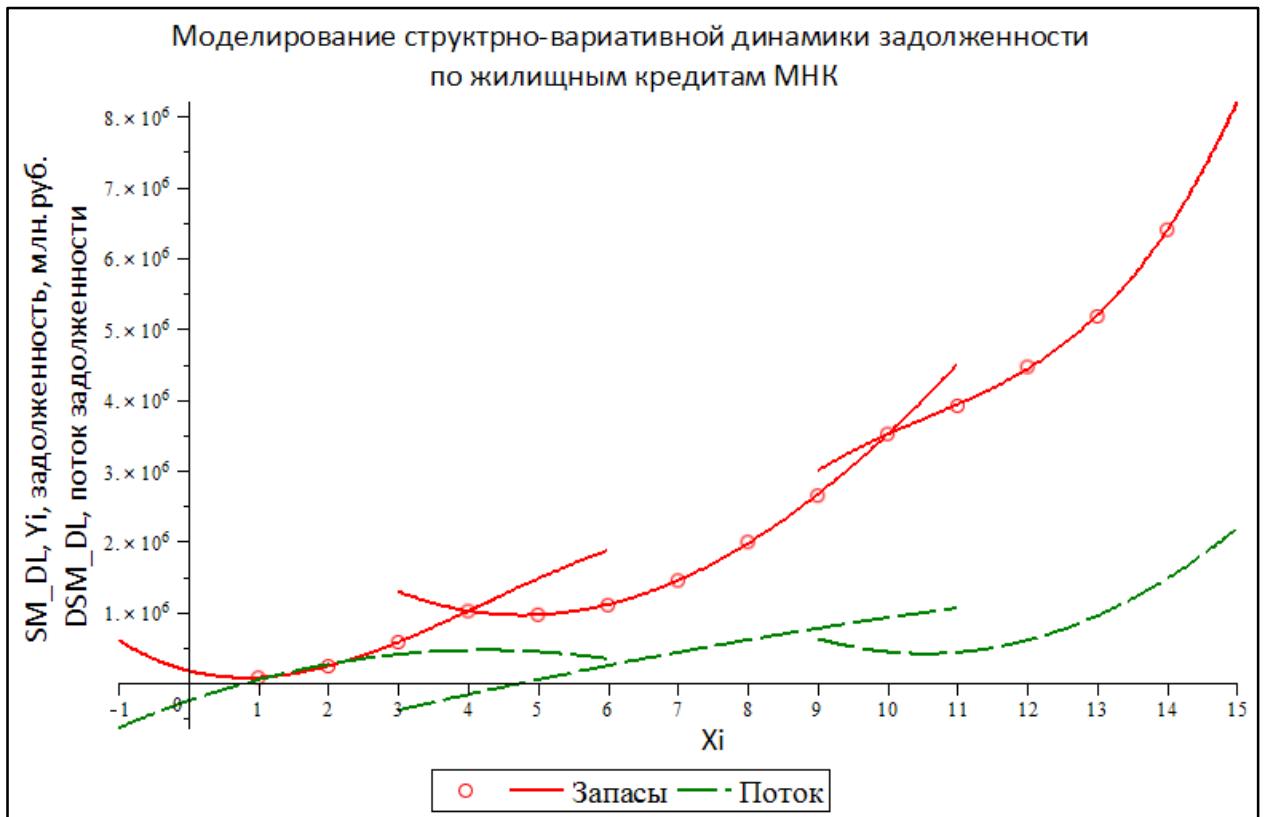


**Рисунок 2.9** – Решётчатая функция и нелинейная мономодель динамики задолженности по жилищным кредитам, предоставленным физическим лицам-резидентам в рублях (млн. руб.) с 2006 по 2019 гг.

Следующим после идентификации «временного класса» динамики этапом исследования становится построение единой, кусочно-вариативной модели. В.В. Бурлачков в работе об экономической науке и эконофизике замечает, что поступление новой внешней информации динамично изменяет

параметры экономической системы [37]. Добавим сюда те нелогичные «утечки» или «инъекции» извне, которые дополнительно выводят систему из баланса.

Вышеизложенное приводит нас к необходимости ввести понятие «кусочной» модели, состоящей из отдельных фрагментов, размещаемых последовательно на всём временном интервале. Такого рода объект можно образовать конкатенацией.



**Рисунок 2.10** – Пример классического представления структурно-вариативного процесса на примере динамики задолженности по жилищным кредитам (запас), предоставленным физическим лицам-резидентам в рублях (млн. руб.) с 2006 по 2019 гг.

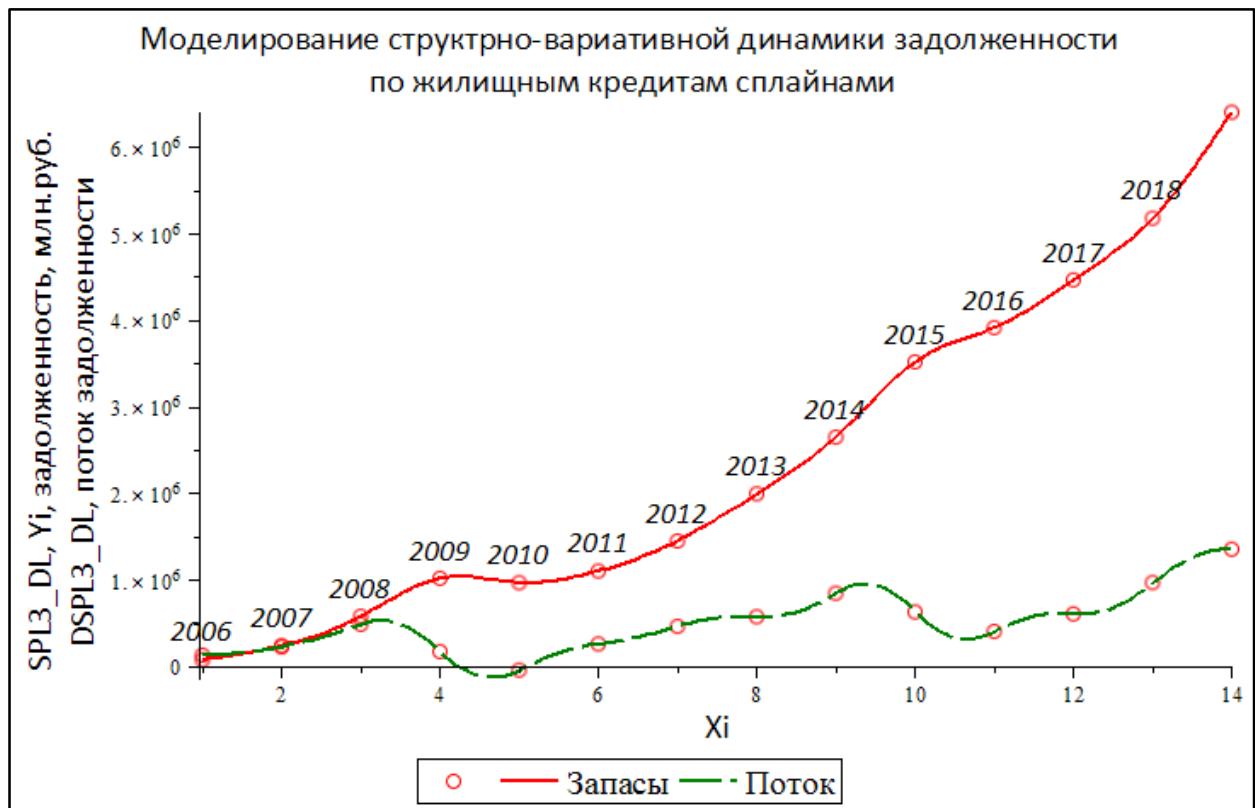
Конкатенацией называется операция «склеивания» объектов линейной структуры, объектов счётного вида с сохранением порядка следования элементов. Это бинарная операция, определяющаяся на словах данного алфавита (фрагментах сплайна в нашем случае). Операция ассоциативна, некоммутативна, а множество всех фрагментов (весь сплайн) образует «свободный моноид». Длина конкатенации самого сплайна равна сумме длин операндов – фрагментов сплайна. Тип данных конкатенации – имеющая

структуру последовательность (список, очередь, массив, кортеж, сплайн как многозвенник и пр.). Как видно на рисунке 2.10, отдельные интервалы динамики «запасов» неплохо моделируются методами классической эконометрики. В то же время не удается «сшить» модельные кривые в точках смены трендов в единую гладкую модель. Невозможность преобразования динамики запасов в непрерывную модель потока ограничивает и применение фазового анализа этого процесса.

При исследовании потоков необходим переход от обработки и сравнения дискретных точек к обработке и сравнению отрезков функций. Такими отрезками функций являются «куски» непрерывного сплайнового ансамбля внутри интервалов на временной оси. Эффективность перехода от сравнения дискретных данных к сравнению отрезков аналогична эффективности перехода от сравнения дискретных состояний (запасов) к сравнению изменений в состояниях (потоков) внутри временных интервалов. Для исследования экономической динамики рынка с вариативной структурой, что актуально для трансформационных экономических систем стран мира, предложена «кусочная» концепция моделирования (рис. 2.11). При моделировании экономической динамики сплайнами между каждыми последовательными узловыми точками динамика процесса описывается отдельной функцией. Последовательная автоматическая «сшивка» отрезков сплайн-функций позволяет исследователю не только наблюдать состояния процессов в узловых точках, но и изучать их поведение на интервалах (отрезках) функций. Непрерывность сплайн-модели дифференцированием легко преобразует динамику запасов в потоки.

Методы классической эконометрики отличаются от сплайн-моделирования, в первую очередь, использованием при построении регрессионных соотношений мономодели – некоторого единого полинома, проходящего в общем случае «мимо точек процесса», хотя и «наилучшим образом». Это грубо и оказывается удовлетворительно точным только в узких пределах изменения аргумента. Второе принципиальное отличие –

регрессионные построения по методу наименьших квадратов не сохраняют важные для исследования динамических потоков значения временных координат. Утрата временных реперов на модельных кривых губительно ухудшает качество и точность исследования динамических потоков. Так, например, утрата темпоральной последовательности временных меток противоречит зависимости последовательных значений потока и позволяет эффективно управлять запасами и потоками при локальных изменениях эффективности продаж в соответствии с ожидаемой динамикой спроса.



**Рисунок 2.11** – Сплайн-модель динамики задолженности по жилищным кредитам, предоставленным физическим лицам-резидентам в рублях (млн. руб.) с 2006 по 2019 гг.

Приведём выполненный в системе Maple пример интерполяции кубическим сплайном динамики задолженности по жилищным кредитам, предоставленным физическим лицам – резидентам в России (в рублях, млн. руб.) с 2006 по 2019 гг.:

```
> SPL3_DL:=spline(datat,datay,t,3);
```

$$\begin{aligned}
SPL3\_DL := & \left| \begin{array}{ll}
\frac{239726125396}{7865521} t^3 - \frac{719178376188}{7865521} t^2 + \frac{1753391359557}{7865521} t - 84569 & t < 2 \\
\frac{201935504364}{7865521} t^3 - \frac{492434649996}{7865521} t^2 + \frac{1299903907173}{7865521} t - \frac{362854277193}{7865521} & t < 3 \\
-\frac{1673335514343}{7865521} t^3 + \frac{16385004518367}{7865521} t^2 - \frac{49332413597916}{7865521} t + \frac{50269463227896}{7865521} & t < 4 \\
\frac{1865371166547}{7865521} t^3 - \frac{26079475652313}{7865521} t^2 + \frac{120525507084804}{7865521} t - \frac{176207764349064}{7865521} & t < 5 \\
-\frac{468602913293}{7865521} t^3 + \frac{8930135545287}{7865521} t^2 - \frac{54522548903196}{7865521} t + \frac{115538995630936}{7865521} & t < 6 \\
\frac{197781528541}{7865521} t^3 - \frac{3064784407725}{7865521} t^2 + \frac{17446970814876}{7865521} t - \frac{28400043805208}{7865521} & t < 7 \\
-\frac{115066933}{2131} t^3 + \frac{10007580735399}{7865521} t^2 - \frac{74059585186992}{7865521} t + \frac{185115253532484}{7865521} & t < 8 \\
\frac{820691238250}{7865521} t^3 - \frac{19882098175473}{7865521} t^2 + \frac{165057846099984}{7865521} t - \frac{452531229899452}{7865521} & t < 9 \\
-\frac{2044183848864}{7865521} t^3 + \frac{57469529176605}{7865521} t^2 - \frac{531106800068718}{7865521} t + \frac{1635962708606654}{7865521} & t < 10 \\
\frac{1940145286404}{7865521} t^3 - \frac{62060344881435}{7865521} t^2 + \frac{664191940511682}{7865521} t - \frac{2348366426661346}{7865521} & t < 11 \\
-\frac{762338222507}{7865521} t^3 + \frac{27121610912628}{7865521} t^2 - \frac{316809573223011}{7865521} t + \frac{1248639123699195}{7865521} & t < 12 \\
\frac{1140244949490}{7865521} t^3 - \frac{41371383279264}{7865521} t^2 + \frac{505106357079693}{7865521} t - \frac{2039024597511621}{7865521} & t < 13 \\
-\frac{1032723250282}{7865521} t^3 + \frac{43374376511844}{7865521} t^2 - \frac{596588520204711}{7865521} t + \frac{2734986537387463}{7865521} & \text{otherwise}
\end{array} \right|
\end{aligned}$$

**Транзакция переменной структуры потоков в математическую сплайновую модель.** Часто инерционное развитие процесса нарушается воздействием случайных импульсов, «латентных» факторов или преднамеренных действий. Временным рядам, описывающим потоки в динамических экономических системах, характерна сложная трансформирующаяся структура, для описания и анализа которой должны стать эффективными структурно-вариативные модели. В последнее время возросшая сетевая волатильность экономических систем объясняется изменением структуры экономики, структурными изменениями экономического сигнала. Это заставляет нас обращаться к методам анализа систем переменной структуры, которые следует искать в прикладной математике. Изменение структуры системы означает, что система в некоторый заранее неизвестный момент времени может перейти от одного закона развития к другому – изменится «временной класс» экономического

процесса.

Широкое применение для моделирования таких систем находят гибридные системы, известные как «системы с переключаемой диффузией». Как отмечают в своей работе *G. Gerorge Yin и Chao Zhu* [330], необходимость моделирования «системами с переключениями» вызвана тем, что многие процессы реального мира адекватно описываются моделями с переменной структурой. Структурно-адаптивные системы позволяют непрерывно представлять динамику дискретных состояний, их структурную изменчивость и хаотичность в окружающей среде. Системы с переключениями «широко используются и для математического моделирования физических систем, подверженных частым непредсказуемым структурным изменениям, вызванным событиями типа «повреждения» или резких перемен в окружающей среде» [317].

«Переключения» могут быть связаны с реструктуризацией долга, изменениями процентной ставки, частичным погашением суммы долга и другими случайными факторами, например, в динамике показателей валютных или товарно-сырьевых бирж, в динамике финансовых потоков и др.

Примером вариативной структуры может служить инвестиционный проект, когда, несмотря на формальный способ определения этапа инвестиционного проекта, за ним могут стоять объективные различия в закономерностях формирования денежных «притоков» и «оттоков». При моделировании инвестиционных проектов с непрерывными потоками платежей используют понятие «контрольных точек проекта», которые отделяют друг от друга последовательные этапы инвестиционного проекта. В предлагаемых моделях экономической динамики будем называть их «узловыми» точками. При заметных изменениях динамики потоков внутри разных этапов реализации инвестиционного проекта возникает необходимость учитывать вариативность структуры «на стыках» этапов математических моделей исследуемой динамики.

В зависимости от того, учитывать или не учитывать волатильность структуры экономических процессов, экономико-статистические модели можно разделить на два класса – модели со стационарной и переменной структурами. Для моделей со «стабильной структурой» характерно описание будущих состояний исследуемого объекта экстраполяцией закономерностей его развития в прошлом» [105]. Подобной мономоделью «поведение экономической системы на всем исследуемом отрезке времени описывается одной и той же функцией. Это равносильно предположению о постоянстве свойств экономической системы во времени. В основе корректного применения моделей со стационарной структурой лежит предположение об инерционности и невозможности значительных изменений состояния экономической системы на малых интервалах времени» [105]. Напротив, модели с переменной структурой должны учитывать возможные структурные изменения изучаемого объекта. Построение моделей с вариативной структурой – один из эффективных способов повышения адекватности моделей современным реальным процессам. Однако при этом увеличивается сложность модели.

При построении статистических моделей с переменной структурой, помимо обычных этапов экономико-статистического исследования, возникают дополнительные задачи. Прежде всего, необходимы содержательные предпосылки для выдвижения гипотезы о наличии структурных изменений в исследуемой динамике. При подтверждении гипотезы о наличии структурных изменений необходимо выявить области, интервалы и характер изменений. Одной из наиболее известных форм моделей с переменной структурой являются «кусочно-линейные модели с переключениями» [205].

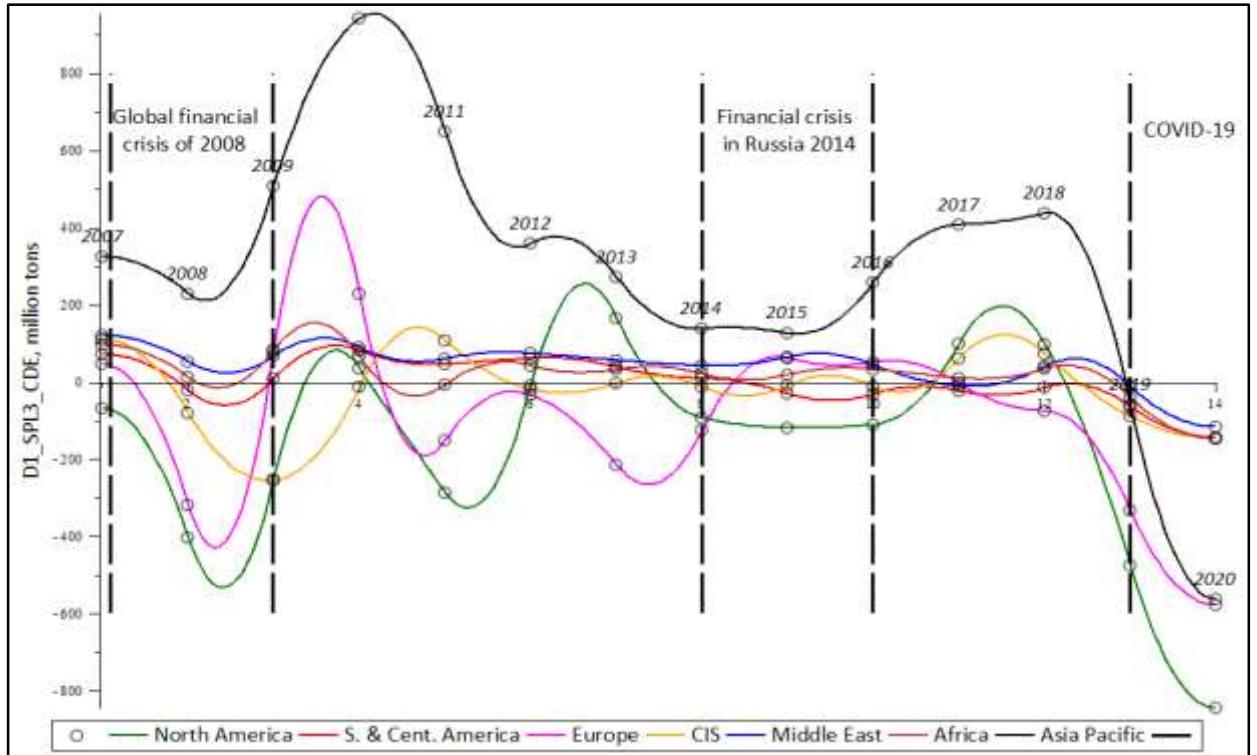
Потоки добычи, экспорта и потребления энергоресурсов можно назвать одним из ярких примеров экономической динамики с переменной структурой. Нестабильность динамики потоков на рынке энергоресурсов могут вызывать, но в первую очередь причиной волатильности выступают

колебания спроса и предложения. Весьма часто к заметной вариации потоков здесь приводят и «событийные составляющие» динамики, например, существенное сокращение добычи нефти в Саудовской Аравии в сентябре 2019 года после атаки дронов на нефтеперерабатывающие заводы.

Изменение структуры обнаруживается не только в динамике отдельного потока, но и в эволюции параметров взаимосвязи нескольких экономических потоков, что особенно актуально для сетевых экономик. Экономические потоки, являясь частью глобальной динамической системы, действуют друг на друга с различной «силой». Например, в условиях перманентной конкурентной борьбы за рынки, ускорение потоков экспорта энергоресурсов в одни страны может замедлить потоки их экспорта в другие. Степень взаимного «вытеснения» будет различаться для периодов общемирового роста или спада деловой активности, что порождает вариативность параметров связи (рис. 2.12). Анализ скорости потоков экспорта нефти выявляет пять отрезков структурно-переменных взаимосвязей на интервале 2000 – 2017 годов: 2000 – 2003 гг. – обратная связь; 2003 – 2007 гг. – прямая связь; 2007 – 2012 гг. – обратная связь; 2012 – 2014 гг. – прямая связь; 2014 – 2017 гг. – обратная связь.

Перечислим некоторые достоинства сравнения отрезков сплайн-моделирования взаимосвязей: Во-первых, в точности сохраняется информация о фактически достигнутых и зафиксированных значениях статистики исследуемых процессов. Во-вторых, автоматически можно перейти к моделям скорости или ускорения процессов взятием производных моделирующего сплайна. В-третьих, в моделях сохраняется последовательность в развитии процессов во времени. В-четвертых, сохранение реального «рельефа» исследуемой динамики позволяет выявлять с большой достоверностью точки и интервалы структурных изменений связи. В-пятых, сравнением интерполяционного поведения процессов выявляются локальные «эффекты» воздействия «событийных составляющих» динамики. В-шестых, заменой обобщённых моделей регрессии сплайн-моделирование

позволяет строить богатые аналитическими возможностями параметрические траектории связи.



**Рисунок 2.12** – Колебания мгновенной скорости выбросов углерода в регионах мира на фоне кризисов. Первые производные сплайн-моделей

### Полиформные математические модели экономических потоков.

Математические модели с некоторых пор можно чётко разделить на мономодели и полиформные модели. Мономодели не меняют своего описания, коэффициентов и математической формы на всём протяжении отчётного периода. В «старой эконометрике» работают только с мономоделями, хотя их кривые проходят, в общем случае, мимо заданных точек экономического поведения. В математике, в теории интерполяции известны способы построения мономоделей, траектории которых проходят точно через заданные точки. Если число узловых точек равно  $N$ , то для такого построения необходим степенной полином порядка  $N-1$ . Однако здесь обнаруживаются многие сложности: неудобны способы генерации полиномов высоких степеней; велики ошибки округления и последствия их накопления; полиномы трудно объясняются экономически, поскольку не находят в экономике практических эквивалентов; неудовлетворительно интерполяционное поведение степенных полиномов высокой степени,

приводящее к проявлению «ложных» складок, в фазовой плоскости перерастающих в «ложные циклы». Поэтому для «новой эконометрики» потребовался поиск нового универсального математического модельного конструкта с целью структурно-вариативного анализа динамических потоков.

Так в «новой эконометрике» оказывается полезным «кусочно-полиномиальный» подход при моделировании, визуализации и анализе динамики экономических «количество», когда динамика запасов или потоков представляется моделями, состоящими из «кусков», последовательно связанных во времени. Назовём такие модели полиформными [168], [169], они могут быть дискретными и непрерывными. В дискретном случае обработка модели выполняется алгоритмами дискретного анализа (конечные разности, исчисление сумм и пр.), стыковка осуществляется всеми возможными конечными разностями. Во втором случае «решётчатый» образ экономической темпоральной зависимости преобразуется в непрерывную модель интерполяцией кубическими сплайнами.

Аналитика полиформных моделей важна для исследования потоков, поскольку производные показателей определяют тенденции или интенсивности процессов, помогают заранее их предвидеть и рассчитать динамику запасов, более точно и эффективно управлять потоками, принимать заблаговременно меры по улучшению динамики. Количественная сторона новых экономико-математических моделей, тем не менее, сохраняет известные требования Рагнара Фриша [253] и характеристики классической эконометрики, они до сих пор важны и современны.

Было обнаружено, что если исследуются динамические особенности экономических потоков в системах с переменной структурой, то оказывается эффективным их описание непрерывными функциями. При построении модели взаимосвязи потоков с переменной структурой требуется соблюдение условий непрерывности в точке переключения. Введение нескольких условий сохранения непрерывности в точке переключения необходимо привлекает сплайн-функции для построения модели, поскольку наиболее

экономной и интересной будет модель на единой математической основе. Поэтому первым модельным инструментом изучения сугубо турбулентной экономики с переменной структурой стал сплайн-анализ и наполняющие его сплайн-функции или сплайны. Более точно сплайн (математики любят его называть «многозвенник») представляет собой объект с последовательно-изменяемой структурой, целью которого и является точное моделирование систем с волатильностью структуры. В [227] о сплайнах написано – «для учёта структурных изменений в социально-экономических процессах». Преобразование «решётчатой» функции дискретной экономической динамики в гладкую непрерывную экономическую функцию в англоязычной литературе называется *«spline-smoothing»*.

Термин «сплайн» происходит от названия гибкого инструмента рисования, используемого военно-морскими архитекторами для рисования кусочно-непрерывных кривых.

Методы классической эконометрики «грешат» уходом модельной кривой от конкретных точек изучаемого процесса, делая модель удовлетворительной «в среднем». Быстрые изменения показателя, «привязанные» к конкретным временными отметкам, требуют более адекватного представления его в модели для детального исследования в окрестности каждой временной отметки, в окрестности каждого «узла». Появляется желание проводить модельную кривую точно через все точки исходного эмпирического распределения. Сплайн – математический конструкт, который делает это ещё и экономно.

Исследователю современной быстротекущей экономики приходится обращаться к турбулентной и перманентно волатильной динамике изучаемых потоков. На исследуемом временном интервале может неоднократно меняться «временной класс» процесса, экономические «правила игры»: международные соглашения, транзитные маршруты, квоты, налоговые ставки, акцизы, отчисления. Тогда отчётный период приходится делить на отдельные интервалы, внутри которых все экономические «правила игры»

сохраняются неизменными. Так исследователь приходит к необходимости использовать универсальную «кусочно-полиномиальную» концепцию моделирования потоков в экономике с новым, нетрадиционным для экономической науки математическим конструктом – сплайнами, «многозвенниками» или сплайн-функциями, в наибольшей степени релевантных «рваному» характеру потоков в современной экономике.

С помощью сплайновой интерполяции мы приближаем интерполяционную функцию  $y(x)$  на интервале  $[a, b]$  путем его деления на «куски», требуя при этом сохранения непрерывности функции на стыках. Функция сплайна  $y(x)$  степени  $N$  имеет вид

$$a = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_N = b \quad (9)$$

и имеет свойства:

1. В каждом интервале  $u_{i-1} \leq x \leq u_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) функция  $y(x)$  является полиномом степени не больше  $N$ ;
2. В каждом внутреннем соединении  $y(x)$  и его первые производные  $N - 1$  непрерывны.

*Интерполирование линейным сплайном.* Если у нас есть несколько точек, но мы не хотим иметь полиномиальную интерполяцию высокой степени из-за боязни феномена Рунге, можно выполнить линейную интерполяцию между каждой из точек. Эта подгонка имеет некоторые недостатки. Основной из них заключается в том, что в линейная сплайн-функция не является гладкой – функция имеет разрывную производную в узловых точках.

Интересно, что соединением на графиках точек «решётчатой» функции отрезками прямых, экономисты выполняют интерполирование динамики линейным сплайном. Полученная модель становится недостаточно адекватной экономическому смыслу, но создаёт понятный глазу графический образ. Образ недостаточно аналитичен, так как во всех узловых точках

процесса происходит конечный разрыв первой производной, нарушая предположение о непрерывности и гладкости экономического поведения.



**Рисунок 2.13 – Кусочно-линейная модель задолженности по жилищным кредитам**

Применительно к исследованию экономических потоков кусочно-линейные модели первого порядка обнаруживают ряд ограничений:

- 1 сплайны первого порядка не позволяют аналитически представить взаимосвязь между динамикой запасов и потоков с помощью непрерывной производной;
- 2 утрачивается возможность исследования «латентной» взаимосвязей потоков – корреляций в колебаниях скорости экономического развития;
- 3 отсутствуют возможности одновременного непрерывного представления динамики запасов и потока в фазовом пространстве;
- 4 становится невозможным фазовый анализ цикличности потоков из-за отсутствия непрерывной первой производной линейного сплайна;
- 5 невозможно достичь точности в «хроноскопировании» цикличности потоков в фазовом пространстве;
- 6 невозможно обращение к экономическим аналогам характеристик физического движения – скорости, ускорению, импульсу и др.

Приведём пример интерполяции линейным сплайном – кусочно-линейная модель задолженности по жилищным кредитам состоит из  $N-1=9$  линейных функций, представляющих процесс за  $N=10$  лет (с 2010 по 2019 гг.).

$$SPL1_DL := \begin{cases} -84569 + 161965 t & t < 2 \\ -440697 + 340029 t & t < 3 \\ -736176 + 438522 t & t < 4 \\ 1222416 - 51126 t & t < 5 \\ 289096 + 135538 t & t < 6 \\ -974864 + 346198 t & t < 7 \\ -2358540 + 543866 t & t < 8 \\ -3247876 + 655033 t & t < 9 \\ -5179636 + 869673 t & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

Первая производная линейного сплайна, моделирующего динамику запасов (задолженности) по кредиту, становится кусочно-постоянной моделью потока:

$$D1\_SPL1\_DL := \begin{cases} 161965 & t < 2 \\ \text{undefined} & t = 2 \\ 340029 & t < 3 \\ \text{undefined} & t = 3 \\ 438522 & t < 4 \\ \text{undefined} & t = 4 \\ -51126 & t < 5 \\ \text{undefined} & t = 5 \\ 135538 & t < 6 \\ \text{undefined} & t = 6 \\ 346198 & t < 7 \\ \text{undefined} & t = 7 \\ 543866 & t < 8 \\ \text{undefined} & t = 8 \\ 655033 & t < 9 \\ \text{undefined} & t = 9 \\ 869673 & 9 < t \end{cases} \quad (11)$$

*Сплайны второго порядка* моделируют динамику между узловыми точками отрезками параболы:

$$SPL2_DL := \begin{cases} \frac{265689882516}{1372105} t^2 - \frac{531379765032}{1372105} t + \frac{371885321096}{1372105} & t < \frac{3}{2} \\ \frac{91862297752}{1372105} t^2 - \frac{1979402148}{274421} t - \frac{19226744623}{1372105} & t < \frac{5}{2} \\ \frac{160426349852}{1372105} t^2 - \frac{70543454248}{274421} t + \frac{409298581002}{1372105} & t < \frac{7}{2} \\ -\frac{513849445804}{1372105} t^2 + \frac{4367213298352}{1372105} t - \frac{7850579915784}{1372105} & t < \frac{9}{2} \\ \frac{235276448812}{1372105} t^2 - \frac{339274250456}{196015} t + \frac{1463843890038}{274421} & t < \frac{11}{2} \\ \frac{126681183812}{1372105} t^2 - \frac{1180371838192}{1372105} t + \frac{806842536788}{274421} & t < \frac{13}{2} \\ \frac{160827005516}{1372105} t^2 - \frac{232038217192}{196015} t + \frac{782410521562}{196015} & t < \frac{15}{2} \\ -\frac{6758212348}{1372105} t^2 + \frac{889510747616}{1372105} t - \frac{3949794853916}{1372105} & t < \frac{17}{2} \\ \frac{489853454712}{1372105} t^2 - \frac{1078983941772}{196015} t + \frac{31930398091169}{1372105} & t < \frac{19}{2} \\ -\frac{1754328047124}{1372105} t^2 + \frac{7017312188496}{274421} t - \frac{34121396489906}{274421} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

Отрезки параболы сплайн второго порядка соединяет в новых «узловых» точках процесса, располагая их посредине между исходными «узлами». У параболического сплайна непрерывна первая производная:

$$D1_SPL2_DL := \begin{cases} \frac{531379765032}{1372105} t - \frac{531379765032}{1372105} & t \leq \frac{3}{2} \\ \frac{183724595504}{1372105} t - \frac{1979402148}{274421} & t \leq \frac{5}{2} \\ \frac{320852699704}{1372105} t - \frac{70543454248}{274421} & t \leq \frac{7}{2} \\ -\frac{1027698891608}{1372105} t + \frac{4367213298352}{1372105} & t \leq \frac{9}{2} \\ \frac{470552897624}{1372105} t - \frac{339274250456}{196015} & t \leq \frac{11}{2} \\ \frac{253362367624}{1372105} t - \frac{1180371838192}{1372105} & t \leq \frac{13}{2} \\ \frac{321654011032}{1372105} t - \frac{232038217192}{196015} & t \leq \frac{15}{2} \\ -\frac{13516424696}{1372105} t + \frac{889510747616}{1372105} & t \leq \frac{17}{2} \\ \frac{979706909424}{1372105} t - \frac{1078983941772}{196015} & t \leq \frac{19}{2} \\ -\frac{3508656094248}{1372105} t + \frac{7017312188496}{274421} & \frac{19}{2} < t \end{cases} \quad (13)$$

Вторая производная терпит разрыв:

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{ll}
 \frac{531379765032}{1372105} & t < \frac{3}{2} \\
 \text{undefined} & t = \frac{3}{2} \\
 \frac{183724595504}{1372105} & t < \frac{5}{2} \\
 \text{undefined} & t = \frac{5}{2} \\
 \frac{320852699704}{1372105} & t < \frac{7}{2} \\
 \text{undefined} & t = \frac{7}{2} \\
 -\frac{1027698891608}{1372105} & t < \frac{9}{2} \\
 \text{undefined} & t = \frac{9}{2} \\
 \frac{470552897624}{1372105} & t < \frac{11}{2} \\
 \text{undefined} & t = \frac{11}{2} \\
 \frac{253362367624}{1372105} & t < \frac{13}{2} \\
 \text{undefined} & t = \frac{13}{2} \\
 \frac{321654011032}{1372105} & t < \frac{15}{2} \\
 \text{undefined} & t = \frac{15}{2} \\
 -\frac{13516424696}{1372105} & t < \frac{17}{2} \\
 \text{undefined} & t = \frac{17}{2} \\
 \frac{979706909424}{1372105} & t < \frac{19}{2} \\
 \text{undefined} & t = \frac{19}{2} \\
 -\frac{3508656094248}{1372105} & \frac{19}{2} < t
 \end{array} \right. \quad (14) \\
 D2\_SPL2\_DL := &
 \end{aligned}$$

*Кубические сплайны* являются наиболее востребованными для моделирования сложных структурно-вариативных процессов. Кубический сплайн является наиболее распространенным, чаще используемым в инженерных задачах. В этом методе кубический многочлен используется для аппроксимации кривой между каждыми двумя соседними базовыми точками.

Наиболее широко используемой функцией сплайна является кубический сплайн ( $N=3$ ). Дадим определение кубическому сплайну. Пусть

имеется ряд данных с элементами  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Кубический интерполяционный сплайн

$$y(x) = f_i(x); x_i \leq x \leq x_{i+1}, i = 1, \dots, N-1 \quad (15)$$

должен удовлетворять требованиям:

1. непрерывности самой функции сплайна:

$$f_i(x_i) = y(x_i) = y_i, x_i \leq x \leq x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, N-1; f_{i-1}(x_i) = y(x_i) = y_i, i = 2, 3, \dots, N; \quad (16)$$

2. непрерывность первой производной:

$$f'_{i-1}(x_i) = f'_i(x_i), i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (17)$$

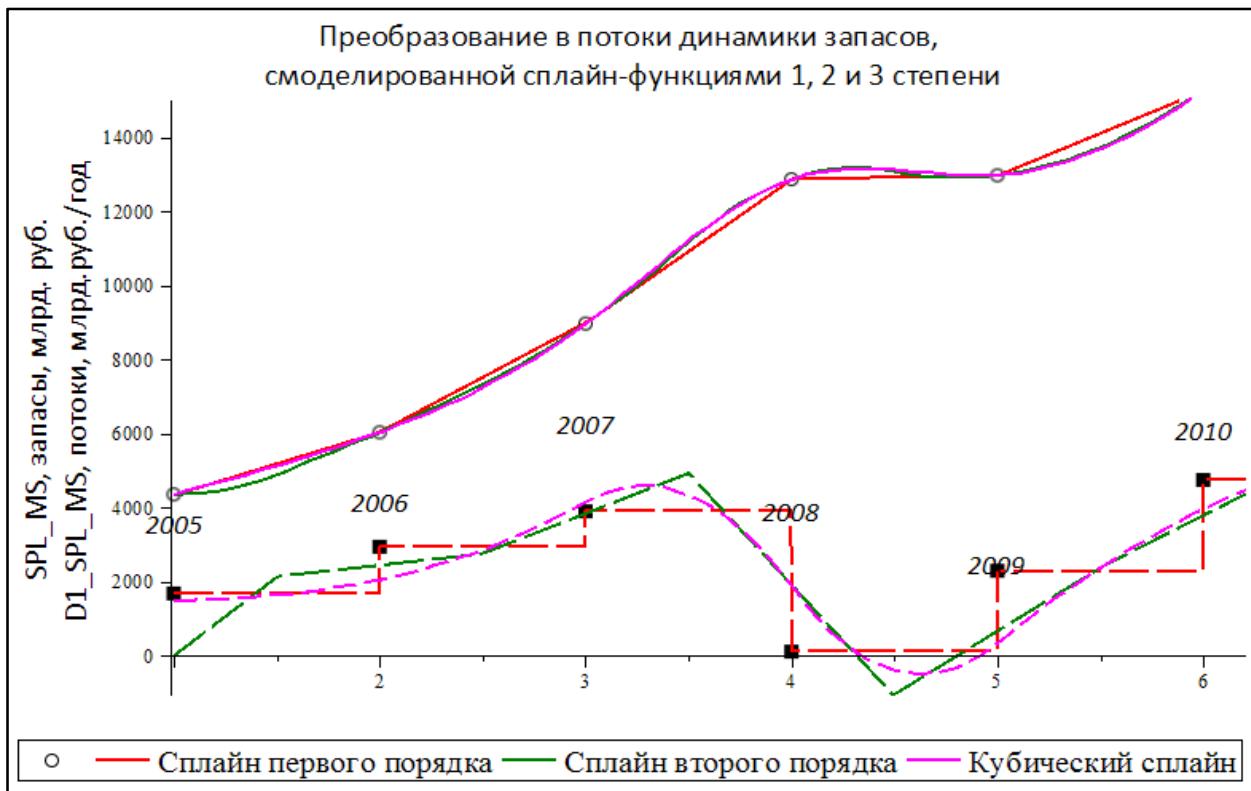
3. непрерывность второй производной:

$$f''_{i-1}(x_i) = f''_i(x_i), i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (18)$$

Дополнительные ограничения необходимы для того, чтобы сделать сплайн уникальным, потому что через каждую пару точек проходит бесконечное число полиномов третьей степени:

$$SPL3_DL := \begin{cases} \frac{82393195}{2703} t^3 - \frac{82393195}{901} t^2 + \frac{602577785}{2703} t - 84569 & t < 2 \\ \frac{69341017}{2703} t^3 - \frac{56288839}{901} t^2 + \frac{445951649}{2703} t - \frac{41390861}{901} & t < 3 \\ -\frac{574837676}{2703} t^3 + \frac{1876247240}{901} t^2 - \frac{996874886}{159} t + \frac{5756217376}{901} & t < 4 \\ \frac{640264564}{2703} t^3 - \frac{2984161720}{901} t^2 + \frac{41378034458}{2703} t - \frac{20165963744}{901} & t < 5 \\ -\frac{2983948}{51} t^3 + \frac{1007907320}{901} t^2 - \frac{18503001142}{2703} t + \frac{13101278256}{901} & t < 6 \\ \frac{57193600}{2703} t^3 - \frac{284149744}{901} t^2 + \frac{4754026010}{2703} t - \frac{2403406512}{901} & t < 7 \\ -\frac{105742532}{2703} t^3 + \frac{856403180}{901} t^2 - \frac{19197585394}{2703} t + \frac{306143860}{17} & t < 8 \\ \frac{131964325}{2703} t^3 - \frac{1045251676}{901} t^2 + \frac{26442131150}{2703} t - \frac{24343012348}{901} & t < 9 \\ -\frac{142427249}{2703} t^3 + \frac{1424272490}{901} t^2 - \frac{40235021332}{2703} t + \frac{42334140134}{901} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Хорошо известные в математике и технике сплайновые «многозвенники», чаще кубические, удачно реализуют «кусочный» подход в методологии моделирования и анализа потоков.



**Рисунок 2.14** – Сплайн-интерполирование динамики запасов денежной массы ( $SPL\_MS$ , сплошные линии) и преобразование полученных моделей ( $D1\_SPL\_MS$ , пунктирные линии) в потоки дифференцированием.

На рисунке 2.14 визуализация механизма преобразования запасов в потоки дифференцированием. При аппроксимации сплайном первой степени преобразование динамики запасов аналогично дискретному преобразованию расчётом цепных приростов. Полученная ступенчатая функция дискретных изменений исключает возможность анализа скорости или ускорений полученного потока. Линейная функция потока получена дифференцированием функции запасов – сплайна второй степени. Наилучшие аналитические возможности демонстрирует интерполирование кубическим сплайном. Геометрически и графически на плоскости и в трёхмерном пространстве сплайн соединяет попарно множество узлов «решётчатой» функции гладкой кривой с минимальной между узловыми точками кривизной, оптимально «сшивая» фрагменты сплайна в узлах.

Чтобы гарантировать определенную степень точности, избежать «ложных» колебаний в промежутках между узловыми точками, а также для получения гладких моделей, используют интерполирование кубическими

сплайнами.

**Приведём спектр замечательных экономико-математических свойств сплайна,** важных для валидного моделирования потоков в экономических системах с переменной структурой. Оказалось, что наиболее перспективными среди способов построения и анализа непрерывных моделей структурно-вариативных процессов является сплайновая интерполяция. Сплайновый подход находит свои преимущества в некритичности к расположению «узлов» эмпирического процесса, простоте в вычислении производных, быстрой сходимости и высокой точности по сравнению с обычными методами аппроксимации.

Стоит рассмотреть основные свойства сплайновой интерполяции дискретных данных, заданных таблично или множеством дискретных точек на графике, важные при моделировании и анализе потоков.

*Первое свойство* – изменяемая структура сплайновой модели – как ответ на структурные изменения динамики запасов или их потоков, что востребовано методологией моделирования и анализа структурно-вариативной динамики потоков. Сплайновым функциям, с точки зрения прагматики, желательно было бы сохранять единое аналитическое описание, а лучшее пожелание – чтобы у них менялись только свои числовые коэффициенты на разных участках времени.

*Второе свойство* – абсолютная точность сплайн-интерполяционной модели, проходящей через все «узлы» эмпирического экономического процесса принципиально без отклонений. Абсолютная точность сплайн-моделирования – «это отличительная и замечательная особенность сплайна принципиальная востребована методологией моделирования и анализа потоков. Новая методология при моделировании потоков диктует необходимость использования наилучшим образом всех значений переменной из «решётки» эмпирических данных (статистической таблицы), поэтому кривая аппроксимирующего полинома должна проходить точно через все точки реального показателя в системе любой мерности – это

сохранит в полученной аналитической модели как небольшие изменения скорости роста, так и возможные «выбросы» исследуемой динамики» [105, 130].

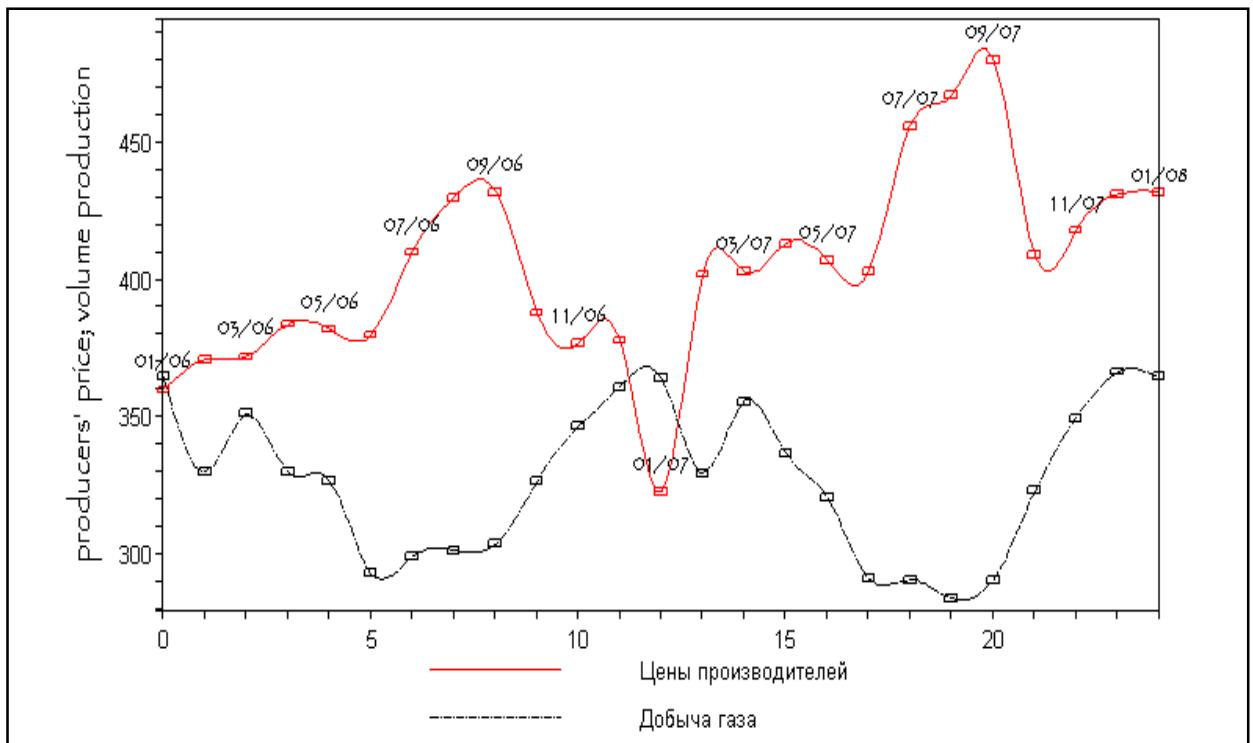
Прохождением модельной кривой кубического сплайна через узловые точки эмпирического процесса с абсолютной точностью удаётся лучше и «точнее» исследовать динамику экономических потоков даже на коротких темпоральных участках, когда происходят внезапные и существенные изменения конъюнктуры. В таких случаях возможность сплайн-функций генерировать дополнительные точки процесса между «узловыми» точками позволяет количественно оценивать силу кратковременного воздействия факторов на исследуемый процесс.

*Третье свойство* – аналитичность сплайнов. Использование символьных свойств сплайн-функций становится удобным при инструментальной обработке экономического сигнала в системах компьютерной математики, при построении адаптивных сплайновых моделей динамики потоков, при аналитическом поиске и вычислении «скорости» и «ускорений» потока, точек и интервалов замедления роста, при построении эконофизических моделей «импульса», «силы» и др. характеристик экономического «движения». Аналитичность предлагаемых моделей создаёт также широкие возможности для визуализации результатов исследования в двух- и трёхмерных пространствах. Аналитичность позволяет привлечь к математическому анализу, фазовому анализу, взаимному пересчёту и визуализации запасов и их потоков в экономике весь непрерывный математический аппарат – гладкие функции, производные, интегралы... Особенno важны в изучении экономического движения производные, вовлекаемые через аналитику сплайнов.

*Четвёртое свойство* – сплайн явно (аналитически – это особенно важно, графически и численно) приносит исследователю одновременно динамику самого экономического показателя (запасов) и всех его производных (потоков, скорости и интенсивности потоков). На это свойство и

опирается, в частности, «тонкость» анализа экономической динамики потоков.

*Пятое свойство* – если сплайн воспроизводит точно экономический процесс на отдельных временных отрезках отчётного периода, там, где сохраняются единые «экономические правила игры», то переход от модели одного участка к модели другого должен сопровождаться непротиворечивой, «наилучшей» автоматической «сшивкой» структурных частей (фрагментов сплайна) полиформной модели «новой эконометрики» в особых «узловых» точках темпоральной оси.



**Рисунок 2.15** – Взаимосвязь между объёмами добычи газа и ценами его производителей

Среди множества моделей, которые проходят точно через все точки исходного «решётчатого» представления, сплайновая модель должна отличаться в лучшую сторону тем, чтобы кривая её решения проходила по всем точкам с минимальной кривизной отрезков. Прохождением сплайна «точно через все узлы «решётчатой» функции достигается принципиальная точность экономического сплайн-моделирования, анализа и визуализации динамических потоков» [105]. Сплайн-модели сохраняют и динамические характеристики процесса с абсолютной точностью, в частности, все

ускорения и замедления роста.

*Шестое свойство* – для экономики важны внутренние оптимизационные свойства сплайновых структур, соответствующие эконофизическим аналогиям оптимальности происходящего в Природе. Примером выполнения закона сохранения энергии (или экономического эффекта) в экономике выступает модель взаимосвязи спроса и предложения, когда снижение физических объёмов предложения приводит к росту цен на товар, сохраняя в некоторой степени баланс товарооборота в его денежном выражении. Известно, «свободные рыночные отношения создают плотную взаимосвязь между такими показателями, как цена товара и спрос на него. Динамика среднегодовых объёмов добычи природного газа в России имеет слабо выраженную тенденцию к росту (рис. 2.15). В то же время наблюдается сильная сезонная вариация объёмов его добычи, эти колебания оказываются отрицательно коррелированными с потребностями и ценами его покупателей с максимальным значением – 0.56226, достигаемым при смещении цен производителей на один месяц назад» [98, 133].

*Седьмое свойство* – реализуя простоту вычислений и свойство наилучшего приближения однозначно простым и эффективным алгоритмом определяются величины «моментов» сплайна  $M_j$ ,  $j = 1..N$ . Сплайн позволяет работать с объектами и системами переменной структуры, при этом он строится на единой математической базе. «Рваная» экономика предлагает многие свои структуры переменными, интересными для моделирования специальным аппаратом, математическим конструктом. Таким аппаратом применительно к турбулентной экономике становится сплайн-анализ и сплайн-функции. Уже упомянуто: более точно сплайн представляет собой объект с *последовательно-изменяемой структурой*, конкатенирующей от начала отчётного периода до конца горизонта прогноза. Алгоритмы компьютерной обработки данных хорошо адаптированы к работе с повторяющимися и циклическими операциями. Темпоральные участков сплайн-функции самоподобны, что позволяет просто и экономно

реализовывать их повторяющиеся структуры в системах компьютерной математики. Благодаря фрактальности (самоподобию) отрезков «сплайн-функции и аналитическому единобразию их свойств на разных темпоральных участках все фрагменты модели представляются и аналитически преобразовываются в компьютере однотипно и экономно» [26].

*Восьмое свойство* – динамика многих запасов и их потоков в экономике подвержена влиянию сезонности или периодичности, например, динамика запасов воды в водоёмах, запасов природного газа в хранилищах газа, потока добычи энергоресурсов, потока реализации товаров, динамика финансовых потоков и др. Известно, что сезонные изменения запасов с течением времени определяются через их приrostы (или через производную функции запасов) – через переменные типа потока. При этом классические сглаживающие процедуры выявления сезонности «стирают» локальные периодические волны, искажая масштаб сезонной составляющей. Благодаря универсальности и гибкости сплайновых моделей существенно улучшается моделирование ими периодических потоков [281].

*Девятое свойство* - сплайн-подход демонстрирует возможность параллельного представления кривых эконометрических законов на параметрических картинах, выявляя интересные и необходимые для новой методологии закономерности. Возможность построения и исследования взаимных параметрических зависимостей (кривых) нескольких динамических потоков с явным сохранением и индикацией временного параметра отнесём к очередному полезному расширению сплайнов. Непрерывность траекторий сплайн-образов хорошо соотносится с представлением потоков непрерывными и инерционными, с предположением о взаимной связи между финансовыми, производственными, товарными и др. потоками, а также с накоплением потоков в экономике.

*Десятое свойство* - кусочно-полиномиальный подход устраниет ограниченность выбора критериев согласия регрессионных построений на «решётчатых» функциях. Аппроксимацией сплайнами дискретных

«решётчатых» функций эмпирического сигнала стало возможным получение непрерывной полиформной модели, удалось обнаружить новые возможности анализа на фазовых и параметрических портретах. Первой и необходимой ступенью при моделировании, анализе и визуализации непрерывных потоков в экономике – финансовых, торговых, демографических и т.д. является сплайн-сглаживание или *spline-smoothing*. Аналитичность моделей динамических потоков в полной мере достигается сплайновым «сглаживанием» - непрерывная кривая сплайн-функции действительно «гладкая», точно своими производными описывает колебания скорости роста, качественно демонстрирует динамические изменения визуальным представлением. Сплайны позволяют визуализировать «текущее» экономического процесса как на плоскости, так и в трёхмерном пространстве, графически строя гладкие двумерные и трёхмерные кривые. Сплайны аналитически (в символах) и графически складываются, умножаются, находятся их производные и интегралы, аналитичность формул самого сплайна и его производных позволяет описывать взаимосвязи между запасами и их потоками также аналитически, определять количественные характеристики экономического движения, графически представлять динамические процессы и связи между ними в фазовом пространстве.

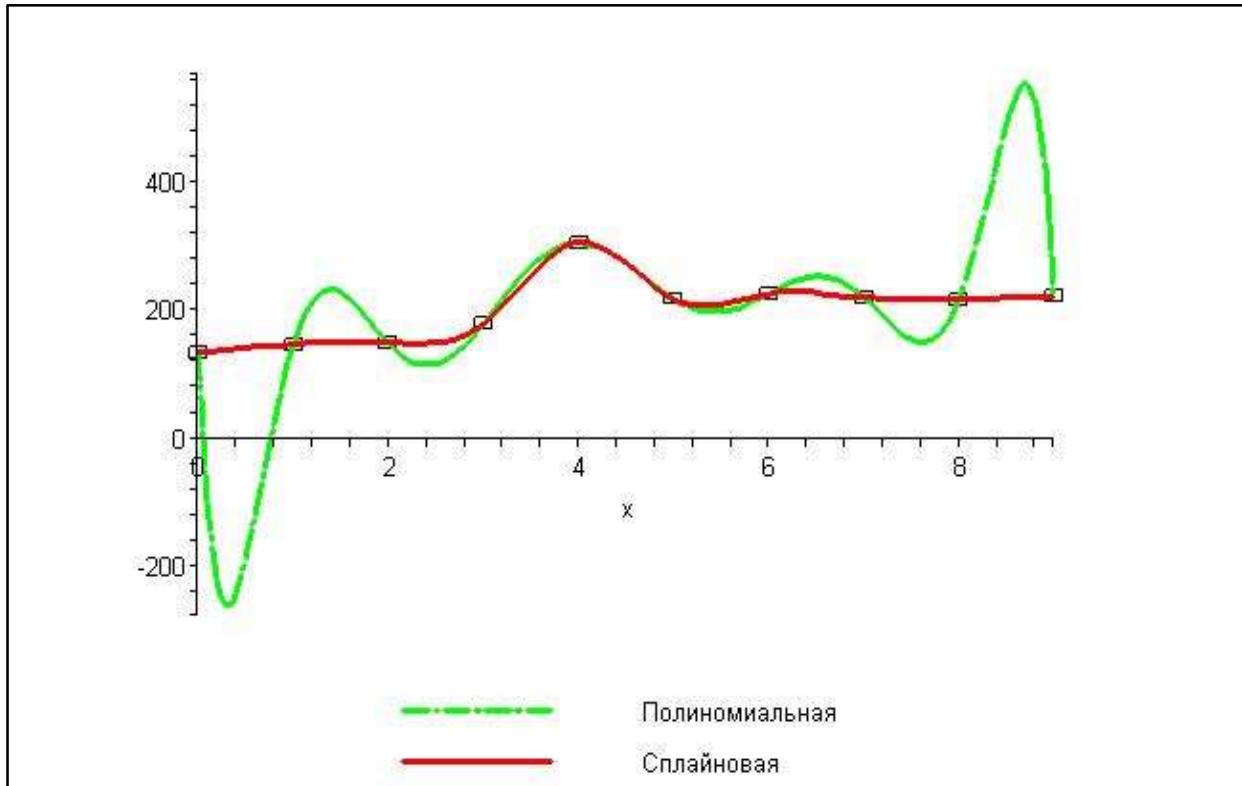
*Одиннадцатое свойство* - проблема математического моделирования потоков с неравномерными или некоторыми отсутствующими в эмпирических данных значениями, эффективно решается аппроксимацией «рваной» динамики сплайнами. Для сплайн-функций не возникают сложности при восстановления пропущенных или генерировании дополнительных значений. Для сплайн-моделей динамических потоков  $H$  и  $G$ , построенных на интервалах одной и той же «сетки» и являющихся частью некоторого «мегапотока», могут быть аддитивно представлены их суммы или наоборот – выделены части из общего потока, благодаря свойству аддитивности сплайнов:

$$SPL(H+G;X) = SPL(H;X) + SPL(G;X).$$

Сплайны широко известны и используются в науке, в математических исследованиях, технических приложениях, а теперь и при моделировании процессов в экономике. О сплайнах знали ещё во времена Леонарда Эйлера, а с 1949 г. теория сплайнов берёт своё начало как математическая теория (И.Дж. Шёнберг, А. Уитни [328]). Удачное сочетание аналитичности сплайнов, их одновременной непрерывности и адаптивности, гладкости и точности, внутренних оптимизационных свойств [7] определили для «новой эконометрики» сплайновый инструмент – полезный и эффективный при описании и исследовании динамических процессов и взаимосвязей между ними.

*Двенадцатое свойство* – замечательные свойства сплайнов дополнились в последнее время ещё одним. Этим свойством обладает кубический сплайн, проходящий по траектории с минимальной кривизной (в соответствии с нормой «минимальности кривизны») через множество «узловых» точек процесса, не генерируя при этом паразитные «складки» между этими точками. Известен «эффект Е.Е. Слуцкого-Д.О. Юла», когда исследования цикличности в динамических системах в экономике наталкивались на проблему так называемой «ложной цикличности» [222], [223], [112]. На рисунке 2.16 «видна внешняя репрезентативность сплайновой модели экономическому смыслу. Напротив, полиномиальная кривая не согласуется ни со сложившейся тенденцией, ни с экономическим содержанием примера, поскольку даже в отчётном периоде уходит в область отрицательных значений» [103, 133]. Выясняется, что сплайн строится с минимумом энергии на построение, объясняемым минимумом нормы по теореме Холлидея. Для описания и изучения динамики экономических потоков внутренние оптимизационные свойства сплайновых структур оказываются весьма интересными и важными, поскольку и в Природе наблюдается экономное и оптимальное движение потоков. С аналогии производных как скорости непрерывных изменений экономического поведения и производных физических архетипов начинаются

еконофизические приложения сплайнов.

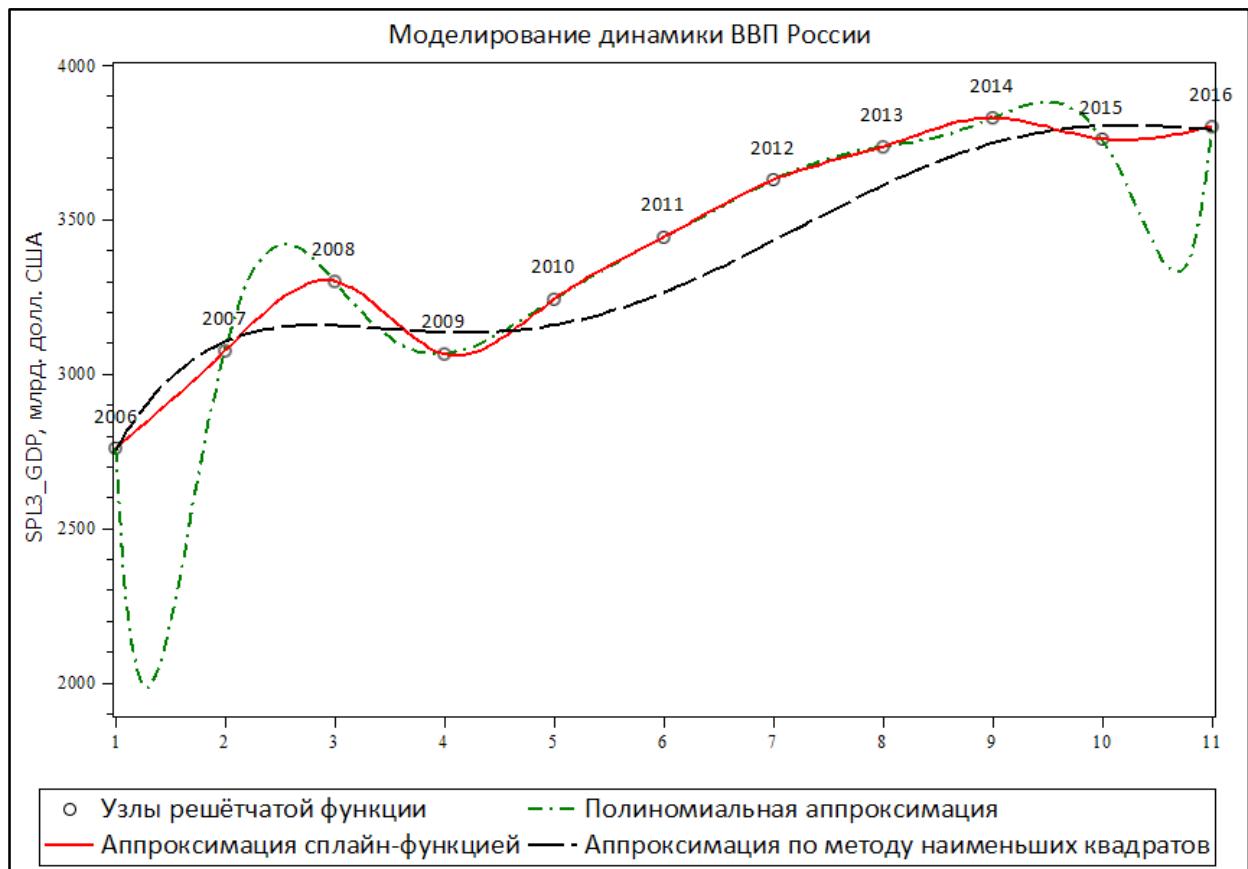


**Рисунок 2.16** – Результаты сравнения интерполяции, выполненной моделированием временного ряда полиномиальной 10-ой степени (*GREEN*) и кубической сплайновой (*RED*) функциями

Следует отметить, что сплайн-моделирование не даёт никаких преимуществ перед полиномиальной интерполяцией при аппроксимации хорошо управляемых математических функций, либо при подгонке кривой к «плотным» экспериментальным данным. Под «плотностью» данных понимаем большое количество точек данных в интервале, более чем на порядок больше, чем количество точек перегиба моделирующей кривой, что исключает наличие резких изменений во второй производной. Преимуществом сплайнов является присущая им гладкость при работе с разреженными данными.

Рис. 2.17 показывает неприемлемость для построения «истинной» модели только одного требования – совпадения модельного и реального процессов в узловых точках. Проведение «истинной» кривой точно между узлами сплайновым интерполирующим ансамблем обязано дополняться минимумом кривизны результирующей траектории (теорема Холлидея). В

противном случае при дифференцировании функции динамики запасов мы получим «ложные» скорости их изменения, или, что то же самое – «ложные» потоки. Первые два интерполятора проходят точно через узловые точки, но сплайн ведёт кривую с «минимальной кривизной». В интерполяционном поведении полинома высокой степени слева и справа наблюдаются выбросы «ложной цикличности». Сглаживающие процедуры метода наименьших квадратов утрачивают информацию о фактически достигнутых значениях процесса.



**Рисунок 2.17** – Сравнение аппроксимации сплайн-функциями (*RED*, сплошная линия) с полиномиальной (*GREEN*, пунктир) и аппроксимацией методом наименьших квадратов (*BLACK*) на примере динамики ВВП России.

«Ложные» потоки, как и «ложная цикличность» могут привести к необоснованным и неэффективным решениям по управлению экономическими процессами, например, к ошибкам при прогнозировании динамики товарных запасов на складах. Причинами возникновения «ложных» эффектов могут послужить неудачный выбор полиномиальной модели высокого порядка, неадекватной исследуемому процессу;

сглаживание исходной динамики «скользящими средними» и пр. [117].

Подход исправляет недостатки громоздкой мономодели классической эконометрики, образующей между «узлами» ложные «складки» или ложные циклы – проявления эффекта Е.Е. Слуцкого-Д.О. Юла. При увеличении степени аппроксимирующего полинома, модельная линия проходит через большее количество «узловых» точек «решётчатой» функции, увеличивая и значения коэффициента детерминации, однако этим неприемлемо усиливаются колебательные свойства внутри темпоральных участков между «узлами» процесса.

Сплайн-интерполирование в последние годы получает все более широкое признание. Сплайны, в отличие от полиномиальной интерполяции, например, выполняемой по формуле полиномиальной интерполяции Лагранжа, эффективны для анализа локальных временных участков ряда данных. Это приводит к выбору в пользу сплайн-интерполяции, когда вместо интерполяции длинных временных рядов полиномом высокого порядка, используется последовательность полиномов более низкого порядка для аналитического описания коротких сегментов ряда.

В исследовании динамики потоков важна точность и релевантность исследуемым процессам первой и второй производных интерполирующей функции. Сглаживание полиномом разреженных данных может привести к большим, нереалистичным изменениям в динамике производных. Интерполирование кубическим сплайном тех же данных демонстрирует гладкость моделирующей кривой.

Сплайны обладают и другими благоприятными свойствами, такими как хорошая сходимость, высокая точность аппроксимации производных и хорошая стабильность при наличии ошибок округления. Сплайны представляют собой золотую середину между аналитическим описанием и численными методами конечных разностей, которые разбивают область на наименьшие возможные интервалы. Философия сплайн-аппроксимации, породила численные методы конечных элементов.

## **2.4 Многоаспектная роль производных в моделировании и анализе потоков**

Уже при вовлечении сплайнов в состав новой исследовательской платформы – «новую эконометрику» – мы обращали внимание на особенности математических сплайн-аппроксимационных моделей экономического процесса, которые, кроме всего прочего, требуют, чтобы они были «аналитическими», написанными в символьной форме. Задание «в буквах» поведения экономического показателя позволит в символьном же виде работать с ними, с их модельными сплайнами, аналитически их складывать, вычитать, умножать, находить производные и интегралы экономического поведения, переводить всё это в фазовое пространство. Сплайн одновременно имеет графическую форму и положение на фазовой плоскости. Дифференцируемость сплайнов с явным аналитическим, количественным и графическим отображением производных позволяет обратиться к их физическим аналогам и экономической интерпретации. Аналитичность помогает чётко отделить динамические задачи экономики от привычных статических коллигаций. Наиболее важной характеристикой потоков – физических, информационных, транспортных и др., служит скорость. Многоаспектная роль производных в моделировании и анализе потоков проявляется в аналитическом описании скорости потоков.

Выбор функций для аналитического моделирования экономической динамики должен быть связан с возможностью аналитического выделения из неё и изучения потоков, скорости и ускорения потоков. Сформулируем основные требования, которые должны быть выдвинуты к искомому модельному конструкту:

В первую очередь, это непрерывность моделирующей функции, позволяющая преобразовать динамику состояний в экономических системах в потоки дифференцированием.

Во-вторых, это необходимость точного совпадения модельного и

реального процессов во всех узловых точках, гарантирующая сохранение реальной информации о последовательных изменениях состояний – о потоке.

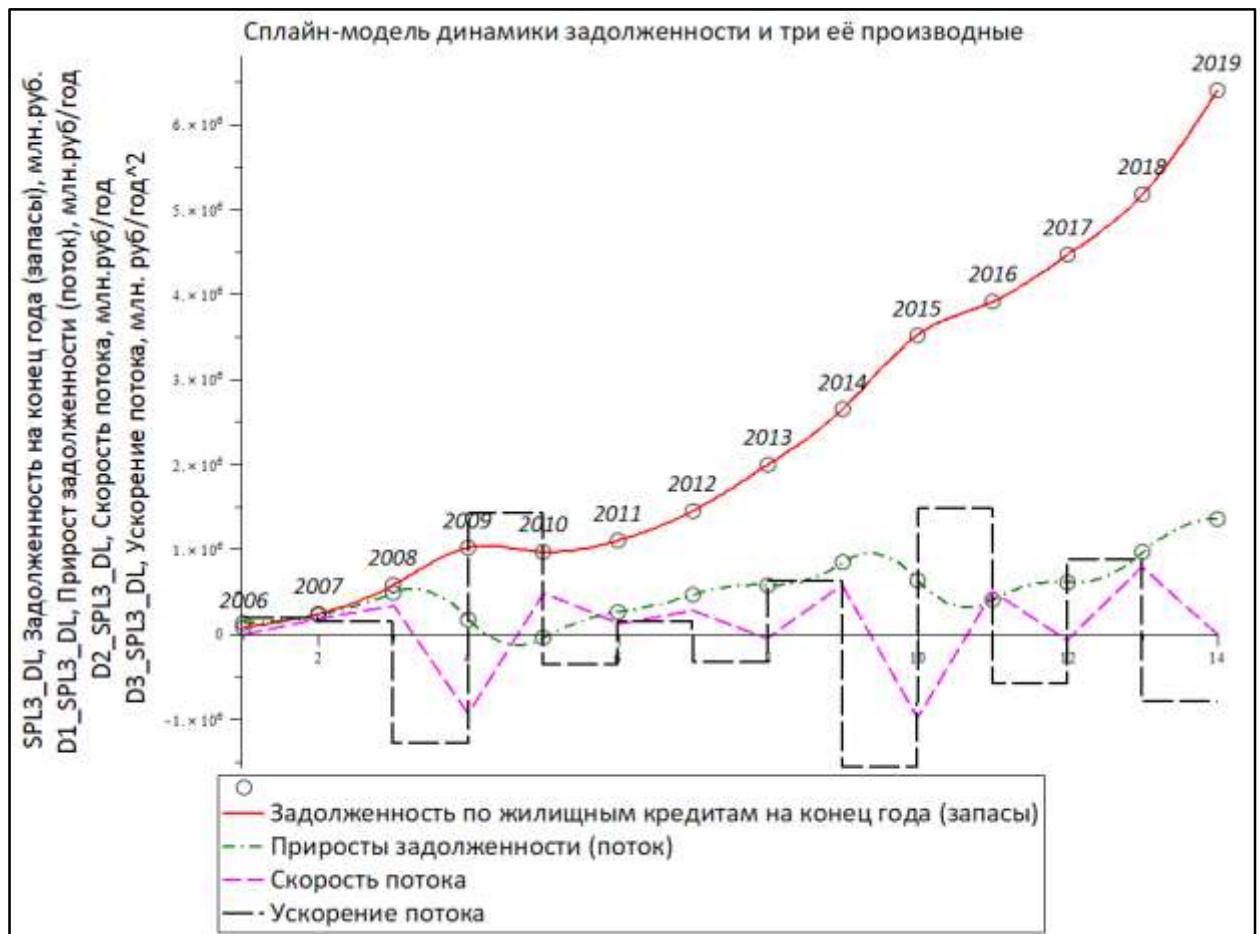
В третьих, это плавность интерполяционного поведения моделирующей функции между узловыми точками, позволяющая изучать потоки на временных интервалах переменной длины.

Перечисленные требования выполняются интерполированием динамики состояний кубическими сплайнами. Кубические сплайны отличаются своей гибкостью и плавностью интерполяционного поведения, а непрерывность функции позволяет обращаться к её производным. Наличие в его структуре производных представляется наиболее ценным достоинством сплайнов. Аналитика производных обогащает эконометрику новыми методами исследования, включая непрерывный математический анализ - дифференцирование, интегрирование, поиск экстремумов. Производные находят свою эффективность в фазовом анализе цикличности и периодичности потоков, анализе корреляций в колебаниях скорости роста, во взаимных преобразованиях запасов и потока, в изучении динамической конкуренции, при поиске экономических аналогов физического движения.

Как показывают результаты моделирования (рис. 2.18), «интерполирование кубическим сплайном сохраняет в модели информацию о состояниях показателя типа запас - задолженности по жилищным кредитам с абсолютной точностью во всех узловых точках. Следовательно, возможно преобразование динамики запасов в аналитическую модель потока с нулевой погрешностью.

В предлагаемом новом подходе эконометрическое моделирование динамики выполняется без ошибок аппроксимации в узловых точках или, иначе, без остатков. Сохранённые в модели динамики состояний реальные значения становятся информационным источником для построения релевантной реальному процессу модели изменений в экономической системе – модели потока. Дифференцированием из модели динамики состояний выделяются модели потока, скорости и ускорения потока» [131].

В системе компьютерной математики Maple «преобразование сплайн-модели запасов в поток проходит автоматически дифференцированием. Первая производная функции запасов по аналогии с физическим смыслом интерпретируется как мгновенная скорость – в нашем случае как мгновенная скорость изменения запасов или поток. По ломаной второй производной можно наблюдать изменения в мгновенной скорости потока. Ускорение потока описывает третья производная – на рисунке 2.18 наблюдаем его по ломаной кусочно-постоянных изменений» [131].



**Рисунок 2.18** – Преобразование сплайн-интерполяционной модели динамики запасов в модели потока, скорости и ускорения потока дифференцированием

При изучении динамических систем обнаруживается «ещё большая полезность производных при отображении взаимосвязи запасов и их потока в фазовом пространстве. Применением производных как функции динамических изменений запасов определяется их вклад в организацию фазовых портретов – нового инструмента экономического анализа непрерывных динамических изменений. В фазовом пространстве с помощью

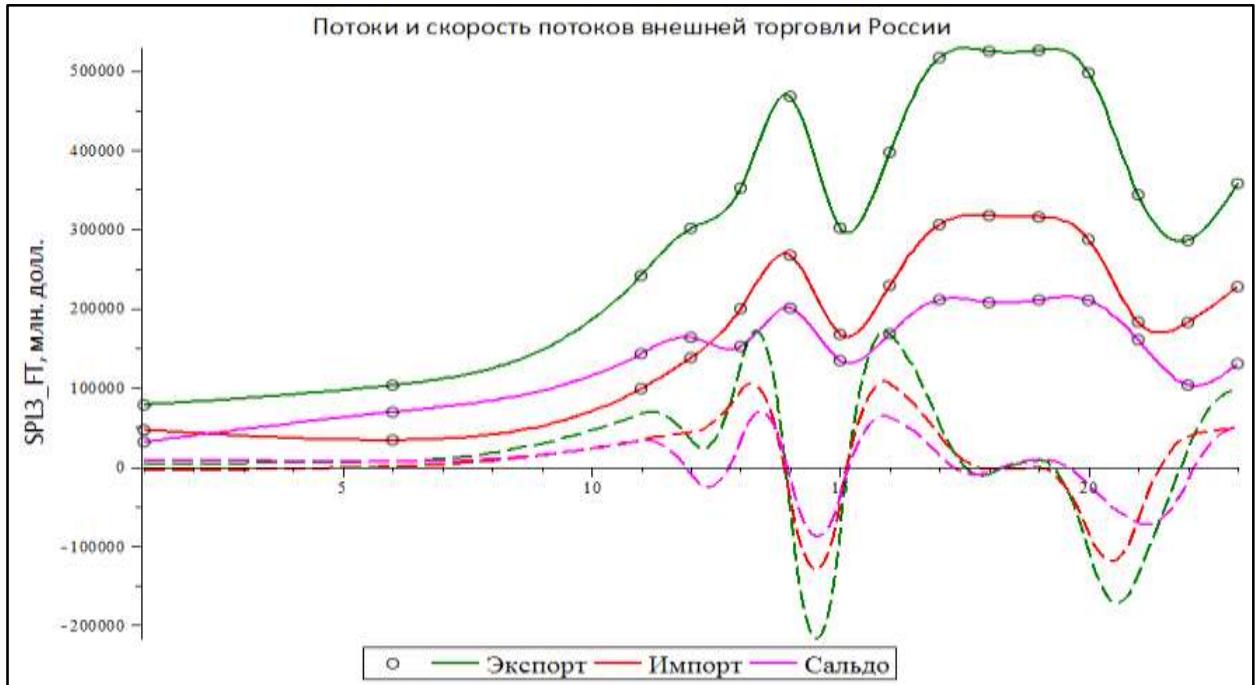
производных строятся фазовые портреты на плоскости вида  $OYY'$  или в трёхмерном измерении с осями  $OYY'T$ , что особенно полезно при анализе динамических потоков, цикличности изменения запасов, графического представления тенденций и взаимосвязей в экономике.

Следует обратить внимание, что производная второго порядка и интеграл явно привлечены в важную в теории сплайнов теорему Холлидея о минимальности кривизны кубического сплайна, ставшую эталоном его внутренней оптимальности» [93].

Надо признать, «выдающаяся роль производных в экономической динамике до сих пор не оценивалась вербальными экономистами. Это естественно, так как производные им откуда-то надо брать. Заметим, что роль производных простирается на взаимосвязь методов сплайн-моделирования и эконофизики. Если первая производная функции физического движения является величиной, прямо пропорциональной «импульсу». Произведение первой производной на массу в физике даёт «физический импульс» – аналогично определяем и меру экономического движения. В экономике первая производная являясь частью «экономического импульса» (произведение производной изменения цены или стоимости «экономической массы» на сами объёмы товаров, услуг, ресурсов) может стать инструментом исследования законов «экономического сохранения». Ускорение движения или вторая производная функции движения также находит своё применение в механике, технике и физических исследованиях. Ускорение, умноженное на массу, даёт нам «силу». В экономической физике и в экономике в целом всё ещё остаётся задачей будущего более широкое использование производных для исследования «экономических импульсов» и «экономических сил» [93].

Определяя переменную потока как изменение запаса за некоторый промежуток времени, построение непрерывных потоков становится возможным с привлечением дифференциального исчисления. Если переход к показателям потока в дискретных моделях выполняется расчётом приростов запаса, то в моделях с непрерывным временем поток определяется как

производная функции запаса [93].



**Рисунок 2.19 – Комбинированная сплайновая картина потоков российской внешней торговли в 1995-2017 гг. ( $SPL3\_FT$ , кубическое сплайн-приближение, сплошные линии).**

Параллельно с динамикой потоков на рисунке 2.19 демонстрируются их первые производные (скорость потоков). Первые производные (пунктир) показывают более наглядно аналитические тенденции потоков экспорта ( $DSPL3_E$  – GREEN), импорта ( $DSPL3_I$  – RED) и сальдо ( $DSPL3_S$  – MAGENTA), облегчая затем их прогнозирование. Кубическая сплайн-аппроксимация некритична к переменному шагу «решётки» и отсутствию некоторых значений в «решётчатой» функции.

Обозначим через  $F(t)$  непрерывную функцию потока, «тогда изменение этого потока на протяжении малого отрезка времени  $(t, t + \Delta t)$  можно определить как производную  $F'(t)\Delta t = F(t + \Delta t) - F(t)$ . Производная  $F'(t)$  при этом выражает интенсивность (скорость изменения) потока – другими словами, первая производная выражает прирост функции потока за малую единицу времени. По определению,  $F'(t)$  есть предел отношения прироста потока за малый отрезок времени к длительности этого отрезка при неограниченном уменьшении последней. На этом основании производная

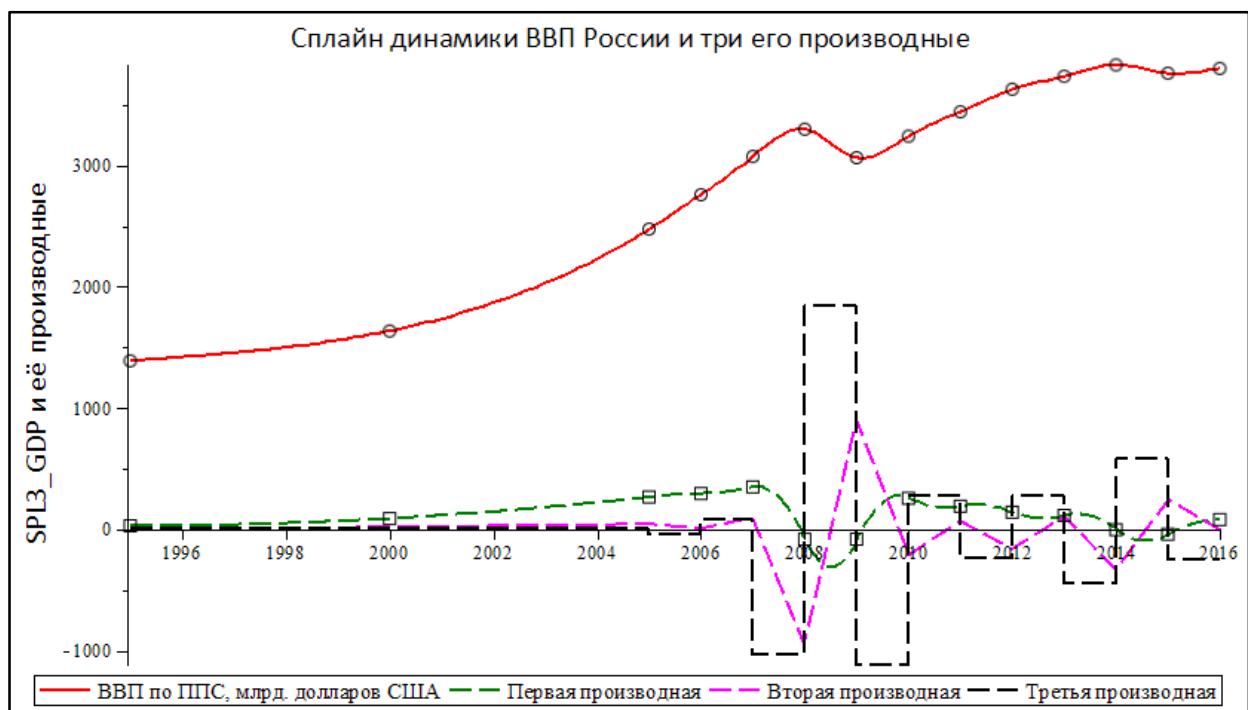
потока может именоваться мгновенной скоростью или интенсивностью потока.

Применительно к экономическим потокам выдающаяся роль производной обнаруживается механизмом преобразования «запасов» в экономические «потоки». Вспомним научную аксиому: поток – это первая разность или первая производная запаса. Пусть  $F$  – flow – поток,  $S$  – stock – запас, тогда:

$$F(t) = \Delta S(t) / \Delta t \text{ или } F(t) = dS(t) / dt = S' \gg [93].$$

Аналогию отношениям между переменной и её производной (или её разностью) по времени и отношения между запасом и потоком мы встречаем у [308]. В частности, там приводится пример, в котором производная изменения запаса капитала является потоком чистых инвестиций:

$$K'(t) = I(t) - D(t).$$



**Рисунок 2.20** – Аналитика сплайн-модели динамики ВВП по ППС

Подвижность современной мега- и макроэкономической динамики, как и частая смена «временных классов» внутри временных участков моделей экономического развития, обращает исследователей новым подходам, к парадигме «полиформности» и к современному профессиональному инструментарию. Успехи новых подходов при исследовании динамических

потоков так или иначе связаны с выдающейся ролью производных в экономике [93].

В изменениях первой производной (скорости изменения) функции экономического движения раньше и точнее обнаруживаются тенденции развития. Наглядная демонстрация богатства аналитических возможностей сплайна – непрерывность и дифференцируемость, возможности трансформации моделей экономического движения в траектории скорости и ускорения, экономических потоков и «импульсов». Система компьютерной математики работает со всеми сплайновыми отрезками единообразно, первоначально все операции в новой методологии выполняются аналитически [93]. Ниже показано последовательное аналитическое взятие трёх производных сплайна:

```
> SPL3_DL:=spline(datat,datay,t,3);
SPL3_DL := {  

    
$$\frac{331210543}{10864} t^3 - \frac{993631629}{10864} t^2 + \frac{1211004423}{5432} t - 84569 \quad t < 2$$
  

    
$$\frac{278434581}{10864} t^3 - \frac{676975857}{10864} t^2 + \frac{127764093}{776} t - \frac{31034370}{679} \quad t < 3$$
  

    
$$-\frac{2309408211}{10864} t^3 + \frac{22613609271}{10864} t^2 - \frac{34041529041}{5432} t + \frac{8671900683}{1358} \quad t < 4$$
  

    
$$\frac{2569634439}{10864} t^3 - \frac{35934902529}{10864} t^2 + \frac{83055494559}{5432} t - \frac{30360440517}{1358} \quad t < 5$$
  

    
$$-\frac{621675977}{10864} t^3 + \frac{11934753711}{10864} t^2 - \frac{36618646041}{5432} t + \frac{19503784733}{1358} \quad t < 6$$
  

    
$$\frac{177762013}{10864} t^3 - \frac{2455130109}{10864} t^2 + \frac{935857917}{776} t - \frac{297291571}{194} \quad t < 7$$
  

    
$$-\frac{230517163}{10864} t^3 + \frac{6118732587}{10864} t^2 - \frac{3351073431}{776} t + \frac{1101709191}{97} \quad t < 8$$
  

    
$$-\frac{195440225}{10864} t^3 + \frac{5276886075}{10864} t^2 - \frac{20090127969}{5432} t + \frac{6589502321}{679} \quad \text{otherwise}$$

```

```
> D1_SPL3_DL:=diff(SPL3_DL,t);
```

$$D1\_SPL3\_DL := \begin{cases} \frac{993631629}{10864} t^2 - \frac{993631629}{5432} t + \frac{1211004423}{5432} & t \leq 2 \\ \frac{835303743}{10864} t^2 - \frac{676975857}{5432} t + \frac{127764093}{776} & t \leq 3 \\ -\frac{6928224633}{10864} t^2 + \frac{22613609271}{5432} t - \frac{34041529041}{5432} & t \leq 4 \\ \frac{7708903317}{10864} t^2 - \frac{35934902529}{5432} t + \frac{83055494559}{5432} & t \leq 5 \\ -\frac{1865027931}{10864} t^2 + \frac{11934753711}{5432} t - \frac{36618646041}{5432} & t \leq 6 \\ \frac{533286039}{10864} t^2 - \frac{2455130109}{5432} t + \frac{935857917}{776} & t \leq 7 \\ -\frac{691551489}{10864} t^2 + \frac{6118732587}{5432} t - \frac{3351073431}{776} & t \leq 8 \\ -\frac{586320675}{10864} t^2 + \frac{5276886075}{5432} t - \frac{20090127969}{5432} & 8 < t \end{cases}$$

> D2\_SPL3\_DL:=diff(D1\_SPL3\_DL,t);

$$D2\_SPL3\_DL := \begin{cases} \frac{993631629}{5432} t - \frac{993631629}{5432} & t \leq 2 \\ \frac{835303743}{5432} t - \frac{676975857}{5432} & t \leq 3 \\ -\frac{6928224633}{5432} t + \frac{22613609271}{5432} & t \leq 4 \\ \frac{7708903317}{5432} t - \frac{35934902529}{5432} & t \leq 5 \\ -\frac{1865027931}{5432} t + \frac{11934753711}{5432} & t \leq 6 \\ \frac{533286039}{5432} t - \frac{2455130109}{5432} & t \leq 7 \\ -\frac{691551489}{5432} t + \frac{6118732587}{5432} & t \leq 8 \\ -\frac{586320675}{5432} t + \frac{5276886075}{5432} & 8 < t \end{cases}$$

> D3\_SPL3\_DL:=diff(D2\_SPL3\_DL,t);

$\frac{993631629}{5432}$	$t < 2$
$undefined$	$t = 2$
$\frac{835303743}{5432}$	$t < 3$
$undefined$	$t = 3$
$\frac{6928224633}{5432}$	$t < 4$
$undefined$	$t = 4$
$\frac{7708903317}{5432}$	$t < 5$
$undefined$	$t = 5$
$\frac{1865027931}{5432}$	$t < 6$
$undefined$	$t = 6$
$\frac{533286039}{5432}$	$t < 7$
$undefined$	$t = 7$
$\frac{691551489}{5432}$	$t < 8$
$undefined$	$t = 8$
$\frac{586320675}{5432}$	$8 < t$

## 2.5 Классификация энциклопедических возможностей системы компьютерной математики Maple 17, необходимых для работы с экономическими потоками

Выполненный обзор и классификация способов мониторинга, а также предложенные методы моделирования, анализа и визуализации динамических потоков в экономике требуют выбора точных и эффективных рабочих инструментов исследования.

В системе удобны ввод, графический вывод двумерной и трёхмерной цветной графики, широки возможности числовых алгоритмов и вычислений в простых дробях без погрешностей округлений.

Система моделирует, анализирует и визуализирует динамику экономических «количество» в экономике, взаимно преобразуя показатели

разного типа (например, дифференцированием преобразует модель динамики запасов в потоки, и наоборот, интегрированием преобразует модель динамики потока в запасы) [5], [6], [38], [77], [78], [160], [175], [182], [204].

Следует указать и возможные опасности в обработке данных. Например, при исследовании динамики показателей типа «запас» или «поток», представленных моментными и интервальными рядами данных, следует помнить о различиях при их преобразованиях. Известно, что на точность результатов при исследовании динамики может «сильно влиять так называемое «сжатие» данных. Временные ряды экономических показателей состоят из дискретных дневных, недельных, месячных, квартальных и т.д. значений или за определённые периоды времени – (потоки) или на определённый момент времени (запасы). Переход к более крупным показателям времени все значения показателя «сжимаются» в одно значение» [134]. При «сжатии» данных показателя типа «запас» берут среднее по нескольким дискретным значениям или последнее по времени значение дискретного набора данных. При укрупнении временного интервала для показателей типа «поток» набор «сжимаемых» данных заменяется их суммой. При надобности сравнения моделей, построенных по различающимся по продолжительности временным интервалам для потоков, или, по различающимся границам временных фрагментов, требуется приведение модели к единому временному параметру. Привлекаемый к исследованию инструментарий должен быть некритичным к вариативности временных интервалов строящихся динамических моделей.

В системе компьютерной математики реализована возможность аппроксимации «кусочными» многочленами на базе сплайнов, что позволяет исследовать «периодичность и структурную вариативность «временного класса» динамических потоков, придающие им «кусочный», полиформный характер» [134].

Точное совпадение процесса и модели во всех «узловых точках», обращение к сплайн-функциям, предложение с помощью

дифференцированием и интегрированием выполнять взаимное преобразование запасов и потоков, погружение динамических потоков в фазовое пространство с построением фазовых траекторий, необходимость аналитических преобразований и визуализации результатов, достижение нулевой погрешности выполнением расчётов в рациональных дробях – всё это потребовало «вооружения» новой исследовательской парадигмы системой компьютерной обработки данных *Maple*.

*Система компьютерной математики Maple 17.* Система *Maple* является одной из самых эффективных программ с интерфейсом, который позволяет достаточно легко анализировать, исследовать, визуализировать и находить математические решения экономических задач. Это одна из последних версий флагманского пакета технических вычислений, в которой реализован полнофункциональный графический пользовательский интерфейс.

*Автоматизм работы системы.* Практическое применение находят возможности внедрения и программирования компонентов графического интерфейса пользователя, а также разработки собственных решений с использованием языка программирования *Maple*. Система содержит множество встроенных функций, которые позволяют быстро решать проблемы без необходимости знать какие-либо команды. *Maple* предлагает набор помощников в виде графических пользовательских интерфейсов для выполнения многих задач без необходимости использования какого-либо синтаксиса. Экономист не всегда владеет методами и способами математического описания и решения экономических задач или конкретной поставленной им задачи – диалоговый режим работы и «дружелюбный» интерфейс *Maple 17* находит как сами решения, так и предлагает его графическую интерпретацию с аналитическими описаниями, численными выкладками и пр.

*Аналитичность компьютерного инструментария.* В полной мере стоит оценить концептуальное удобство программного инструментария –

система *Maple* 17 сначала строит аналитический каркас или базис, она работает с аналитическими преобразованиями во всех операторах математики, по мере необходимости отображая графические построения и численные расчёты. Аналитические преобразования всеобъемлющи, это свойство, являясь основой всех остальных преобразований и вычислений, приносит нам возможность таких аналитических операций, как дифференцирование, интегрирование, поиск экстремумов и др. Само свойство минимальности нормы сплайна, базирующееся на теореме Холлидея, явно использует интеграл от квадрата разности, в которую входит вторая производная сплайна.

*Вычисления с рациональными числами (в «простых дробях») в «новой эконометрике» без ошибок округления.* При исследовании динамических потоков важное значение приобретает соблюдение точности вычислений – это условие продиктовано и предлагаемой парадигмой исследования, отказывающейся от всякого ухудшения эмпирического сигнала, различных сглаживаний и усреднений. Необходимость исследования локальных ускорений или замедлений потока также требует точности в результатах математической обработки данных. В *Maple* реализованы широкие возможности символьных и численных вычислений. Символьные вычисления преобразованием выражений в более простые и понятные формы облегчают процесс моделирования экономических процессов и взаимосвязей между ними. Численные вычисления над выражениями, содержащими точные числа, могут заменяться приближениями с использованием чисел с плавающей запятой. Такой подход к вычислениям обычно включают некоторую ошибку, которая может накапливаться, искажая конечный результат - понимание и контроль ошибки вычислений становится такой же важной задачей, как и получение конечного результата.

Главной и важной для нашего исследования особенность ю системы является возможность работать с простыми дробями (рациональными числами). *Maple* по умолчанию вычисляет выражения, содержащие точные

величины, получая при этом точные результаты, а не числовые приближения, свойственные некоторым другим программам.

*Особенности выбора и работы современных инструментов.* Системы компьютерной математики играют все более важную роль в научных исследованиях, что уже представляется невозможным получение серьёзных результатов во многих сферах познания без их использования. Внедрению методов компьютерной обработки данных способствует продолжающийся экспоненциальный рост доступа к мощным вычислительным технологиям. Необходимо отметить, что многообразие методологических подходов и сложность некоторых понятий междисциплинарных исследований, с одной стороны, сдерживает экономистов в широком использовании инструментальных методов, в то же время они позволяют получать интересные результаты количественной обработки данных на персональных компьютерах.

Среди преимуществ использованной в исследовании программы Maple особо можно выделить возможность работы в режиме документа и в режиме рабочего листа – «*Worksheet*». Используя любой режим, мы можем создавать высококачественные интерактивные математические документы. Каждый режим предлагает одни и те же возможности, единственное отличие – это значения «по умолчанию» при вводе данных каждого режима.

При использовании контекстно-зависимых операций из контекстной панели в режиме документа, команда, используемая для решения некоторого выражения остаётся скрытой. Это позволяет сосредоточиться на решении проблемы вместо команд, используемых для ее решения.

Режим рабочего листа предназначен для интерактивного использования вычислительных ресурсов программы с помощью команд *Maple* – они предлагают расширенные функциональные возможности и настраиваемые элементы управления, недоступные с помощью контекстной панели или других методов без необходимости знать синтаксис языка программирования. Режим листа использует приглашение *Maple* в качестве

области ввода по умолчанию. Приглашение ввода *Maple* представляет собой красную угловую скобку, при использовании контекстно-зависимых операций ввода в режиме листа отображаются все команды.

В режиме рабочего листа ввод вводится в командной строке *Maple input()*. По умолчанию для ввода используется режим *Math (2-D Math)*.

Набор входных и выходных данных *Maple* называется группой выполнения. На листе точка с запятой в качестве оператора отображения результата выполнения команды является необязательным.

Программа содержит большой набор команд и мощный язык программирования. Большинство команд *Maple* написаны с использованием языка программирования *Maple*. Команды *Maple* содержатся в библиотеке *Maple*. Существует два типа команд: команды верхнего уровня и команды пакета. Команды верхнего уровня включают в себя многие из наиболее часто используемых команд *Maple*, а также обширный список математических функций. Специализированные пакеты содержат связанные специализированные команды в таких областях, как исчисление, линейная алгебра, векторное исчисление и генерация кода и др.

Дифференцируемая функция может быть задана любым именем, которое ей присвоено для удобства пользователя. Это очень удобно при работе с большими массивами данных, когда вместо повторного ввода выражения каждый раз, когда это необходимо, исследователь может присвоить ему имя, а затем быстро обратиться к выражению, используя имя. Например, чтобы найти первую производную сплайн-функции, аппроксимирующей динамику денежной массы, в качестве дифференцируемой функции пишем присвоенное ей ранее имя «**SPL1\_MS**» (**SPL1** - сплайн первого порядка, **MS** - money supply):

```
> D1_SPL1_MS:=diff( (SPL1_MS) ,t) ;
```

	1678	$t < 2$
	<i>undefined</i>	$t = 2$
	2939	$t < 3$
	<i>undefined</i>	$t = 3$
	3898	$t < 4$
	<i>undefined</i>	$t = 4$
	107	$t < 5$
	<i>undefined</i>	$t = 5$
	2292	$t < 6$
	<i>undefined</i>	$t = 6$
	4744	$t < 7$
D1_SPL1_MS :=	<i>undefined</i>	$t = 7$
	4193	$t < 8$
	<i>undefined</i>	$t = 8$
	2960	$t < 9$
	<i>undefined</i>	$t = 9$
	3991	$t < 10$
	<i>undefined</i>	$t = 10$
	460	$t < 11$
	<i>undefined</i>	$t = 11$
	3564	$t < 12$
	<i>undefined</i>	$t = 12$
	3238	$12 < t$

Для вычисления интерполяционных значений первой потока денежной массы (первой производной функции запасов денежной массы) используем функцию «**seq**». Завершение команды точкой с запятой вызывает отображение результатов выполнения:

```
> dataD1_SPL3_MS:=[seq(D1_SPL3_MS,
t=[1.1,1.2,1.3,1.4,1.5,1.6,1.7,1.8,1.9])];
dataD1_SPL3_MS:=[1495.401, 1512.343, 1540.580, 1580.112,
1630.938, 1693.060, 1766.476, 1851.187, 1947.193]
```

Чтобы подавить вывод, введите двоеточие (:) в конце ввода. При этом команда выполняется, но результат выполнения остаётся скрытым:

```
dataD1_SPL3_MS:=[seq(D1_SPL3_MS,
t=[1.1,1.2,1.3,1.4,1.5,1.6,1.7,1.8,1.9]):
```

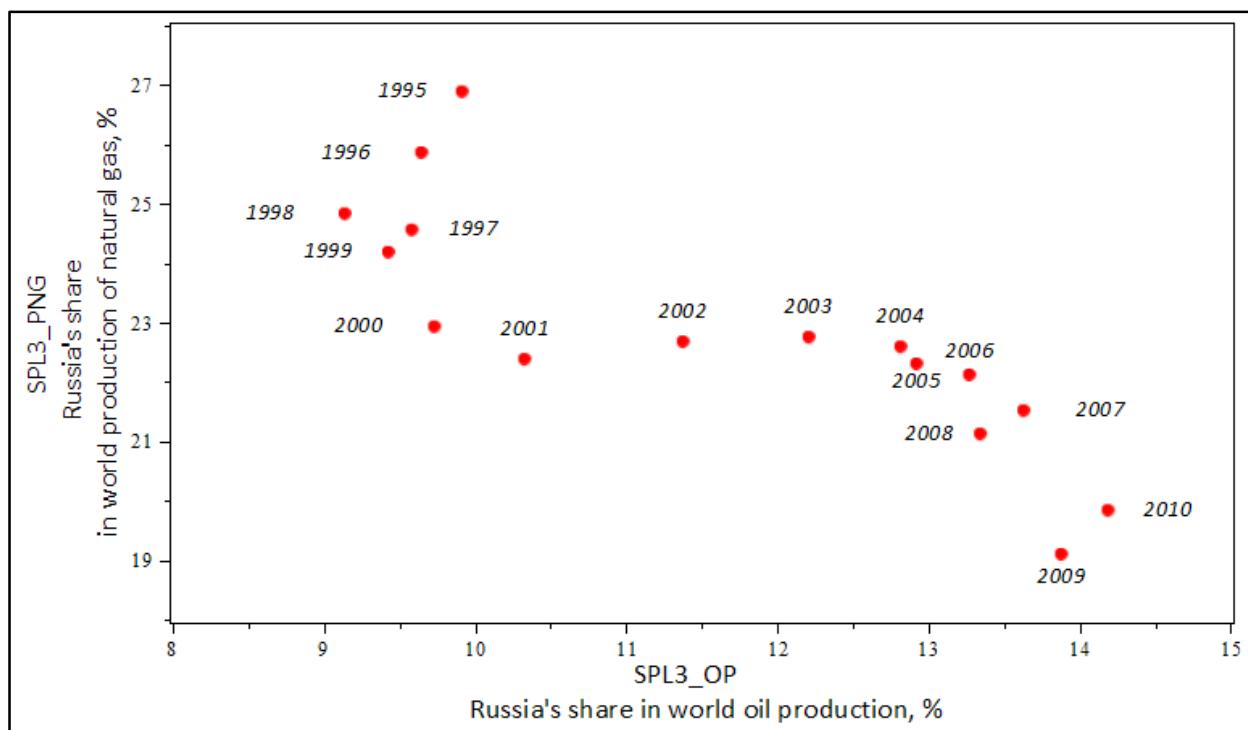
Значительно облегчает работу в программе наличие контекстной панели – набора инструментов и операций, соответствующих определенному типу данных и способу их обработки в данный момент времени. Контекстная

панель изменяется в соответствии с типом выражения, таблицей или областью рабочего листа, с которыми пользователь в данное время работает.

## ГЛАВА 3. СПЛАЙН-МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ СТРУКТУРНО-ВАРИАТИВНЫХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ МЕЖДУ ПОТОКАМИ

### 3.1 Эффективность перехода от сравнения дискретных данных в отдельных точках к сравнению отрезков функций применительно к исследованию взаимосвязей между потоками

При моделировании динамики состояний или последовательных изменений следует выбрать, должно ли время проходить в дискретных интервалах или как непрерывный поток? Дискретно-временные модели предполагают, что существует интервал времени – один период – в течение которого значения всех переменных остаются неизменными. Когда период заканчивается, все переменные могут перейти к другим значениям для следующего периода, но останутся неизменными в течение этого периода. Графически последовательные изменения переменной в модели с дискретным временем выглядят как ступенчатая функция.

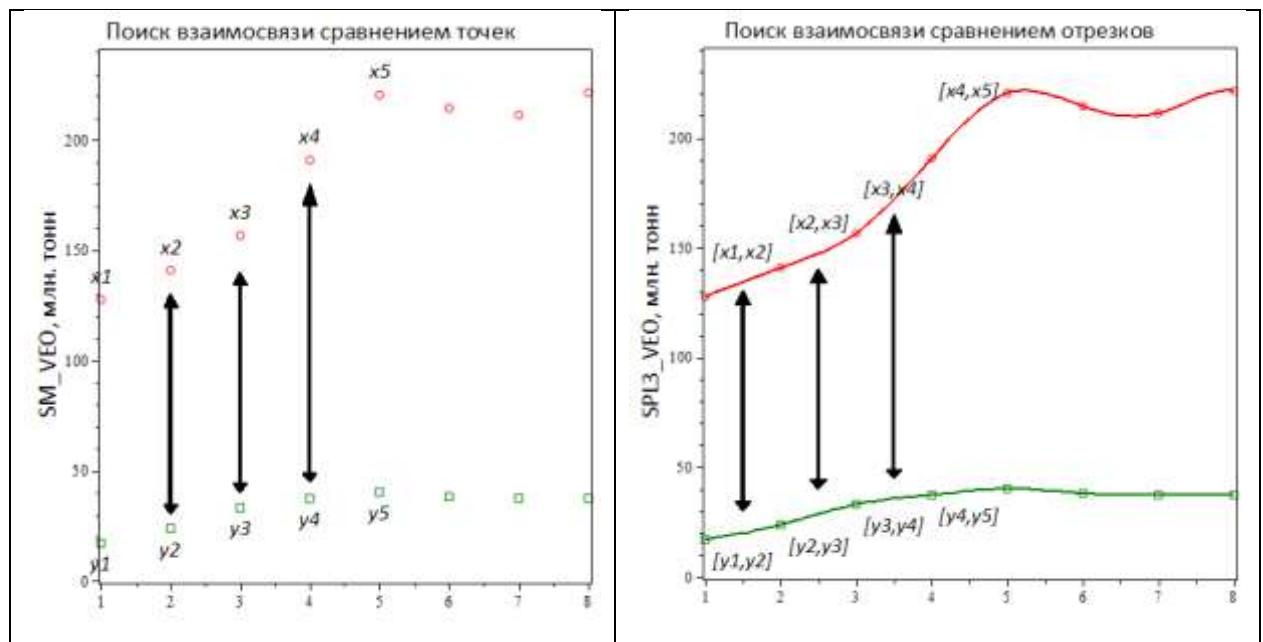


**Рисунок 3.1** – «Решётчатая функция», представляющая взаимную зависимость между долей России в мировой добыче нефти и природного газа в 1995-2010 годах. Система компьютерной математики *MAPLE 17*

Сплайн-функция становится эффективным инструментом «кусочно-непрерывного» представления динамики, что позволяет при исследовании взаимосвязей сравнивать отрезки функции. Кривая связи между процессами

может быть представлена сплайн-параметрической кривой, каждая точка которой показывает состояние системы в конкретные моменты времени, а динамические изменения системы описываются непрерывной фазовой траекторией.

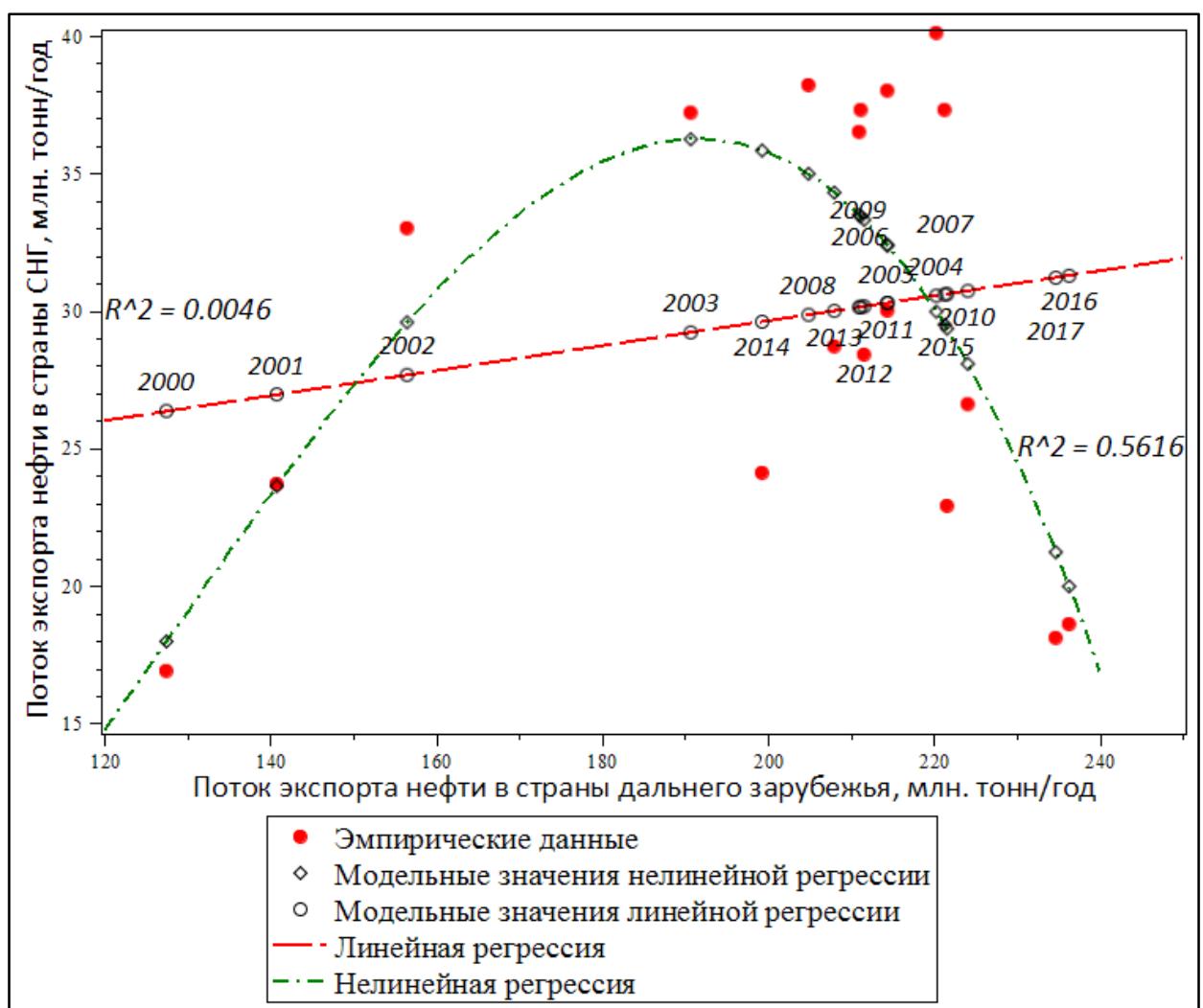
При возникновении надобности исследования взаимосвязей, классическая эконометрика строит модели связи, утрачивая временную последовательность изменений в поведении процессов. Невозможно увидеть, как процессы переходят из одного состояния в другое, полученная линия регрессии есть отображение изменения среднего значения результативного признака, она показывает усреднённую реакцию процесса, обусловленного изменением ранжированных значений факторного признака. Последовательные модельные значения, лежащие на полученной линии регрессии, не выстраиваются в хронологическом порядке. Тем самым, уже на концептуальном уровне метод наименьших квадратов не позволяет увидеть последовательную эволюцию связей, невозможно выявить темпоральные особенности взаимосвязей между скоростью или ускорением экономического движения.



**Рисунок 3.2** – Визуализация различий в методах поиска взаимосвязи сравнением дискретных состояний процесса (точек) и сравнением последовательных непрерывных изменений (отрезков).

Эффективной возможностью эволюцию связи с течением времени

становится переход от сравнения точек к сравнению отрезков функций, а применительно к экономическим «количество» – преобразование дискретных данных о состояниях (запасах) или изменениях запасов в непрерывные динамические потоки. Фактор времени становится ключевым при сравнении способов исследования дискретных состояний – императивов классической эконометрики и «тонких» методов исследования экономической эволюции в «новой эконометрике». М. Мерло-Понти [245] сравнивал время с потоком, но предостерегал от того, чтобы сводить его к последовательности событий. В связи с исследованиями темпоральности можно вспомнить и взгляды Э. Гуссерля [15], подчёркивавшего, что время – «это свойство, присущее сознанию. Поток сознания всегда упорядочен во времени».



**Рисунок 3.3** – Процесс подбора моделей взаимосвязи между потоками экспорта.

На рисунке 3.3 очевидно обнаруживаются недостатки методов

сравнения наборов состояний (точек) процессов, взаимосвязь между которыми обобщённо представляется кривой регрессии. Во-первых, сглаживается полезная информация о реальных состояниях исследуемых процессов. Во-вторых, сглаживание реального «рельефа» в динамике процессов не позволяет выявлять точки и интервалы переключения регрессии при структурно-вариативной связи. В-третьих, нет чёткого понимания о качестве модели регрессии. В-четвёртых, в моделях регрессии нарушается темпоральная последовательность развития процессов. В-пятых, сравнение точек процессов не даёт возможности выявлять динамические характеристики потоков – скорость, ускорение, экономический импульс, экономическую силу, энергию, мощность и другие.

Экономическая эволюция имеет временное измерение, простирается во времени, сами экономические перемены тесно связаны с течением времени. Динамические изменения запасов и потоков в хозяйственной системе, процессы накопления и изменения экономических активов должны содержать в их описании временную координату. При абстрагировании от уникальной роли времени в экономическом движении невозможно исследовать глубокие изменения в причинно-следственных связях глобализующейся сетевой экономики. Одной из важных экономических задач является «построение моделей структурирования времени в экономике, рациональных способов координации реальных и денежно-финансовых потоков, ритмов взаимодействия производственно-технологических и институциональных систем, методов организации и распределения ресурсов национального времени» [19].

Переход «от сравнения точек к сравнению отрезков структурно-переменных функций, с хорошей точностью описывающих исходную турбулентную статистику» [105], становится эффективным при поиске экономических закономерностей. Высокоточное восстановление непрерывной функции по рядам таблично заданных значений позволяет исследователю сохранить в полученной модели динамики особенности

temporального развития, а также наблюдать воздействия на него «событийных» составляющих динамики.

Применительно к экономическим потокам переход от сравнения дискретных данных к сравнению отрезков функций требует строить модели исследуемой динамики с непрерывным временем. Это даёт ряд преимуществ предлагаемой методологии сплайн-моделирования и анализа потоков перед методами классической эконометрики:

Во-первых, становится более эффективным преобразование данных типа «запас» в данные типа «поток» в моделях с непрерывным временем. Если в дискретных моделях для подобного преобразования необходимо было рассчитывать абсолютные разности, то при аппроксимации динамики состояний «запасов» непрерывной функцией переход к потокам возможен дифференцированием. При необходимости возможен и обратный переход к запасам – интегрированием функции потока и, если необходимо, табулированием. Если исходные данные представлены показателем типа «поток», то дифференцированием функций динамики получим модели мгновенной скорости потока, это в физической экономике называется «интенсивностью» [246].

Во-вторых, аппроксимация непрерывными функциями позволяет с помощью производных переходить от сравнения абсолютных значений процесса к эффективному сравнению относительных изменений – скорости и ускорения экономических показателей. В экономике встречаются случаи, когда взаимное воздействие проявляется в изменениях скорости, тогда ускорение развития одного процесса приводит к замедлению развития другого.

В-третьих, исследование структурно-вариативных экономических потоков требует поиска точек начала и продолжительности структурных изменений. Сравнение отрезков функций позволяет исследователю более адекватно оценить последовательную эволюцию взаимосвязи между процессами.

В-четвёртых, сравнение отрезков функций, аппроксимирующих с высокой точностью исследуемые процессы, позволяет исследовать аномалии в изменении данных. Это может быть полезным при анализе воздействия «событийных составляющих» на динамику экономических потоков.

В-пятых, сравнение отрезков функций даёт нам возможность исследовать непрерывные фазовые траектории потоков. Методами фазового анализа можно одновременно исследовать особенности последовательной эволюции связи по двум параметрам – изменению показателя и скорости его изменения.

В-шестых, сравнением отрезков функций можно искать взаимосвязи в интерполяционном поведении потоков. Переход к сравнению отрезков становится эффективным средством ослабления ограниченности регрессии при работе с рядами данных различной длины, рядами с неравномерным расположением или малым количеством узловых точек [130].

Очевидно, классические методы сглаживания динамики дискретных состояний не могут построить «наилучшую модель» экономического потока по наблюдениям. Напротив, аппроксимация дискретных данных непрерывными функциями с заданной степенью гладкости автоматически определяет значение коэффициента детерминации, равное единице, что разрушает предпосылки классической эконометрики о вероятностной природе данных.

При исследовании экономических потоков важно сохранить упорядоченность следования во времени эмпирических данных, что может быть нарушено, например, при регрессионных построениях. Свойственное человеческому сознанию восприятие времени, как непрерывного потока, находит свое эффективное воплощение в моделях «экономических потоков» с непрерывным временем. Темпоральные характеристики потоков, порождённые их особенностями «движения, – переходы из одного состояния в другое, продолжительность тех или иных состояний, замедления и ускорения потока, временные лаги в отклике процесса на колебания факторов

и др» [105].

Важность хронометрирования в динамической экономике потоков, указание времени каждого отсчёта, особенности хроноскопии на фазовых картинах в «новой эконометрике» требуют специального рассмотрения. В переводе с греческого «хроноскопия» означает «смотреть» (*130hromos* – время + *skopeo* – смотреть, наблюдать). Хроноскопия тенденций, циклов, точек переключения регрессии должна стать необходимой и неотъемлемой частью анализа экономического движения на примере потоков – цикличности, сезонности, вариативности структуры, сохраняя временные метки на фазовых траекториях и параметрических картинах взаимосвязи.

Без учёта фактора времени трудно научно описывать особенности экономического развития, представляющегося эволюционным, привязывать его к астрономическим датам свершения событий и явлений. Особенную важность время приобретает при исследовании экономических потоков. Понимание времени приводит исследователя к его сравнению с непрерывным потоком, отличным от дискретной последовательности событий. Предлагаемая парадигма «новой эконометрики» уводит от упрощенных подходов при классическом описании экономического развития, когда модели исследуемых процессов часто утрачивают темпоральный параметр. Модели с непрерывным временем становятся инструментом более «тонкого» познания динамики хозяйственных процессов. Поиск новой экономической парадигмы приводит к необходимости ставить в центр исследований представление о феномене времени.

В современной экономической науке окончательно сформировалось представление о двух классах моделей, репрезентативных экономическим процессам, относительно функции времени, которые в своих работах А.Е. Алтутин и М.В. Семухин [9] предлагают называть «дискретными» и «непрерывными». Аналогично в экономике называются и потоки – дискретные и непрерывные. В работе А.Г. Гранберга [64] также вводятся понятия «дискретное время» и «непрерывное время». При построении

динамических моделей, необходимо решить, должно ли время представляться дискретно, шагами или непрерывным потоком. Модели с дискретным временем предполагают, что существует интервал времени – один период – в течение которого значения всех переменных остаются неизменными. Когда период заканчивается, переменные могут переходить к другим значениям для следующего периода, там они остаются неизменными в течение того периода. Графически изменения переменной в модели с дискретным временем выглядят как ступенчатая функция. В моделях с непрерывным временем время течёт непрерывно, и переменные могут изменяться от одних значений к другим в любой момент, что хорошо позиционируется гладкой линией (рис. 3.27).

Несмотря на то, что время в реальных процессах течёт непрерывно, можно привести примеры использования дискретного времени при описании процессов реальной экономики. Например, цены на золото или курсы валют фиксируются несколько раз в день, а банки подсчитывают остатки на депозитных счетах один раз в конце рабочего дня. Более того, все макроэкономические данные публикуются только через дискретные промежутки времени, такие как день, месяц, квартал или год, даже когда базовые переменные движутся непрерывно. В этих случаях единым месячным значением, присвоенным переменной, может быть её среднее значение в месяце (как в случае обменных курсов валют) или значение переменной фиксируется в конкретный момент времени (как в случае оценок уровня безработицы или индекса потребительских цен). Хотя эмпирические модели динамики почти всегда дискретны из-за дискретности статистических данных, теоретические модели потоков более эффективно исследовать в непрерывном времени.

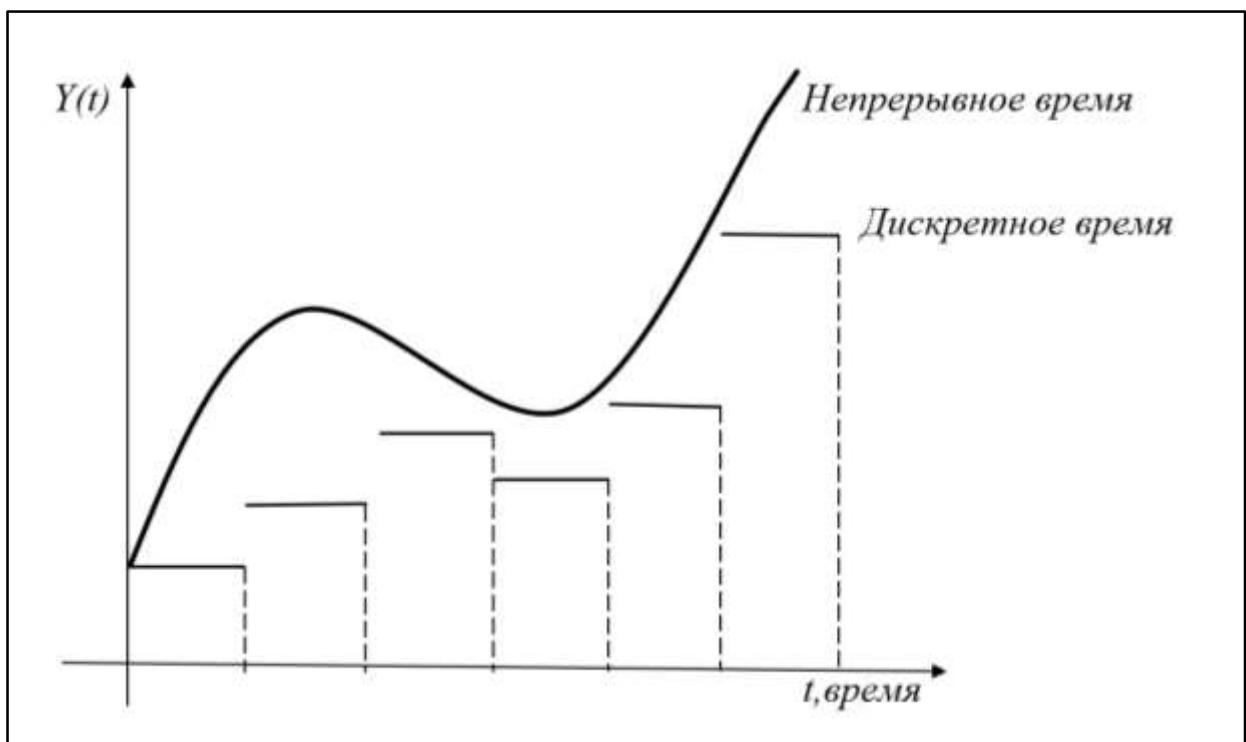
Для сохранения точности получаемых результатов привлекаем в анализ математические методы и средства инструментальной обработки данных, избегающие сглаживающие процедуры, искажающие «тонкий» состав эмпирического сигнала, не приводящие к «выполашиванию» картины

непрерывных и последовательных динамических изменений, к устраниению экстремальных точек или «выбросов» реального экономического потока.

Обычно экономические показатели, такие как темпы роста, темпы инфляции и другие темпы изменений, с течением времени воспринимаются и фиксируются в дискретных терминах от периода к периоду. Эмпирически это естественный способ описания экономического роста или инфляции, так как макроэкономические данные публикуются для дискретных периодов. Если рассчитывать дискретно скорость роста производства некоторой продукции у в текущем году  $t$  относительно предшествующего года ( $t - 1$ ):

$$g_y = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = \frac{\Delta y}{y_{t-1}},$$

где  $\Delta y$  определяется как изменение  $y$  из года в год.



**Рисунок 3.4 – Непрерывное и дискретное время**

Такие дискретные расчёты роста могут быть справедливы для случаев, когда поток (скорость роста) производства продукции постоянен в течение периода расчёта (года, например), в следующем периоде он может перейти на другой уровень.

Эмпирическая база экономических исследований с доступными

данными чаще всего ограничена дискретными единицами времени. При построении моделей динамики естественно представление переменных как непрерывно движущихся во времени. Это не относится к показателям, изменяющимся от одного уровня к другому, когда заканчивается один конечный период и начинается следующий. Непрерывное время интуитивно «приятно», «проходит гладко». Они имеет дело с такими переменными, как потоки доходов и цены, способные изменяться непрерывно и плавно, с ними удобно двигаться через каждый день, неделю, месяц, квартал и год. Аналитически непрерывное моделирование позволяет рассматривать переменные как непрерывные функции времени  $t$ , а это вовлекает в исследование потоков методы интерполяции и дифференциальное исчисление.

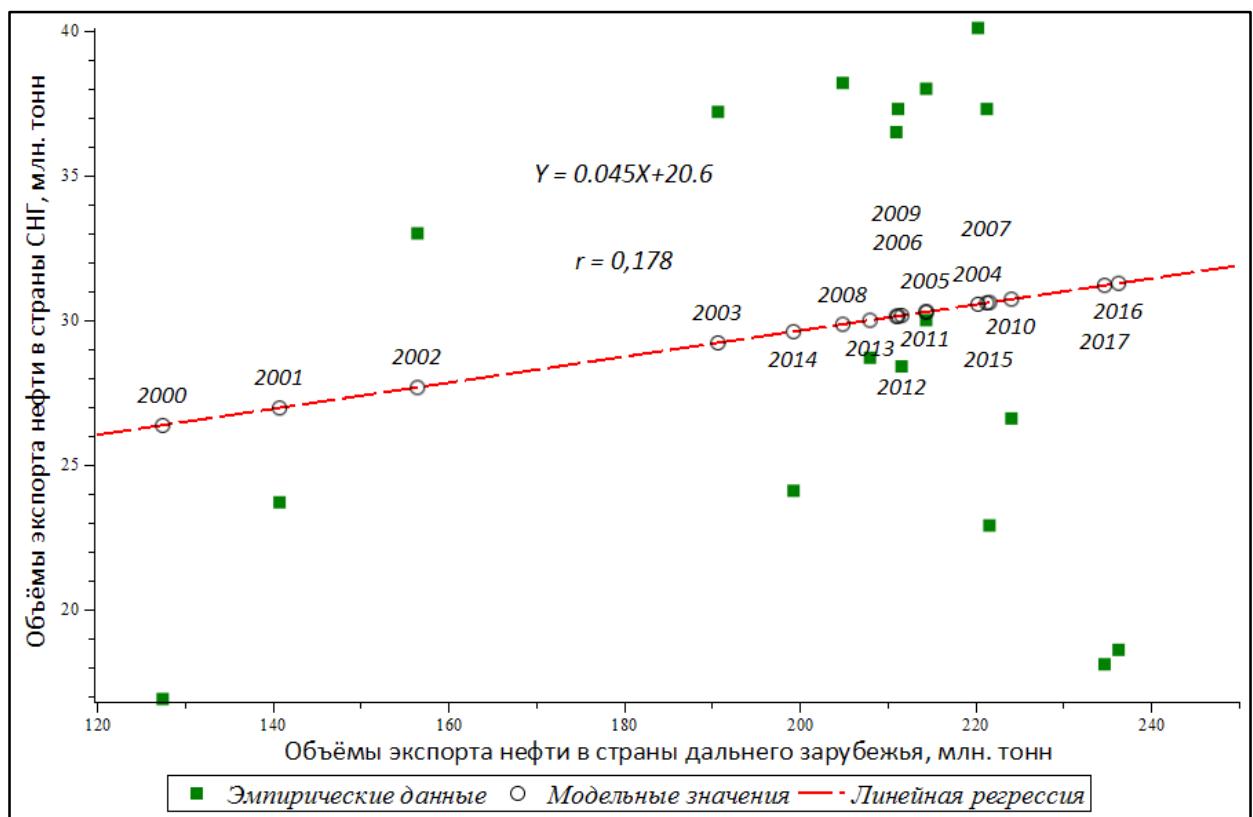
В моделях непрерывного времени переменная  $t$  может принимать любое значение, а не только целочисленное. В непрерывном времени используется обозначение  $y(t)$ , в то время как через  $y_t$  удобно обозначать переменную  $y$  в дискретный момент времени  $t$ . Изменение  $y$  в единицу времени в момент  $t$  называется «производной по времени»  $\frac{dy(t)}{dt}$ , её проще обозначать  $y'(t)$ .

Сплайн-интерполированием «решётчатой» функции экономического процесса выполняется построение непрерывной математической модели экономической динамики.

Проблема поиска инерционности экономической системы является одной из интересных проблем в экономической цикломатике. Мы привыкли к тому, что максимум солнечной инсоляции приходится на 22 июня, а максимум температур окружающей среды (прямо зависящих от солнечной инсоляции – первопричины этих температур) сдвигается «вправо» на месяц и более. Знание постоянной времени экономической системы, меры её инерционности востребовано не столько анализом, сколь прогнозистикой.

Явное присутствие в модели темпорального показателя  $t$  позволяет

наблюдать динамические изменения потока во времени, выявлять и количественно рассчитывать метрические и хронологические параметры цикличности, накладывать эконометрические законы прямо на траектории фазовых портретов и параметрических картин взаимосвязи. Визуализационные возможности фазового подхода расширяют для исследователя круг строящихся моделей в экономике возможностью одновременного отображения одной фазовой кривой двух взаимосвязанных процессов – динамики запасов и динамики их потока с явным сохранением как самого времени, с сохранением последовательности изменения исследуемых показателей во времени.



**Рисунок 3.5 – К проблеме сохранения темпоральных особенностей связи**  
Линейная регрессия (рис. 3.5), построенная по дискретным данным исследуемой динамики с 2000 по 2017 годы, не обнаруживает взаимосвязи между объёмами экспорта нефти в страны дальнего зарубежья и в страны СНГ. Объёмы экспорта в исследуемые группы стран обнаруживают слабую взаимную зависимость, с коэффициентом корреляции, равным + 0.178. Выдвижение гипотезы о наличии или отсутствии структурных изменений

связи по построенной модели невозможно, так как полученная линия регрессии есть результат усреднений внутри всего исследуемого интервала времени. Последовательные модельные значения, лежащие на полученной линии регрессии, не выстраиваются в хронологическом порядке, а только показывают усреднённую реакцию процесса на изменения ранжированных значений факторного признака. Тем самым, уже на концептуальном уровне метод наименьших квадратов не позволяет увидеть последовательную эволюцию связи, невозможным становится при таком подходе и определение структурных изменений связи с течением времени.

Явное сохранение времени при построениях в сплайн-моделях позволяет исследовать постоянные времена экономических потоков, помещаемых в фазовое пространство, определять периоды, времена отклика финансовых, товарных, производственных, внешнеторговых и других потоков на дискретные или непрерывные воздействия факторов. В изучении экономической динамики определение темпоральных характеристик развития назовём «хроноскопией» [29]. Исследуя сезонность или цикличность потоков, интересно наблюдать и важно знать, через какое время поток ВВП вернётся к фазе роста после очередного цикла, сколько лет или месяцев потребуется потоку экспорта энергоресурсов для завершения полного цикла изменения его показателей, в какие месяцы происходят сезонные ускорения потоков в торговле и т.д.

### **3.2 Сплайн-параметрическое моделирование взаимосвязей**

Поиск взаимосвязей на параметрических картинах находит интересные результаты и заметно обогащает процесс исследования потоков в экономике, поскольку не теряют важную для динамических процессов временную координату, как это происходит в регрессионных соотношениях в классической эконометрике. Динамические потоки, являясь аналогом скорости течения процесса, должны в своих моделях сохранить

последовательность изменений, что невозможно при утрате временных меток.

*Сплайн-картины параметрических взаимных зависимостей.* Исследование нескольких экономических процессов часто направлено на определение закономерностей согласованности их развития, на анализ их взаимных зависимостей. Сплайн-параметрические траектории связи могут отражать взаимосвязь двух и более процессов одного типа, например, динамических потоков, обнаруживая своей траекторией локальные, последовательные во времени отклики результативного признака на непрерывные колебания факторного. Предлагаемый инструмент может быть полезным для аналитиков денежно-кредитной сферы, области логистики, при планировании развития топливно-энергетической отрасли, в демографическом прогнозировании, в управлении потоками и запасами в практически любой сфере экономической деятельности. Поэтому аппарат параметрических сплайн-картин становится ещё одним интересным, содержательным и полезным инструментом исследования потоков.

Построение параметрических кривых открывает интересные возможности перед сплайновым анализом при генерации и реализации многомерной регрессии, при аналитическом представлении многозначных эконометрических функций в параметрической форме, здесь параметром выступает время.

*Двумерные параметрические построения.* Усложнение взаимных связей современного мирового рынка, динамика ускоряющихся процессов при непрерывной вариации рыночных условий порождают новые требования к эконометрическому моделированию и исследованию взаимосвязей. Широко применяемые в экономических исследованиях классические подходы обращают недостаточное внимание на поиск локальных особенностей взаимного воздействия, не всегда учитывают темпоральную последовательность изменений, а также не находят должного практического применения возможностям аналитического, графического и количественного

описания потоков и взаимосвязей между ними с привлечением методов дифференциального исчисления. Потоки и запасы сетевой экономики, экономики рекурсивной, отягощённой динамикой потрясений и скачков, ускорением научно-технического прогресса, совершенствованием инфотелекоммуникационного взаимодействия в условиях глобальной цифровизации – описывать классическими мономоделями невозможно.

Цифровизация экономики порождает некоторые особенности получения первичных данных – данные о развитии процессов могут быть зафиксированы в любые моменты времени, возможности получения услуг приобретают непрерывный характер, заметно укорачивается время доступа участников рынка к актуальной информации. Тогда все большую актуальность приобретают проблемы сопоставимости данных при исследовании экономических процессов, а также способы пересчёта одних экономических «количество» в другие. Поскольку теперь траектории экономических трансформаций насыщены трудностями представления, описания и моделирования экономического сигнала, то старые методы не работают. Динамичность изменений в современной экономике, необходимость реагировать на неожиданные «событийные составляющие», понимание важности учёта и кратковременных локальных воздействий на глобальные тенденции требует строить методологию исследования на идемпотентной сложности динамических потоков экономико-математической платформе с использованием современных профессиональных инструментальных средств.

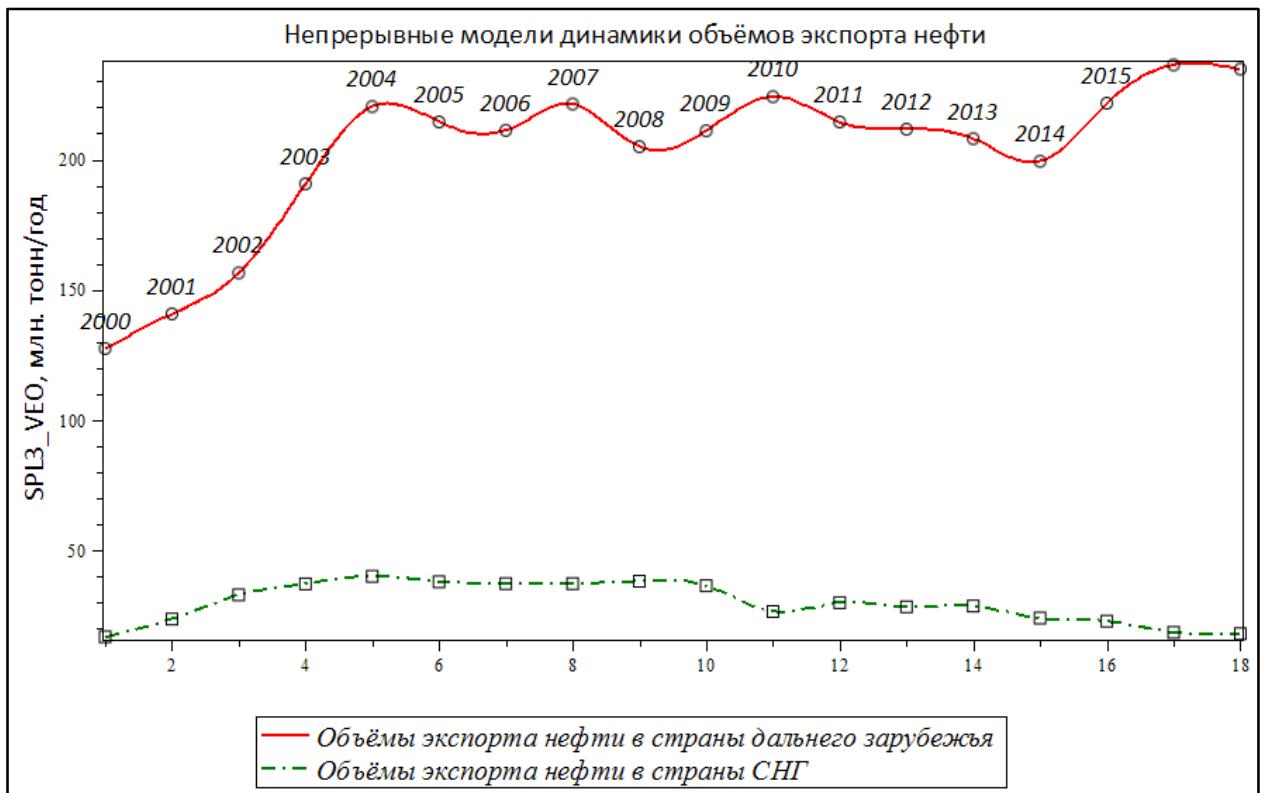
Привлечение в анализ «кусочно-полиномиального» подхода становится полезным при моделировании, анализе и визуализации взаимосвязей с переменной структурой. Моделирование динамики сплайнами доставляет наилучшую модель с точки зрения минимума суммы квадратов невязок. При интерполяции сплайнами абсолютная точность достигается совпадением в узловых точках эмпирических данных и модельных эквивалентов. Хорошо просматривается динамика показателей, появляется представление о

временном поведении и локальной взаимосвязи процессов» [103]. Отметим, что динамические изменения в современной экономике определяются во многом потоками – товарными, финансовыми, человеческими, информационными и др.

### **3.3 Анализ взаимосвязи потоков при возможном наличии точек переключения регрессии интерполяированием сплайнами**

Экономика России в течение длительного времени сохраняет зависимость от конъюнктуры мирового рынка энергоресурсов, в частности, от потоков экспорта нефти и природного газа. Усложняющаяся внешнеэкономическая ситуация порождает неустойчивость потоков экспорта, требуя диверсификации рынков сбыта. В сложившейся ситуации вызывает интерес взаимное воздействие потоков экспорта нефти в страны дальнего и ближнего зарубежья.

Для исследования этой вариативной взаимосвязи потоков экспорта нефти выполним аппроксимацию динамики исследуемых процессов кубическими сплайнами. Важным достоинством сплайн-аппроксимации становится их кусочная структура, позволяющая адаптироваться к особенностям структурно-переменной динамики, сохраняющая информацию о всех фактически достигнутых значениях, ускорениях и замедлениях, а также наилучшем образом представляющая интерполяционное поведение процессов. Сравнение абсолютных значений экспорта не обнаруживает заметной связи, сами объёмы экспорта нефти в страны дальнего зарубежья многократно превосходят объёмы экспорта в страны СНГ [130]. Выявление «скрытой» взаимосвязи возможно использованием «тонких» методов с привлечением производных сплайн-функций, тем самым переходя к сравнению мгновенных потоков экспорта. Теперь ищется корреляция не дискретных значений процессов, а непрерывной последовательной эволюции отклика скорости экономического процесса на колебания скорости факторного признака.



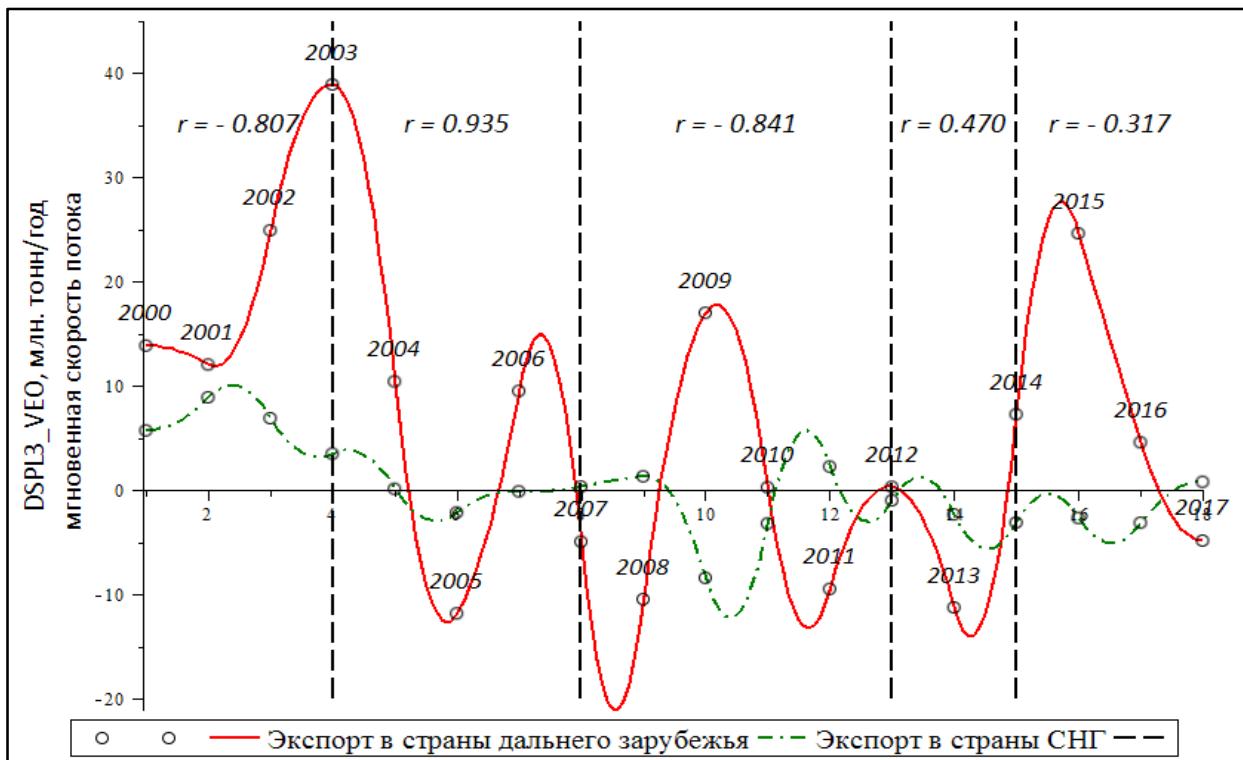
**Рисунок 3.6 – Потоки экспорта нефти России**

Построение сплайн-аппроксимационных моделей исследуемой динамики позволяет применять более эффективные подходы при выявлении взаимосвязей, обнаруживая их уже во взаимном воздействии непрерывных потоков. Построение сплайн-моделей исследуемой динамики заменяет дискретные последовательности данных непрерывными функциями с наилучшим интерполяционным поведением. Теперь закономерности ищутся путём сравнения не отдельных точек эмпирических данных, а отрезков интерполирующих функций из последовательного и непрерывного во времени поведения потоков. Сравнение отрезков «позволяет лучше и «тоньше» анализировать экономические процессы, определять и сохранять их спектральный состав, синергетические свойства, улучшать интерполяцию, изображать в фазовом пространстве непрерывные траектории взаимного воздействия» [105].

Фазовое пространство и фазовый анализ становятся концепцией и инструментом расширения и упрочения «тонкости» стратегии экономического анализа «новой эконометрикой». Параметрической траекторией взаимосвязи потоков становится построенная на двумерной

фазовой плоскости  $OY_1'Y_2'$  кривая, представляющая собой зависимость скорости потока экспорта нефти в страны СНГ  $Y_2'(t)$  от скорости потока экспорта нефти в страны дальнего зарубежья  $Y_1'(t)$ , время  $t$  играет роль параметра. На фазовой плоскости важную роль играет нулевой уровень первой производной, выше которого положительный знак производной говорит об увеличении потока экспорта, ниже – при отрицательном знаке производной поток экспорта нефти падает. Движение идёт по часовой стрелке. Полученная кривая демонстрирует темпоральные особенности непрерывной эволюции связи с переходами из одного состояния в другое, с продолжительным сохранением достигнутых параметров связи. Одновременное наблюдение за изменениями скорости развития экономических процессов (потоков) облегчает понимание природы экономических подвижек.

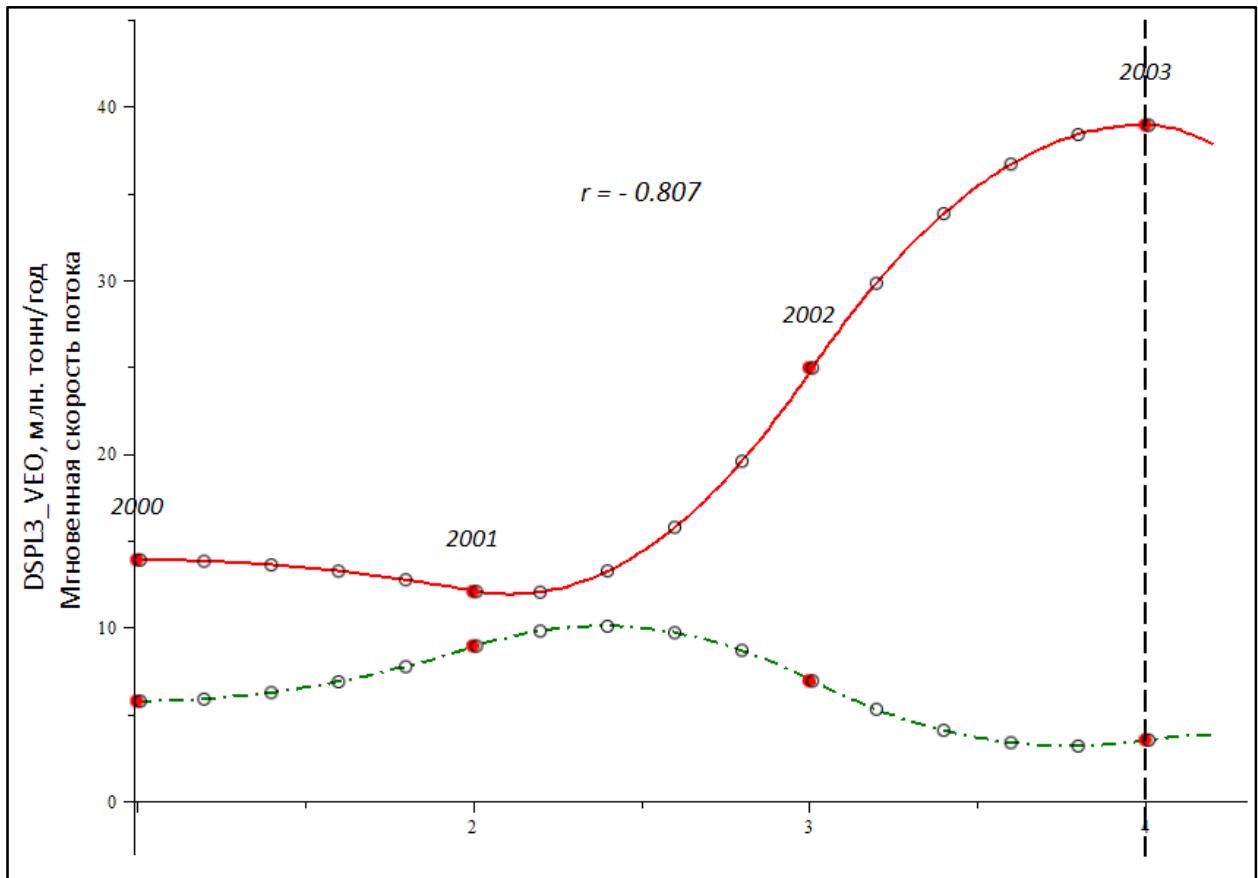
Перечислим некоторые достоинства сравнения отрезков сплайн-функций при поиске взаимосвязей: Во-первых, в точности сохраняется информация о фактически достигнутых и зафиксированных значениях статистики исследуемых процессов. Во-вторых, автоматически можно перейти к моделям скорости или ускорения процессов взятием производных моделирующего сплайна. В-третьих, в моделях сохраняется последовательность интервалов развития процессов во времени. В-четвертых, сохранение реального «рельефа» исследуемой динамики позволяет выявлять с большой достоверностью точки и интервалы структурных изменений связи. В-пятых, сравнением интерполяционного поведения процессов выявляются локальные «эффекты» воздействия «событийных составляющих» динамики. Дифференцируемость сплайнов позволяет исследовать динамические характеристики экономического движения – скорость, ускорение, экономический импульс, мощность и другие. В-шестых, замен обобщённых моделей регрессии при сравнении отрезков функций строятся богатые аналитическими возможностями фазовые траектории связи.



**Рисунок 3.7** – Переход к сравнению первых производных или скорости потоков экспорта нефти в страны дальнего зарубежья (*RED*, сплошная линия) и в страны СНГ (*GREEN*, штрих-пунктир).

Сплайн-параметрическое представление скорости потоков позволило обнаружить структурные изменения связи, её темпоральные особенности эволюции с визуализацией на фазовой траектории. Изменениям исследуемых потоков свойственна отрицательная корреляция – увеличение скорости потока экспорта нефти в страны дальнего зарубежья замедляет скорость потока её экспорта в страны СНГ (2000-2003 гг., 2007-2012 гг., 2014-2017 гг.). Иногда, в периоды ускоренного роста общих объёмов экспорта нефти, скорости потоков экспорта нефти в страны дальнего зарубежья и в страны СНГ могут коррелировать положительно. Например, в 2000-2003 гг. первые производные потоков экспорта в обе группы стран положительные, что демонстрирует одновременный рост объёмов экспорта в эти страны. Однако, рост скорости потока в страны дальнего зарубежья замедляет поток экспорта в страны СНГ, обнаруживая пример «латентной» корреляции. Яркий пример полезности сравнения не только самих показателей, но и их тенденций, производных, в нашем примере – скорости потоков. Подход выявляет «скрытые» взаимосвязи, не всегда проявляющиеся на фоне роста или

снижения абсолютных значений показателей исследуемой динамики.

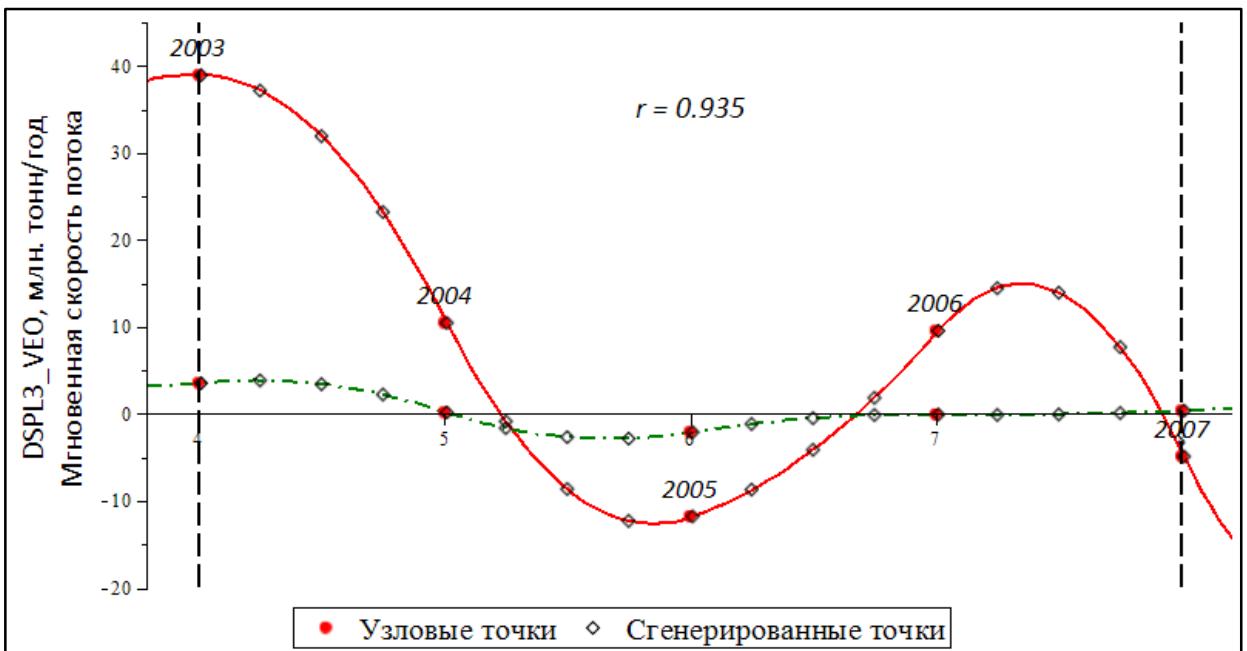


**Рисунок 3.8 –** Первый отрезок сравнения скорости потоков экспорта нефти в страны дальнего зарубежья (RED, сплошная линия) и в страны СНГ (GREEN, штрих-пунктир) с 2000 по 2003 годы. Сильная отрицательная корреляция скорости потоков – коэффициент корреляции равен –0.807.

Сравнение скорости экономических потоков обнаруживает интересные особенности связи, когда сами потоки экспорта нефти коррелируют положительно на фоне общего роста объёмов экспорта (2000-2003 гг.), а поведение скорости потоков коррелирует сильно и отрицательно. Анализ показывает, «что выводы о тесноте и направлении связи, полученные сравнением только самих показателей, без учёта их динамических изменений (приростов, производных) могут быть иногда «ложными», провоцирующими принятие ошибочных решений» [103]. В экономике доминирующая тенденция быстрого роста скрывает возможные замедления роста в абсолютном значении исследуемого показателя, обнаруживаясь лишь в изменениях скорости роста – первой производной.

В экономике нередко наблюдаются периоды быстрого роста, когда при

сильном доминировании тенденция роста (спада) не наблюдаются вовсе спады (подъемы) в их абсолютном выражении, а обнаруживаются только в изменениях скорости роста. Внутри таких периодов сами показатели могут, например, коррелировать положительно, а их тенденции (в нашем примере – скорость потока) – отрицательно.

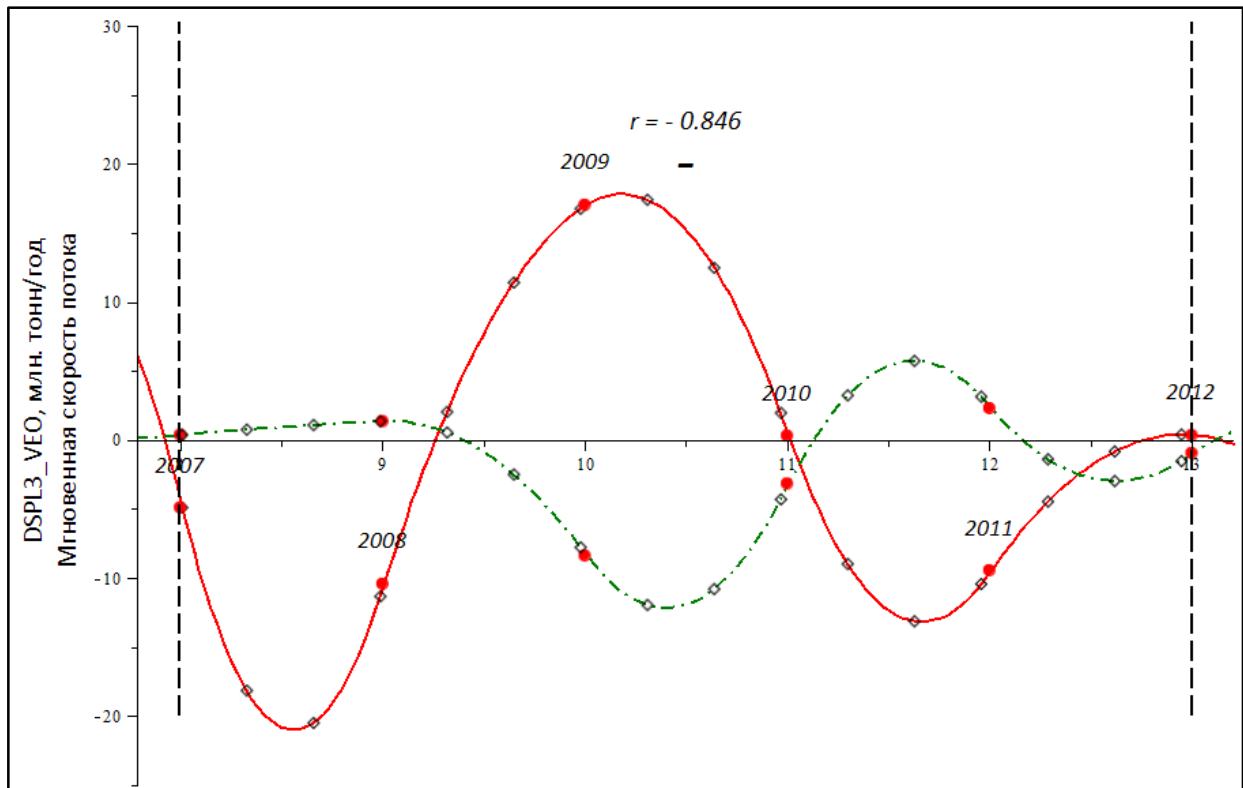


**Рисунок 3.9** – Второй отрезок сравнения – скорость потоков экспорта нефти в страны дальнего зарубежья (*RED*, сплошная линия) и в страны СНГ (*GREEN*, штрих-пунктир) с 2003 по 2007 годы.

Положительная, почти функциональная связь между скоростью потоков в 2003-2007 гг. – коэффициент корреляции равен + 0.935. Знаки скорости потоков экспорта (первой производной) в исследуемом интервале времени меняются синхронно, что говорит о совпадении тенденций одновременного роста и снижения потоков экспорта (рис. 3.9).

Колебания кривых, описывающих скорость потоков экспорта нефти в страны дальнего зарубежья и в страны СНГ, приобретают с 2007 года асинхронный характер, демонстрируя начало очередных (третьих по счёту) структурных изменений связи [87]. Амплитуда колебаний скорости потока (скорости изменения объёмов) экспорта максимальна в начале исследуемого интервала времени, она затухает с течением времени. В 2012 году потоки стабилизируются, указывая на начало новых структурных изменений. Анализ

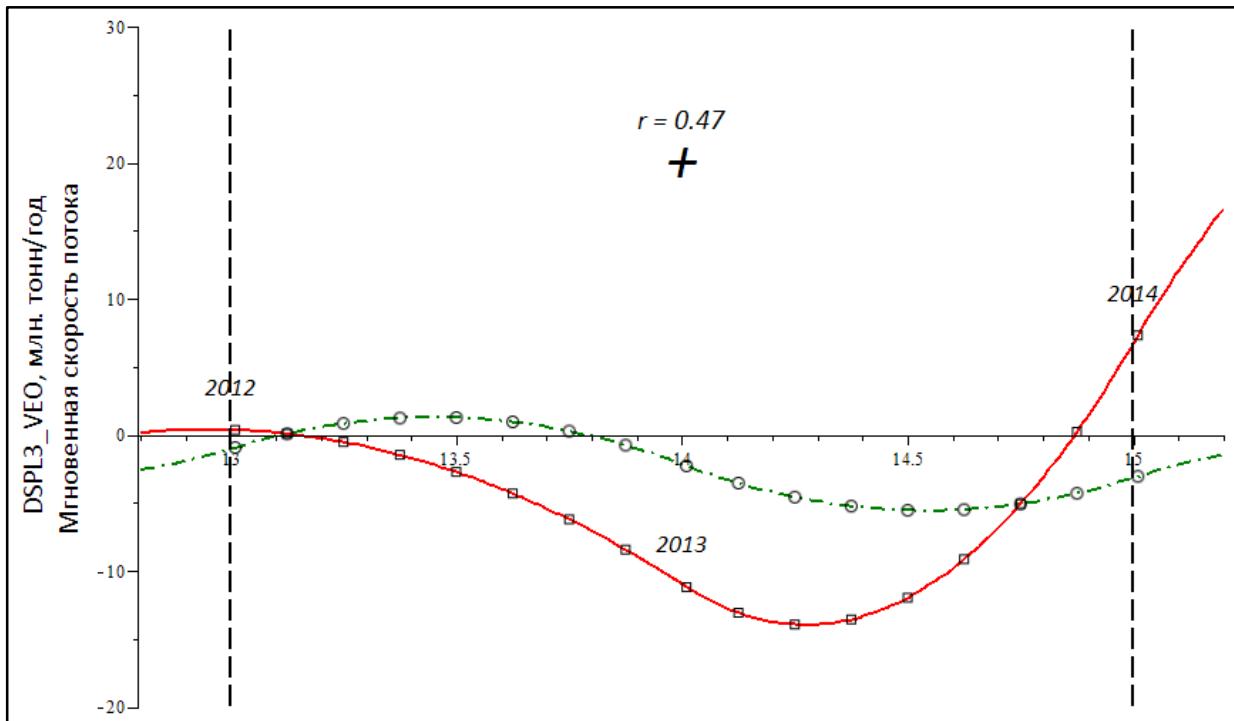
исходных рядов динамики не находит заметной корреляционной связи между процессами, однако, исследование скорости экономических потоков (первой производной) выявило тонкие особенности исследуемых тенденций (рис. 3.10).



**Рисунок 3.10 – Третий отрезок – скорость потоков экспорта нефти в страны дальнего зарубежья (RED – сплошная линия) и в страны СНГ (GREEN – штрих-пунктир) с 2007 по 2012 годы. Тесная отрицательная корреляция. Поведение кривых скорости экономических потоков пропорционально и асинхронно внутри выделенного интервала времени.**

Поведение моделей экономического потока подтверждает гипотезу о наличии структурных изменений в исследуемой связи. Поведение кривых показывает, что в 2007 году во взаимосвязи между экономическими потоками экспорта нефти произошли заметные структурные изменения – направление связи изменилось на обратное. Колебания скорости потоков экспорта в страны дальнего зарубежья и в страны СНГ с 2007 по 2012 годы стали носить пропорциональный, но асинхронный характер. Выявленная связь между потоками на третьем отрезке – с 2007 по 2012 годы – оказалась очень тесной – значение коэффициента корреляции с учётом рассчитанных интерполяционных значений равно – 0.841. Обращает на себя внимание

снижение амплитуды колебаний скорости потоков с течением времени.

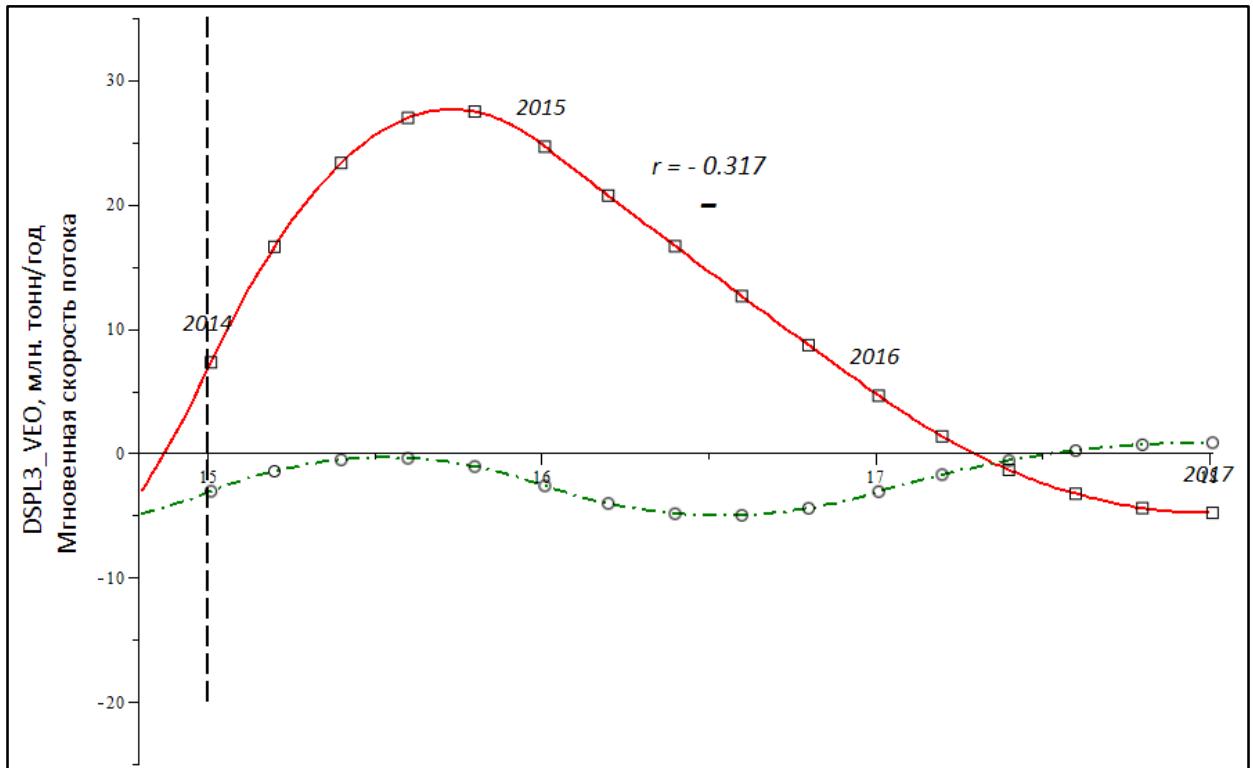


**Рисунок 3.11** – Четвёртый отрезок – скорость потоков экспорта нефти в страны дальнего зарубежья (RED – сплошная линия) и в страны СНГ (GREEN – штрих-пунктир) с 2012 по 2014 годы. Положительная корреляция. Плавное поведение кривых скорости – потоки меняются медленно, синхронно и в незначительном диапазоне. Первые производные потоков практически всегда отрицательны, что говорит о параллельном снижении объёмов экспортного нефти как в страны дальнего зарубежья, так и в страны СНГ.

На четвёртом отрезке скорости потоков непродолжительное время коррелируют положительно – с 2012 по 2014 гг. Плавное поведение кривых скорости говорит о стабилизации исследуемой экономической системы – потоки меняются медленно, синхронно и в незначительном диапазоне. В указанном отрезке времени первые производные потоков практически всегда отрицательны, что говорит о параллельном снижении объёмов экспортного нефти как в страны дальнего зарубежья, так и в страны СНГ. Здесь мы не наблюдаем конъюнктурных изменений разнонаправленных потоков экспортного нефти в группы стран, что было свойственно их поведению в 2007 – 2012 годах.

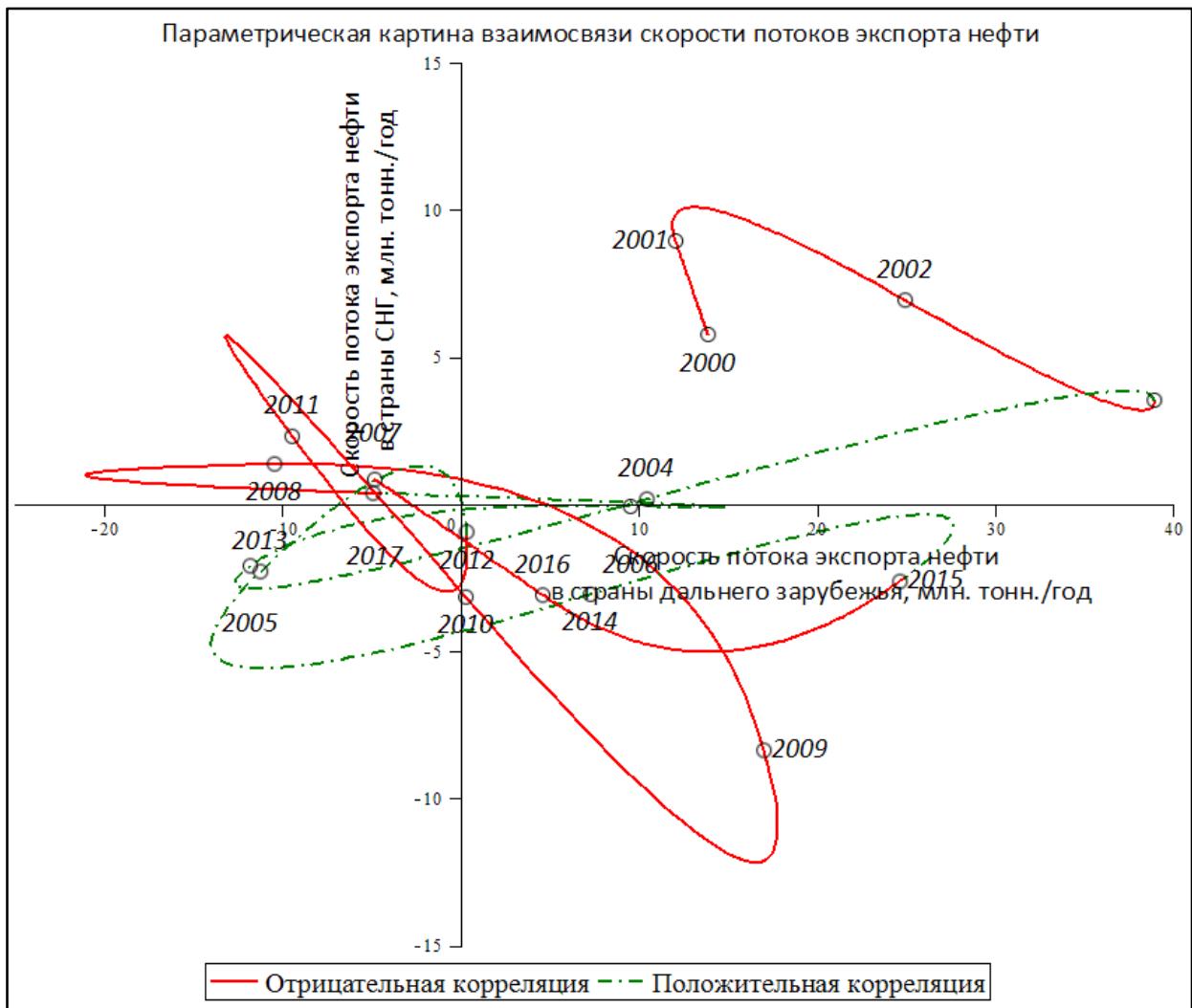
**Пятый отрезок.** С 2014 года скорости потоков вновь вернулись к отрицательной корреляции. Полезный опыт состоит в том, что если при исследовании состояний (запасов) переменная структура динамики или взаимосвязей не обнаруживается достаточно «рельефно», стоит перейти к

изучению экономических потоков с целью более «тонкого» и наглядного выявления вариации экономической эволюции. Это изучение ускорений и замедлений развития в условиях меняющейся конъюнктуры, это изменение траекторий роста под воздействием «событийных» составляющих динамики, это проявление особенностей фазовых траекторий движения к состояниям равновесия и др.



**Рисунок 3.12** – Пятый отрезок – скорость потоков экспорта нефти в страны дальнего зарубежья (RED – сплошная линия) и в страны СНГ (GREEN – штрих-пунктир) с 2014 по 2017 годы. Возврат к отрицательной корреляции.

Обратим внимание, что анализ исходных рядов динамики может не обнаруживать заметную корреляцию между процессами, однако, построение моделей скорости потоков (первых производных динамики объёмов экспорта) выявило «латентные» корреляции. В первую очередь, сравнение скорости потоков обнаружило наличие структурных изменений в исследуемой связи.



**Рисунок 3.13 – Сплайн-параметрическая картина циклической взаимосвязи скорости потоков экспортации.**

Поведение кривых скорости потоков показывает, что в 2003, 2007, 2012 и 2014 гг. во взаимосвязи между тенденциями (потоками, первыми производными) экспортации нефти происходили заметные структурные изменения – направление связи менялось на обратное (рис. 3.13). В отличие от классических, методы сплайн-методологии выявляют структурные изменения связи. Видно, что исследуемым потокам свойственна отрицательная корреляция – увеличение скорости экспортации нефти в страны дальнего зарубежья замедляет скорость экспортации в страны СНГ (2000-2003 гг., 2007-2012 гг., 2014-2017 гг.). Часто устойчивый рост общих объемов экспортации нефти может приводить к положительной корреляции абсолютных объемов экспортации в страны дальнего зарубежья и в страны СНГ, но при этом могут отрицательно коррелировать приросты объемов экспортации или их

мгновенные скорости роста [130].

Для определения направления связи внутри выявленных интервалов времени нужно сравнивать интерполяционное поведение скорости потоков. Построение непрерывных сплайн-аппроксимационных моделей динамики исследуемого показателя позволяет переходить от сравнения дискретных состояний процессов в узловых точках к интерполяционному сравнению отрезков функций. В методологии сплайн-моделирования «при описании «тесноты связи» оказывается полезной возможность сплайнов генерировать дополнительные точки в промежутках между узловыми точками процесса. Это позволяет ослабить ограниченность регрессии, возникающую из-за малого количества узловых точек» [103].

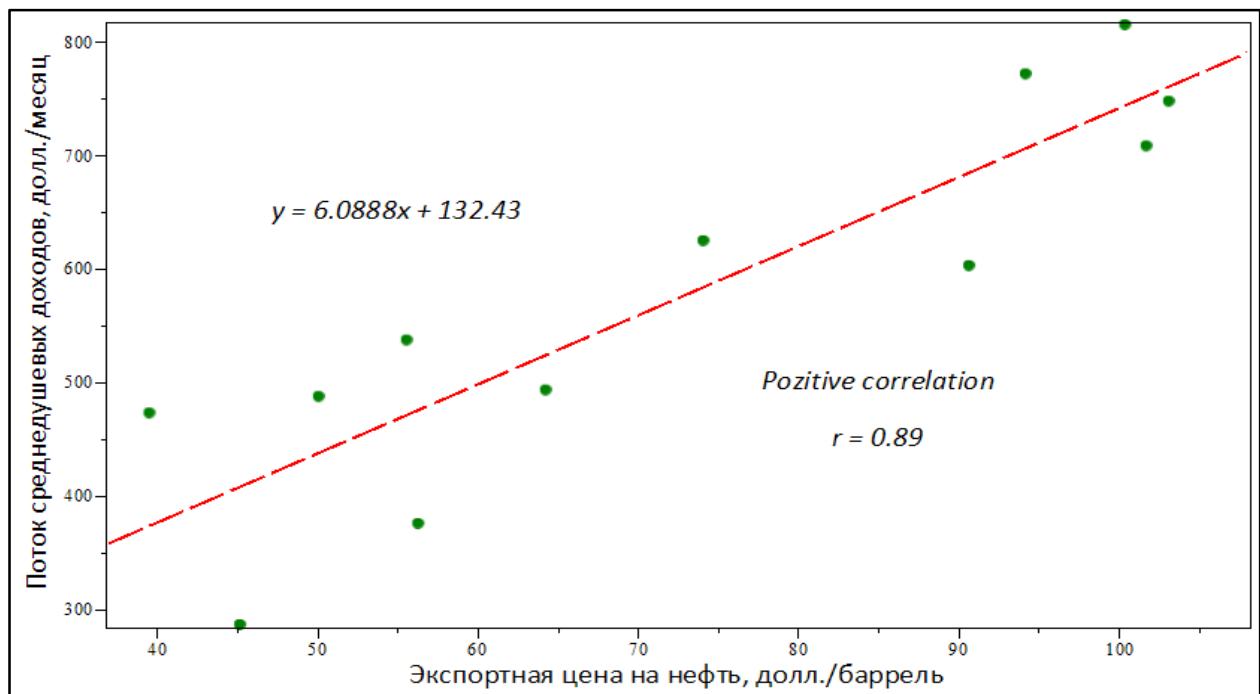
### **3.4 Производные как инструмент исследования «латентных» корреляций в колебаниях скорости потоков**

Другим интересным примером влияния нефтегазовой конъюнктуры на экономические процессы в России оказалась зависимость потока среднедушевых доходов населения от динамики экспортных цен на энергоносители. Известно, что уровень жизни населения России в последние годы во многом определялся конъюнктурой рынка энергоресурсов. Это связано со структурой доходов бюджета Российской Федерации, значительная доля которых формируется за счет экспорта нефти и газа [192].

Важными факторами, действующими на изменение уровня жизни населения, являются динамика инфляции и среднедушевых доходов. Статистические данные говорят о заметном повышении среднедушевых доходов населения в России в их рублевом выражении. Однако, заметные колебания курса российской национальной валюты сильно корректируют динамику реальных доходов. Важно при этом определить факторы, воздействующие на повышение уровня жизни населения. Учитывая, что доходы от экспорта энергоресурсов формируют значительную долю доходов

федерального бюджета России, сравним воздействие динамики экспортных цен на нефть на изменение среднедушевых доходов населения.

Корреляция между динамикой экспортных цен на нефть и среднедушевых доходов населения в их рублёвом выражении практически отсутствует – по данным с 2005 по 2016 годы его значение равно +0.18. В абсолютном выражении среднедушевые доходы продолжали расти на всем исследуемом временном интервале. По оценкам Министерства экономического развития России «...По мере исчерпания временных факторов (наиболее выраженно проявившихся в январе–апреле) в динамике обменного курса рубля сформировалась тенденция к ослаблению. За период май–декабрь рубль в номинальном эффективном выражении ослаб на 8.1 %. При этом цена на нефть марки «Юралс» в декабре была на ~25 % выше, чем в апреле. Произошедшее снижение зависимости обменного курса рубля от цен на нефть стало результатом реализованных структурных реформ в макроэкономической политике» [151]. Ослабление рубля в своей основе приводило к сохранению тенденции роста среднедушевых доходов населения России в их рублёвом выражении.

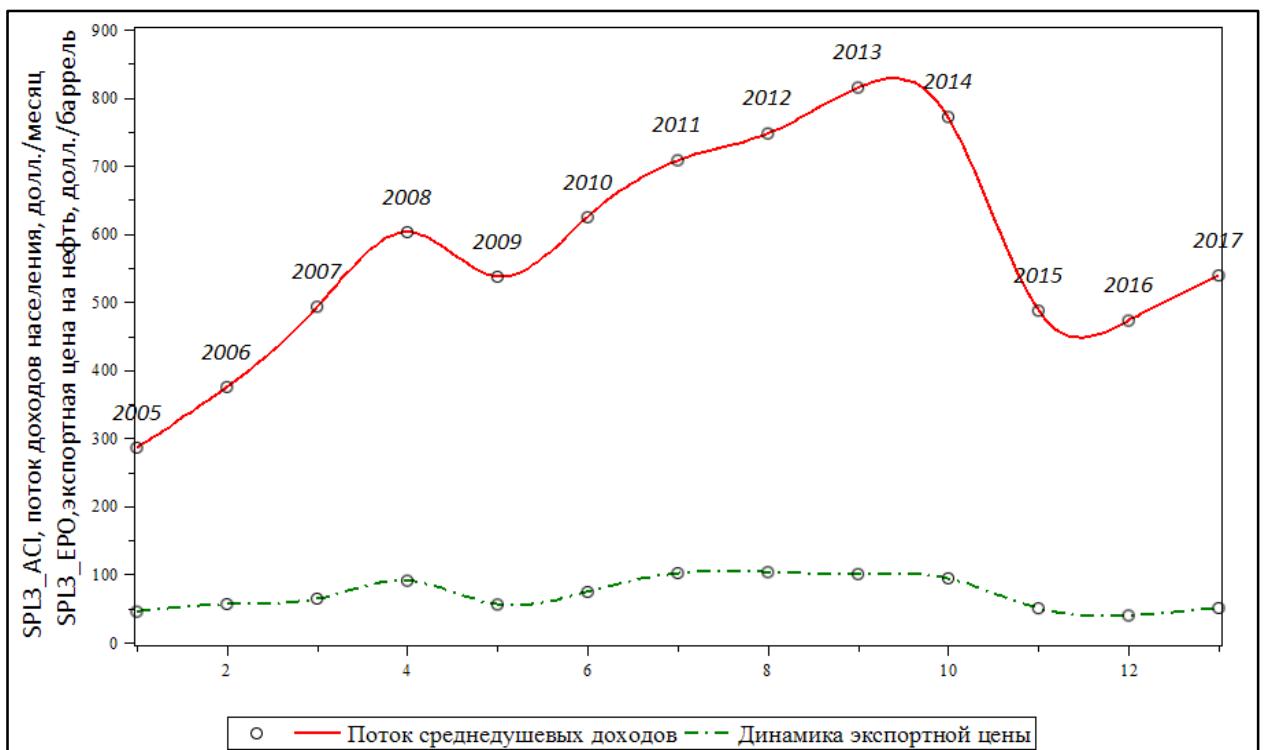


**Рисунок 3.14** – Взаимосвязь динамики экспортных цен на нефть и потока среднедушевых доходов населения России с 2005 по 2016 гг. Классическое эконометрическое представление

Если пользоваться расчётами с долларами США, то положительная корреляция между среднедушевыми доходами населения и экспортной ценой на нефть с 2005 по 2016 годы заметно усиливается. Становится интересным при этом увидеть темпоральные особенности исследуемой взаимосвязи – как с течением времени изменяется взаимное воздействие относительных изменений – скорости потока среднедушевых доходов населения и скорости изменения экспортных цен на нефть.

Для сохранения «тонкости» спектрального состава исследуемых процессов предлагается аппроксимировать динамику цен на нефть и динамику потока среднедушевых доходов населения кубическими сплайнами. Это позволит избежать свойственных «классической эконометрике» сглаживаний и усреднений, приводящих к существенным потерям информации об особенностях непрерывных ускорений или замедлений экономики. Сплайны широко используются при моделировании сложных объектов, их аппроксимационные свойства, такие как непрерывность, гладкость, невысокие степени, аналитичность с набором опять же аналитических производных позволяют нам применить их при моделировании экономических процессов. Использование их готовых производных становится особенно полезной при анализе скоростей и ускорений развития процессов.

Классической эконометрической методологией была обнаружена тесная прямая связь между этими процессами, однако применённый инструментарий оказывается «грубым» для анализа темпоральных особенностях, характеризуя лишь «усреднённое значение взаимного влияния» внутри всего исследуемого временного интервала. Хотелось бы узнать, как взаимно влияют эти процессы в каждый момент времени, увидеть непрерывную эволюцию взаимосвязи, визуально наблюдать усиление или ослабление зависимости экономического показателя от конъюнктуры рынка энергоресурсов.



**Рисунок 3.15 – Сплайн-представление динамики экспортных цен на нефть (*SPL3\_EPO*, GREEN, долларов за баррель) и потока среднедушевых доходов населения России (*SPL3\_ACI*, RED, долларов в месяц).**

Представление динамики среднедушевых доходов населения в долларовом исчислении не обнаруживает явной тенденции к росту, как в случае её выражения в рублях. Наблюдается быстрый рост доходов до 2008 года с их резким снижением в 2009 году. В дальнейшем тенденция роста доходов возобновляется и сохраняется до 2013 года. Последующее развитие обнаруживает отрицательную тенденцию с быстрым возвратом потока среднедушевых доходов населения к уровню 2007 года. Можно заметить, что изменения в динамике среднедушевых доходов населения следуют за колебаниями экспортных цен на нефть. Было бы полезно увидеть, как с течением времени менялась степень зависимости уровня жизни населения России от динамики цен на нефть, оценить успешность предлагаемых мер по снижению зависимости экономики от конъюнктуры рынка энергоресурсов? Например, выступая на полях IX Гайдаровского форума, министр экономического развития Максим Орешкин заявил: «...Инфляционное таргетирование, плавающий обменный курс, бюджетное правило и механизм защиты внутренней экономики от колебаний цен на нефть — вот четыре

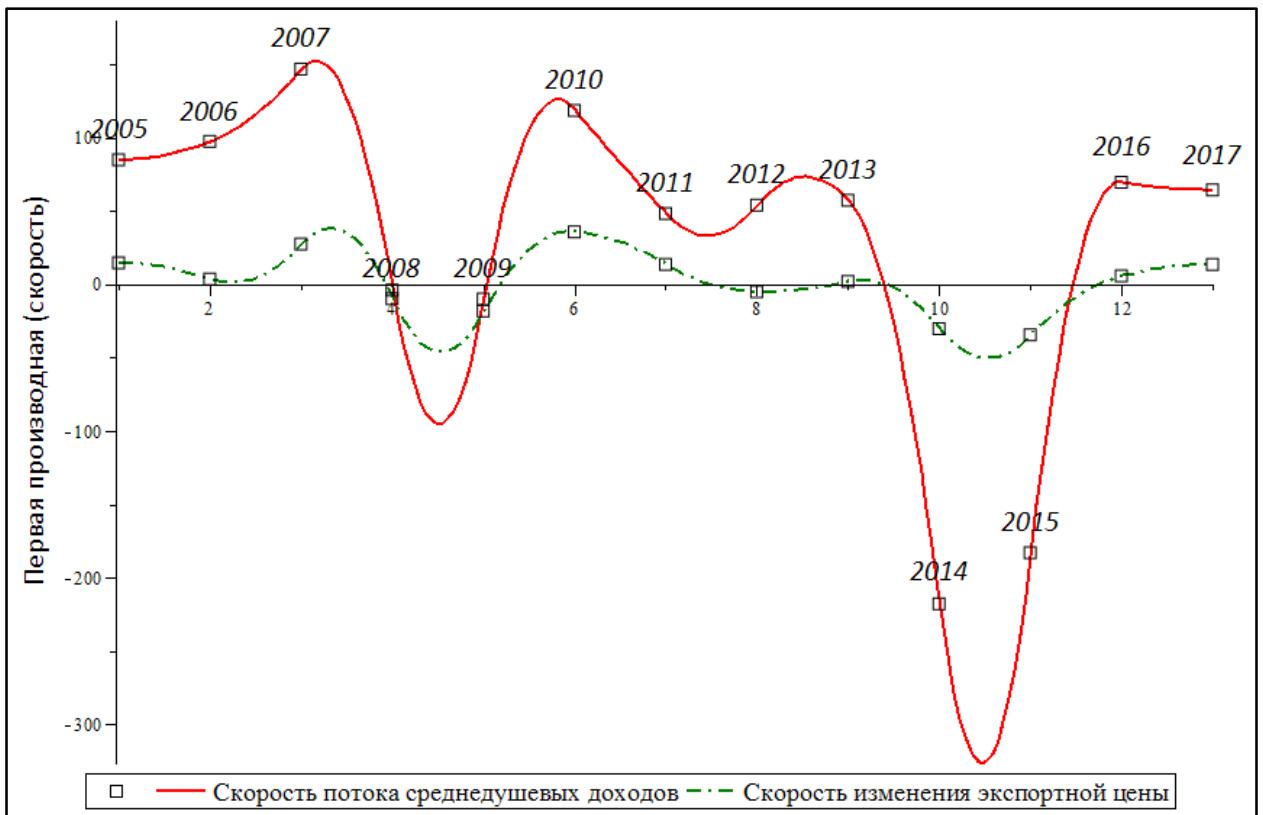
фактора, которые кардинально меняют условия, в которых существует российская экономика» [216]. Поток среднедушевых доходов населения должен продемонстрировать успешность предлагаемых мер по изменению зависимости от цен на нефть.

Сравнение тенденций (первых производных) экспортной цены на нефть и потока среднедушевых доходов населения позволяет нам увидеть непрерывную трансформацию локальных реакций процесса на воздействие факторов. На рис. 3.16 представлены колебания скорости потока среднедушевых доходов под воздействием скорости изменения экспортной цены на нефть. Траектории обнаруживают синхронность в изменениях скорости развития процессов – знаки производных совпадают практически в течение всего времени наблюдения. При этом интересна особенность поведения процессов в «кризисные» 2008-2009 и 2014-2015 годы. Именно в эти годы кривая скорости изменения экспортных цен на нефть уводит скорость потока среднедушевых доходов населения в область отрицательных значений. Поток среднедушевых доходов населения в 2014-2015 годы уходит даже на большую «глубину» области отрицательных значений скорости по сравнению с его откликом на падение экспортных цен в 2008-2009 годах. Это наглядное свидетельство усиления в последние годы зависимости уровня жизни населения России от конъюнктуры на энергетических рынках.

В условиях перманентно ускоряющегося экономического движения регрессии классической эконометрики не способны отобразить локальную адаптацию к конъюнктурной трансформации. Сплайн-аппроксимационные модели потоков с непрерывным временем оказались достаточно гибкими, структурно-вариативными и математически конструктивными для описания «...временной сущности явлений, порождённой динамикой их особенного движения» [221].

Аналитическая дифференцируемость сплайнов становится полезной при непрерывном представлении потоков, скоростей и ускорений их течения. На примере экспортных цен на нефть и среднедушевых доходов населения

удаётся показать преимущества сплайн-параметрического представления связи перед построением сглаженной регрессии.



**Рисунок 3.16** – Тенденции (первые производные, потоки или скорость) экспортных цен на нефть (долларов за баррель) и среднедушевых доходов населения России (долларов в месяц). Аппроксимация кубическими сплайнами. Система компьютерной математики

Траектория параметрической связи обнаруживает в явном виде цикличность зависимости доходов населения от конъюнктуры рынка нефти. Первый цикл связи начинает «закручивать» свои извины в области положительных значений скорости роста экспортных цен на нефть и среднедушевых доходов населения в 2005-2008 годах. Уход скорости роста экспортной цены на нефть в зону отрицательных значений в 2008 году приблизил скорость потока среднедушевых доходов к нулевой отметке, а в 2009 году оба показателя оказались в области небольшого снижения. Следующий 2010 год показал возврат траектории связи к высокой скорости роста цен на нефть и доходов населения. Малый цикл 2011-2013 годов характеризуется замедлением скорости роста экспортных цен и доходов населения, здесь происходит «переключение регрессии» – усиливается

зависимость среднедушевых доходов населения от экспортной цены на нефть. Кризисное падение скорости роста экспортной цены на нефть «закручивает» очередной вихрь циклической траектории связи – скорость потока доходов населения России в 2014-2015 годы отрицательна, снижение уровня жизни населения и цен на нефть более глубокое и быстрое по сравнению с кризисным ухудшением 2008-2009 гг.

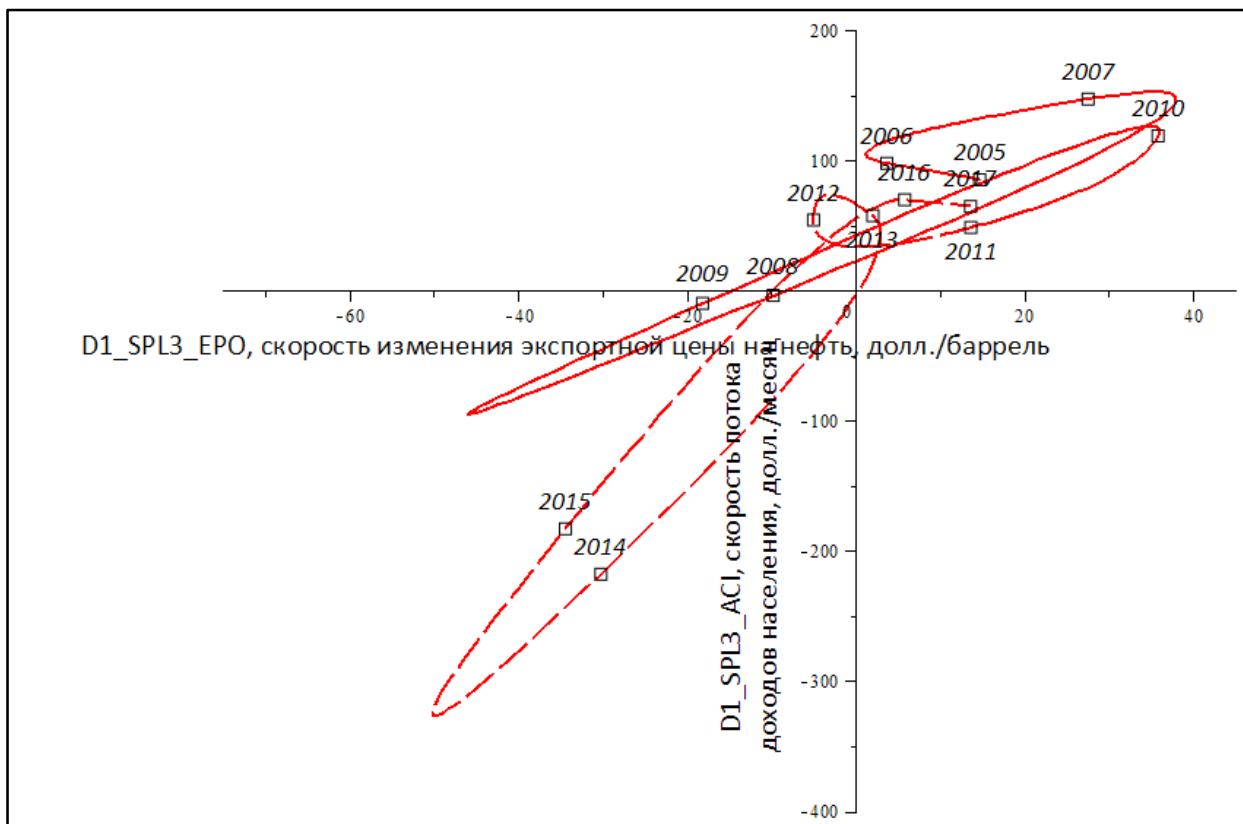
На параметрических картинах «можно искать корреляции не только дискретных состояний процессов, но и непрерывных изменений скорости развития, учитывать темпоральные особенности процессов» [114]. Определение темпоральности находим в словаре современной западной философии<sup>8</sup>: «...Темпоральность (англ. – «временные особенности») – временная сущность явлений, порожденная динамикой их особенного движения, в отличие от тех временных характеристик, которые определяются отношением движения данного явления к историческим, астрономическим, биологическим, физическим и другим времененным координатам, взаимосвязь моментов времени» [114].

На рисунке 3.17 пример явного обнаружения цикличности связи, возможности наблюдать траектории отклика среднедушевых доходов на изменения скорости роста экспортной цены внутри последовательных темпоральных участков. Пример «переключения регрессии», демонстрирующий изменения в зависимости уровня жизни населения от конъюнктуры цен на нефть внутри четырёх темпоральных участков цикличности. Первый цикл характеризуется высокой скоростью роста цен на нефть и среднедушевых доходов – кривая связи с 2005 по 2008 годы строит свою траекторию в области положительных значений фазовой плоскости. Внутри второго цикла – с 2008 по 2011 годы скорость роста цен на нефть останавливает рост доходов населения в 2008 году. В 2009 году при заметном снижении цены на нефть доходы населения падают незначительно, а в 2010

---

<sup>8</sup> Словарь. Современная западная философия [Текст] / ред. В.Н. Садовский. - М.: Изд.-во полит. лит., 1991.- 414 с.

году заметен рост обоих показателей. Внутри третьего цикла с 2011 по 2013 годы наблюдается приближение к нулю скорости роста цены на нефть и доходов населения – именно здесь происходит «переключение регрессии». Четвёртый цикл демонстрирует переход экономики России к новым условиям развития – ускоренное падение уровня жизни населения и цен на нефть в 2014-2015 годах по сравнению с кризисом 2008-2009 годов, заметное усиление зависимости доходов населения от экспорта нефти.



**Рисунок 3.17** – Спайнер-параметрическая картина циклической взаимосвязи скорости потоков среднедушевых доходов населения России и скорости изменения экспортных цен на нефть с 2005 по 2017 гг. в страны СНГ.

Анализ показал глобальную неустойчивость экономического развития современной России на примере потоков денежной массы, задолженности по кредитам, доходов населения, основных фондов и других показателей. Многочисленные научные исследования и аналитические материалы Банка России, Росстата, публикации Аналитического центра при Правительстве Российской Федерации и др. справедливо связывают тенденции экономического развития России с конъюнктурой мирового рынка энергоресурсов. Возможности аппарата параметрических картин предлагаем

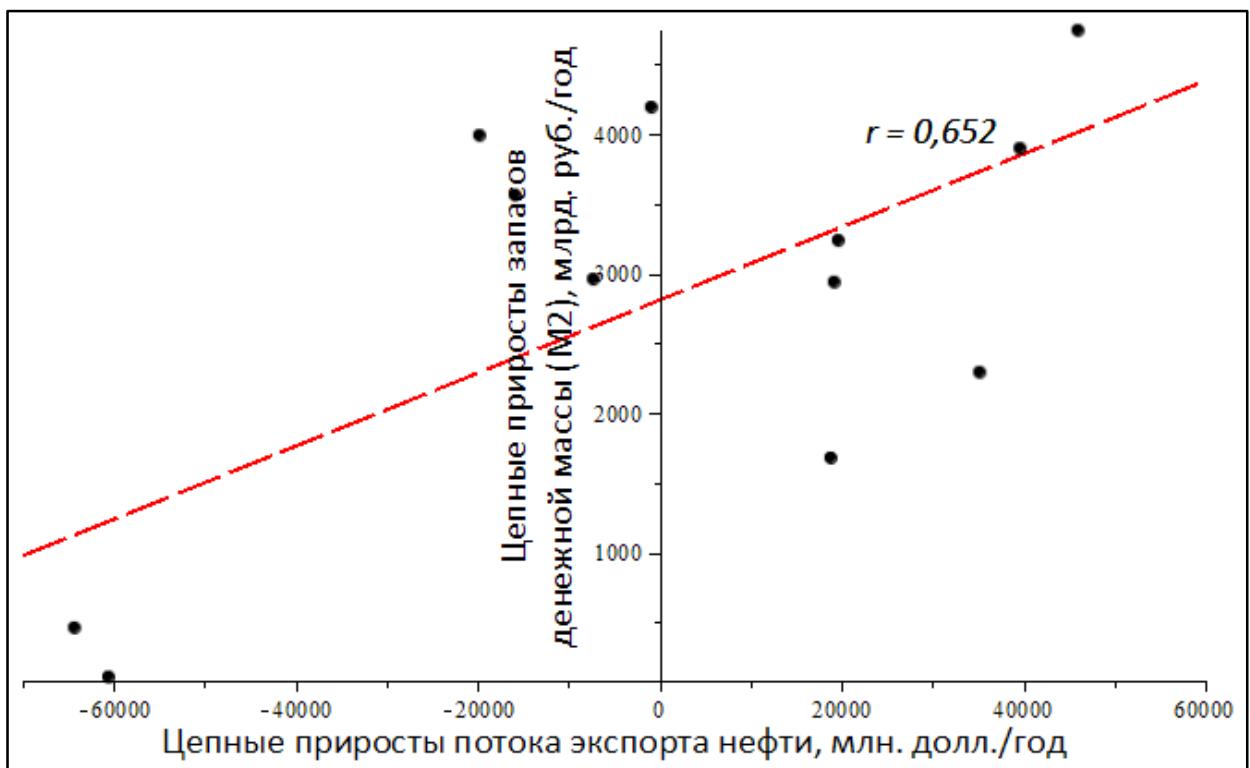
оценить при исследовании зависимости изменений денежной массы М2 (показателя типа «запас») от колебаний потока экспорта нефти.

Одной из сложных задач анализа данных является приведение используемых в исследовании статистических показателей к сопоставимому виду. Характерные примеры несопоставимости – сочетание в одной модели переменных типа «поток» и «запас» с принципиально разными размерностями. Если возникает необходимость «сравнить» процессы, например, при построении моделей взаимосвязи, исходные данные которых представлены переменными разного типа, логично привести их к одному типу – преобразовать запасы в поток или наоборот. От выбора концептуальной платформы обработки исходных данных реальных экономических процессов будет зависеть и способ преобразования запасов в потоки. Методология сплайн-моделирования в своих построениях сохраняет исходный спектральный состав экономического сигнала. Точное совпадение аппроксимирующей кривой модели с «решёткой» реальных показателей процесса во всех временных «узлах» отчётного периода можно считать принципиальным отличием подходов сплайн-методологии от методов классической эконометрики» [130].

Недостатки методов классической эконометрики при изучении потоков определяются «набором её методов, понимающий и сравнивающий в основном дискретные состояния процессов, «вырывая» их в своих исследованиях из темпорального экономического контекста – непрерывных траекторий, тенденций, потоков» [130]. Преобразование дискретных значений «решётчатой» функции экономического процесса в непрерывную математическую модель с сохранением реально достигнутых значений процесса и с заданной степенью гладкости возможно сплайновой интерполяцией.

Отказ от сглаживающих процедур сохраняет реальную «сложность» исследуемого экономического «рельефа», что требует от моделирующих функций отражать неоднородность и текучесть свойств временного ряда

адаптивной эволюцией своих параметров. Этим объясняется эффективность моделирования экономической динамики адаптивными, кусочно-непрерывными функциями, наилучшим образом представляющими «временной класс» процесса на локальном отрезке, затем оптимально соединяющими последовательные части сплайн-функции в единую структурно-вариативную модель. Преобразование сплайн-модели денежной массы (показателя типа «запас») в динамический поток выполняется дифференцированием. Предлагаемый аппарат сплайн-аппроксимации принципиально отличается от сглаживающих методов классической эконометрики тем, что позволяет искать закономерности сравнением не отдельных точек, а отрезков функций, что с лучшей точностью описывает исходную статистику» [130].



**Рисунок 3.18 – Взаимосвязь между цепными приростами потока экспортнефти и цепными приростами потока запасов денежной массы.**

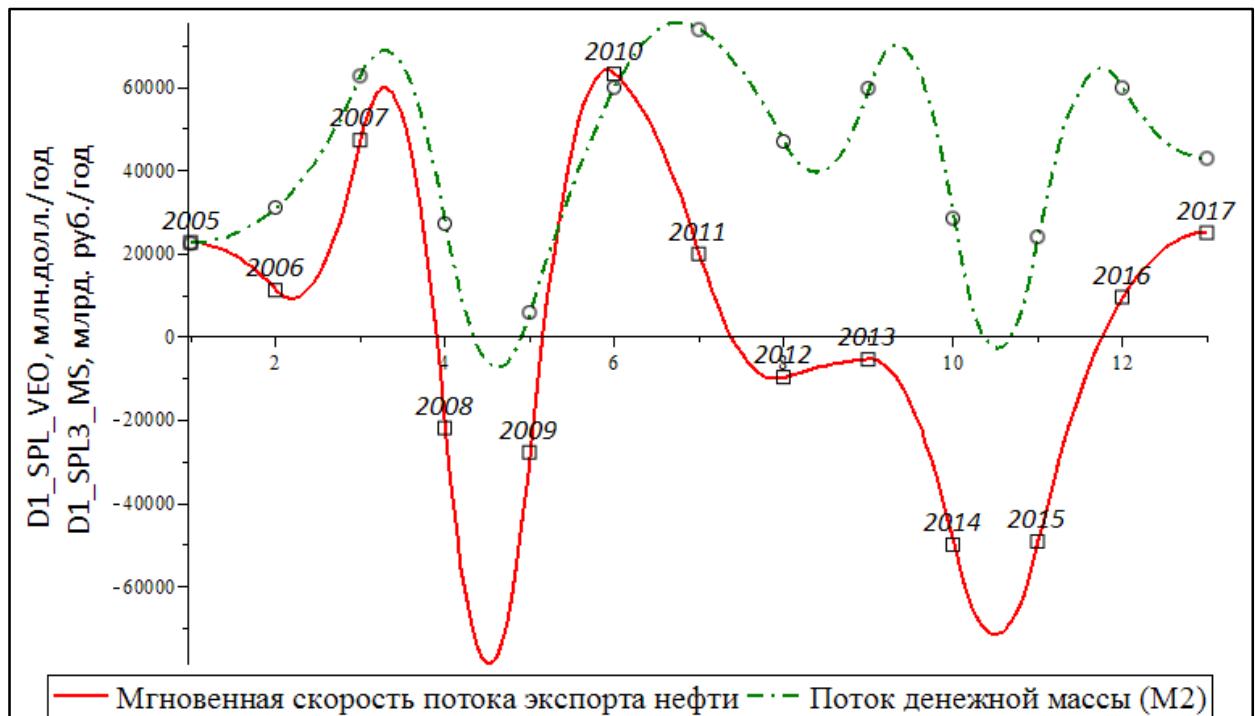
Линейная регрессия (рис. 3.18) обнаруживает умеренную положительную взаимосвязь между дискретными потоками экспортнефти и денежной массы. Методом наименьших квадратов строится непрерывная модельная линия взаимосвязи дискретных потоков, однако алгоритм

классического перехода не позволяет сохранить локальные динамические характеристики – как изменения скорости, так и темпоральную последовательность изменений, не позволяет увидеть реакции на «выбросы» факторного признака, он оценивает лишь усреднённую взаимосвязь внутри выбранного интервала времени.

Алгоритм выбора «наилучшей модели развития экономического процесса является наиболее спорным этапом исследований классической эконометрики, теперь критерием качества выступает близость модельных значений и значений исходной статистики в узловых точках. При этом попытки уменьшить уклонения модельных и эмпирических значений процесса в узловых точках увеличивают сложность аналитической модели, приводят к неадекватности исследуемой экономической динамики и средне квадратичному усреднению. Применение сплайн-аппроксимации предполагает отказ исследователя от вероятностной природы данных, проводя модельные траектории точно через все узловые точки» [130].

Дифференцированием сплайн-моделей показателей динамики получаем мгновенные скорости непрерывного изменения «экономических количеств» – запасов денежной массы и объёма экспорта нефти. Первая производная запасов денежной массы становится потоковой величиной – мгновенной скоростью изменения запасов с единицей измерения млрд. руб./год. С математической точки зрения первая производная объёмов экспорта нефти также потоковая величина – мгновенная скорость потока с единицей измерения млн. долл./год. Здесь уместно упомянуть об основном признаке, в соответствии с которым экономические показатели относятся к запасам или потокам – это отношение показателя к моментам или интервалам времени. Мгновенные скорости выявляют наличие прямой связи между изменениями исследуемых показателей (рис. 3.19). Причиной зависимости потока денежной массы от динамики экспорта нефти является механизм эмиссии денег Банком России, который связан с покупкой валюты – доходов от экспорта энергоресурсов. Поведение исследуемых потоков обнаруживает

некоторые темпоральные особенности обнаруженной взаимосвязи – в последние годы реакция потока денежной массы на колебания объёмов экспорта нефти ослабевает. Внутри некоторых непродолжительных интервалов времени потоки могут коррелировать и отрицательно, например, в 2005-2006 и 2016-2017 гг.



**Рисунок 3.19** – Первые производные потока экспортного нефти и запасов денежной массы (M2). Поток объёмов денежной массы (M2) увеличен в 15 раз с целью приведения к единой базе сравнения со скоростью потока экспортного нефти в 2005 году.

С математической, экономической, физической и многих других точек зрения любое изменение происходит с течением времени и относится к интервалу времени, даже если этот интервал очень мал. Если исходный показатель относится к запасам, определённым на конкретных моментах времени, то изменения запасов (приrostы или производные) автоматически относятся к интервалам времени. Иногда можно встретить заблуждения, что «...если в дискретном случае периоду  $i$  мог соответствовать как момент, так и интервал, то в непрерывном случае переменной  $t$  будем обозначать только моменты времени. Поэтому функциями времени в этом случае может описываться только динамика переменных типа запаса» [18, с. 130]. Если некоторый показатель, например, мгновенная скорость, определён в

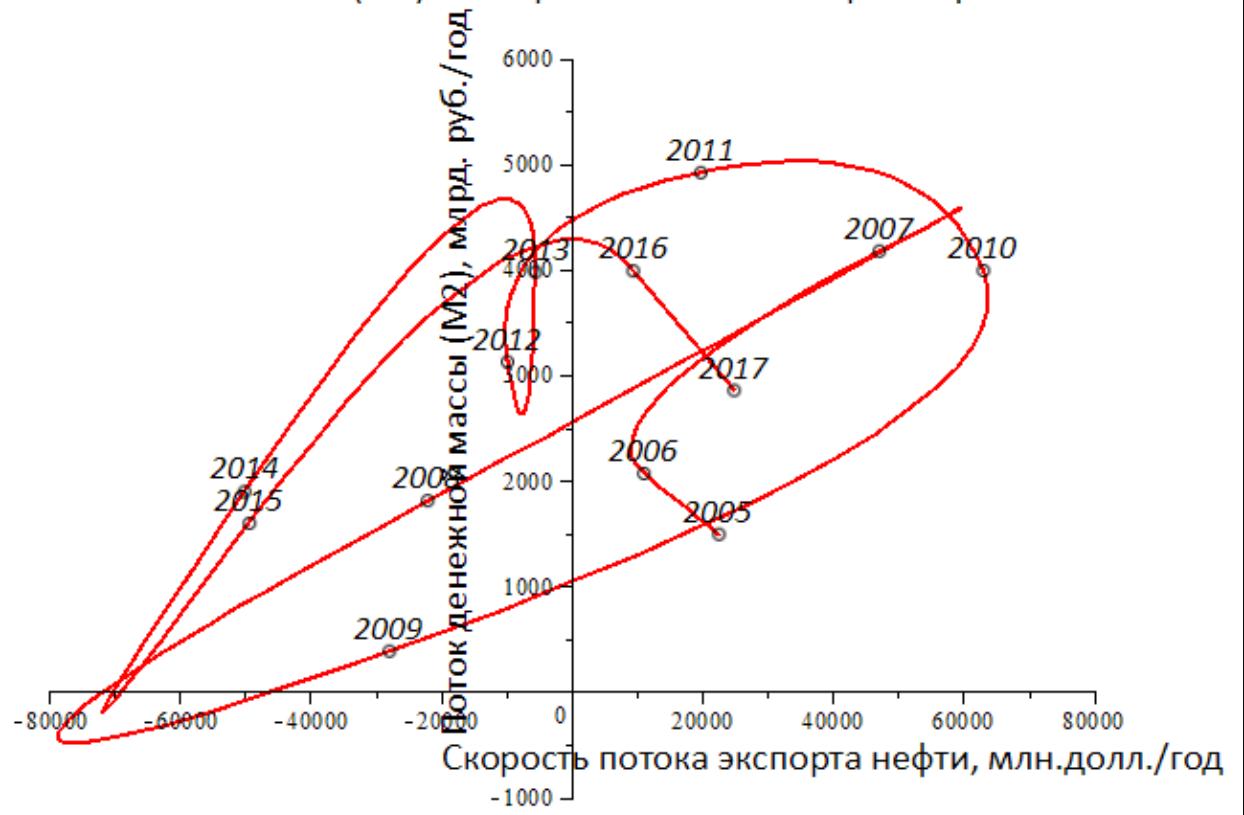
конкретный момент времени, то является показателем типа «поток». С математической точки зрения, независимо от того, является ли исходный показатель запасом, потоком или экономической переменной, дифференцирование или расчёт приростов автоматически преобразует их в потоки.

Приведение запасов денежной массы и потока экспорта нефти к одному типу показателя позволяет нам «перейти к интеллектуально-ёмкому, точному, более содержательному количественному и качественному анализу динамики непрерывных экономических потоков, к поиску на сплайн-параметрических картинах траекторий их взаимосвязей, их непрерывных изменений. Наблюдая течение экономических потоков, обнаруживается наличие тесной положительной связи между скоростью изменения объёмов экспорта нефти и скоростью изменения запасов денежной массы в России» [103, 130].

Очевидно, что покупка Банком России иностранной валюты, поступающей в виде экспортной выручки, является одним из основных источников эмиссии рубля. Возможной причиной наблюдаемой зависимости является механизм эмиссии денег Банком России, который связан с покупкой валютных доходов от экспорта энергоресурсов. Поведение исследуемых потоков обнаруживает некоторые темпоральные особенности обнаруженной взаимосвязи – ярко выраженная цикличность реакции потока денежной массы на колебания потока экспорта нефти. Внутри некоторых непродолжительных интервалов времени потоки могут коррелировать и отрицательно, например, в 2005-2006 и 2016-2017 гг.

При изучении «экономической динамики часто могут встречаться проблемы несопоставимости данных ... , когда в одной модели присутствуют одновременно переменные типа «поток» и «запас», абсолютные объёмы сравниваются с их приростами (производными), их накопленными суммами (интегралами). Раз такое сочетание содержательно некорректно, требуется провести соответствующие изменения в данных или в модели.

**Фазовая параметрическая картина зависимости потока денежной массы ( $M_2$ ) от скорости потока экспорта нефти**



**Рисунок 3.20** – Фазовая параметрическая картина прямой зависимости потока денежной массы (млрд. руб./год) от потока экспорта нефти (млн. долл./год).

Исследование показало, что классические методы обработки данных оказываются «грубыми», концептуально не предназначенными для поиска «тонких» особенностей взаимосвязи процессов – непрерывных траекторий отклика на эволюцию факторных возмущений, возможных переключений регрессии. Платформа сплайн-аппроксимационного подхода, напротив, оказывается «экологичной» относительно используемых методов обработки исходных данных, преобразуя их без ущерба для первоначальной информативности, не нарушая их «тонкого спектрального состава». Сохранение «рельефа» данных удивительным образом расширяет аналитический потенциал моделей «новой эконометрики», противопоставляя «выхолощенным» классическим трендам живые извины узоров фазовых траекторий» [130].

Сплайн-параметрическое моделирование взаимосвязей учитывает более

«тонкие» особенности взаимного воздействия исследуемых процессов, например, как одни процессы могут замедлять или ускорять другие. Усреднения «эмпирических данных классической эконометрикой утрачивают полезную информацию о локальных особенностях связей показателей с переменной структурой, об ускорении и замедлении развития процессов. Выбор моделей регрессии таит в себе большой произвол, ограниченный лишь субъективными представлениями исследователя о форме связи» [103]. Напротив, модели предлагаемой сплайн-аппроксимационной платформы должны обнаруживать «скрытые» особенности отклика результативного признака на колебания значений факторного, выявлять возможные структурные изменения связи. Моделируя процессы сплайн-функциями, методы новой методологии позволяют сохранить спектральный состав исследуемой экономической динамики. Смоделированные сплайн-интерполяцией «траектории проходят точно через все узловые точки процесса, сохраняя локальные особенности динамики, автоматически и всегда достигая значение коэффициента детерминации, равное единице» [103].

Параметрические модели взаимосвязи в фазовом пространстве сохраняют временную последовательность изменений в поведении процессов, процессы переходят из одного состояния в другое, а фазовая траектория может обнаружить извины, цикличность закручиваемых спиралей или кругов взаимного воздействия. Это принципиально противоречит моделям классической эконометрики. Непрерывность сплайн-моделей исходной динамики позволяет приводить показатели различного типа к сопоставимому виду, искать взаимосвязи уже между скоростью и ускорением экономического движения.

Поиск корреляций в колебаниях скорости и ускорений развития актуален, так как в современной экономике взаимосвязь между абсолютными показателями может не проявлять «явный характер», но при этом могут коррелировать их тенденции (потоки, первые или вторые производные

функции экономического движения), что выявляется сравнением их ускорений или замедлений роста.

Процессы в современной экономике часто характеризуются понятиями скорости, ускорения или замедления роста. В то же время экономические тенденции могут неожиданно подвергаться воздействию «событийных составляющих», что требует возвращения в анализ «аномальных значений» динамики. В фазовых траекториях сплайн-аппроксимационных моделей сохраняются все значения эмпирического процесса, в том числе и «аномальные значения», воздействие которых хорошо описываются первой производной – ускорениями или замедлениями циклического развития. Отказ от сглаживающих процедур при исследовании циклической динамики оправдан тем, что «событийные составляющие» могут сильно корректировать экономические тенденции, часто запуская развитие очередного цикла.

### **3.5 Анализ динамической конкуренции потоков в экономике**

*Математический аппарат динамической конкуренции (вытеснения) в экономике.* Рассмотрим математическую теорию построения «коэффициента конкуренции» или «коэффициента вытеснения» на примере экономических потоков [88]. Сплайн-моделирование позволило исследовать динамическую конкуренцию экономических потоков, впервые получившую математические эквиваленты с аналитическим описанием, графическими образами и числовыми характеристиками. Исследование взаимосвязей в экономических системах требует изучать конкуренцию потоков в динамике. Динамическая конкуренция потоков на рынке демонстрирует поиск непрерывных решений, отражающих баланс интересов участников рыночного взаимодействия, его достижение лежит в плоскости экономического или социально-ориентированного сотрудничества представителей фирм, ассоциаций, международных консорциумов, стран.

Адаптируем математическую теорию построения «коэффициента

конкуренции» или «коэффициента вытеснения» к моделированию и анализу конкуренции экономических потоков [28]. Пусть «коэффициент конкуренции»  $*_k KK_j = 0$  в условиях отсутствия взаимного вытеснения между  $k$ -ми потоками, например, между потоками добычи нефти. Если внутри  $j$ -го временного интервала для  $k$ -го потока  $*_k KK_j > 0$ , то он «вытесняет» другие потоки из аддитивного баланса в этом временном интервале  $j$ . При  $*_k KK_j < 0$   $k$ -ый поток сам «вытесняется» из общего баланса внутри временного интервала  $j$ .

Пусть объём  $k$ -го потока ( $k = 1..M$ ) внутри каждого  $j$ -го интервала ( $j = 1..N$ ) равен  $_k F_j$ . Совокупный объём потоков  $F_j$  для всех  $M$  потоков внутри каждого временного интервала  $j$  определим по формуле:

$$F_j = \sum_{k=1}^M {}_k F_j, \quad (j = 1..N). \quad (19)$$

Определим относительные доли потоков:

$${}_k W_j = \frac{{}_k F_j}{F_j}, \text{ так чтобы } W_j = \sum_{k=1}^M \frac{{}_k F_j}{F_j} = 1. \quad (20)$$

Выделим  $k$ -ый поток  $_k F_j$  из общего объёма остальных потоков  $_k Z_j$ , где индекс  $k$  у  $_k Z_j$  означает «без  $k$ -го потока»:

$$_k Z_j = {}_1 F_j + {}_2 F_j + \dots + {}_{k-1} F_j + {}_{k+1} F_j + \dots + {}_M F_j. \quad (21)$$

Тогда равенство (20) можно представить в виде:

$$W_j = \frac{{}_k Z_j}{F_j} + \frac{{}_k F_j}{F_j} = 1. \quad (22)$$

Среднее значение доли потоков  $W_j$  на каждом интервале  $j$  ( $j = 1..N$ ) будет равно:

$$\bar{W}_j = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{{}_k F_j}{F_j}. \quad (23)$$

Динамическое «вытеснение»  $k$ -го потока определяется как разность между долей «вытесняемого» потока и средним значением  $\bar{W}_j$  долей всех потоков в системе на каждом интервале  $j$  ( $j = 1..N$ ):

$$*_k \mathbf{KK}_j =_k W_j - \bar{W}_j. \quad (24)$$

В соответствии с известным свойством средней арифметической, сумма отклонений доли каждого потока  $k$  от средней  $\bar{W}_j$ , соответственно и сумма «коэффициентов конкуренции»  $*_k \mathbf{KK}_j$  для всех включённых в анализ потоков на каждом шаге  $j(j = 1.. N)$ , будет равна нулю:

$$\sum_{k=1}^M *_k \mathbf{KK}_j = \sum_{k=1}^M (W_j - \bar{W}_j) = 0. \quad (25)$$

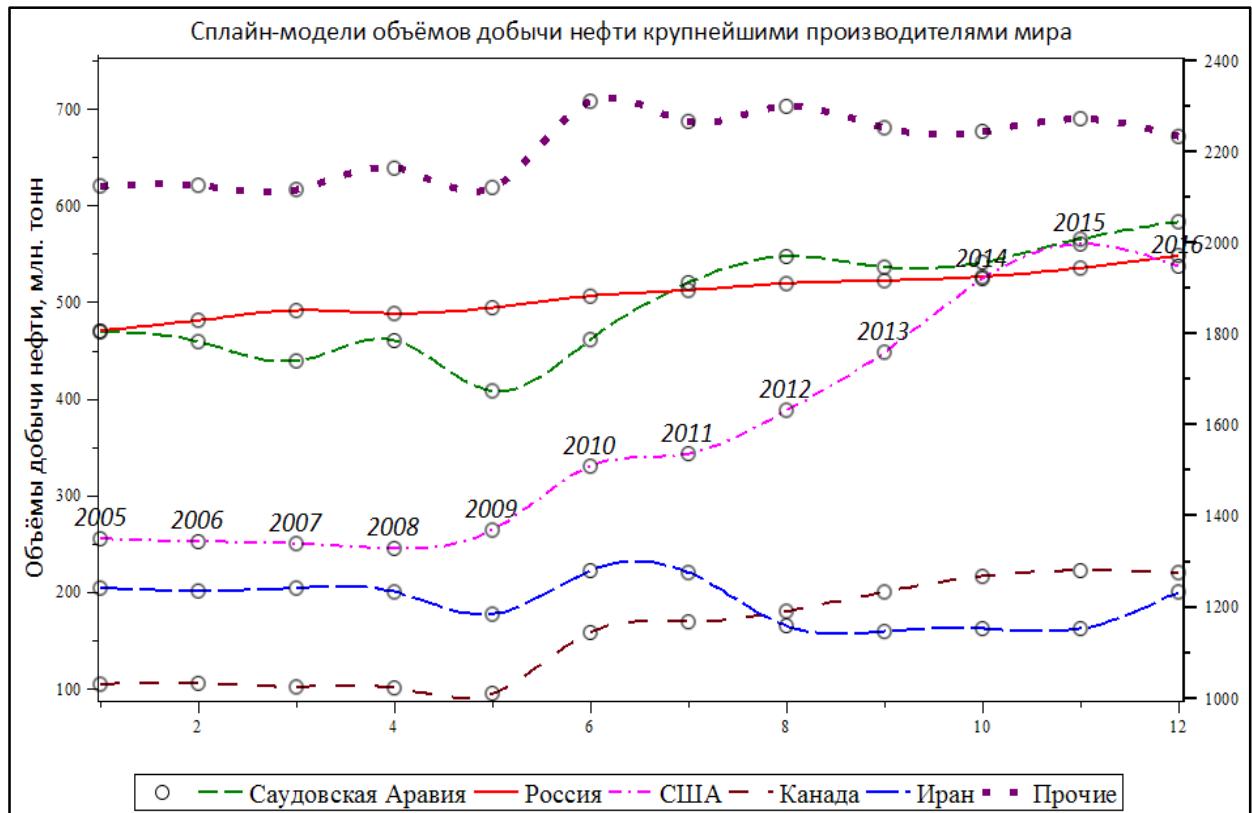
Динамический «коэффициент конкуренции» (24) на каждом  $j$ -ом интервале нормирован относительно нуля и ограничен диапазоном значений  $\left[-1 + \frac{1}{M}; 1 - \frac{1}{M}\right]$ , где  $M$  – количество потоков в системе.

В предлагаемой модели исследуется взаимное «вытеснение» потоков производства нефти крупнейшими производителями – Саудовской Аравией, Россией, США, Канадой и Ираном. Наиболее заметную динамику роста демонстрирует поток добычи нефти в США – начиная с 2009 года он увеличился почти вдвое, сравнявшись в 2015 году с объёмами добычи нефти в Саудовской Аравии. Для России характерен стабильный ежегодный рост объёмов добычи нефти, хотя и без заметных ускорений роста.

Анализ показывает сохранявшееся до последних лет доминирование на мировом рынке нефти России и Саудовской Аравии. При этом динамично возрастает роль Соединённых Штатов Америки, вытесняющих в конкурентной борьбе долю Ирана в общемировой добыче нефти, параллельно снижая конкурентные преимущества России и Саудовской Аравии (рис. 3.21).

В настоящее время можно констатировать, что США добились энергетической независимости, и поскольку ОПЕК регулярно вводит квоты на добычу, американская нефть не только удовлетворяет львиную долю внутреннего потребления, но и активно экспортируется. Технологические достижения, новая дружественная к энергетике администрация и более

низкие корпоративные налоги улучшили конкурентные позиции американских производителей энергии, и теперь страна не только достигла энергетической независимости, но и стала крупнейшим производителем энергии в мире.



**Рисунок 3.21** – Динамика потоков добычи нефти крупнейшими производителями нефти в мире. Объёмы добычи нефти «прочих» спроектированы на дополнительную ось.

Анализ данных показывает «как менялась роль некоторых стран – крупнейших производителей на мировом рынке нефти – в последние годы (рис. 3.22). Особенный интерес вызывает антагонистическое поведение США и Ирана в контексте их усиливающегося политического противостояния. Становится очевидной цель санкций США 2011-2012 гг., которые вводились против Ирана, как утверждалось, для создания препятствий на пути развития ядерной программы, а на самом деле привели к доминированию Штатов на мировом рынке нефти» [88].

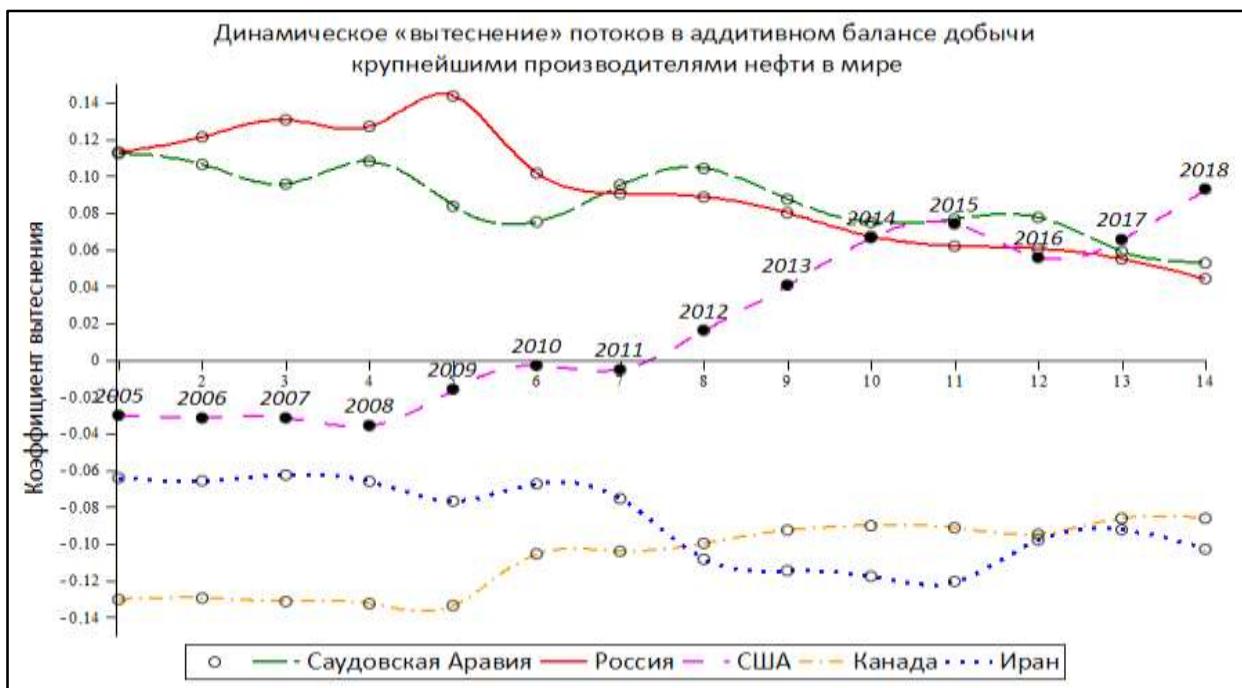


Рисунок 3.22 – Динамическое «вытеснение» потоков в аддитивном балансе добычи нефти

Предлагаемый подход к количественному исследованию экономической конкуренции позволил увидеть динамические особенности взаимного воздействия стран, в том числе и их роль в формировании общемирового итога. Непрерывность и аналитичность предлагаемых моделей позволяет исследовать конкуренцию и в тех случаях, когда конкуренция некоторых участников рынка принимает «скрытый» характер, обнаруживая её во взаимном влиянии ускорений или замедлений движения. Для этого необходимо от сравнения динамики показателей типа «запасов» перейти к исследованию «потоков» экономического показателя путём дифференцирования сплайн-моделей экономического движения» [88].

*Пространственная конкуренция потоков ВВП крупнейших экономик мира.* Выполним анализ конкуренции потоков валового внутреннего продукта некоторых стран мира. Хотелось бы построить «коэффициент конкуренции» так, чтобы и в динамике, и количественно определялась потеря роли экономики некоторой страны в мировом потоке ВВП. Для исследования возможной цикличности процесса конкуренции ВВП «погрузим» динамику взаимного вытеснения в фазовое пространство. С учётом высокой вариативности во времени относительных показателей стран в общемировом

ВВП, при создании этого коэффициента представляются полезными сплайновые, фазовые и эконофизические подходы.

Представим общемировой поток ВВП как сумму динамических потоков ВВП макроэкономик всех стран мира. Трудность исследования конкуренции ВВП стран мира состоит в том, что при вариации годовых показателей потока ВВП каждой страны меняется и суммарный мировой мегапоток ВВП каждого года, динамично и одномоментно меняя сами локальные потоки и их сумму. Известно, что увеличение потока ВВП некоторых стран требует большей их доли в потреблении общемировых ресурсов. Отъём у других участников конкурентной борьбы части ресурсов воздействует на общемировые материальные, производственные потоки, потоки инвестиций и др. Предположим, что «рост потока ВВП отдельной страны ограничивает возможности других стран и «вытесняет» их из общемирового баланса. Хотелось на примере потоков ВВП в динамике и количественно точно определить, как, кто, когда, за счёт кого и насколько энергично вытесняет другие экономики» [88].

Являясь широким показателем общего объёма внутреннего производства, валовой внутренний продукт функционирует в качестве комплексной системы показателей экономического здоровья страны.

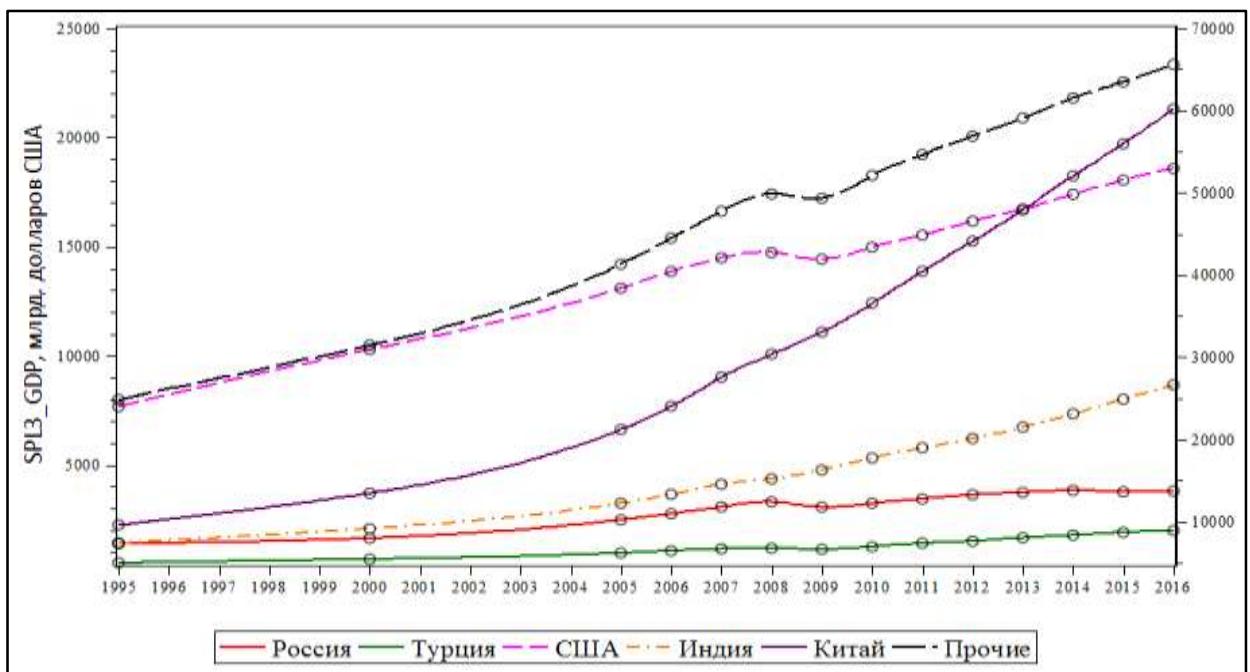
ВВП может расти или за счёт увеличения объёмов производства в экономике, либо его рост может быть следствием увеличения цен на товары и услуги. Хотелось бы нивелировать действие колебаний цен и исследовать насколько реально возросло производство в экономике. Для описания ВВП используют следующие аббревиатуры – для «номинального» (*Nominal GDP*) или «абсолютного» (*NGDP*) ВВП.

Указом Президента Российской Федерации в мае 2018 г. была поставлена цель увеличить темпы роста экономики – около 3% ежегодно. Также в качестве важной цели было обозначено вхождение России число пяти крупнейших экономик мира за счёт обеспечения темпов экономического роста, превышающих средние значения в мире. Эта цель

могла быть достигнута до 2024 года при увеличении потока ВВП на 2,5–3,0% ежегодно.

По данным прогноза Всемирного банка, средние темпы роста ВВП в мире колебались от 2,9% в 2015 г. до 3,0% в 2018 г. Для сравнения крупнейших экономик мира динамику ВВП корректируют на паритет покупательной способности. Тогда показатель в целом учитывает не только производственные потоки, но и динамику доходов и цен в стране, а также нивелируют колебания курса национальных валют. Тогда для межстрановых сопоставлений ВВП по ППС становится более подходящей мерой, чем динамика ВВП в долларах по официальному валютному курсу. По данным Аналитического центра при Правительстве РФ, в 2018 году Россия была на 11-м месте среди стран мира по номинальному ВВП, а по объёму ВВП по ППС занимала 6-е место.

Соединённые Штаты и Китай являются крупнейшими экономиками мира, измеряемыми как номинальным ВВП, так и при его оценке по ППС (рис. 3.23). На экономический рост и процветание этих стран влияет широкий спектр факторов, а именно инвестиции в образование рабочей силы, объёмы производства, природно-географический потенциал и уровень развития предпринимательства. В этом смысле экономики США и Китая имеют уникальную комбинацию факторов, которые привели к заметному экономическому росту. Анализ динамики ВВП по ППС Соединённых Штатов говорит о том, что на протяжении долгого времени страна оставалась лидером по этому показателю в мире. Факторами роста здесь можно считать поддержку предпринимательства, положительная демографическая ситуация, высокий уровень доходов населения, относительно низкий уровень безработицы и высокие потребительские расходы. В 2016 году ВВП США по паритету покупательной способности составлял 18569,1 млрд. долл., уступая по этому показателю Китаю.



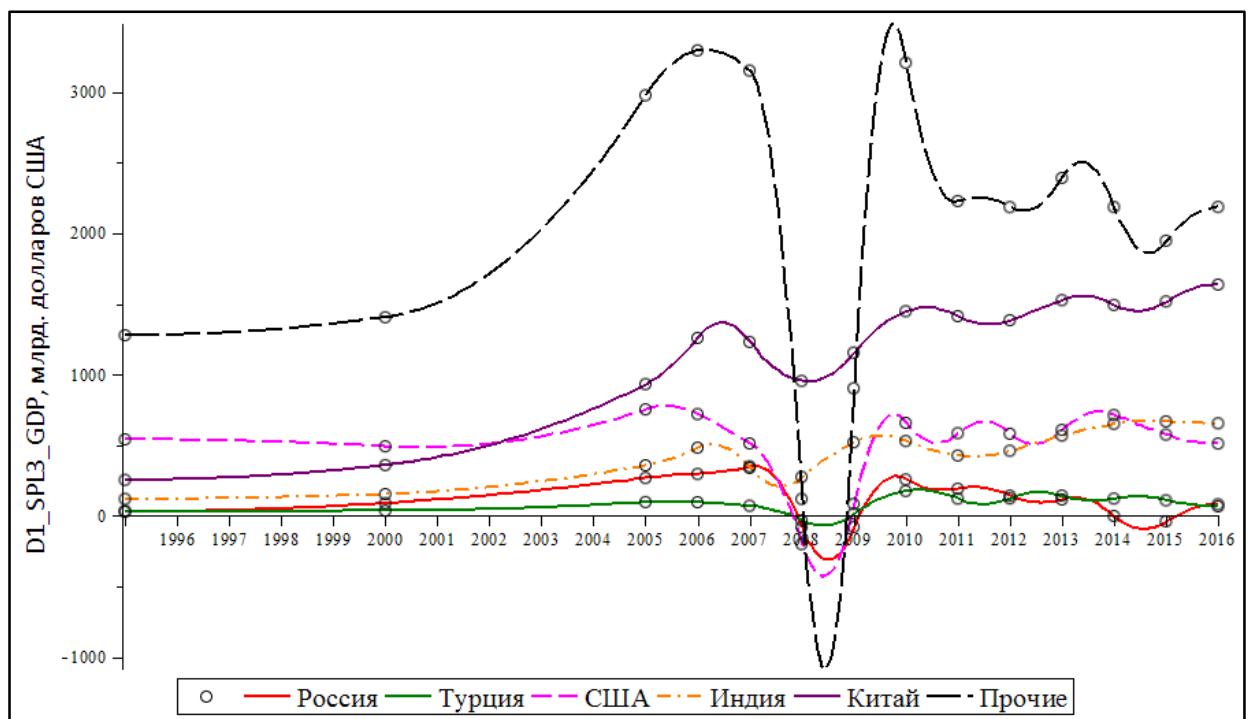
**Рисунок 3.23** – Потоки ВВП России (RED, solid line), Турции (GREEN, solid line), США (MAGENTA, dash line), Индии (CORAL, dash dot line), Китая (PURPLE, solid line) и группы остальных стран мира «Прочие» (BLACK, long dash line). Значения объёмов ВВП прочих стран привязаны к дополнительной оси справа по паритету покупательной способности, млрд. долларов США.

Китай имеет устойчиво и динамично растущую экономику, со средним темпом роста около 9 % на протяжении последних лет, начиная с конца прошлого столетия. Хотя по величине номинального ВВП Китай является второй экономикой мира, но по объёмам ВВП по ППС в настоящее время стал лидером среди всех стран в мире.

Интересны динамические задачи макроэкономики, задачи с движением потока ВВП во времени. Ранее упоминалась важность аналитичности и растущая роль производных в экономике. Анализ скорости потоков (рис. 3.24) обнаруживает на некоторых темпоральных участках синхронность поведения общемировых тенденций ВВП, в то же время видны и различия в реакции стран на воздействия «событийных составляющих» динамики. При увеличении потока ВВП кривые располагаются над горизонтальной осью – нулём первой производной. В 2008-2009 годах траектории потоков ВВП России, Турции и США и группы «прочих» стран одновременно уходят в область отрицательных значений, обнаруживая при этом различную «глубину падения». В то же время потоки ВВП Индии и Китая реагируют на

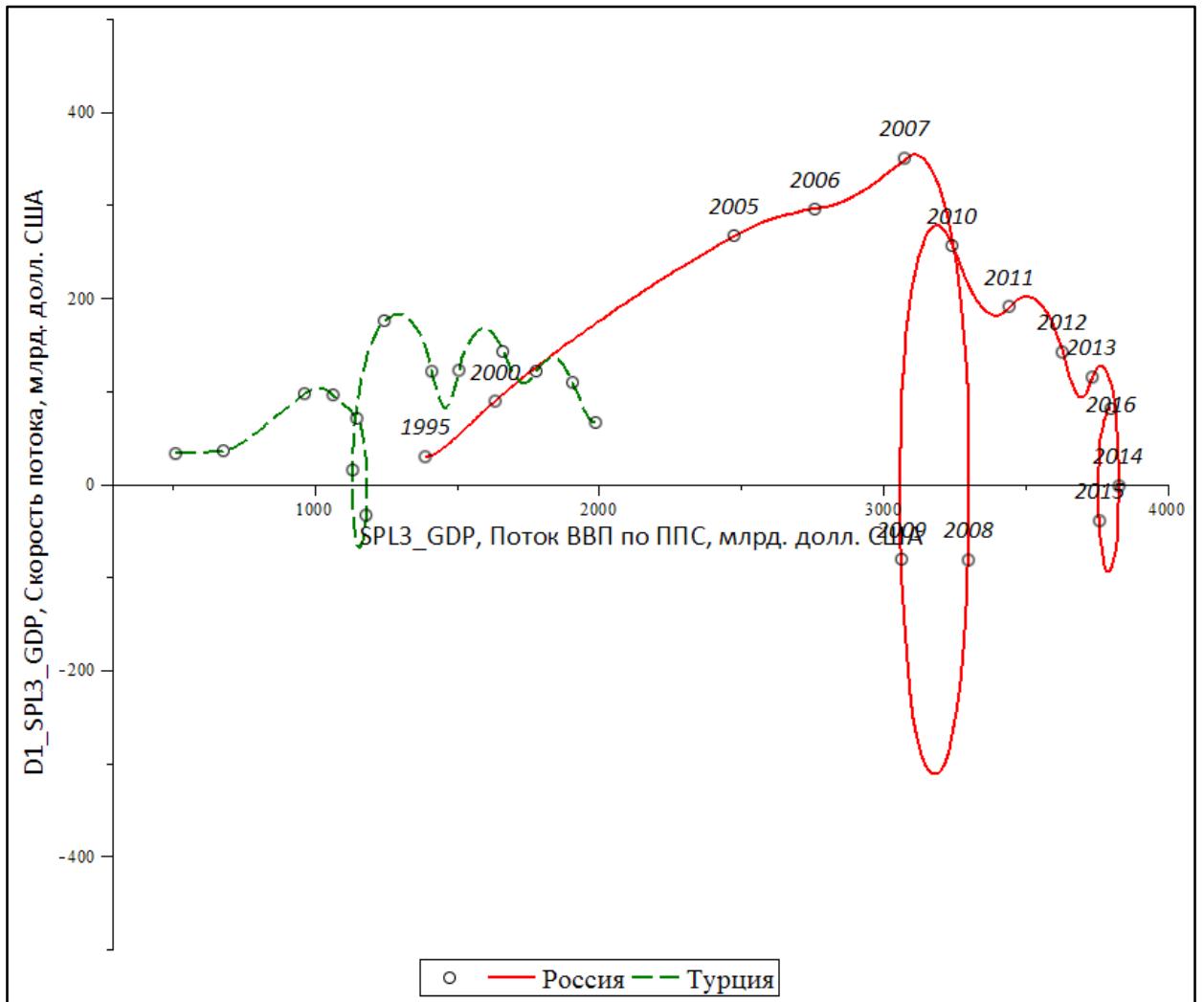
общемировой кризис лишь замедлением роста. Пример полезности сохранения абсолютной точности в моделях исследуемой динамики.

Сохранением точности данных удалось оценить различия в реакции скорости роста (первой производной) ВВП стран мира на «событийную составляющую» динамики – в 2008 и 2009 гг. видно воздействие экономического кризиса, который стремительно сократил потоки ВВП пропорционально масштабу национальных экономик некоторых стран. При выходе из кризиса проявились структурные изменения во взаимном воздействии потоков ВВП. Если до кризиса наблюдалось устойчивое и синхронное увеличение потоков ВВП, то после 2009 года потоки ВВП усилили процесс взаимного «вытеснения» из общего итога. В 2014 г. Россия оказалась единственной из рассматриваемых стран, для которой кривая скорости потока ВВП снова приблизилась к нулевому уровню роста, а в 2015 г. скорость роста для России оказалась даже отрицательной.



**Рисунок 3.24** – Скорость потоков (первые производные) ВВП по ППС России (RED, solid line), Турции (GREEN, solid line), США (MAGENTA, dash line), Индии (CORAL, dash dot line), Китая (PURPLE, solid line) и группы остальных стран мира «Прочие» (BLACK, long dash line) в 1995-2016 гг. Сплайн-аппроксимация. Система компьютерной математики MAPLE 17

Фазовые портреты ВВП позволяют одновременно наблюдать абсолютные изменения их объёмов и циклическую траекторию скорости потоков (рис. 3.25). Сравнение фазовых траекторий двух стран даёт представление о «масштабах экономик» этих стран, а также особенностях циклического развития.



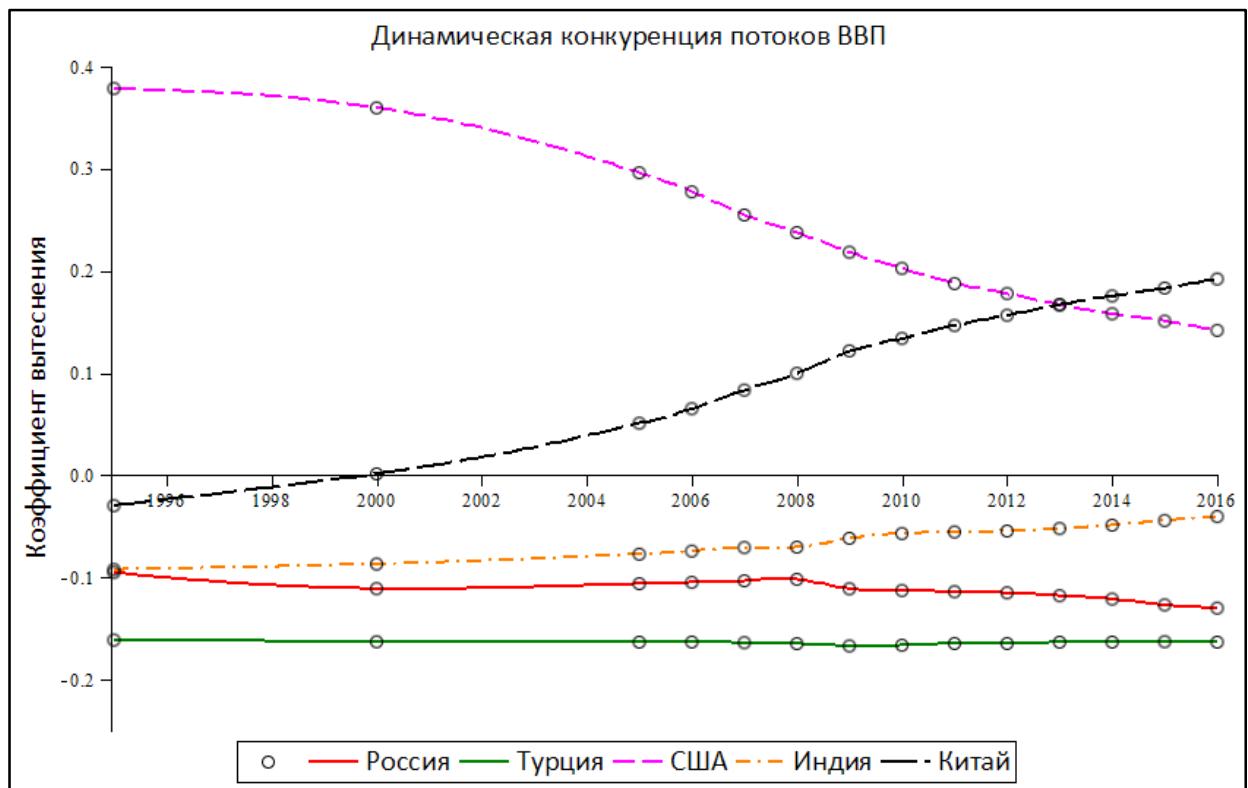
**Рисунок 3.25** – Фазовые портреты динамики ВВП России (RED, solid line) и Турции (GREEN, dash line) в 1995-2016 гг. По оси абсцисс – поток ВВП, по оси ординат – мгновенная скорость потока ВВП. Кубическая сплайн-аппроксимация. Система компьютерной математики MAPLE 17

Видно, что в 2008-2009 гг. реакция потоков ВВП России и Турции на общемировой кризис была схожей. Последующий рост ВВП России продемонстрировал возврат к циклическому падению потока – первая производная возвращается в область отрицательных значений в 2015 году. Траектория скорости потока ВВП Турции с 2009 года остаётся в зоне положительных изменений. Наибольшая скорость увеличения потока ВВП

России наблюдается в 2007 году, заметное снижение потока – в 2008, 2009 и 2015 гг., поток ВВП растёт линейно в 1995-2007 гг.

В математической модели «конкуренции потоков» представим страны, наиболее заметно и необычно конкурирующих в современной geopolитике – Россию, Турцию, США, Индию и Китай. Временной интервал 22 года – с 1995 по 2016 гг. Используем эмпирические данные Росстата.

На рисунке 3.26 можно заметить, что с 1995 по 2005 гг. в исследуемой группе стран ВВП США (*MAGENTA, dash line*) активно вытеснял из общемирового итога ВВП России (*RED, solid line*) и Турции (*GREEN, solid line*).



**Рисунок 3.26 – Сводная картина динамической конкуренции потоков ВВП**

Основная динамическая борьба за влияние на ресурсы мирового ВВП разворачивается между США и Китаем. По результатам исследования абсолютных показателей можно предположить, что США в исследуемой конкурентной борьбе находились долгое время «над схваткой», однако относительные изменения потоков ВВП в последние годы обнаруживают растущую роль экономики Китая в вытеснении потоков ВВП других стран из общемирового итога. Россия в конкурентной борьбе потоков ВВП

оказывается «вытесняемой» страной, более ярко ухудшение конкурентности начинает проявляться после 2008 г. Конкурентность ВВП Индии, напротив, повышается, а с 2008 года уже небольшим ускорением. Изменения в конкурентности потока ВВП Турции в исследуемом интервале времени практически не обнаруживаются. Для более качественного отображения мировой конкуренции потоков ВВП интересно исследовать динамику показателей большего числа крупнейших экономик мира.

Методология сплайн-моделирования привлекательна тем, что методы фазового анализа можно привлечь не только к динамике показателей ВВП, но и к динамике связанных с ними относительных переменных – к «коэффициентам конкуренции» и «коэффициентам вытеснения».

*Фазовый анализ динамики «коэффициентов конкуренции» стран мира в общемировом потоке ВВП.* Погрузим «коэффициенты конкуренции» потоков ВВП в фазовое пространство для исследования цикличности их фазовых траекторий. Фазовая траектория «коэффициента конкуренции» потока ВВП России демонстрирует ухудшение роли страны в общемировой конкуренции. В начале исследуемого периода с 1995 г. позиция России по исследуемому показателю находится в роли «вытесняемой» страны – первая производная «коэффициента конкуренции» отрицательная, а траектория дальнейших изменений говорит об ухудшении конкурентности ВВП России в общем потоке ВВП исследуемых стран. Начиная с 2000-го года «коэффициент конкуренции» по циклической траектории возвращается к положительным значениям, характеризуя усиление роли России в относительном «вытеснении» экономик других стран из общемирового потока ВВП. В 2007 году достигнув своего пикового значения, рост «коэффициента конкуренции» ВВП России прекращается. В кризисном для мировой экономики 2008 году начинается период ускоренного снижения роли России в конкуренции потоков ВВП стран мира. В 2010 году «коэффициент конкуренции» демонстрирует кратковременную остановку падения. Однако, в дальнейшем фазовая траектория демонстрирует продолжение падения

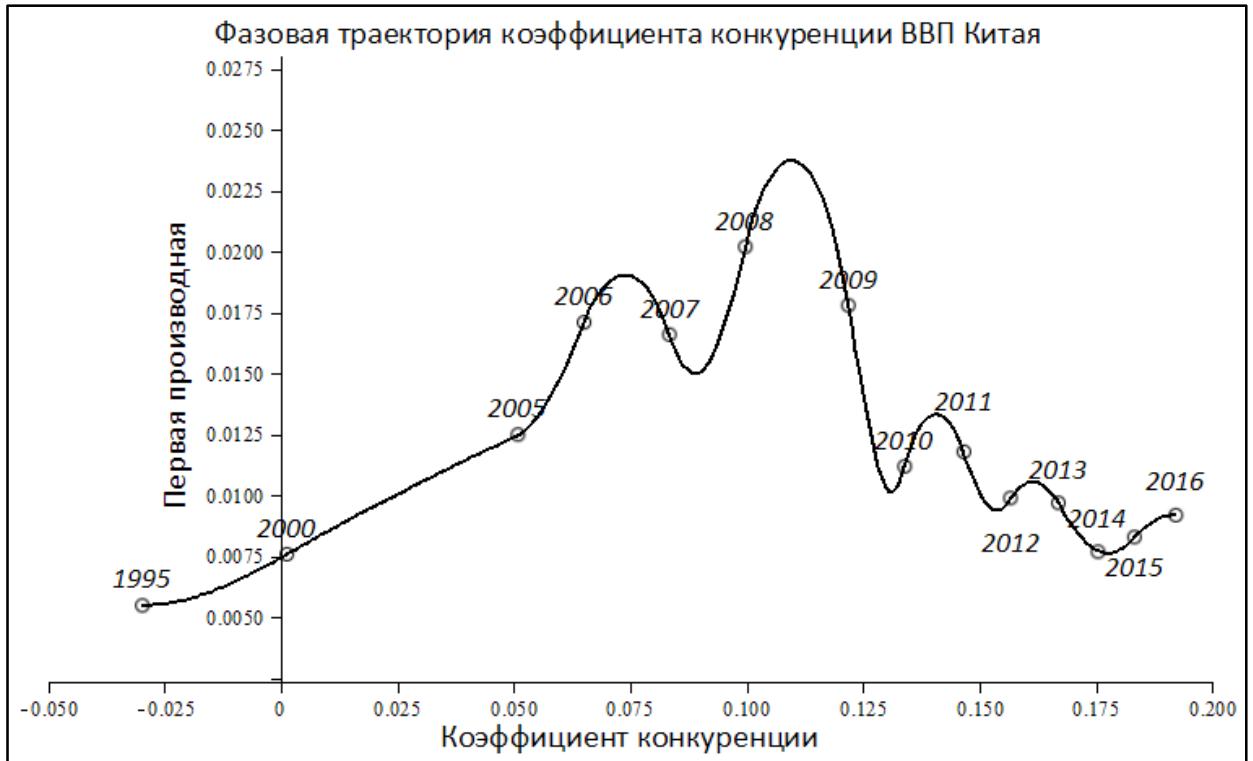
конкурентных возможностей страны, с усилением отрицательной тенденции в 2014-2015 гг. В фазовой траектории явно выделяется цикл – в 2007-2010 гг. Также заметно усиление негативных тенденций в конкурентности потоков ВВП России в 2008-2009 гг. и 2014-2015 гг. Направление раскручивания «спирали» фазовой траектории (справа-налево) также говорит об ухудшении исследуемой динамики.



**Рисунок 3.27** – Цикличность «коэффициента конкуренции» ВВП России (RED) в общемировом ВВП.

При долговременном доминировании тенденции роста или спада фазовые траектории «коэффициента конкуренции» обнаруживаются в виде «циклов роста» (рис. 3.28). Обращает на себя внимание отсутствие в динамике «коэффициента конкуренции» ВВП Китая явной цикличности – первая производная всегда положительная, характеризуя непрерывный рост роли экономики страны в конкуренции потоков ВВП мира (рис. 3.28). Интересно поведение «коэффициента конкуренции» в кризисные для большинства стран мира 2008-2009 годы – именно в этот период скорость его роста наибольшая для всего исследуемого временного интервала. Движение

фазовой траектории относительно темпоральных меток происходит слева направо, демонстрируя непрерывный абсолютный рост «коэффициента конкуренции». Можно получить подобные траектории для «коэффициентов конкуренции» других стран.

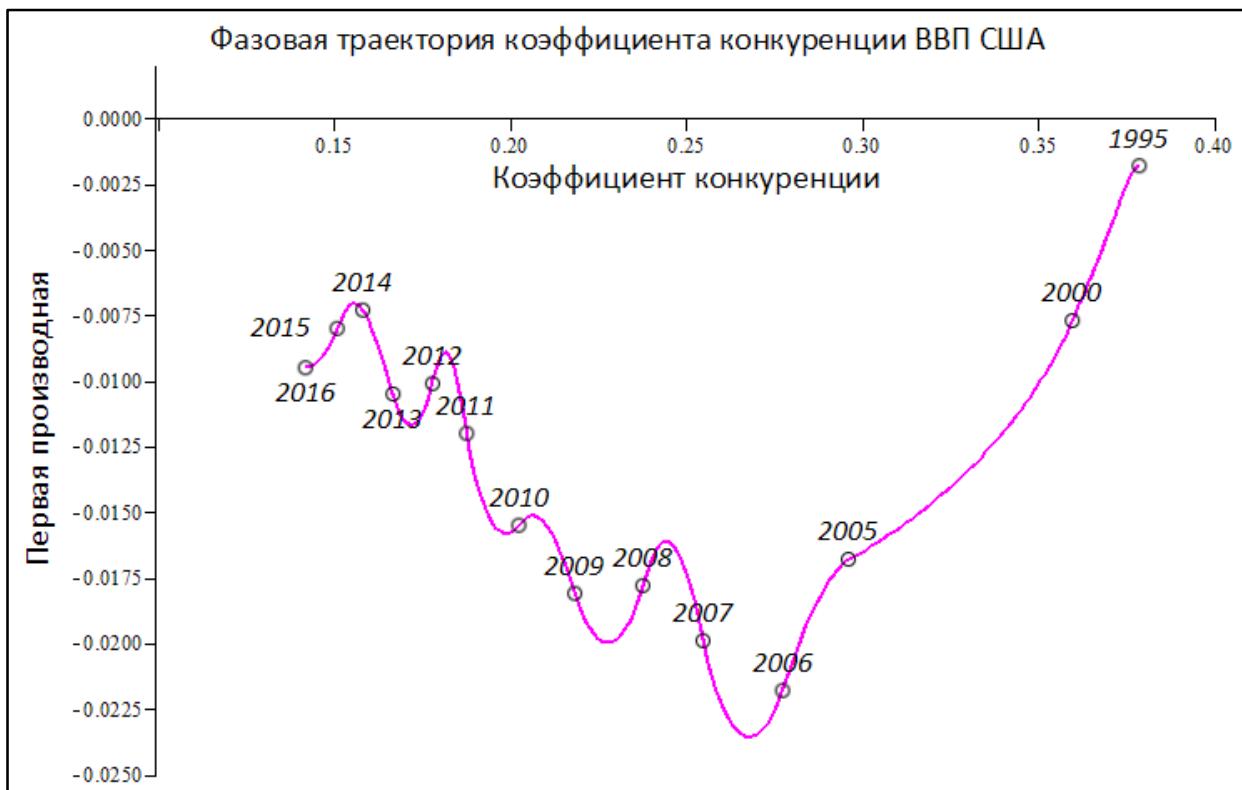


**Рисунок 3.28 – Фазовый портрет «коэффициента конкуренции» ВВП Китая в общемировом ВВП (BLACK).** Устойчивый динамичный рост роли ВВП Китая с усилением конкурентных преимуществ в кризисные для мировой экономики 2008-2009 гг. Сплайн-аппроксимация. Система компьютерной математики MAPLE 17

Найденные локальные «коэффициенты конкуренции» стран со своими динамическими ВВП демонстрируют одновременно аналитичность, математическую строгость и точность, графическую чёткость и практическую пользу достаточно непривычных для экономики подходов «новой эконометрики» с количественным расчётом «конкуренции» стран в «производстве» мирового ВВП.

Почти зеркально-противоположное поведение относительно фазовой траектории «коэффициента конкуренции» Китая демонстрирует траектория исследуемого показателя для США. Скорость роста «коэффициента конкуренции» во всём исследуемом интервале отрицательная, максимальная

скорость падения наблюдается в 2006-2007 годах. Движение фазовой траектории относительно темпоральных меток здесь также противоположное полученной для Китая фазовой траектории – перемещение справа налево характеризует устойчивое снижение абсолютного значения «коэффициента конкуренции». Яркая демонстрация антагонистичности интересов крупнейших «игроков» в освоении мировых ресурсов, столь свойственной современной глобализующейся сетевой экономике.



**Рисунок 3.29** – Фазовый портрет «коэффициента конкуренции» ВВП США (*MAGENTA*). Движение по кривой справа ( $j = 1995$ ) налево ( $j = 2016$ ) в области положительных значений «коэффициента конкуренции». Картина ослабления роли потока ВВП США в общемировой конкуренции.

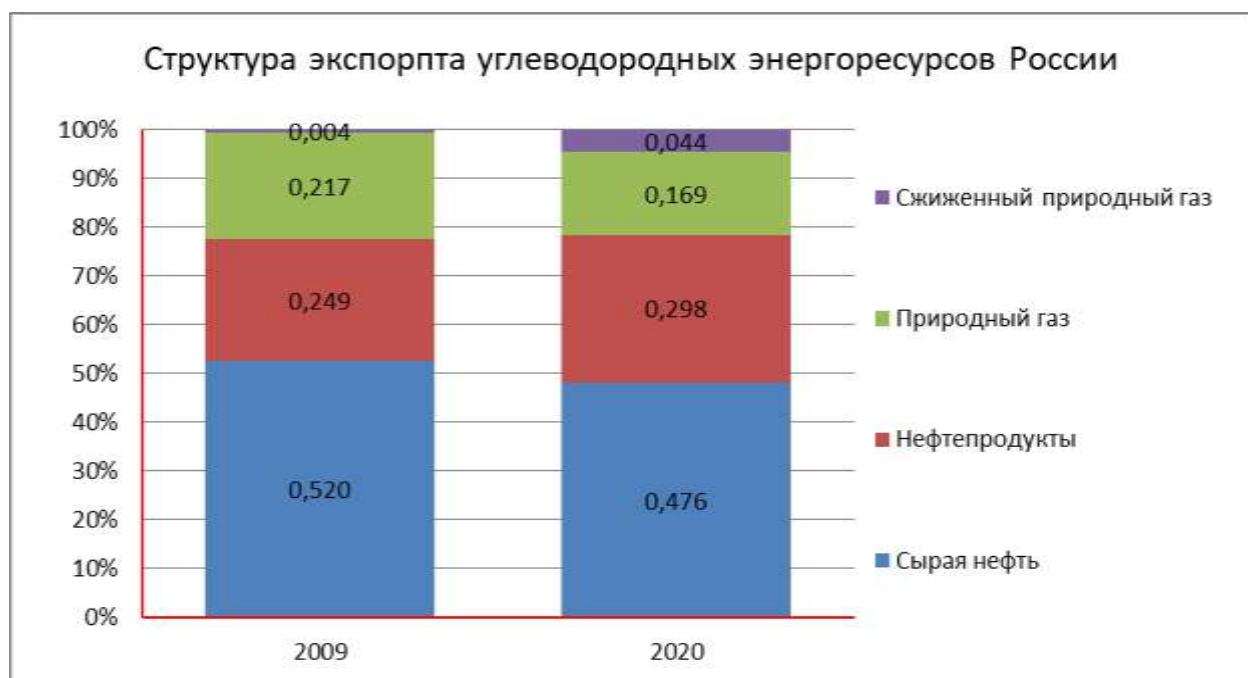
*Анализ динамической конкуренции на рынке энергоресурсов в потоке экспорта России.* В современном мире сохраняется сильная зависимость экономического роста от производства и потребления энергоресурсов. Несмотря на совершенствование технологий в сочетании со снижением затрат на солнечную и ветровую энергию, более дешёвое и эффективное освещение и приборы, увеличение доли альтернативной энергии в общемировом потреблении, углеводородные энергоресурсы остаются остро востребованными мировой экономикой. В последние годы заметно растёт

расширение доступа к электроэнергии, что оказывает позитивное воздействие во всех регионах, оно ускоряет темпы прогресса.

Занимая Северную Азию и большую часть Восточной Европы, Российская Федерация является самой большой в мире территорией. Россия в настоящее время – один из основных экспортёров нефти и природного газа в мире. По данным *BP* [288], Россия в ближайшие годы будет обеспечивать около 14% мирового производства нефти и газа. По оценкам *Росстата*, экспортируемые Россией товары и услуги, включая реэкспорт, составляли в 2016 г. 26.2% от общего объёма российского экономического производства или валового внутреннего продукта [215]. Меняющаяся структура запасов, потребление энергоресурсов, изменения в стоимости добычи, транспортировки, требования к экологичности и многие другие факторы усиливают конкуренцию между различными видами энергоресурсов. Результатом влияния конкуренции может стать вытеснение каким-то одним или несколькими видами энергоресурсов других из общего итога экспорта России. Традиционно в товарной структуре экспорта России заметно преобладали топливно-энергетические товары. Например, в 2009 году их совокупная доля составляла около 64% от всего экспорта товаров. Наибольшую долю в экспорте России в тот период занимала сырая нефть – более трети всего экспорта товаров, а вместе с нефтепродуктами эта величина составляла около 50% экспорта товаров [229]. На долю природного и сжиженного газа приходилось около 14%, от общего объёма экспорта товаров.

В 2020 году стоимость потока экспорта углеводородных ресурсов России по сравнению с 2009 годом снизилась более чем на 21%, вероятно, из-за общего снижения цен на мировом рынке нефти и газа. Заметное снижение доли в экспорте России в стоимостном выражении в 2020 году по сравнению с 2009 годом показали сырая нефть и природный газ – на 4.4% и 4.8% соответственно. В то же время доля сжиженного газа в стоимости потока экспорта углеводородных энергоресурсов за этот же период времени

увеличилась на 4%. Доля нефтепродуктов в стоимости экспорта углеводородных энергоресурсов увеличилась в 2020 году по сравнению с базисным 2009 почти на 5%.



**Рисунок 3.30 – Структура экспорта углеводородных энергоресурсов России в 2009 и 2020 гг.**

Дискретное представление (рис. 3.30) взаимного вытеснения отдельных энергоресурсов из общего итога в экспорте энергоресурсов России не совсем информативно, не позволяет наблюдать темпоральные особенности взаимного вытеснения. Мы предлагаем исследовать взаимную конкуренцию сырой нефти, нефтепродуктов, природного и сжиженного газа в экспорте энергоресурсов России так, чтобы представлять непрерывно и количественно потерю доли одного из компонентов в общем экспорте энергоресурсов. Складываясь, объёмы экспорта всех исследуемых видов ресурсов образуют общероссийский объём экспорта ресурсов, при этом наряду с колебаниями годовых показателей экспорта каждого ресурса меняется и общероссийский объём экспорта. Очевидно, рост объёмов экспорта каждого отдельного энергоресурса требует части общемирового рынка, его потребляющего. В связи с этим рост объёмов экспорта одного ресурса снижает долю потребления других ресурсов, «вытесняя» их востребованность из общего баланса. Исследуем динамические и количественные особенности

вытеснения одних ресурсов другими из общероссийского экспорта энергоресурсов.

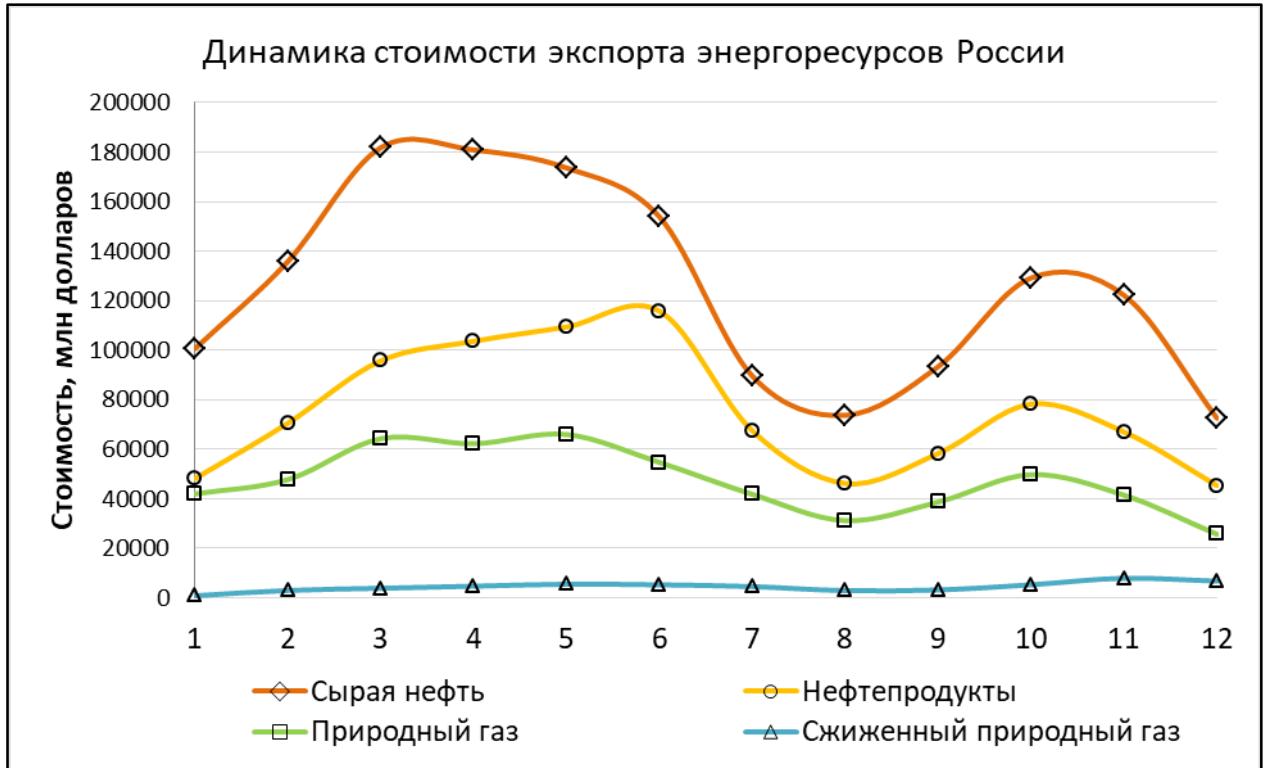


Рисунок 3.31 – Динамика экспорта углеводородных энергоресурсов России в 2009-2020 гг., млн. долл. США

Следует определить меру динамического влияния  $k$ -ой группы ресурсов или одного  $k$ -го ресурса на роль любого другого ресурса в общем объёме экспорта. В предлагаемой модели взаимного «вытеснения» в общероссийском объёме экспорта энергоресурсов будем учитывать сумму объёмов экспорта сырой нефти, нефтепродуктов, природного и сжиженного газа. Обозначим общий объём экспорта углеводородных энергоресурсов России в каждом  $j$ -ом году через  $F_j$  [88]. Определим объёмы экспорта каждого ресурса:

$_1F_j$  – объём экспорта сырой нефти, млн. долл. в год;

$_2F_j$  – объём экспорта нефтепродуктов, млн. долл. в год;

$_3F_j$  – объём экспорта природного газа, млн. долл. в год;

$_4F_j$  – объём экспорта сжиженного газа, млн. долл. в год.

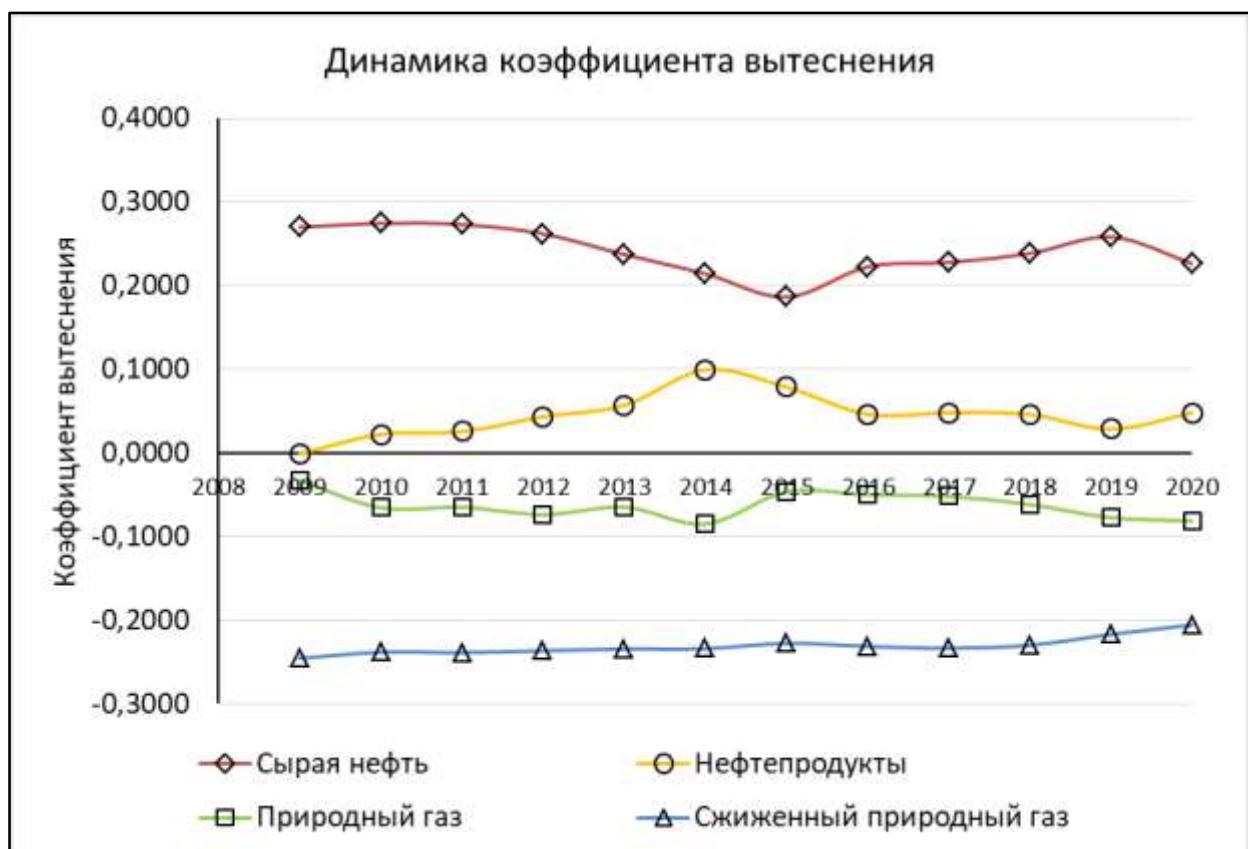
Введём показатель, количественно оценивающий степень вытеснения  $k$ -ым потоком всех остальных потоков в  $j$ -ом году – «коэффициент

вытеснения»  ${}_kKB_j$  [88].

Пусть у  $k$ -го энергоресурса ( $k = 1..4$ ) объёмы экспорта в  $j$ -том году ( $j = 12$ ) равен  ${}_kF_j$ . Общий объём экспорта Российской энергоресурсов есть сумма:

$$F_j = \sum_{k=1}^M {}_kF_j, (j = 1..N).$$

Коэффициент вытеснения показывает в динамике, как меняются конкурентные взаимные воздействия ресурсов в общем балансе их экспорта. При этом предлагаемый показатель является чувствительным к незначительным относительным изменениям исследуемой динамики. Так, несмотря на незначительную долю в общем экспорте сжиженного природного газа, кривая «коэффициента вытеснения» показывает устойчивый рост его «потенциала» в вытеснении других энергоресурсов. Это говорит о повышении роли сжиженного природного газа в формировании стоимости экспорта России и в относительном вытеснении им других энергоресурсов.



**Рисунок 3.32** – «Коэффициенты вытеснения» углеводородных ресурсов в суммарном балансе общероссийского энергетического экспорта в 2009-2020 гг.

Заслуживает особенного интереса поведение «коэффициентов

вытеснения» сырой нефти и природного газа. Если в начале исследуемого интервала времени сырая нефть показывала абсолютное доминирование в конкурентной борьбе, то в динамике наблюдалось ухудшение конкурентных преимуществ сырой нефти – вплоть до 2014 года. В дальнейшем конкурентоспособность сырой нефти стала вновь расти. Изменения роли природного газа в формировании стоимости экспорта России имела схожую тенденцию с траекторией «коэффициента вытеснения» сырой нефти – снижение конкурентности с 2009 по 2014 годы. Однако, возобновившийся в 2015 году рост «коэффициента вытеснения» природного газа в последующие годы вновь вернулся к траектории снижения.

Асинхронную динамику «коэффициента вытеснения» сырой нефти траекторию показывает «коэффициент вытеснения» нефтепродуктов. Несмотря на то, что сырая нефть остаётся основным экспортным товаром России и в 2020 году (72.564 млрд. долл. США), динамический «коэффициент вытеснения» показывает ослабление её позиций в структуре экспорта России. Доли нефтепродуктов и сжиженного природного газа в стоимостном выражении в последние годы стали вытеснять сырую нефть и природный газ из экспорта России. Увеличение в структуре стоимости экспорта доли продукции с высокой степенью переработки стало одним из позитивных направлений внешнеэкономической политики России.

Новый подход предлагает строить и исследовать модели динамики всех конкурирующих «игроков» некоторой экономической структуры, демонстрирующих непрерывную эволюцию конкурирующих потоков. Это могут быть потоки экспорта одного вида энергоресурса в различные страны или в группы стран-экспортёров. Тогда динамическая конкуренция должна проявляться в траекториях взаимного «вытеснения» стран-экспортёров из общего экспортного потока. Другим примером динамической конкуренции может быть взаимное «вытеснение» различного вида энергоресурсов из общемирового потока их потребления. В предлагаемой концепции моделирования и исследования динамической конкуренции равновесие

может проявляться в виде некоторой циклической конструкции, представляющей стремление системы к стабилизации внутри некоторого аттрактора. В этом могут быть полезны предлагаемые методы моделирования структурно-вариативных процессов с отображением траекторий их развития в фазовом пространстве.

В целом, предлагаемый метод исследования конкуренции актуален для любых динамических систем, общее совершенствование которых может быть описано непрерывными траекториями развития их элементов. Например, это может быть поток численности населения различных возрастных групп в общем потоке численности населения; поток расходов населения по видам расходов в общем потоке расходов населения; поток занятых по видам экономической деятельности в общем потоке занятых и т.д.

При построении непрерывных моделей для исследования динамической конкуренции мы предполагаем, что она может проявляться в изменениях относительной доли участия некоторого «игрока» в «общем итоге» всей системы. Количественно динамические изменения положения каждого «игрока» в исследуемой системе предлагается описывать моделями потоков – показателями объёма в единицу времени. Таким образом, конкурентные преимущества «игроков» определяются не соотношением дискретных значений их индивидуального «потенциала» (экономических запасов), а обнаруживаются непрерывными изменениями запасов – экономическими потоками. Очевидно, что предлагаемый подход к исследованию конкуренции потоков требует последовательного и непрерывного представления процессов моделями с непрерывным временем. При сравнении экономических потоков воздействие конкуренции часто может проявляться замедлением одного экономического потока при ускорении другого или наоборот. При этом становится важным сохранить темпоральные особенности исходного экономического сигнала, его точные значения, а также последовательность изменений во времени. В связи с необходимостью сохранения точности зафиксированных эмпирических

значений исследуемых процессов в моделях динамики, оказываются неприемлемыми методы сглаживаний и усреднений классической эконометрики. Тогда для выполнения условия максимального правдоподобия эмпирических данных и моделей исследуемой динамики используется аппроксимация сплайнами. Потенциальное преимущество предлагаемого подхода заключается в том, что он позволяет включать в интерполяционную сплайновую модель все последовательные ненаблюдаемые переменные состояния. Непрерывность и точное соответствие модели эмпирическим данным можно считать основными и существенными различиями между предлагаемым подходом и классическими моделями, оценивающими, по существу, конкуренцию дискретных состояний. Естественно, некоторые решения, такие как открытие нового бизнеса или выход из рынка, моделируются через дискретные состояния. В то же время движение товаров, миграционные процессы, динамика добычи и экспорта энергоресурсов, потоки инвестиций и др. лучше рассматривать как непрерывные процессы.

## **ГЛАВА 4. ФАЗОВЫЙ АНАЛИЗ ЦИКЛИЧНОСТИ ПОТОКОВ В ЭКОНОМИКЕ**

### **4.1 Потоки в циклической теории развития экономики**

Подобно световым волнам, приносящим информацию о строении и составе звёзд, так и экономическое циклическое движение потоков помогает понять и формализовать глубинные «пружины» экономического развития. Предполагается, что классические реальные и номинальные дихотомические составляющие сильно переплетены между собой. Различия между трендовой составляющей экономической динамики и краткосрочными циклами обнаруживаются в особенностях их суперпозиции, трендовость поведения отображает глобальные тенденции, а короткие циклические флюктуации могут генерироваться локальными запаздываниями в системе.

Взаимное воздействие в модели совокупного спроса и предложения динамики цен и потока выпускаемой продукции с течением времени устанавливает равновесие в системе «спрос-предложение». Нарушение сложившегося равновесия заметным изменением совокупного предложения запускает в экономике стагфляцию – падение потока производства (стагнация), на фоне динамики возрастающих цен (инфляция). Взаимосвязанные колебания показателей совокупного предложения и совокупного спроса с временными задержками отклика приводят к колебаниям параметров в системе.

Некоторую закономерность в чередовании активности экономических и политических процессов обнаружил Г. Адамс в конце XIX века. Л. Гумилёв и А. Чижевский находят естественные ритмы в волновой теории общественного развития. Проявление цикличности в экономике находили Ф. Энгельс, К. Маркс, Н.Д. Кондратьев и др. [133].

Теория реальных экономических циклов, являясь частью неоклассической теории волн опирается на идею Д.М. Кейнса о длительности возвращения рынка к равновесию – появление цикличности в экономике

объясняется медленным возвращением цен и зарплаты к взаимной сбалансированности, наличием чистого запаздывания в экономической системе. Великую депрессию 1929-1933 гг., когда замораживание зарплат, численности работающих и требований профсоюзов привело к отключению рыночных механизмов саморегулирования, можно считать одним из ярких примеров сложности искусственного управления турбулентными процессами в экономике.

Об особой роли исследования цикличности в экономике говорит присуждением трёх Нобелевских премий в разные годы. Одной из важных задач экономики можно считать сглаживание цикличности, оптимизация их топологических, метрических и хроноскопических количественных показателей.

В настоящее время концепция циклической экономики рассматривается с позиции концепции научных исследований по устойчивому развитию. Некоторым странам мира, например, США, удалось добиться гибкости собственных экономик, позволяющей циклически адаптироваться к изменениям мировых энергетических рынков. Здесь потоки добычи, потребления и экспорта энергоресурсов адаптируются к колебаниям цен, «переключая» процессы экспорта или импорта углеводородных ресурсов.

В поисках движущих сил циклической промышленной динамики исследователи, естественно, обращаются к существующим теориям бизнес-циклов. Ранние теоретики склонны были приписывать циклы деловой активности экзогенным факторам, таким как периодичность солнечных пятен или движение планеты Венера. Более поздние экономисты, в том числе Адам Смит, считали, что бизнес-цикли возникли в результате самокорректирующегося механизма экономики. Современные исследования объясняют деловые циклы с точки зрения роли правительства в осуществлении ациклической денежно-кредитной политики или случайных технологических потрясений, как это предлагается теорией реального делового цикла. Напротив, школа мысли, которая рассматривает циклы как

эндогенно порожденные, черпает вдохновение в идеях Джозефа А. Шумпетера, который выделял четыре типа бизнес-циклов и относил их к различным механизмам, начиная от чрезмерных запасов фирмами (для 3-5-летнего цикла Д. Китчина), до лагов в расходах на инвестиции в основной капитал (для 7-11-летнего цикла Джуглара), колебаний инвестиций в инфраструктуру (для 15-25-летнего цикла С. Кузнецца) и некоторых долгосрочных факторов, влияющих на человеческое общество (для 45-60-летнего цикла Кондратьева) [163], [164], [165], [199].

Применительно к экономическим потокам циклы Д. Китчина демонстрируют особенности взаимной связи изменений запасов и порождающих эти изменения потоков. На примере «экономических количеств» появление циклов Д. Китчина можно объяснить возникающим дисбалансом между непрерывным потоком потребления (добычи полезных ископаемых, экспорта энергоресурсов, эмиссии денег, продажи товаров и т.д.) и наличием запасов (запасов разведанных полезных ископаемых, запасов энергоресурсов, объемов денежной массы, запасов товаров на складе и т.д.). Таким образом, одной из причин возникновения цикличности в экономике можно считать временной дисбаланс, продолжающий динамические колебания потоков и запасов. В колебаниях локальных скоростей изменения запасов проявляется цикличность экономического движения. Выявление факторов ускорения или замедления потоков, анализ метрических и хронологических параметров их цикличности помогут улучшить качество управления экономическими активами.

*В поисках «пружин» экономического циклизма.* Цикличность экономического развития обусловлена сочетанием многих факторов, как внутренних, так и внешних, которые могут привести к буму или краху экономики. К внутренним причинам появления цикличности можно отнести изменения спроса, колебания потока инвестиций, изменения денежной массы в экономике, воздействие государства на макроэкономические тенденции.

Описание состояний или фаз циклического развития экономической

системы можно отнести в относительной простой задаче. Успешность реализации более трудной задачи – выявление причин, вызывающих циклические колебания, объяснения уникальной устойчивости их «повторяемости», «наследуемости», «волнообразности», «колеблемости» остаётся дискуссионной. На пути исследования причин возникновения цикличности созданы многочисленные теории – «ритмология», «теория делового цикла», «волной принцип» Р.Н. Эллиотта [202], [254], [274], [289], [290]), «теория периодизма», «теория экономических флюктуаций» и др., которые теперь можно объединить названием «экономическая цикломатика». И все они – вместе и врознику – составляют возможные направления будущих исследований.

## 4.2 Фазовое представление запасов и потоков в динамических системах

*Фазовое пространство в экономике.* Привлечение в анализ динамических потоков понятия фазового пространства можно считать инновационной составляющей новой исследовательской платформы – методологии сплайн-моделирования и анализа потоков в экономических системах. Особенностью частного двумерного подхода новой методологии является комплексное отображение процесса на фазовой плоскости с осями «показатель» и «скорость изменения». Тогда «оси фазовой плоскости становятся динамика показателя типа «запас» и его первая производная – динамика показателя типа «поток». Теперь каждая точка фазовой плоскости будет представлена двумя координатами – значением функции запасов ( $Y$ ) и значением её первой производной – функции потока ( $Y'$ ) в каждый момент времени ( $t$ ). Динамика потока представляется движением точки на фазовой плоскости – фазовой траекторией потока. Фазовая траектория становится графическим образом известной взаимосвязи между запасами и потоками, аналитически описывающей соотношение между функцией и её первой производной» [93].

Известна важная роль, которую играют производные в математике, в исследовании физического движения, широко применяются в технических приложениях, а в настоящее и в экономике позволяют использовать фазовые методы и строить фазовые траектории при исследовании цикличности экономического движения [134]. С экономической точки зрения первая производная представляет собой скорость изменения экономического показателя, а вторая производная демонстрирует ускорение или интенсивность изменений показателя. Известная взаимосвязь между запасами и потоками позволяет привлекать фазовые методы к исследованию динамики экономических «количество».

Вовлечение производных в процесс моделирования динамических потоков позволяет гораздо раньше увидеть их тенденции, обнаруживать «скрытые» корреляции между потоками, выявлять наличие цикличности или сезонности, эффективно управлять динамикой запасов и их потоков в экономике. Поэтому для исследования динамических потоков становится необходимым описывать их непрерывными аналитическими моделями, учитывающими тесную взаимосвязь между производными непрерывной математики и конечными разностями дискретного аппарата.

Аппроксимация линейным сплайном (первого порядка) может быть полезна при моделировании динамики запасов и потоков в системах с дискретным временем и дискретными изменениями запасов. Фазовый портрет позволяет одномоментно наблюдать изменения двух переменных – запасов и потока (рис. 4.1). В предложенной модели взаимосвязи первая производная линейной функции запасов представляет собой среднюю скорость изменения запасов, постоянную внутри каждого темпорального участка. Горизонтальные линии ступенчатой функции определяют дискретные значения цепных приростов, вертикальные – дискретные значения накопленного запаса. Численно значения первой производной линейной функции запаса совпадают с первыми цепными приростами запасов.

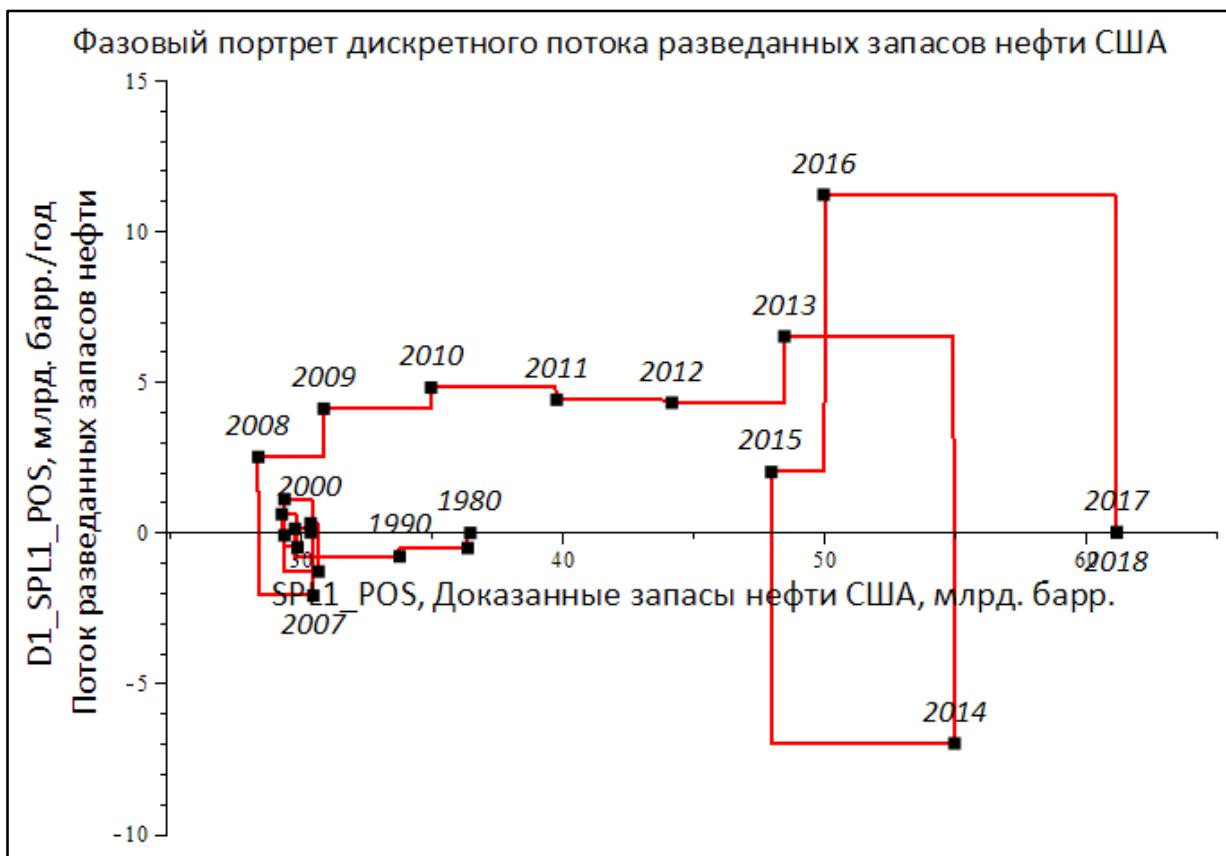


Рисунок 4.1 – Фазовый портрет дискретного потока запасов нефти США с 1980 по 2018 гг.

Фазовый анализ позволяет решить проблему сопоставимости данных, когда в одной модели сочетаются переменные типа «поток» и «запас», абсолютные объемы и их мгновенные приrostы (производные), их накопленные суммы (интегралы). Для экономистов-практиков более понятно дискретное представление процесса, когда статистика экономических «количество» также дискретна. Иногда и непрерывные процессы могут демонстрировать дискретные изменения, например, динамика потока платежей по кредиту в конце каждого месяца, изменения в товарных запасах на складе в момент закупки, колебания разведанных запасов энергоресурсов в момент открытия новых месторождений и др. В то же время, процесс наращения процентов имеет непрерывную форму потока, потоки реализации товаров, добычи, экспорта и потребления энергоресурсов и др. также имеют непрерывный характер. Для экономиста-аналитика становится полезным исследовать процессы в моделях их непрерывным представлением, например, для исследования силы роста при непрерывном наращении

процентов. Основное различие между фазовыми траекториями с дискретными и непрерывными изменениями состоит в представлении потока (первой производной) – в первом случае скорость изменения запасов постоянна внутри некоторого темпорального участка и меняется скачкообразно в узловых точках между участками, во втором случае первая производная представляет собой мгновенную скорость непрерывного изменения запасов. При переходе к фазовому пространству мы прибегаем к не очень привычному и понятному «зеркалу», в котором мы видим столь же необычную «зазеркальную» динамику экономических потоков.

Посмотрим, как математики определяют основные положения фазового анализа, который экономисты предлагают использовать для изучения цикличности. Изначально появление фазовых траекторий было связано с решением дифференциальных уравнений:

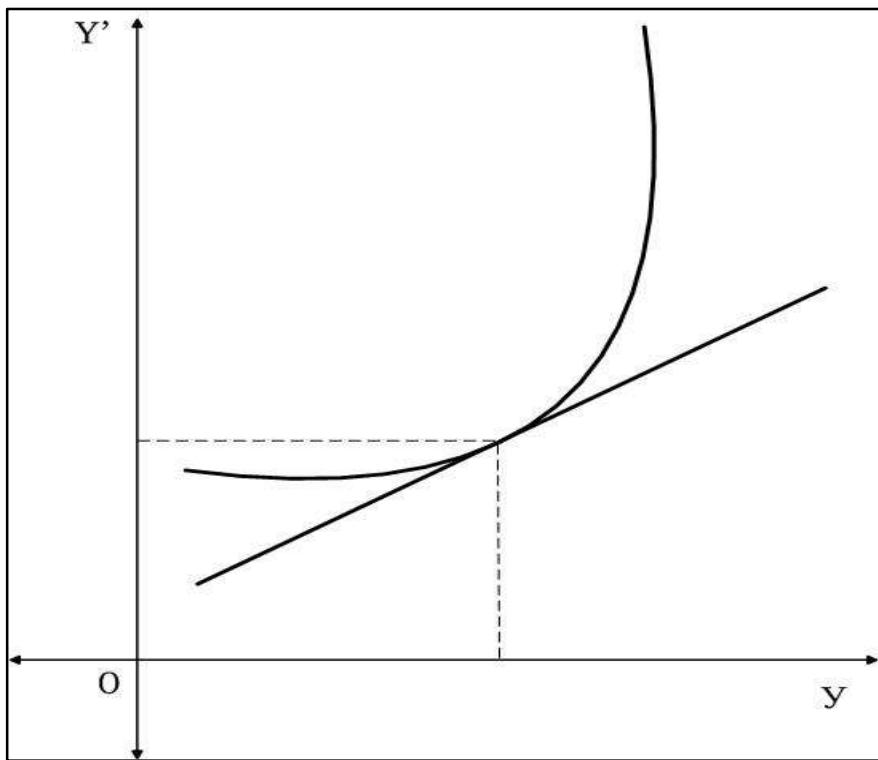
$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} = f\left(t, Y(t), \frac{dY(t)}{dt}\right) \quad (26),$$

решением

$$Y = Y(t); \quad Y' = Y'(t) \gg [133].$$

Уравнение (26) находит своё применение при аналитическом представлении периодических или циклических процессов в экономике (рис. 4.2).

В точке  $(Y_0, Y'_0)$  фазовой плоскости находится точка равновесия, если в ней функции  $P$  и  $Q$  одновременно равны нулю:  $P(Y_0, Y'_0) = 0$  &  $Q(Y_0, Y'_0) = 0$ . Такая точка представляет собой равновесное решение, постоянное решение, в котором находится система и точка не перемещается по орбите. Для автономной линейной системы мы находим, что единственной точкой равновесия является начало координат  $(0, 0)$ , при условии, что системная матрица не является сингулярной.

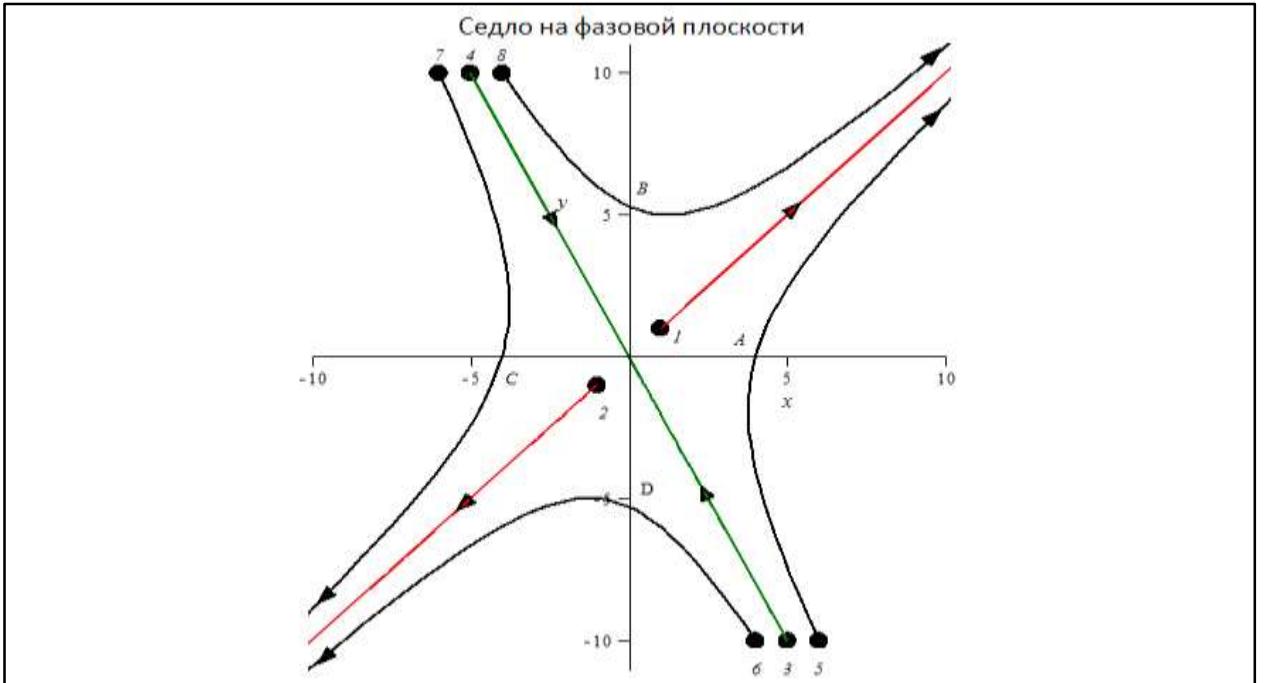


**Рисунок 4.2 – Фазовая траектория на фазовой плоскости и её наклон в некоторой точке**

В двумерном случае существует четыре вида точек равновесия, и они имеют названия седло, центр, узел и спираль:

- седло – два пути входят, два выходят, все остальные проходят мимо (рис. 4.3);
- центр – орбиты представляют собой замкнутые траектории вокруг точки равновесия (рис. 4.4);
- узел – все пути либо входят, либо выходят из точки равновесия (рис. 4.5);
- спираль – каждый путь спирали вокруг точки равновесия (рис. 4.6).

В соответствии с четырьмя типами точек равновесия, приведенными выше, существуют характерные фазовые портреты. Геометрические свойства этих отличительных фазовых портретов связаны с аналитическим поведением решений соответствующих систем. Приведём следующие четыре примера построения фазовых траекторий в *Maple*, иллюстрирующие каждый из этих характерных фазовых портретов.

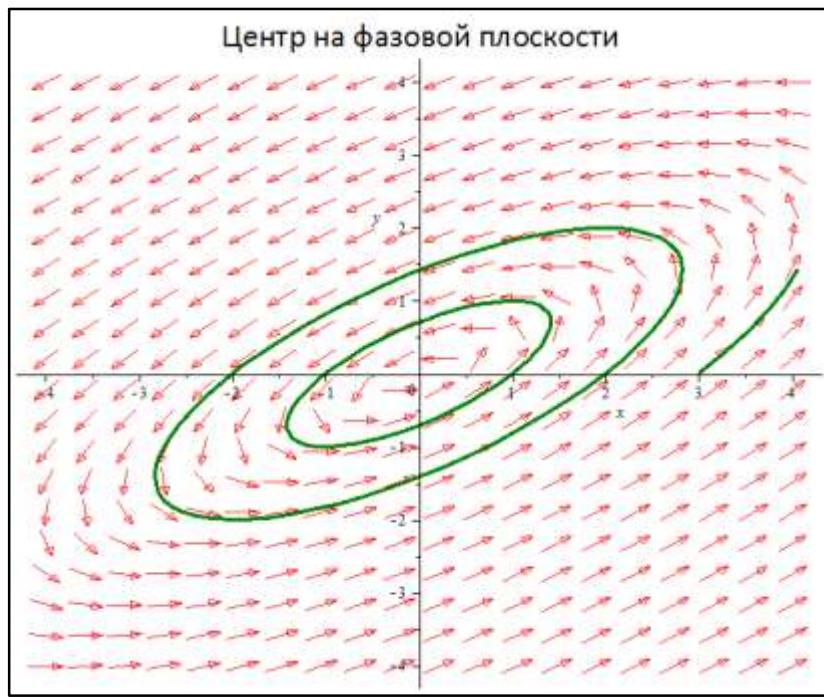


**Рисунок 4.3 – Седло на фазовой плоскости – два пути входят, два выходят, все остальные проходят мимо**

Направления траекторий соответствуют движению точки системы  $(x(t), y(t))$ , где  $t$  – параметр, меняющейся относительно фазовой кривой. Направления фазовых траекторий получены из решения дифференциальных уравнений. Начало координат является седлом для дифференциальных уравнений в этом примере. Для седла две противоположные траектории входят в точку равновесия, а две противоположные траектории покидают ее. Одна такая траектория называется сепаратрисой (множественное число, сепаратрисы). Траектории, начинающиеся с одной стороны сепаратрисы, остаются на той же стороне. Кроме двух сепаратрис, которые входят в точку равновесия, все остальные решения отходят от нее. Две траектории, по-видимому, выходят из точки равновесия, а остальные траектории сначала движутся к ней, а затем в конечном счете удаляются.

Точка равновесия в начале координат является центром для дифференциальных уравнений.

Начальные точки имеют три значения, первое из которых представляет начальное время – т.е. время, когда система находится в начальной точке, координаты которой и являются вторым и третьим значениями в начальном условии.



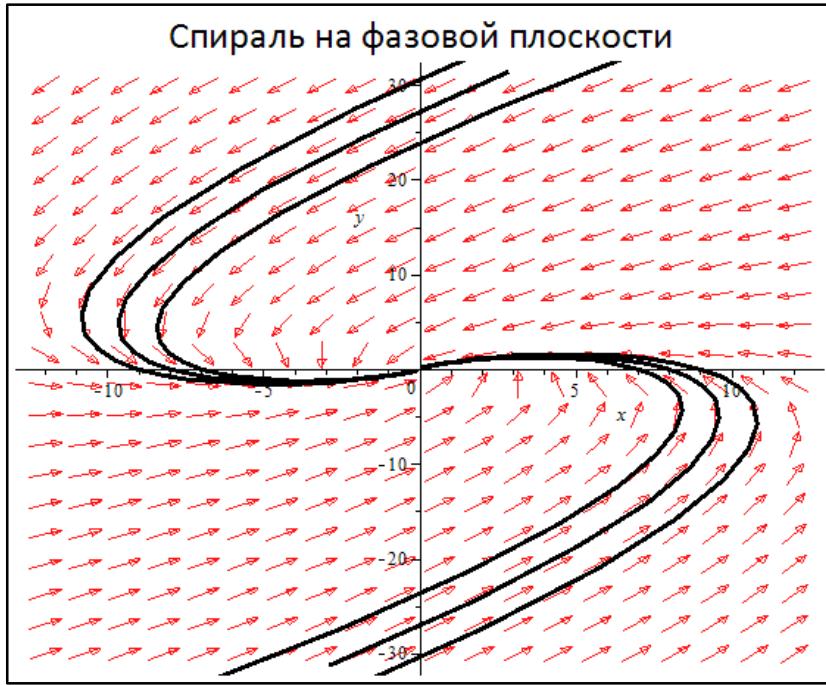
**Рисунок 4.4 – Центр на фазовой плоскости – орбиты представляют собой замкнутые траектории вокруг точки равновесия**

Следующая линейная система дифференциальных уравнений имеет точку равновесия в начале координат и является узлом. Точка равновесия в начале координат – это неустойчивый узел, иногда называемый отталкивателем или источником. Если бы траектории в этом узле были направлены внутрь, к началу координат, узел был бы устойчивым узлом, иногда называемым атTRACTором или стоком.



**Рисунок 4.5 – Неустойчивый узел – все пути выходят из точки равновесия**

Пример, где точка равновесия в начале координат является спиралью для дифференциальных уравнений.



**Рисунок 4.6 – Устойчивый фокус – все пути либо входят в точку равновесия**  
Точка равновесия в начале координат представляет собой внутреннюю спираль. Подобно внутреннему узлу, внутренняя спираль также иногда называется аттрактором. Ясно, что если траектории закручиваются спиралью наружу, то фазовый портрет будет таким же, как и внешняя спираль, и он также будет называться отталкивающим.

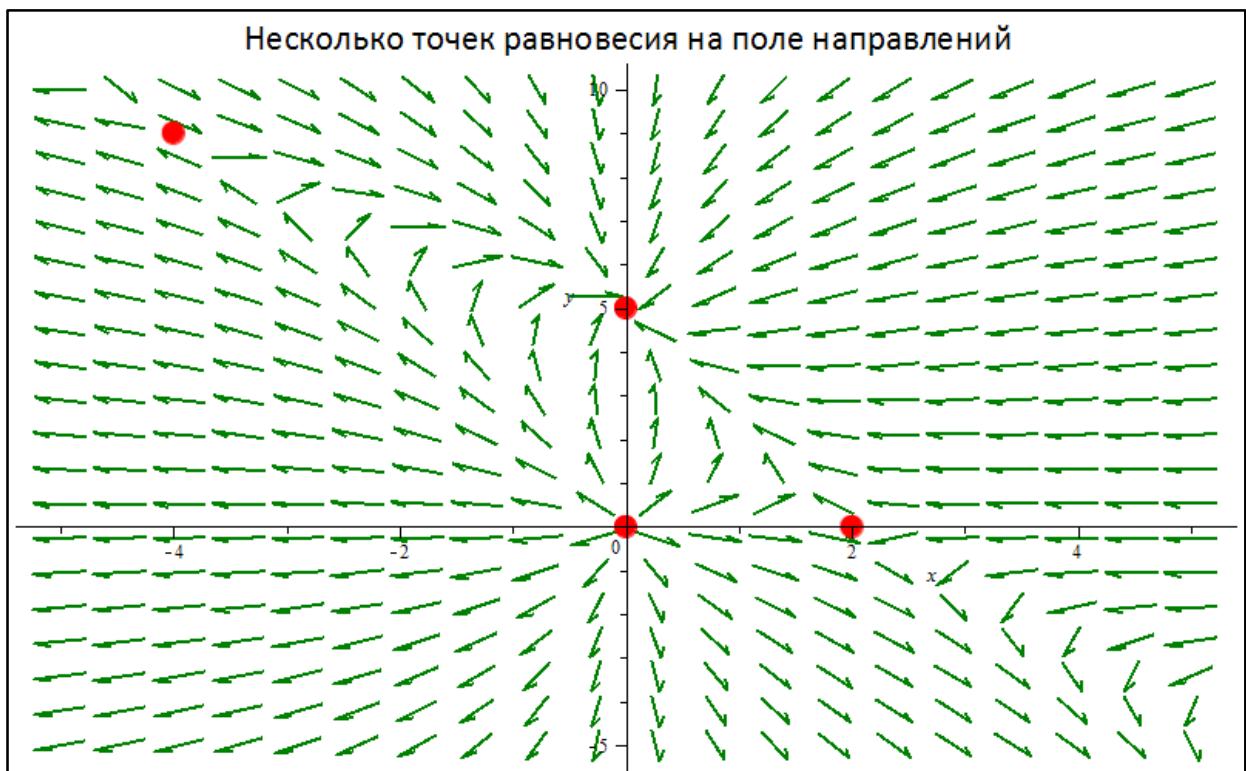
Различают правильный и неправильный узлы. Неправильный узел характеризуется повторяющимися собственными значениями. Узлы и седла имеют экспоненциальные решения, которые стремятся либо к нулю, либо к бесконечности. Следовательно, фазовые траектории для этих систем будут либо стремиться к началу координат, либо удаляться от него, в зависимости от знака собственных значений. Центр имеет тригонометрические решения, которые являются параметрическими представлениями замкнутых кривых. Спирали имеют решения с тригонометрическими членами центра, но имеют экспоненциальные факторы, которые заставляют решения либо приближаться, либо удаляться от начала координат.

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

## Двумерная нелинейная автономная система

может иметь и более одной точки равновесия. Каждое реальное решение одновременных уравнений  $f(x, y) = g(x, y) = 0$  является точкой равновесия, поэтому фазовый портрет для такой системы значительно сложнее, чем для автономной линейной системы.



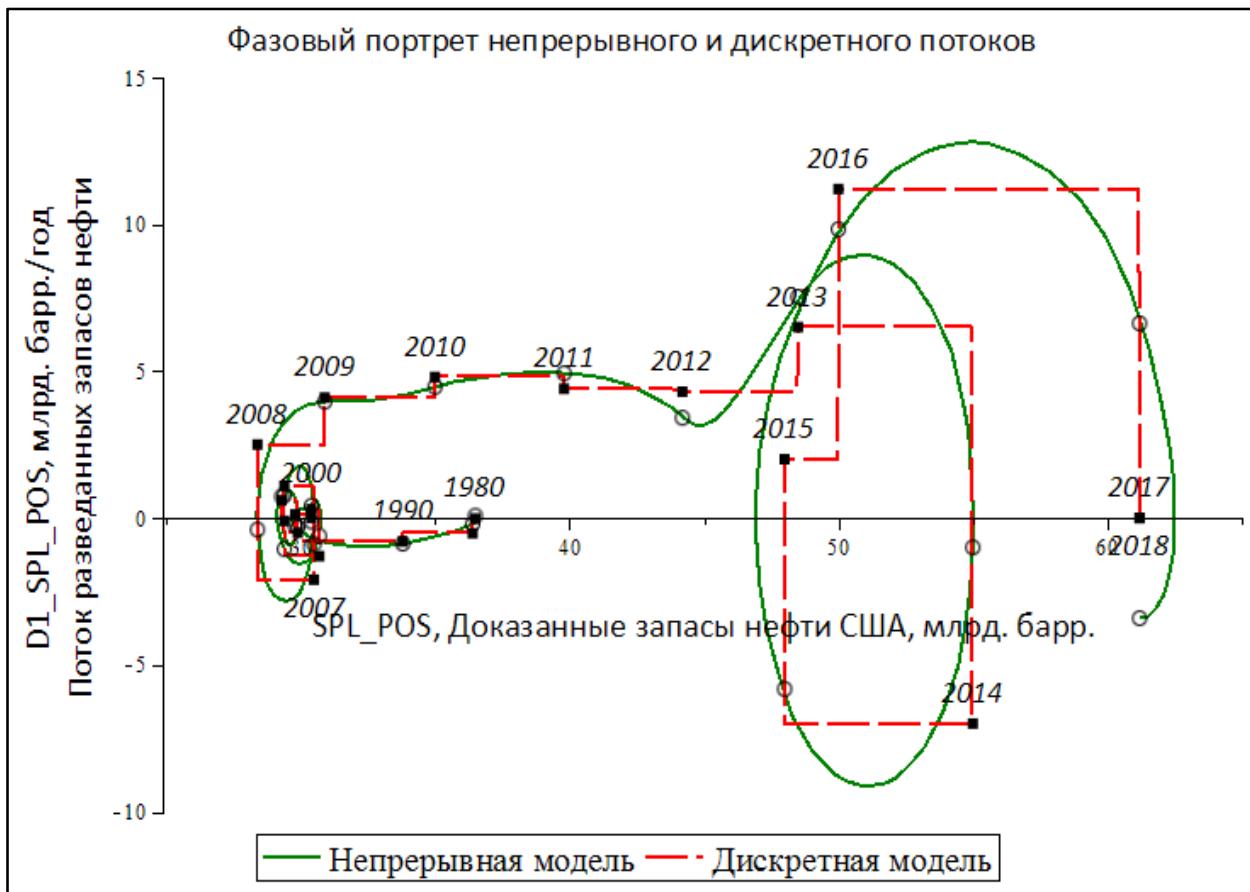
**Рисунок 4.7** – Поле направлений для системы, имеющей несколько равновесных решений

При решении задач оперативного «управления товарными, финансовыми и др. потоками часто необходимо исследовать и одновременно представлять в одной системе динамику двух взаимосвязанных переменных – накопленных запасов и их потока» [93]. При описании динамики запасов и их потоков важно различать дискретный или непрерывный характер их изменений. Фазовые траектории динамических процессов представляют собой больше, чем снимки состояний в конкретные моменты времени, поскольку экономический процесс важно наблюдать относительно последовательно и непрерывно сменяющих друг друга периодов времени.

### **4.3 Моделирование и фазовый анализ цикличности потоков**

Несмотря на то, что информация о накопленных запасах приводится на определённые моменты времени, характер их изменения вполне можно назвать для многих случаев непрерывным. Например, запасы нефти в США могут меняться дискретно в тех случаях, когда речь идёт об открытии новых месторождений. В то же время запасы нефти изменяются непрерывно в процессе её добычи, а если учитывать запасы в стоимостном выражении – то опять же характер изменений будет непрерывным за счёт непрерывных колебаний цен на нефть. Даже в СНС поясняют, что накопленные запасы изменяются непрерывными добавлениями и изъятиями из них, а также изменениями в их стоимости. Таким образом, непрерывное представление в фазовом пространстве или на плоскости траектории изменения запасов и их потока вполне репрезентативно экономической действительности. В некоторых случаях, когда исследователю необходимо исследовать дискретные изменения в запасах фазовая траектория может быть построена и ступенчатой линией – для этого достаточно задать функцию запасов сплайн-функцией первого порядка. Её первая производная будет разрывной, демонстрируя дискретный характер динамики потока, конкретные значения которого количественно определяются как первые цепные приrostы функции запасов.

Дискретное представление потока предполагает скачкообразное изменение запасов нефти (рис. 4.8). Непрерывная модель демонстрирует плавные изменения запасов. Численно среднее значение мгновенной скорости изменения запасов в непрерывной модели эквивалентно постоянной скорости (значению абсолютного прироста) изменения запасов внутри соответствующего темпорального участка дискретной модели. Фазовая траектория запасов нефти показывает путь, по которому США пришли к энергетической независимости – это уже не мечта американцев, а реальность.



**Рисунок 4.8 – Сравнение фазовых траекторий непрерывного и дискретного потоков разведанных запасов нефти США с 1980 по 2018 гг.**

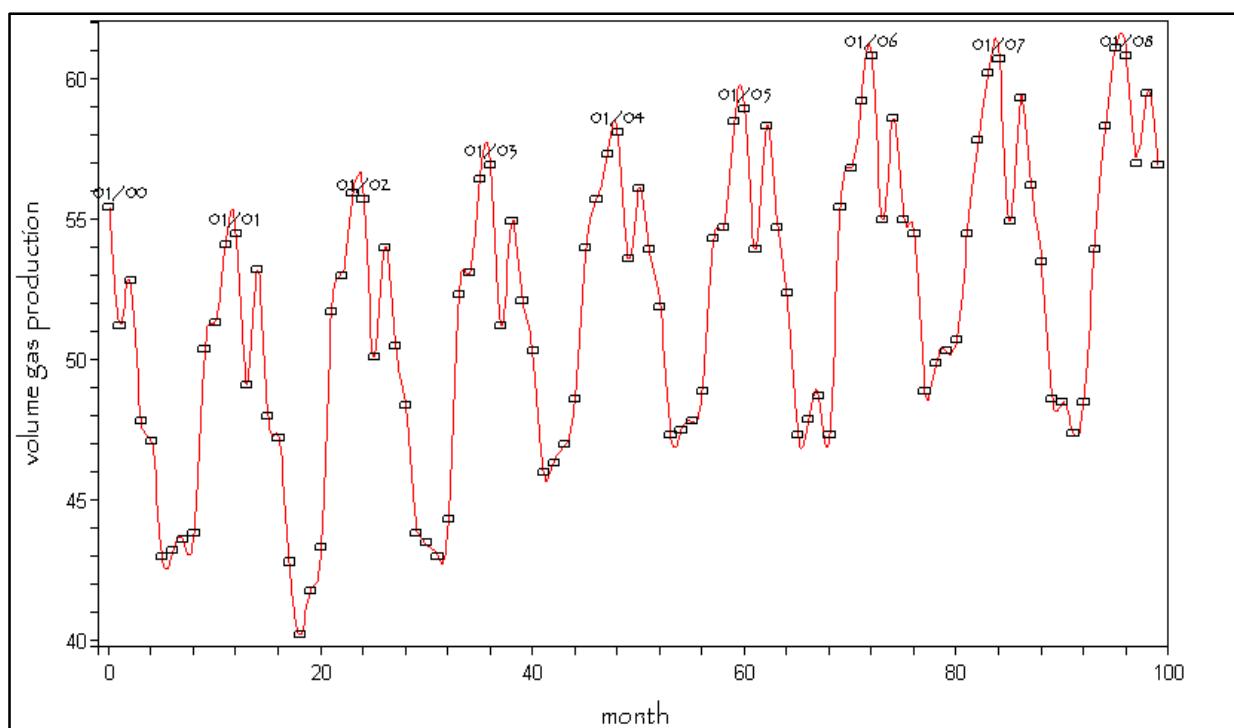
Рынок нефти постепенно менялся в течение последних десятилетий, одну из ключевых ролей здесь сыграл значительный прирост запасов нефти в Соединённых Штатах Америки. Если ещё в 80-е годы прошло столетия запасы нефти в США сокращались, то этот спад был остановлен циклическими колебаниями запасов в начале нынешнего столетия. Обращает на себя внимание кризисный для всего мира 2008 год, с которого запасы нефти в США начали беспрецедентный «цикл роста», увеличившись к настоящему времени в 2 раза – около 60 млрд. баррелей в 2018 году. Очередной цикл запасов нефти в США в 2013-2015 гг. удивительным образом с кризисом в экономике России. Если еще в начале лета 2014 года цена на нефть марки *Brent* была выше 110 долларов за баррель, то технический прогресс в области гидроразрыва пласта в Соединенных Штатах превратил добывчу сланцевой нефти мощный инструмент давления на мировой рынок нефти. Под давлением растущих поставок цены на нефть стали стремительно

снижаться, создавая напряженность в экономике большинства стран-производителей нефти.

Соединённые Штаты в настоящее время могут активно управлять запасами нефти, в том числе «включая» и «выключая» потоками добычи в соответствии с рыночными ценами. В условиях растущих мировых цен на нефть будет усиливаться добыча сланцевой нефти и США станут активно конкурировать на мировом энергетическом рынке. При падении цен на нефть США может стать влиятельным потребителем нефти, импортируя её из других стран-производителей по всему миру, сохраняя собственные запасы до возвращения большей экономической эффективности экспорта. Благодаря запасам сланцевой нефти и развитым технологиям её добычи, имея огромный платежеспособный рынок потребления нефти, экономика Соединенных Штатов оказались в выигрышном положении в мире, не зависящем от колебаний цены на нефть. Рост цены на нефть, что часто провоцируется любой нестабильностью на Ближнем Востоке, могут привести к увеличению экспортной прибыли как для США, так и для России. В условиях снижения цен на нефть до уровней, которые не являются экономическими для производства в США, общие экономические потери компенсируются выигрышем потребителей. Можно сказать, что в наши дни энергетическая независимость приобрела совершенно новый смысл – управление запасами нефти в США можно сравнить с включением и выключением потока добычи. Таким образом, совмещение дискретной и непрерывной фазовых траекторий запасов нефти США (рис. 4.8) может быть востребовано некоторыми исследователями.

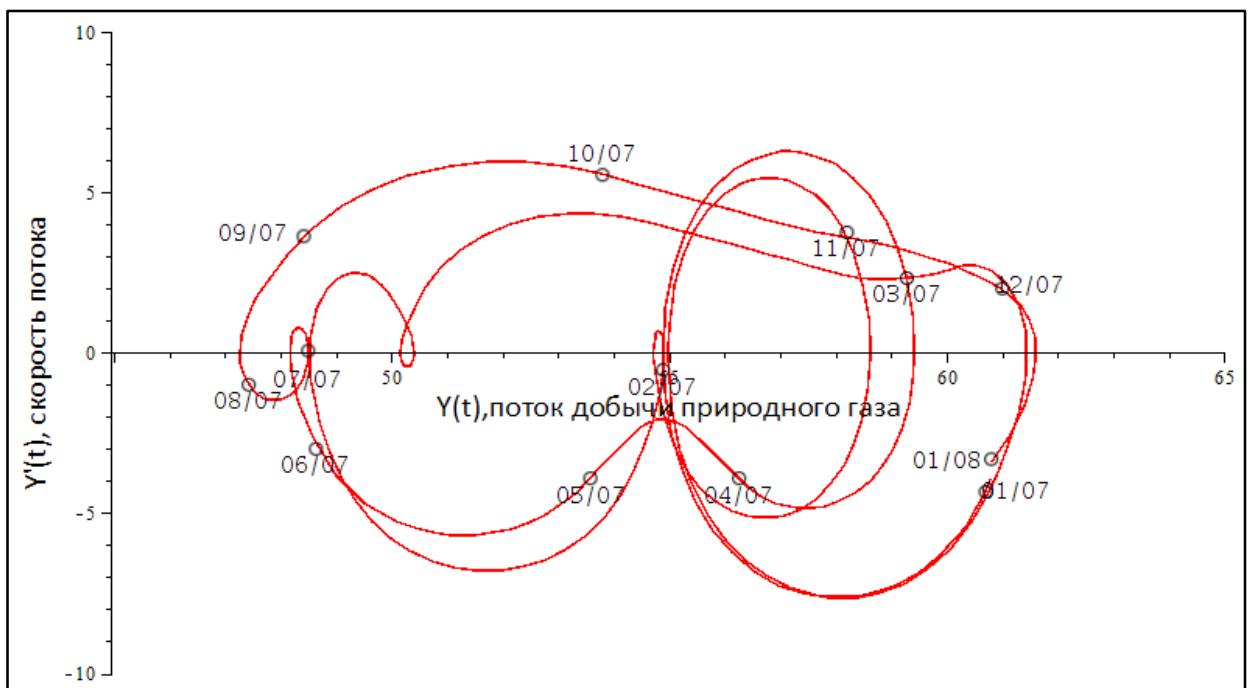
Часто в динамике экономических потоков бывает необходимым исследовать сезонность, с определением её хронометрических характеристик – времени начала, конца, длительность, а также могут быть исследованы факторы повторяемости сезонных циклов. Яркое проявление сезонности демонстрирует поток добычи природного газа в России (рис. 4.9-4.10). В динамике потока добычи природного газа ярко выраженное наличие

сезонных эффектов – «можно заметить, что максимальные объёмы добычи газа достигаются в декабре – январе каждого года, а наименьшие – летом каждого года. Фазовая траектория обнаруживает сезонность потока добычи природного газа. В каждом году март демонстрирует тенденцию к росту, образуя, таким образом, внутри годового сезона цикла малый цикл с периодом в три месяца (февраль, март, апрель). Начиная с сентября наблюдается тенденция к значительному росту объёмов добычи, замыкая полный цикл потока добычи природного газа к январю следующего года» [98].



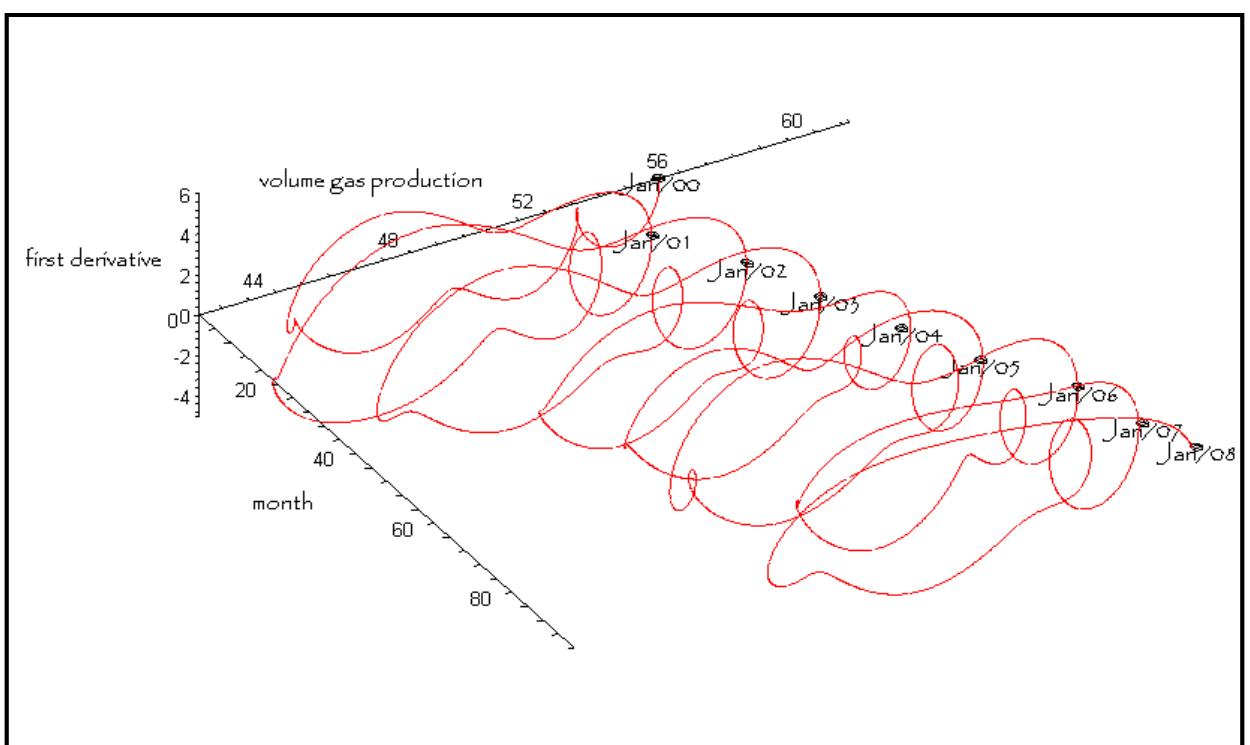
**Рисунок 4.9 – Поток добычи природного газа в России**

Фазовая траектория подверженного влиянию сезонности потока становится более информативным и эффективным отображением процесса, так как здесь отсутствует свойственная классической эконометрике необходимость выделения тренда.



**Рисунок 4.10** – Сезонность потока добычи природного газа в России. Фазовый анализ

Трёхмерное изображение в фазовом пространстве динамического потока (рис. 4.11) становится более информативным в случае слабо выраженной трендовой составляющей, так как проецирование на плоскость большого числа сезонных спиралей за ряд лет трудно исследовать.



**Рисунок 4.11** – Представление сезонности в фазовом пространстве

#### 4.4 «Хроноскопия» фаз экономического цикла

Важно при моделировании и анализе цикличности идентифицировать фазы экономического цикла (*phases of the cycle*). Каждый цикл в экономике отличается по-своему, но некоторые закономерности имеют тенденцию повторяться с течением времени. Колебания в деловом цикле представляют собой отчетливые изменения в темпах роста экономической активности, хотя непредвиденные макроэкономические события или потрясения иногда могут нарушить тенденцию. Наш количественно и аналитически реализуемый подход помогает с высокой точностью идентифицировать и «хроноскопировать» фазы цикла.

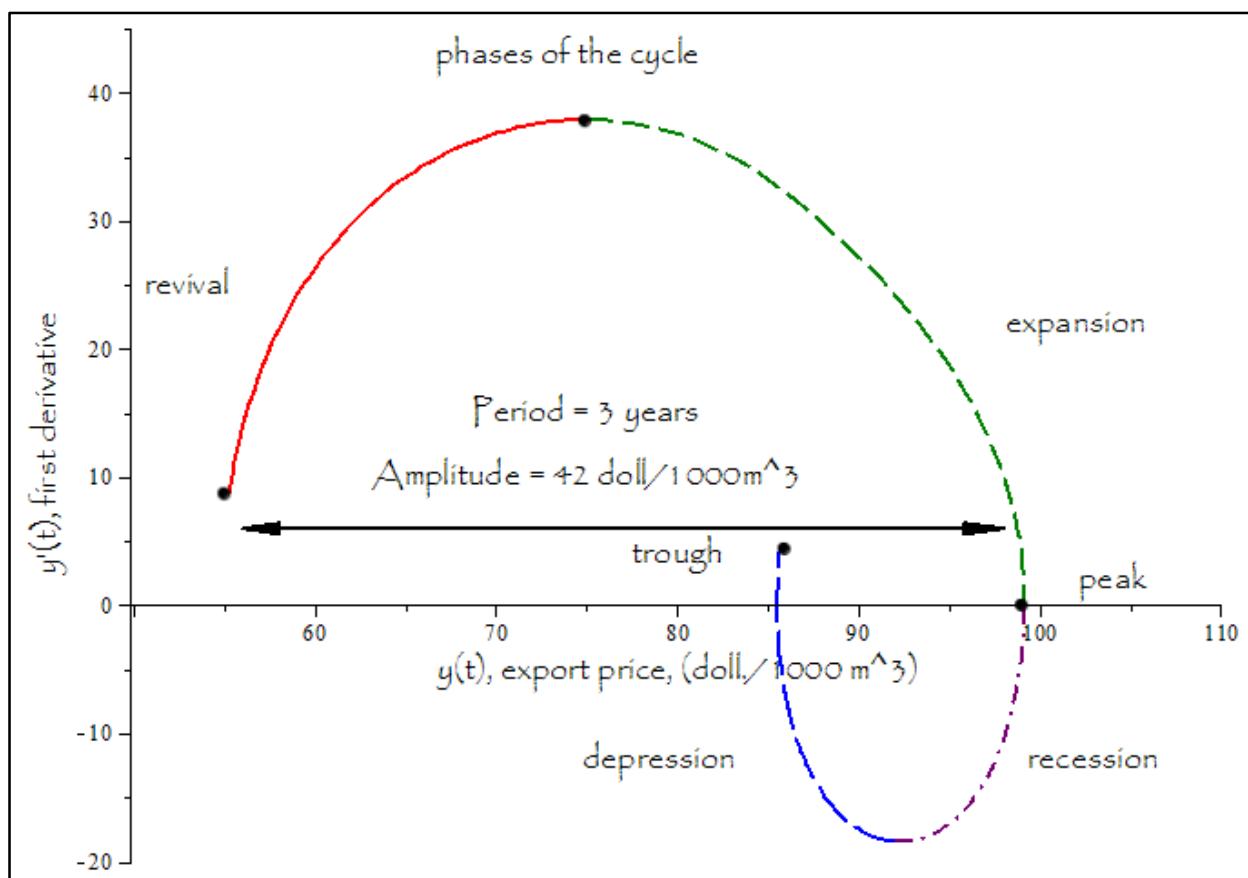


Рисунок 4.12 – Хроноскопия экономического цикла на фазовой плоскости, экспортные цены на природный газ, долл./1000 м<sup>3</sup>

Обычно циклы в экономике определяются как имеющие четыре различных фазы: расширение, пик, сокращение и впадина. Расширение характеризуется увеличением занятости, общим экономическим ростом и повышением давления на динамику цен. Пик – это высшая точка цикла, когда

потоки производства в экономике максимальны, занятость максимально приближена к уровню полной занятости, а инфляционное давление на цены очевидно. После прохождения пика циклического движения в экономике начинается коррекция, которая характеризуется сокращением экономики – наблюдаем замедление экономического роста, снижение занятости, ослабление инфляционного давления на цены. Замедление прекращается у впадины, где в своём падении экономика достигла дна. С этой точки начинается следующая фаза циклического развития. Отображение циклической динамики в фазовом пространстве позволяет идентифицировать фазы более точно, учитывая изменения скорости расширения экономики или спада. Это должно привести к более эффективному управлению процессами в экономике в условиях кризисов.

Учитывая изменения скорости роста или спада в экономике представим циклы, состоящими из шести последовательных фаз (*phases of the cycle*):

- оживление (*revival*) – фаза роста с ускорением;
- подъём (*expansion*) – фаза замедляющегося роста;
- пик (*peak*) – высшая точка цикла;
- спад (*recession*) – фаза ускоряющегося падения;
- депрессия (*depression*) – фаза замедляющегося падения;
- впадина или дно (*trough*) – низшая точка цикла [101].

О важности точного определения фаз цикла говорит и то внимание, которое уделяется правительствами многих стран их идентификации. Например, в Соединенных Штатах принято считать, что Национальное бюро экономических исследований (NBER) является окончательным арбитром дат пиков и впадин делового цикла. NBER определяет рецессию как значительное снижение экономической активности, распространенное по всей экономике, дляющееся более нескольких месяцев, обычно видимое в динамике потока реального ВВП, в изменениях потока реальных доходов, занятости, в потоках промышленного производства.

Для точной идентификации фаз цикла при их отображении в фазовом

пространстве, вспомним, что каждая точка фазовой траектории представляется двумя координатами – значением функции экономического процесса ( $Y$ ) и значением её первой производной ( $Y'$ ) – т.е. скорости развития исследуемого процесса в каждый момент времени ( $t$ ). Изменения первой производной функции экономического процесса будут определять фазы цикла следующим образом:

оживление (*revival*) – производная положительна, фаза начинается переходом первой производной в область положительных значений и завершается в точке максимального значения производной;

подъём (*expansion*) – значения первой производной снижаются (замедляется скорость роста), хотя и остаются положительными. Фаза начинается с точки максимального положительного значения первой производной и завершается в точке, где производная становится равной нулю (рост в этой точке остановился);

пик (*peak*) – нулевое значение первой производной (максимум функции процесса), достигнутое переходом скорости роста из области положительных значений в область отрицательных значений;

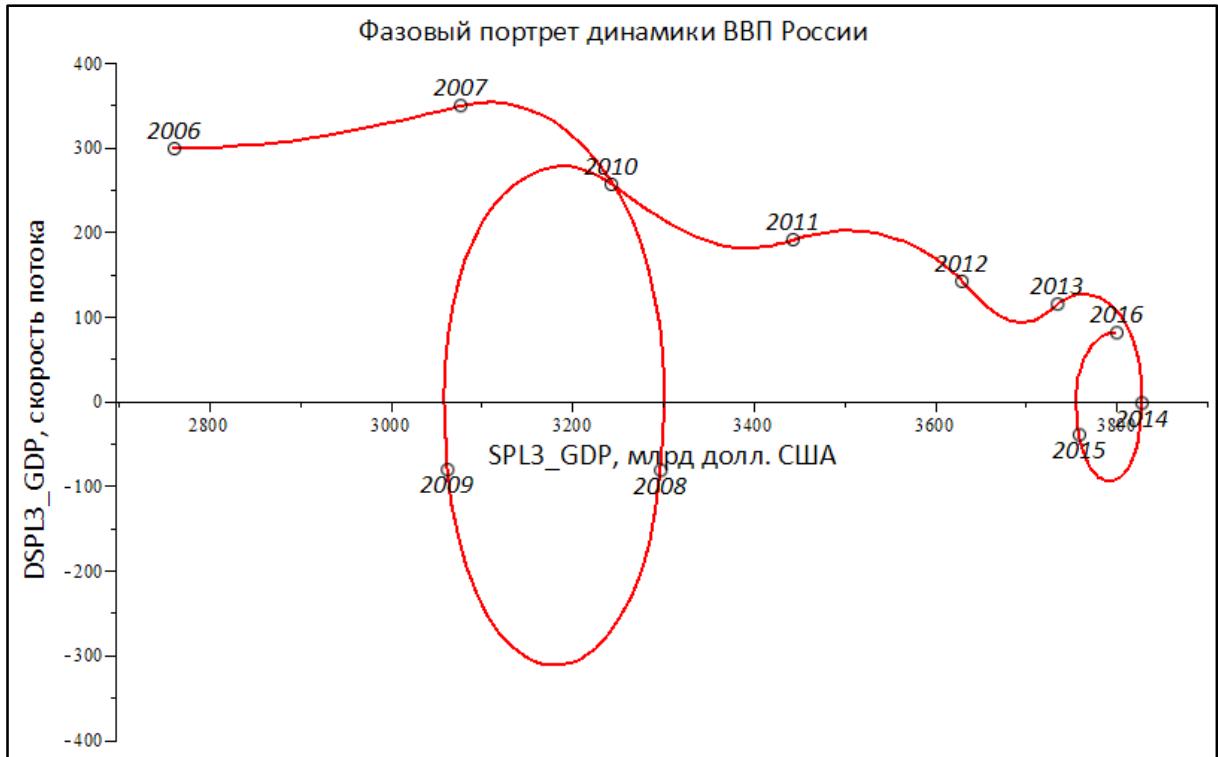
спад (*recession*) – первая производная отрицательна. Фаза начинается нулём первой производной и заканчивается в точке максимального отрицательного значения скорости;

депрессия (*depression*) – первая производная остается отрицательной (продолжение спада в экономике), но её значения по абсолютной величине снижаются (скорость падения замедляется). Фаза завершается нулём первой производной в точке её перехода из области отрицательных значений в положительную;

впадина или дно (*trough*) – нулевое значение первой производной (минимум функции процесса), достигнутое переходом скорости роста из области отрицательных значений в область положительных значений.

На фазовой траектории (рис. 4.13) выявляются два цикла: первый четырёхлетний цикл в 2007-2010 гг., демонстрирующий большую амплитуду

колебаний интенсивности скорости изменения ВВП; второй четырёхлетний цикл роста ВВП в 2013-2016 гг. характеризуется снижением скорости роста ВВП. Уровень 2014 года совпадает с нулём первой производной сплайн-функции ВВП, что говорит об остановке роста.



**Рисунок 4.13 – Фазовый портрет цикличности ВВП России**

Рис. 4.14 показывает фазовый портрет, построенный по кривой полинома 10-го порядка. Он рельефно показывает «ложную цикличность». Вместо двух циклов, имевших место в реальной динамике ВВП России в 2006–2016 гг., как это было видно на рис. 4.13, мы имеем несколько «ложных» циклов, причём скорости изменения цен (их первые производные) тоже «ложные».

Эмпирические значения в некоторых «узлах» временного ряда исследуемого экономического показателя могут существенно уклоняться от «средней» траектории метода наименьших квадратов. Часто в статистике и в многочисленных научных исследованиях ставится задача выявления некоторой тенденции по всей области данных, в предположении о её сохранении и в будущем. Однако, исследователю трудно получать репрезентативные эмпирическому процессу результаты моделирования, если

допускаются большие отклонения между модельными и эмпирическими данными в «узлах» решётчатой функции.



**Рисунок 4.14** – Фазовый портрет полиномиальной аппроксимации (степенной полином 10-го порядка) динамики ВВП России с 2006 по 2016 гг. Многочисленные паразитные или ложные циклы.

Качество регрессионных моделей классическая эконометрика оценивает лишь косвенно, с помощью коэффициента детерминации, характеризующего лишь суммарные отклонения модельной линии от эмпирических точек процесса, при этом никак не оценивая интерполяционное поведение. Сплайн же адаптируется к реальным колебаниям эмпирического процесса, строя свою модельную траекторию через все «узловые» точки с абсолютной точностью [29].

В методологии сплайн-моделирования степенной полином в каждом фрагменте имеет малый порядок, сама модель проводится через пару точек, а число последовательных фрагментов модели на темпоральной оси может быть достаточно большим [29]. Мы получаем модельный конструкт, имеющий инвариантную внутреннюю структуру, фрагменты которой отличаются лишь численными значениями коэффициентов при слагаемых с разными степенями. «Куски» конструкта фракталоподобны, допуская

выполнение экономных и однотипных вычислений, отвечающих структуре компьютерных вычислений.

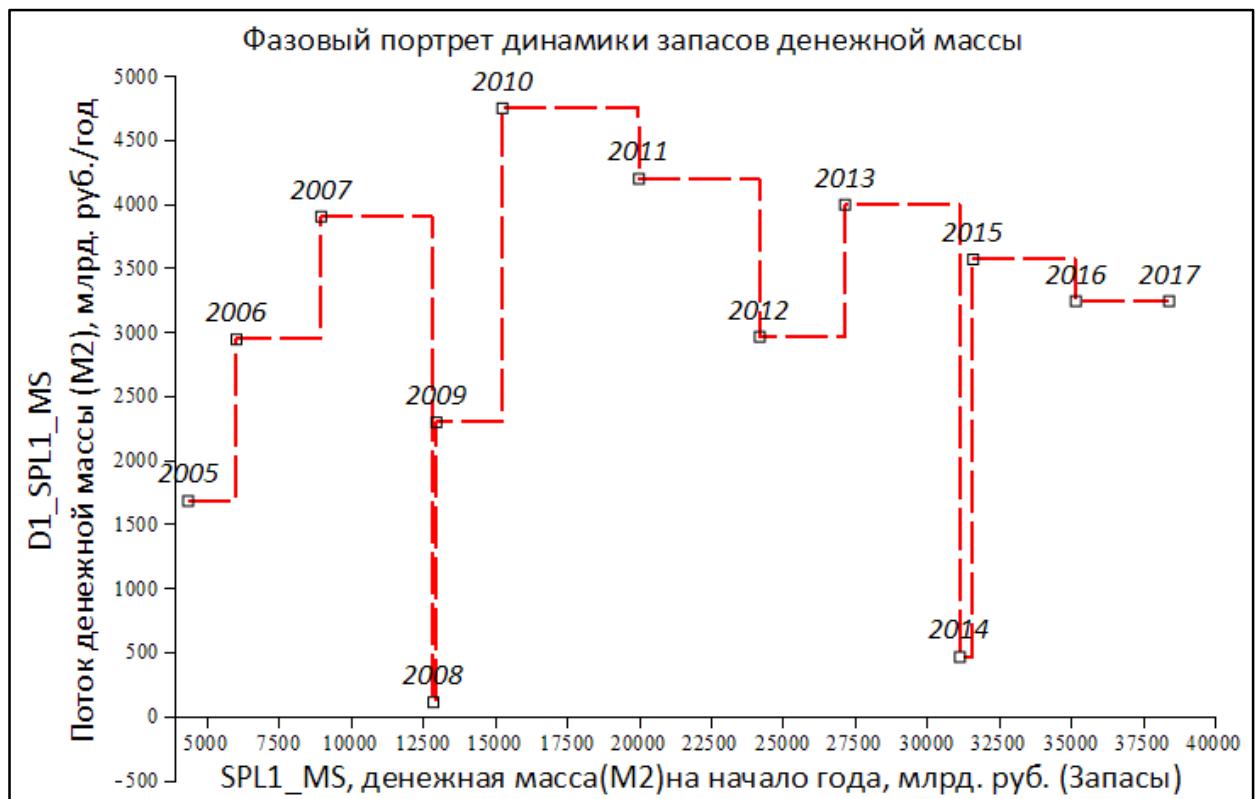
#### 4.5 Фазовый анализ циклов роста в экономике России

Периодические (сезонные) колебания обычно проявляются на фоне некоторого долгосрочного тренда (*secular trend*). При непредсказуемости их периодов мы имеем дело с циклами (*cycles*) различной продолжительности. экономическим процессам иногда свойственно «скрытое» проявление цикличности, проявляющееся замедлениями или ускорениями «циклов роста» (*growth cycles*). Впервые циклы роста в экономике проявились в 1970-х годах в некоторых странах заметным ускорением роста. В то же время необходимо понимать, что «циклы роста» могут проявиться и на фоне тенденции быстрого спада [117].

Для исследования «циклов роста» эффективным инструментом становятся производные – математические эквиваленты замедления или ускорения экономического движения. Здесь ещё раз мы находим полезность в математическом представлении взаимосвязи между запасами и потоками, аналогично взаимосвязи между функцией роста и её производной (скорости роста). Часто тенденция роста (спада) в динамике некоторых показателей (например, запасов денежной массы) доминирует так сильно, что снижение (рост) в их абсолютном выражении не обнаруживается вовсе. Цикличность в таких случаях может быть идентифицирована преобразованием динамики запасов в их потоки – расчётом цепных приростов для дискретных моделей или дифференцированием функции запасов для непрерывных. В фазовых построениях подобно преобразование выполняется автоматически, располагая по горизонтальной оси значения функции запасов, а по вертикальной – первой производной функции запасов (скорости изменения запасов, т.е. потока).

Аппроксимация линейным сплайном может быть полезна при

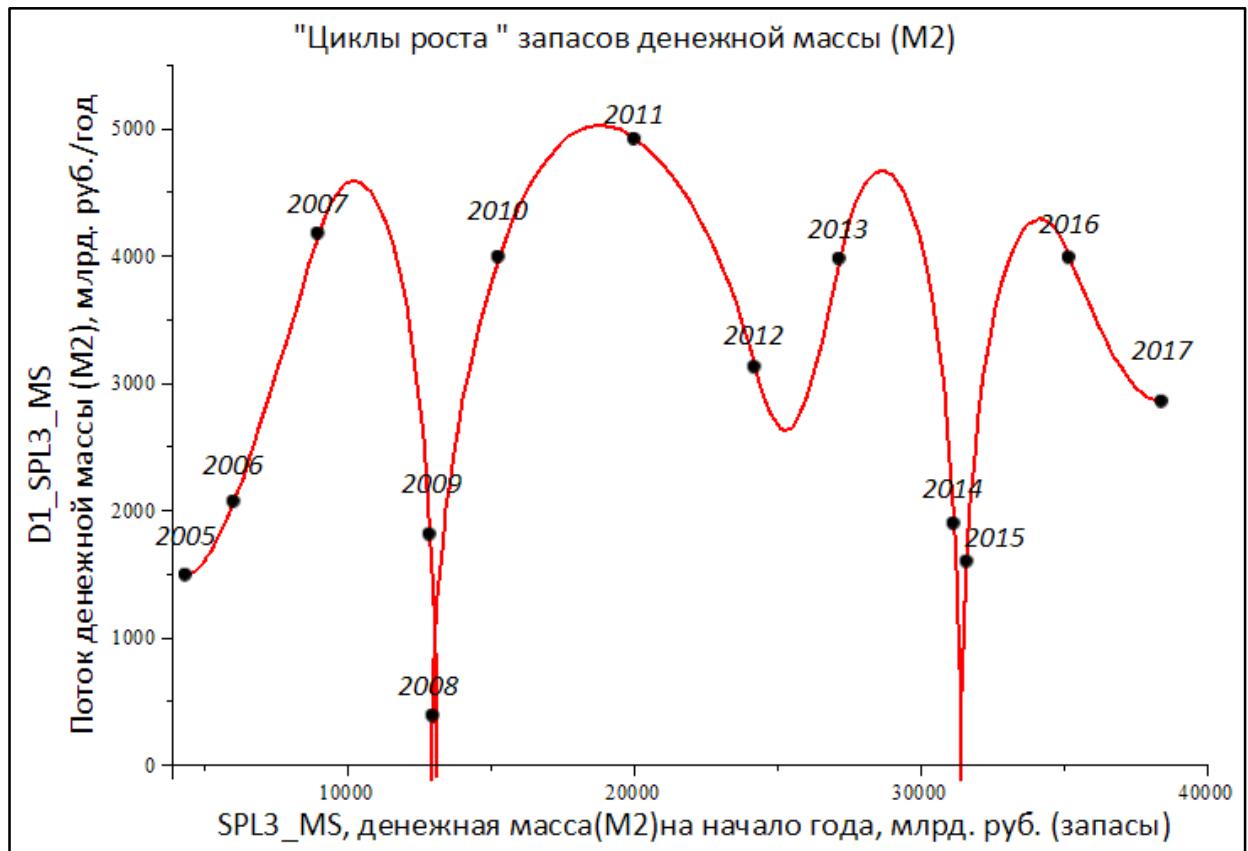
моделировании динамики запасов и потоков в системах с дискретным временем и дискретными изменениями запасов (рис. 4.15). Фазовый портрет позволяет одновременно наблюдать изменения двух показателей – запасов и потока. В предложенной модели взаимосвязи первая производная линейной функции запасов представляет собой среднюю скорость изменения запасов, постоянную внутри каждого темпорального участка. Горизонтальные линии ступенчатой функции определяют дискретные изменения запасов, вертикальные – дискретные изменения скорости потока. Численно значения первой производной функции запаса совпадают с первыми цепными приростами запасов.



**Рисунок 4.15** – Циклы роста в динамике запасов денежной массы (M2) в России. Фазовый анализ. Аппроксимация линейным сплайнами

В динамике экономических потоков часто можно «обнаруживать «циклы роста», проявляющиеся колебаниями скорости роста. Примером можно считать фазовую траекторию роста денежной массы в России, которая совершенно не прерывается периодами спада запасов в абсолютном выражении (рис. 4.16). В то же время, поток денежной массы существенно замедляется в 2008 и 2014 годах, о чём говорит приближение первой

производной к нулю, образуя «циклы роста» в экономике современной России. Цикличность отчётливо проявляется на фоне общей тенденции роста запасов денежной массы замедлением её потока» [93].

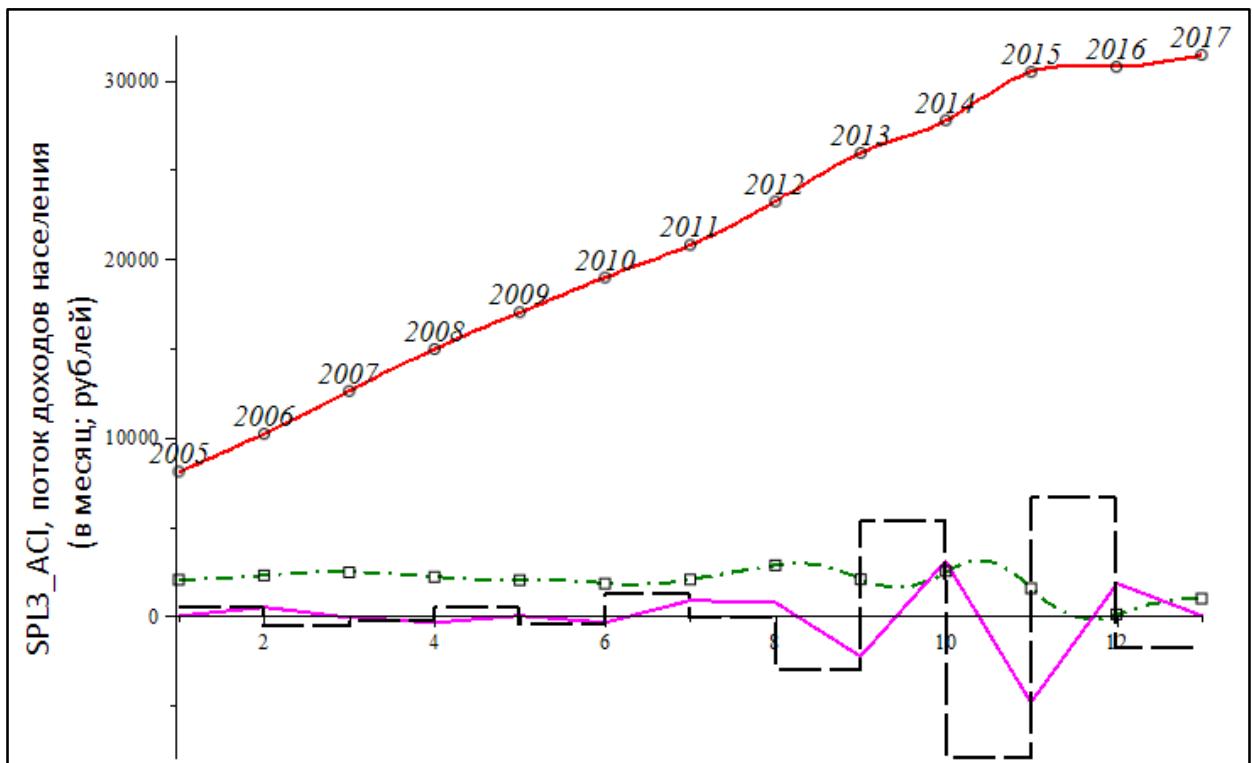


**Рисунок 4.16 – Циклы роста в динамике запасов денежной массы (M2) в России. Фазовый анализ. Апроксимация кубическим сплайном**

Процессы современной экономики часто характеризуются изменениями скорости развития, т.е. некими «потоками». Результатом воздействия факторов при этом может становиться замедление или ускорение потоков. Другим примером, демонстрирующим появление «циклов роста» в экономике России, является показатель уровня жизни населения. Например, статистические данные демонстрируют в последние годы заметное повышение среднедушевых доходов населения России в их рублёвом выражении.

Рисунок 4.17 показывает замедления скорости роста среднедушевых доходов населения на фоне продолжающегося абсолютного роста и в их рублевом выражении. Дифференцированием сплайн-функции, моделирующей динамику среднедушевых доходов населения России, получим модель скорости потока среднедушевых доходов. Хотя значения первой производной (скорости

потока) остаются положительными на всём исследуемом интервале времени, её колебания усиливаются с 2013 года, а в 2016 году скорость потока среднедушевых доходов приблизилась к нулевой отметке. Еще заметнее замедление среднедушевых доходов населения России обнаруживает траектория интенсивности потока – вторая производная в 2013 году уходит в область отрицательных значений. Рост неустойчивости динамики доходов населения в последние годы визуально определяется увеличением амплитуды колебаний всех трёх производных.



**Рисунок 4.17** – Сплайн и его три производные динамики среднедушевых доходов населения в России с 2005 по 2017 гг., рублей в месяц.

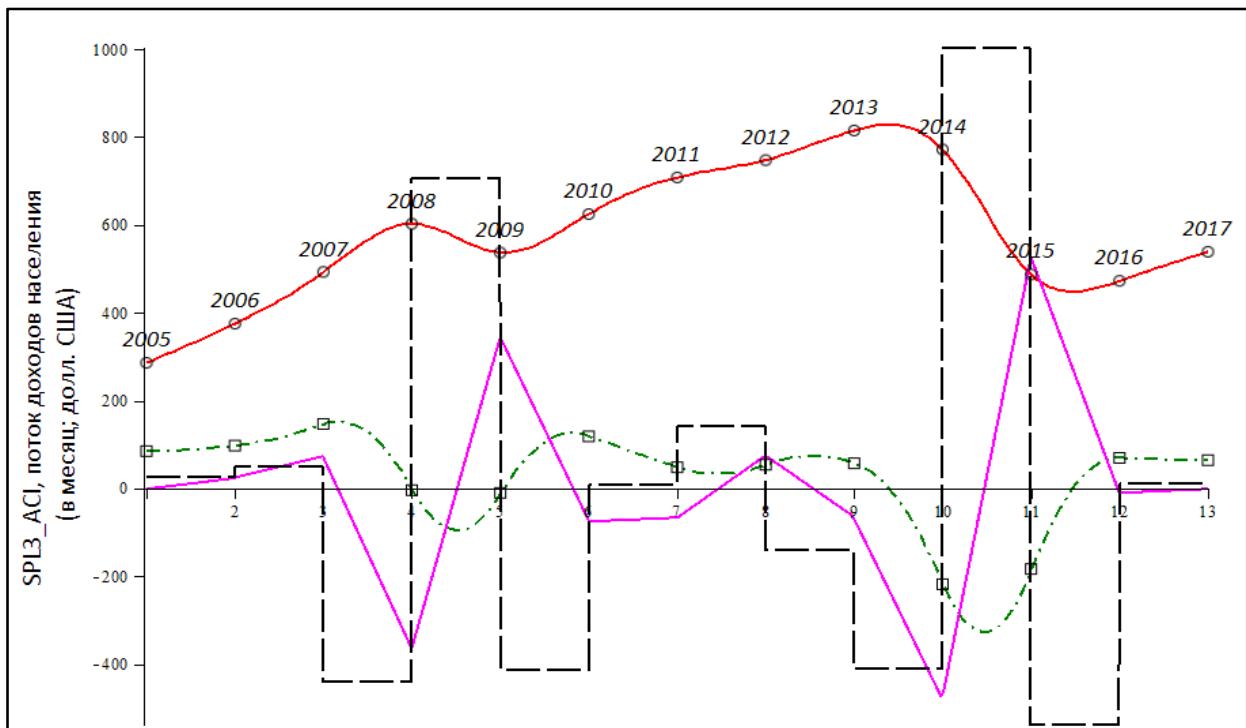
На рисунке 4.17 наблюдаем устойчивый рост среднедушевых доходов в рублях – первая производная потока доходов (скорость потока) положительна на всём исследуемом интервале. Замедление скорости роста доходов обнаруживается приближением первой производной потока к нулю в 2013, 2015 и 2016 гг. Наименьшая интенсивность потока доходов выявляется минимумом второй производной в 2015 году. Рост номинальных денежных доходов сильно корректируется инфляцией, приближая к нулю скорость потока реальных располагаемых доходов. Изменение уровня жизни

населения характеризуется и изменениями в структуре потока денежных доходов. Изменение материального положения населения в России привело к «...вынужденному пересмотру потребительских стандартов в пользу более низких» [41].



**Рисунок 4.18 – «Циклы роста» потока среднедушевых доходов населения России.** Фазовая траектория обнаруживает интервалы циклического замедления потока доходов населения России в 2010, 2013 и 2016 гг. Если в 2010 и 2013 годах рост доходов продолжался, хотя и с некоторым замедлением, то в 2016 году скорость потока стала практически нулевой

Представление потока среднедушевых доходов населения России в долларовом эквиваленте не обнаруживает столь явной тенденции к росту, как в случае его выражения в национальной валюте. Наблюдается быстрое увеличение потока доходов до 2008 года с его резким снижением в 2009 году. В дальнейшем тенденция роста возобновляется и сохраняется до 2013 года. Очередной кризис в экономике России в 2014-2016 годах снижает поток среднедушевых доходов населения до уровня 2007 года.



**Рисунок 4.19** – Поток среднедушевых доходов населения в России в долларовом эквиваленте и его производные с 2005 по 2017 гг. При корректировке среднедушевых доходов относительно курса доллара к рублю обнаруживаются темпоральные участки спада исследуемого показателя. Скорость потока доходов приближается к нулю в 2008 и 2009 годах, а в 2014 и 2015 годах первая производная находится в области отрицательных значений

Колебания потока доходов населения в России, по данным Росстата, следуют за динамикой своего основного компонента – заработной платы. Несмотря на государственную поддержку наименее обеспеченных слоёв населения в периоды кризиса, потоки доходов, выраженные в национальной валюте и в более устойчивом долларовом эквиваленте, реагируют заметным падением в 2008-2009 и 2014-2015 гг. Возвращение потока доходов населения в 2016-2017 годах в зону положительной скорости роста можно объяснить восстановлением российской экономики после рецессии.

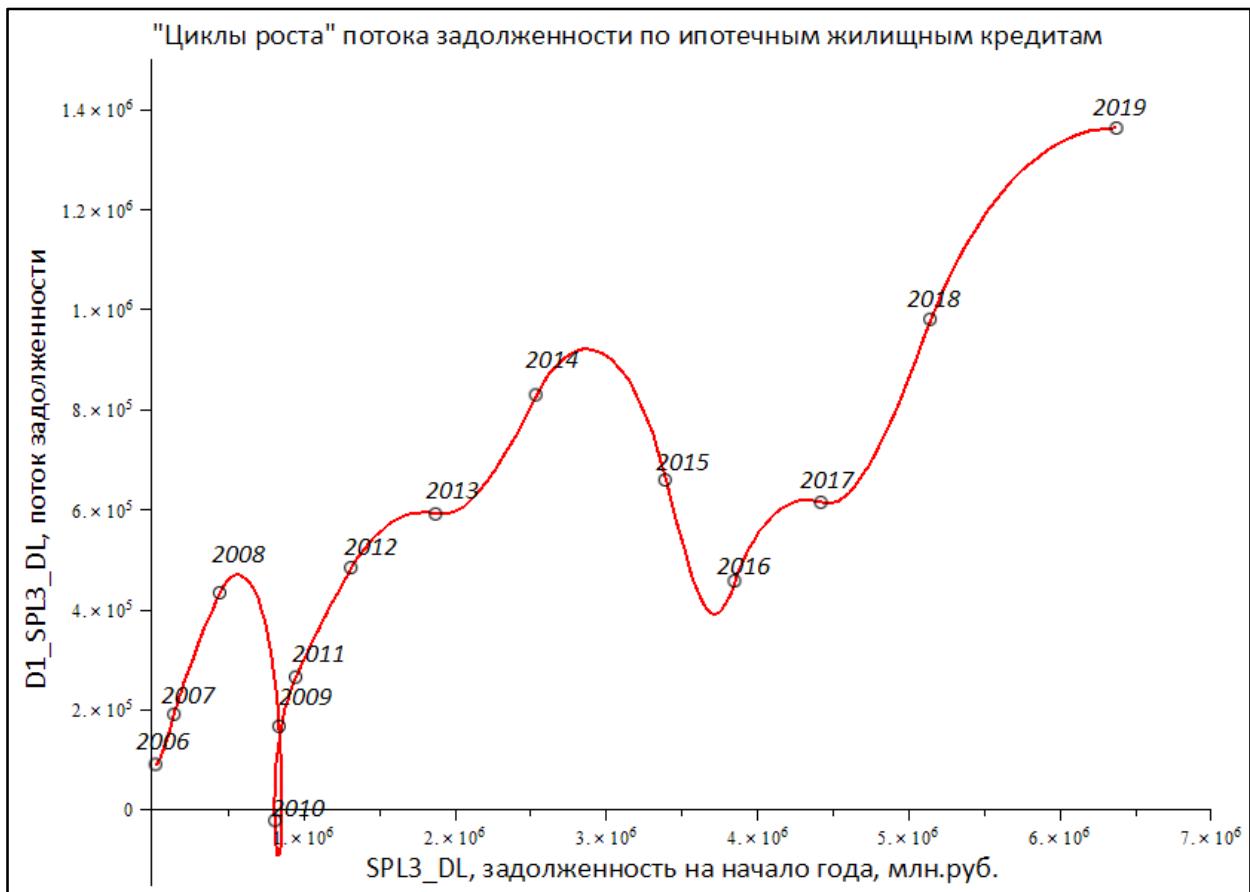
На рисунке 4.20 малый цикл доходов населения с 2007 по 2010 годы – небольшой диапазон абсолютного изменения показателя, скорость потока также меняется незначительно. Второй цикл потока доходов демонстрирует более существенные изменения как в абсолютных значениях доходов, так и в колебаниях скорости потока. Заметный уход фазовой траектории в область отрицательных значений скорости потока свидетельствует о более

существенном воздействия кризиса на уровень жизни населения России в 2014-2015 годах по сравнению с кризисом 2008-2009 годов.



**Рисунок 4.20** – Цикличность потока среднедушевых доходов населения России с 2005 по 2017 гг., долларов в месяц.

Фазовая траектория динамики задолженности по ипотечным жилищным кредитам не обнаруживает явных спиралей цикличности, она демонстрирует лишь замедление потока внутри «циклов роста». Наибольшее замедление роста задолженности наблюдалось в 2009 и 2010 гг., приблизившееся даже к нулевой скорости в 2010 году. Другой темпоральный участок замедляющегося потока задолженности относится к 2015 и 2016 гг. За исключением 2010 года поток задолженности (первая производная запаса) всегда положителен, а в последние годы в сегменте ипотечного кредитования поток ссудной задолженности заметно ускоряется. По данным Банка России «...риском для сектора выступает возможное возникновение «кредитной спирали», в которой рост ипотечного кредитования выступает фактором роста цен на жилую недвижимость, а рост цен на недвижимость – фактором дальнейшего роста кредитования» [190].



**Рисунок 4.21** – Фазовый портрет потока задолженности по ипотечным жилищным кредитам, предоставленным физическим лицам-резидентам в рублях с 2006 по 2019 гг., млн. рублей. Наблюдается динамика роста задолженности, на фоне которой «циклы роста» проявляются замедлением потока. Сравнение фазовых траекторий потока задолженности и потока доходов населения показывает, что скорость роста задолженности сохраняется существенно выше скорости роста доходов, что порождает риски устойчивости банковской системы России.

В методологии сплайн-моделирования и анализа потоков фазовый анализ оказывается эффективным благодаря «обязательному аналитическому представлению показателей и решений, аналитическому заданию первой производной. Фазовые методы удачно ложатся на сплайновую аналитику, потому что в сплайне наряду с самим показателем всегда содержатся все его производные» [103].

## **ГЛАВА 5. АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ МЕТОДАМИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

### **5.1 Экономическая физика и физическая экономика: поиск экономических аналогов физического движения**

Две науки с перекликающимися названиями «Экономическая физика» и «Физическая экономика» стали играть особую роль в новых экономических реалиях.

«Физическая экономика изучает особенности и принципы развития сферы материального (физического) производства с целью количественного и качественного улучшения наполнения «рыночной корзины» на базе непрерывного научно-технического прогресса, обеспечивающего длительное существование человечества на Земле. В этом универсальный смысл и гуманистическая сущность предмета новой экономической науки» [173].

Приверженцы физической экономики со второй половины XVIII века от Франсуа Кенэ назывались физиократами («господство Природы»). Начала физической экономии находим у А. Смита. Эта школа считала единственным самостоятельным фактором производства почву, землю, природу. В новой «экономической школе пропагандируется один из научных подходов к исследованию и организации экономики, предметом которого являются измеряемые в физических (натуральных) величинах экономические показатели и процессы, способы управления обменом вещества-энергии-импульса-информации в хозяйственной деятельности человека» [173]. «Физическая экономика» или физиократия – этот новый термин, новое название ввёл Линдон Ларуш, хотя теория начала свою жизнь от Дюпона де Немура, издателя трудов Кёнэ, далее к А. Смиту и К. Марксу.

«Эконофизика – изучение экономических процессов методами различных разделов физики». Оно началось с 1965 года, когда Бенуа Мандельброт обнаружил самоподобие и фракталы в динамике финансовых рядов.

Сравнивая два новых подхода, отметим более привлекательным и универсальным второй, поэтому зададимся естественным вопросом, что может дать «новая эконометрика» эконофизике, если последняя – новая ветвь экономического знания? Экономическую науку в последние годы пополняют новые идеи из многих неожиданных областей абсолютного знания, в том числе и из физики. Происходит укрепление роли экономической физики, которую иногда интерпретируют как «теорию финансово-экономических потоков на энтропийном многообразии фазового пространства» [37], [138], [181], [191], [193], [271], [272]. Если определять эконофизику таким образом, то общие цели и методология исследования динамических потоков позволяют конвергировать многие положения эконофизики в императивы «новой эконометрики» и, наоборот, полезно вложить возможности «новой эконометрики» в эконофизические конструкты [246], [166], [172], [231], [316].

Междисциплинарные исследования, как показывает практика, считаются наиболее перспективными. Результаты исследований на стыке нескольких научных направлений могут быть полезными для экономической практики, хотя и могут быть допущены и некие досадные нестыковки. Междисциплинарные исследования, сопоставляя методы анализа разных наук, позволяют найти, сформулировать и сформировать единый многоаспектный понятийный метааппарат нового направления.

Существуют различные мнения о том, является ли экономика, как и физика, разделом естествознания. Экономика обычно рассматривается как социальная наука, сочетающая в своих исследованиях качественные и количественные подходы. В отличие от большинства естественных наук, социальные науки в значительной степени полагаются на интерпретацию и качественные методологии исследования. Однако социальные науки также используют ряд количественных инструментов для исследования тенденций. Одним из основных аргументов против классификации экономики как науки является отсутствие проверяемых гипотез. Научный метод, с другой стороны, регулярно применяется экономистами в области микроэкономики, включая

проведение количественных исследований в реальных условиях, которые дают поддающиеся проверке и перепроверке результаты. Кроме того, продолжающийся прогресс в вычислительной мощности и обработке данных позволяет экономистам моделировать все более сложные модели. Одной из существенных проблем экономики также является способ отображения эмпирических данных, когда сглаживающие процедуры приводят к получению множества противоречивых гипотез, моделей и результатов.

Что сближает физику и экономику? Экономические явления и процессы, как и физические, могут обладать универсальными свойствами, которые могут быть раскрыты с помощью инструментов физики. Принципиальное отличие состоит в том, что в экономических системах – в отличие от физических – на текущие действия может влиять восприятие будущих событий. Г. Мюрдал выделяет в экономике два типа показателей – *ex post* и *ex ante* [318]. Сложностью динамических систем и недостаточностью информации о содержащихся в *ex post* данных объясняются трудности в прогнозировании направлений развития тенденций в будущем. Полученные по данным *ex post* эконометрические модели отражают ранее сложившиеся тенденции развития, однако нет уверенности в их сохранении в будущем. Одно из самых ранних открытий экономики в том, что совокупные паттерны формируются из индивидуального поведения, а индивидуальное поведение в свою очередь реагирует на эти совокупные паттерны, образуя рекурсивные петли.

Рынки в современной экономике представляются «сложными системами» – системами многих элементов (людей, фирм и т.) с сильными взаимодействиями между теми элементами, которые создают сети нелинейной обратной связи. Элементы системы учатся и адаптируются, а их взаимодействия создают «эмерджентные» когерентные структуры и флуктуации на коллективном уровне, и эти структуры затем действуют обратно вниз, влияя на поведение своих элементов. В этом смысле экономические системы обнаруживают общий характер со многими

физическими или биологическими системами. На практике рынок представляет собой обширный и сложный набор интересов, механизмов и действий, в которых агенты, потребители, фирмы, банки, инвесторы, правительственные учреждения покупают и продают, контролируют, создают продукты, предлагают услуги, инвестируют в компании, разрабатывают стратегию, исследуют, прогнозируют, конкурируют, учатся, внедряют инновации и адаптируются.

*Эконофизические воззрения классиков.* Исследования экономической динамики всё чаще прибегают к методам естественных наук, обнаруживая в экономическом развитии аналогии с физическим движением. В методологии сплайн-моделирования уже нашли своё эффективное применение фазовый анализ, интерпретация производных как скорости и ускорения движения, «экономические потоки» описываются по аналогии физическими потоками и др. Физические характеристики движения, к которым относятся скорость, ускорение, масса, импульс, сила и др., должны найти свое эффективное местоположение при исследовании экономических конъюнктур. В частности, встречающееся до сих пор верbalное применение физических понятий «импульс» и «сила» в экономике также должно найти аналитическое описание, позволяющее в любой момент рассчитывать количественные характеристики экономического движения.

Поиск новых, более эффективных методов описания экономического движения приводит нас к понятию «экономический поток», которое также имеет аналогию с физическим потоком, характеризующим непрерывные изменения количества или объёмов исследуемого показателя за определенный период времени. На примере объёмов экспорта нефти («потоки») в их стоимостном выражении показано, что первая производная функции товарооборота и есть «экономический импульс». По аналогии с физическим определением можно найти экономическую интерпретацию «силы» как скорости изменения «импульса». Для математического моделирования «экономического импульса» и «силы» предлагается

использовать аппроксимацию исследуемой динамики сплайн-функциями, свойства гибкости, непрерывности и дифференцируемости которых оказались в эконофизической части исследования очень полезными. Более эффективной альтернативой дискретному определению значений «импульса» и «силы» становится дифференцирование функции непрерывного экономического движения. Предлагаемый подход исследует воздействие «экономических импульсов» или «сил» на экономические конъюнктуры количественно, аналитически и графически.

Развитие стратегем экономической науки все более приближает их к методам естественных наук, эконофизика становится эталоном такого продвижения. Современные экономико-математические методы и инструменты исследований эффективно используют физическую интерпретацию первой производной – как тенденцию, как скорость перемещения, как экономический поток. Фазовые траектории, требующие для своих построений первых производных, оказались полезными – *ceteris paribus* – при описании состояний сложных экономических систем. Особенно хорошо методами фазового анализа описываются периодические или циклические замкнутые траектории флюктуаций экономического развития. В экономике давно уже стали привычными понятия «поток» и «запас», определение «потока» как первой производной «запаса», также имеет прямую аналогию в физике.

Основной доминантой, стратегически определяющей направление конвергенции физической науки и экономических исследований, можно считать доминанту «движение» или «динамика». Очевидно, что физические характеристики движения, к которым относятся скорость, ускорение, масса, импульс, сила и др., могли бы найти свое эффективное применение и при исследовании экономических конъюнктур и тенденций, в поиске гомологий экономического развития с абсолютными законами Природы. «Новая эконометрика», имея непрерывный автоматический доступ ко всем производным экономического показателя, оказалась благодатной

исследовательской платформой для работы с динамикой физикоэкономических и эконофизических аналогов.

Каковы полезные применения «ново-эконометрических» конструктов? Начнём с предлагаемых сущностей «новой эконометрики» – сплайнов (кусочно-аппроксимационных многочленов) – прописываются аналитически явно вместе с несколькими своими производными. Принципиальное достоинство сплайновых моделирующих конструктов в том, что, проходя точно через узлы «решётчатой функции» в отчётном периоде, они образуют экономико-математические ансамбли с переменной структурой, меняющейся вслед за изменениями экономического фона.

Заметны достижения экономической цикломатики. Экономическая теория, вместе с исследованием периодических сезонных движений, имеет касательство к истинным циклическим колебаниям (волнам Р.Н. Эллиотта в том числе [274], [289], [290]), пытаясь объяснить причины среднесрочных циклических колебаний и кондратьевских волн. К сожалению, она не в состоянии изобразить их в виде замкнутого цикла, определить амплитуду, период, длину, относительно точное время начала, завершения и замыкания. Она не научилась обнаруживать движение и его тенденции замкнутых циклов по фазовой плоскости. В противовес этому, экономическая цикломатика методами «новой эконометрики» научилась строить замкнутые циклические конструкции, определять их численные характеристики, следить за динамикой в фазовом пространстве [61]. Цикл становится неким макросом, базовой экономической конструкцией, его движение интересно, как движение единого целого.

## **5.2 Первые производные моделей экономического движения – экономические аналоги физических импульсов**

*Роль производных в эконофизике.* Следует отметить и признать важную роль производных при формировании основных «эконофизических»

архетипов экономического движения на примере потоков. В экономике уже понимают, «что первая производная в экономике сначала определяет экономический поток, потом тенденцию экономического процесса, затем она представляет величину, прямо пропорциональную «экономическому импульсу». «Экономический импульс», «экономическая сила», «экономическая кинетическая энергия» и «экономическая потенциальная энергия» становятся интересными эконофизическими архетипами» [118, 122].

Благодаря аналитичности сплайн-функций с явным наличием трёх производных конструктивно реализуются эконофизические представления. Введём и предложим использовать понятия «экономического импульса» и «экономической силы» в качестве важных философских и просчитываемых характеристик экономического движения. Для достижения этой цели используем аналогию с понятиями «импульс» и «сила», характеризующими физическое движение. Дадим аналитическое представление «экономическому импульсу» и «экономической» силе, построим их непрерывные динамические модели на базе сплайн-функций, визуализируем в системах компьютерной математики типа *Maple 17*.

*Эконофизический «импульс» в исследованиях экономического движения.* Для начала определимся с понятием «импульс». В переводе с латинского слово «импульс» (*impulsus*) означает удар или толчок. В науке слово «импульс» интерпретируется как «количество движения» [247]. **Импульсом** (количество движения) тела называют физическую векторную величину, являющуюся количественной характеристикой поступательного движения тела. Импульс тела рассчитывается как произведение массы тела на его мгновенную скорость по формуле:  $\vec{p} = m * \vec{v}$ .

В экономике понятие «импульс» встречается не часто. Одним из первых упоминаний этого понятия в экономическом контексте можно считать исследования норвежского ученого Рагнара Фриша [294], [295], опубликованное в Лондоне в 1933 году. В своем исследовании причинами

цикличности в экономике Р. Фриш считал воздействия так называемых «импульсов» или «шоков», нарушающих равновесие в экономических системах и вызывающих ответные колебания [252], [253]. По мнению Р. Фриша, большинство экономических колебаний, с которыми мы сталкиваемся, наиболее правдоподобно объясняются свободными колебаниями. Во многих случаях они, по-видимому, вызваны тем, что определенные внешние импульсы действуют на экономический механизм и тем самым инициируют его более или менее регулярные колебания.

В словаре Ч. Райкрофта [206] предлагается использовать понятие «импульс» для экономического описания движения энергии. Другим примером использования термина «импульс» в экономике является определение «кредитного импульса» [14]. Под кредитным импульсом понимают поток нового кредита, выпущенного частным сектором, выраженный в процентном отношении к ВВП. Для расчёта кредитного импульса применяют формулу:

$$Credit\ impulse_t = \frac{C_t - C_{t-1}}{GDP_t} - \frac{C_{t-1} - C_{t-2}}{GDP_{t-1}},$$

где  $C_t$  – объёмы кредита на конец года (*stocks* – переменные типа «запас»);  $C_t - C_{t-1}$  – абсолютное изменение объёмов кредита (*flows* – переменные типа «поток»);  $GDP_t$  – ВВП текущего года.

Здесь при расчёте кредитного импульса применяется классический способ перехода от показателей типа «запас» к показателям типа «поток», рассчитываются абсолютные приrostы исследуемого показателя в единицу времени.

Обычно при исследовании физических, экономических или других процессов, действие импульса определяется дискретно, в фиксированные моменты времени [323]. В это же время известно, что источником или генератором импульса является движение или развитие (физическое, экономическое...), которое характеризуется колебанием масс (объёмов) и

скорости движения, т.е. вариацией непрерывного потока. Тогда одной из задач исследования становится поиск способа построения модели «экономического импульса», позволяющего наблюдать темпоральные особенности его непрерывного воздействия на экономические показатели.

В механике и физике импульс является мерой некоторого движения и определяется как произведение массы на скорость движения, т.е. «на первую производную функции движения:  $M \cdot dY(t)/dt$ , где  $M$  – масса,  $Y(t)$  – функция движения,  $t$  – время» [122]. Экономическая интерпретация импульса как меры движения даёт нам выражение  $M \cdot dE/dt$ , где  $M$  – масса или объём некоторого экономического количества,  $E(t)$  может представлять собой функцию стоимости экономического количества  $M$ . Функция  $E(t)$  становится экономическим архетипом физического движения, а вместе с функцией  $S(t)$  и импульсом  $M \cdot dS/dt$ , где  $S$  – модельная функция экономического движения – архетипом модельным. Скорость экономического движения определяется как первая производная моделирующей его динамику сплайн-функции. Далее, «заменив физическую массу  $M$  на объём экономического количества  $M$ , мы получаем «экономический импульс». Импульс экономического движения задаёт интенсивность и направление движения (или воздействия) на экономические конъюнктуры. Скорость изменения (первая производная) количества экономического движения  $dE(t)/dt$  пропорциональна «экономическому импульсу»  $M \cdot dE(t)/dt$ . Следуя закону сохранения импульса в Природе, в частности, строгому и абсолютному подчинению законам сохранения физических импульсов  $M \cdot dY(t)/dt$ , становятся не только количественными, но и голономными правила экономического движения и экономические динамические балансы, также подчиняясь абсолютным законам сохранения» [122].

Возвращаясь к конструкту «импульс», означающего в физике удар или толчок, мы предлагаем под импульсом в его экономическом толковании понимать «экономический эффект» или «экономическое воздействие» в единицу времени. Для расчёта «экономического импульса» удобнее

пользоваться термином «экономическое количество движения» или «количество экономического воздействия» в единицу времени.

По аналогии с характеристиками физического движения, мгновенная скорость изменения экспортных цен на нефть, умноженная на объёмы экспорта, может интерпретироваться как «экономический импульс» экспортных цен. Единицей измерения «экономического импульса» экспортной цены станет мгновенная скорость прироста стоимости экспорта – млн долл/год. В каждый момент времени  $t$  импульс экспортной цены определяется мгновенной скоростью роста экспортной цены при заданных объёмах экспорта. «Экономический импульс» объёмов экспорта выражается в тех же единицах измерения – в млн долл/год. Импульс объёмов экспорта в момент времени  $t$  определяется мгновенной скоростью роста объёмов экспорта, умноженной на экспортную цену в момент времени  $t$ . Построенная сплайн-модель позволяет предложить уравнение «экономического импульса», который генерируется экспортом товара при непрерывной вариации объёмов экспорта и (или) экспортных цен на товар:

$$EI_t = (m_t \times v_t)', \quad (28)$$

где  $EI_t$  – экономический импульс в момент времени  $t$ ;

$m_t$  – объёмы экспорта товара в момент времени  $t$ ;

$v_t$  – экспортная цена товара в момент времени  $t$ .

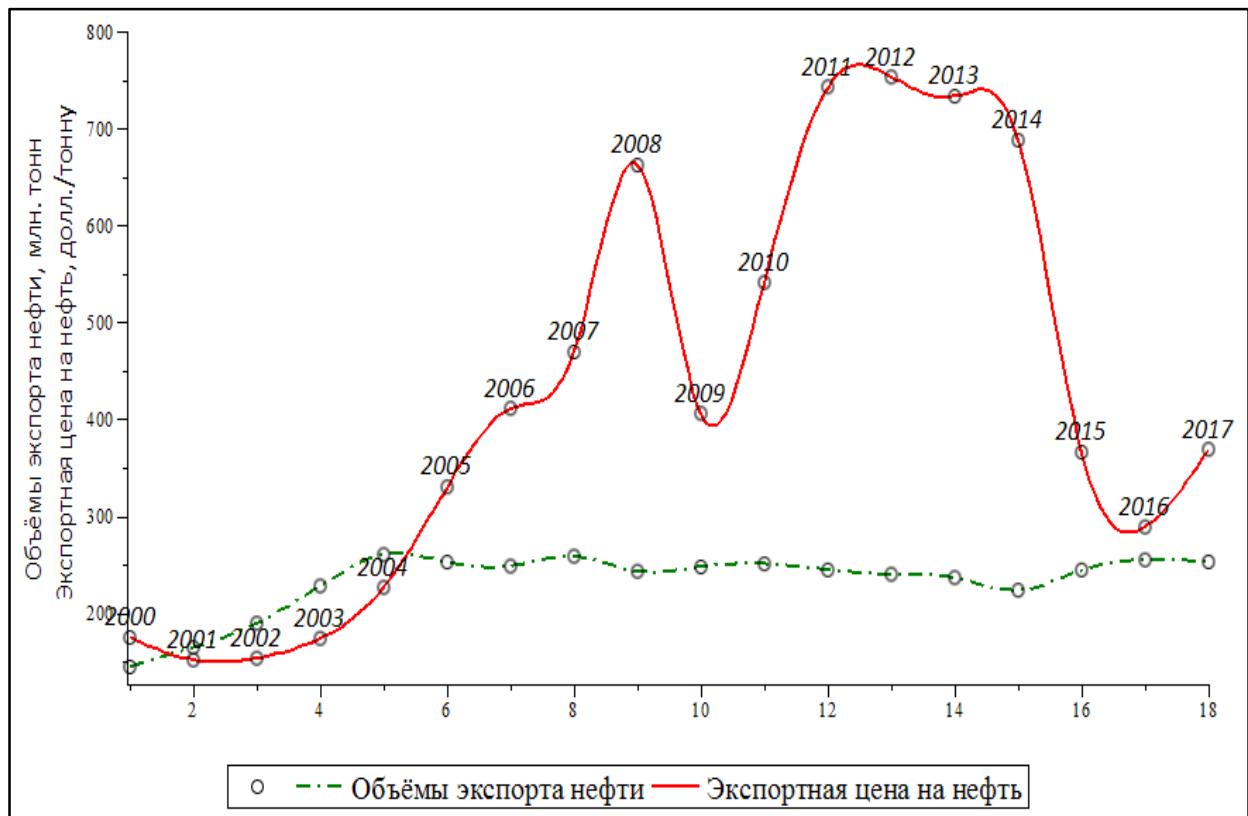
Уравнение (28) позволяет разложить «экономический импульс» на сумму двух импульсов - «импульса физических объёмов экспорта» и «импульса экспортных цен»:

$$EI_t = (m_t \times v_t)' = m'_t \times v_t + m_t \times v'_t. \quad (29)$$

Справедливость равенства 29 доказывается аналитически – применением известной формулы производной произведения, и количественно – точным равенством суммы импульсов экспортной цены и объёмов экспорта мгновенной скорости стоимости потока в произвольной точке временной оси.

Очевидно, что экономический эффект от экспорта товара мультиплицируется при совокупном воздействии меняющихся объёмов экспорта и экспортной цены. Положительный экономический эффект максимизируется при одновременном повышении как объёмов экспорта, так и экспортной цены.

Проиллюстрируем колебания «экономического импульса» в динамике объёмов экспорта российской нефти и экспортной цены на нефть с 2000 по 2017 гг. [273]. При моделировании «экономических импульсов» поставим условием непрерывность моделей исходной динамики, это позволит перейти к получению скорости изменения цены и объёмов экспорта дифференцированием [100]. Для повышения точности при описании колебаний экономического импульса предлагается аппроксимировать исходную экономическую динамику сплайн-функциями (рис. 5.1), что выгодно и принципиально отличается от процедур МНК классической эконометрики.



**Рисунок 5.1** - Динамика объёмов экспорта российской нефти (млн. тонн, GREEN, штрих-пунктир) и экспортной цены на нефть (долл./тонну, RED, сплошная линия).

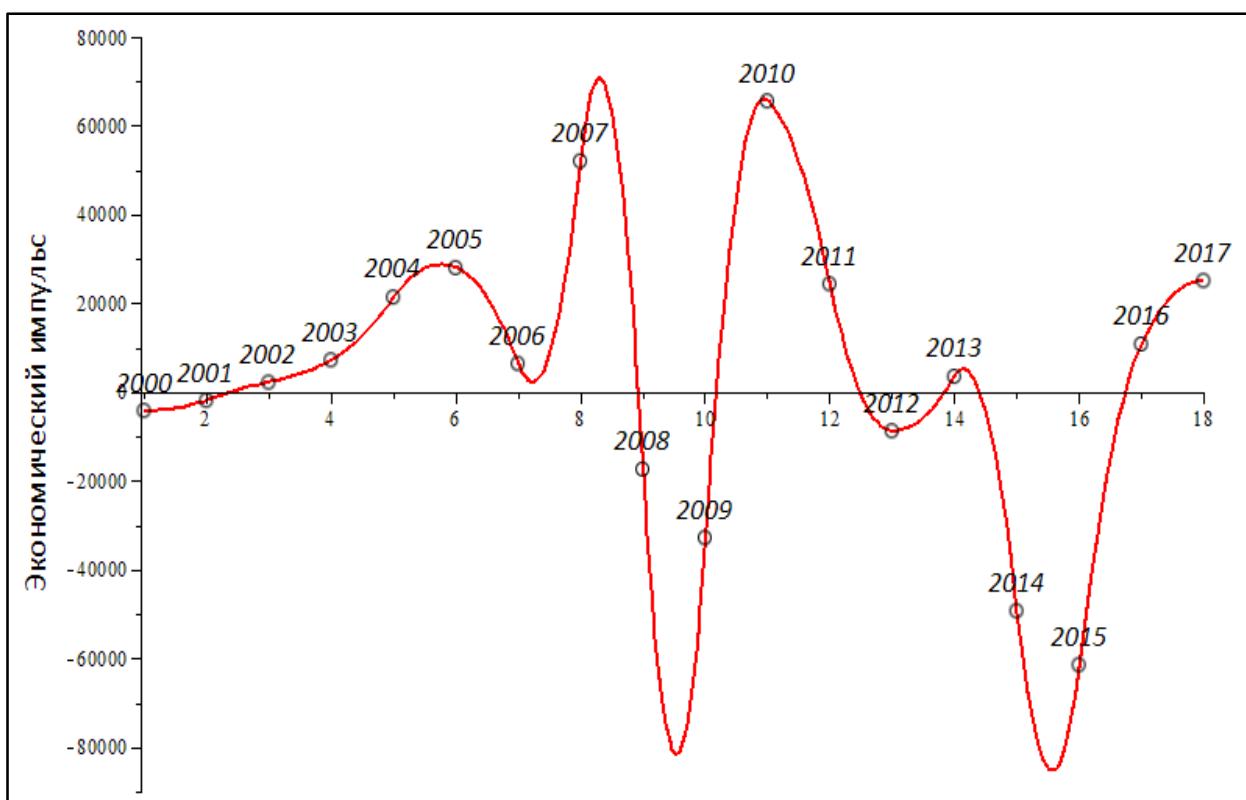
Как уже известно, аппроксимация сплайнами сохраняет все эмпирические значения исследуемого показателя, генерируя гладкую, непрерывную траекторию, имеющую аналитическое описание и последовательно-переменную структуру. Это позволит при построении модели «экономического импульса» использовать фактически наблюдаемые значения массы (объёмов финансовых ресурсов) и скорости развития исследуемого экономического процесса. Такой подход выгодно отличается от сглаживающих процедур, позволяющих искать воздействия только по значениям «усреднённой траектории» регрессора.

При определении «физического импульса» в средней школе упрощенно рассматривается движение тела с постоянной массой. Однако в общем случае масса может быть переменной, в частности, при расчёте реактивных импульсов и сил ракеты, движущейся за счёт выброса топлива.

В экономике интересно сравнивать импульсы с переменными объёмами финансовых вложений в экономическое движение (массами), рассмотрение моделей с переменными массами и скоростями движения, определяемыми в конкретные моменты времени, вносит своеобразие, новую сложность, но и новые возможности изучения экономических конъюнктур. В любом случае получаемые модели движения имеют детерминированный характер. Производная произведения объёмов экспорта нефти на экспортную цену нефти даёт динамическую модель колебаний «экономического импульса», позволяющую определять его значения непрерывно и с высокой точностью, при этом траектория импульса находится аналитически, численно и графически в любой момент времени.

Рис. 5.2 позволяет увидеть темпоральное поведение «экономического импульса» – динамическую особенность непрерывной эволюции совокупного воздействия колебаний объёмов экспорта и экспортной цены на экономическое развитие. Замечено, что «экономический импульс» экспорта нефти был положительным для России с начала 2000-х гг., значения «импульса» повышались вплоть до 2007 г., хотя и с некоторым замедлением

роста в 2006 году. Резкое падение величины «импульса» в 2008-2009 гг. стало следствием мирового финансового кризиса, спровоцировавшего и падение цен на энергоресурсы. Очевидно, что для российской экономики в условиях сильной зависимости от конъюнктур на рынке энергоресурсов, отрицательное воздействие «импульса» в эти годы могло быть очень заметным. Здесь под «отрицательным воздействием импульса» надо понимать снижение его положительного воздействия на экономику, хотя сам по себе экспорт энергоресурсов продолжает в любое время приносить доходы стране.



**Рисунок 5.2** - Динамическая модель экономического импульса.

Максимальное значение «импульса» в исследуемом интервале времени было достигнуто в 2010 г. за счёт одновременного роста объёмов экспорта нефти и экспортной цены на нефть. В следующем 2011 г. значение «импульса» демонстрирует снижение, сохраняя положительный знак при продолжающемся росте экспортной цены. В 2012-2013 гг. колебания величины «импульса» демонстрируют стремление к стабилизации около нулевой отметки, однако начавшееся ранее замедление роста переходит в 2014-2015 гг. в падение величины «импульса», максимальное за всё

исследуемое время. Возвращение «импульса» к положительным значениям в 2016 г. демонстрирует возобновление тенденций роста как объёмов внешней торговли нефтью, так и её стоимостного выражения, и, как следствие, роста положительного воздействия экспорта на макроэкономические показатели России.

Мы пришли к определению «экономического импульса» экспорта как скорости потока (первой производной) товарооборота. Тогда для построения динамической модели «импульса», генерируемого экспортом некоторого товара, нам достаточно найти первую производную сплайн-функции, представляющей динамику экспорта в его стоимостном выражении.

Стоит подчеркнуть, что Р. Фриш в своей работе [253] также прибегал к понятиям «запас» и «поток» при объяснении механизма воздействия импульсов на циклическое развитие экономики. В частности, он объяснял, что непрерывное воздействие «импульсов» на экономику может приводить к сильным колебаниям развития и к разрушению экономической системы. Для сохранения устойчивости экономического развития может быть полезным использование демпфирующего механизма, который будет стабилизировать движение так, чтобы его амплитуда не выходила за определенные пределы. Воздействие «экономического импульса» на экономику не обязательно происходит полноценно в момент его генерирования, оно может аккумулироваться в течение некоторого времени. Примером такого механизма в экономике России выступает стабилизационный фонд России, использовавшийся в целях стабилизации экономики. Основным источником пополнения стабилизационного фонда служили нефтегазовые доходы федерального бюджета. Оказывается полезным описание экономического движения с помощью «экономического импульса» - это позволяет наблюдать и изучать механизм воздействия потоков на экономические конъюнктуры. В экономике также находит своё место привычное нам описание движения его скоростью. Здесь также «количество движения» определяется скоростью изменения стоимости и изменениями «массы» или объёмов экономических

«количество». В частности, «импульс» или «толчок», который может быть сообщён экономике страны-экспортёра нефти, будет определяться объёмами экспорта и скоростью изменения цены на нефть. Таким образом, мы получаем модель эффективного управления движением экономических «количество» в зависимости от динамических колебаний «импульса». В то же время, степень воздействия импульса, как известно, зависит и от массы того объекта, которому этот импульс сообщается. Например, негативное влияние ускоренного снижения цены на нефть может стать катастрофическим для той страны-экспортёра, экономика которой в большей степени зависит о конъюнктуре рынка энергоресурсов. Нивелировать отрицательное воздействие падающих цен в краткосрочной перспективе возможно увеличением объёмов экспорта, что с некоторым лагом вновь будет снижать мировые цены на нефть.

Таким образом, становится очевидной важность и эффективность экономической интерпретации физических терминов, позволяющих описать экономическое развитие по аналогии с физическим движением. Аналитическая и непрерывная платформа «новой эконометрики» становится при этом полезной для эконофизического представления экономического развития, анализа воздействия «экономических импульсов» и «экономических сил» на микро-, мезо- и макроэкономические конъюнктуры, потому что имеет в своём составе подходящие инструментальные конструкты.

Использование сплайн-функций при моделировании экономической динамики обогащает аналитические возможности метода, а сохранение точности эмпирического сигнала, переход от дискретных «решётчатых» функций к непрерывным дифференцируемым моделям позволяет эффективно исследовать динамику не только процессов, но и их «экономических потоков», «экономических импульсов» или «экономических сил» [293].

### 5.3 Вторые производные моделей экономического движения – составная часть «экономических сил»

Если первая производная вошла в состав «экономического импульса», то лучше обстоит дело с производной второго порядка – «вторая производная  $d^2Y(t)/dt^2$  функции движения  $Y(t)$ , являясь его ускорением, находит своё применение в научных исследованиях механического, физического движения, а теперь и экономического» [93]. Произведение ускорения движения на массу  $M$  движущегося тела даёт силу  $F = M \cdot d^2Y/dt^2$ .

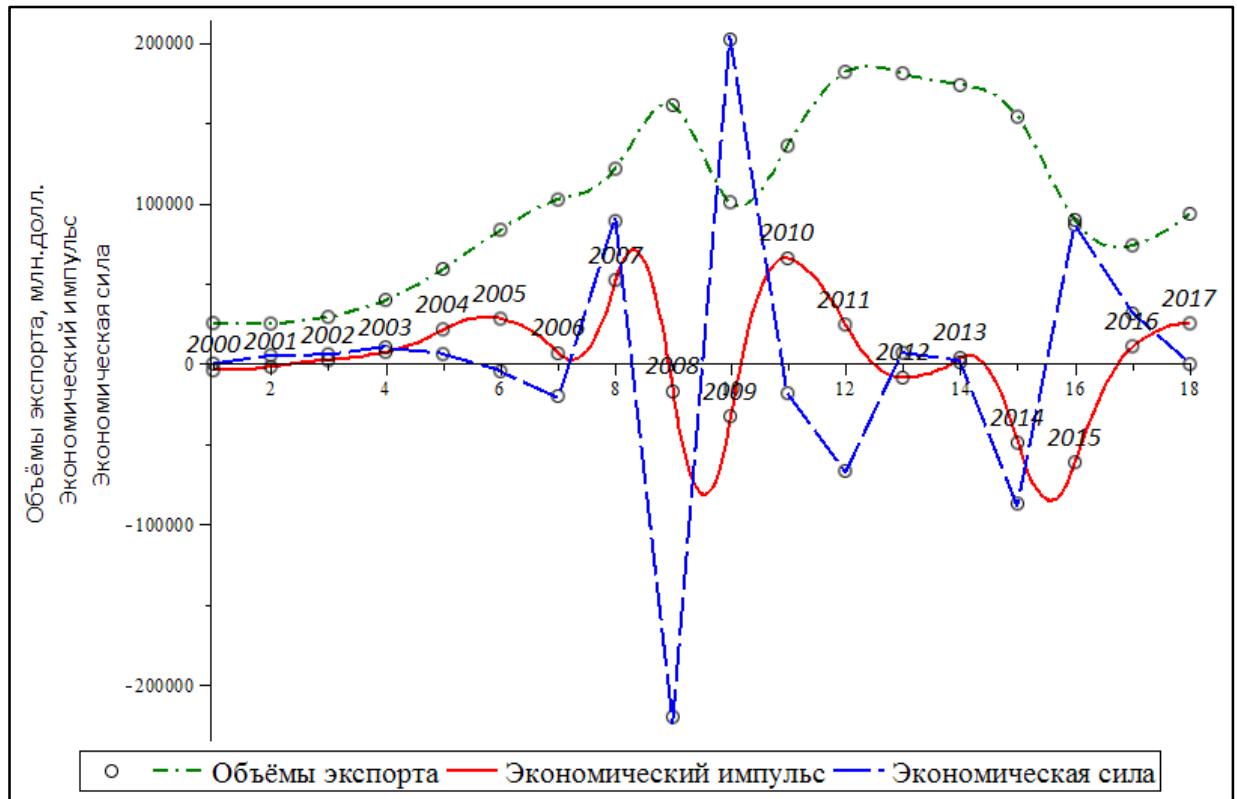
По аналогии мы можем получить «силу» экономического движения или «экономическую силу»:

$$F = M \cdot d^2E/dt^2. \quad (30)$$

Имея в экономике  $d^2E(t)/dt^2$  – вторую производную или ускорение изменения некоторого экономического количества, получаем из уравнения модельного сплайна аналитическую формулу «экономической силы»:  $Md^2S(t)/dt^2$ . Динамические изменения модельной «экономической силы» будут определяться как колебаниями «массы» или объёмов некоторого экономического количества  $M$ , так и изменения второй производной функции их стоимости  $S(t)$ . «Экономическая сила» также является потоковой величиной, характеризующей воздействие на некотором временном участке, даже сколь угодно малом. Она запускается через двойной интеграл и определяет долгосрочную тенденцию экономического движения  $E(t)$ . Управлять воздействием «экономической силы» можно двумя способами – действуя большой силой в течение непродолжительного времени (что может оказывать на экономику разрушительное воздействие) или продолжительное время действовать слабой силой (в этом случае в экономике могут сработать механизмы адаптации).

Если к первой производной в экономике можно привыкнуть, относясь к ней как к «тенденции», то в эконофизике [271] и «новой эконометрике» [29], [187], [48], [52] [283] применение второй производной, как составной части «экономической силы», пока ещё не нашло достойного применения. В

эконофизике и в «новой эконометрике» прозрачное понимание экономического смысла второй производной и её применения ещё ждёт своего часа [191]. Но, и это самое главное, вторая производная непременно нужна для создания и явного использования «экономических сил», управляющих экономической эволюцией.



**Рисунок 5.3** - Товарооборот российской нефти (GREEN, штрих-пунктир), динамические модели экономического импульса экспорта (первая производная или скорость потока, RED, сплошная линия) и экономической силы экспорта (вторая производная, интенсивность потока, BLUE, пунктир).

Так таргетирование «импульса» (вербальное, математическое, визуальное) позволило нам двинуться дальше и дать определение второй производной функции экономического движения. И, опять же, по аналогии со вторым законом Ньютона, прирост «экономического импульса» математически оказывается «экономической силой»:

$$F = \frac{m_t v_t - m_{t-1} v_{t-1}}{\Delta t}. \quad (31)$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  получаем формулу «экономической силы» как производную «экономического импульса»:

$$F = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(m_t v_t)}{\Delta t} = (m_t v_t)'.$$
(32)

При сплайн-представлении динамики экспорта в его стоимостном выражении вторая производная сплайна стала «экономической силой» товарооборота. В более общей форме можно говорить, что первая производная функции, описывающая «количество» некоторого экономического движения (изменения, развития) – суть «экономический импульс», а вторая производная – суть «экономическая сила».

Если принять количество товара в каждый момент времени постоянной величиной, то «импульс товарооборота» определяется только скоростью изменения цены (первой производной функции цены) или потоком. Тогда можно сказать, что «импульс товарооборота» (первая производная функции товарооборота) в момент  $t$  есть произведение количества товара на импульс цены ( первую производную функции цены) в момент времени  $t$ .

Аналогично, «сила товарооборота» (вторая производная функции товарооборота) в момент  $t$  есть произведение количества товара на «силу цены» (вторую производную функции цены) в момент времени  $t$ , где «сила цены» определяется непрерывно как ускорение изменения цены в момент времени  $t$ .

Анализ рис. 5.3 показывает, насколько разрушительными для макроэкономики России были 2008-2009 годы, когда экономические силы не только были значительными по величине, но и весьма волатильными и разнонаправленными, кардинально «ломаясь» на коротких промежутках времени.

#### **5.4 Кинетическая и потенциальная энергии потоков в экономике**

Рассмотрим теперь экономический смысл энергии движения, или кинетической энергии. Формулу кинетической энергии в физике  $E = M/2 \cdot (dY/dt)^2$  преобразуем в формулу кинетической энергии в экономике

$M/2 \cdot (dE/dt)^2$  – «экономической кинетической энергии», В сплайновой модели энергия экономического движения определяется аналогичной формулой  $E = M/2 \cdot (dS/dt)^2$ . Понимая экономическое движения как поток, получаем достаточно простую формулу с квадратом первой производной функции движения  $S(t)$ , т.е. с квадратом первой производной функции потока. В физике кинетическая энергия движущегося со скоростью  $v$  тела показывает какую работу должна совершить сила, действующая на покоящееся тело, для сообщения ему скорости  $v$ . В экономической интерпретации по формуле  $E = M/2 \cdot (dS/dt)^2$  мы можем определить кинетическую энергию, которую из этого потока можно извлечь. На практике из физических потоков не удается извлечь из потока всю его кинетическую энергию, например, невозможно извлечь всю энергию из потока воды с помощью гидравлической турбины. Так как энергия потока зависит от его скорости, то попытка извлечь из него максимум энергии привело бы к полной остановке потока воды. В экономике колебания извлекаемой кинетической энергии потока (потока экспорта нефти, например) определяются изменениями скорости экспортной цены на нефть и физическими объёмами экспорта. Между ценой и объёмами экспорта чаще обнаруживается отрицательная взаимосвязь – при увеличении объёмов экспорта будут снижаться цены, корректируя извлекаемую из потока экономическую кинетическую энергию. С учётом пропорциональности кинетической энергии квадрату скорости, уменьшение скорости потока, например, в 2 раза извлекаемая энергия должна уменьшиться в 4 раза. На практике мы часто наблюдаем попытки стабилизации извлекаемой из экономических потоков кинетической энергии, например, при искусственном ограничении предложения нефти странами ОПЕК, что через механизм взаимодействия спроса и предложения приводит к увеличению скорости роста цены на нефть.

Добавим, что динамику исходных показателей и коэффициентов «конкуренции» и «вытеснения» в теории динамической конкуренции можно представлять как результат взаимодействия во времени экономических

«импульсов», «сил», экономической «кинетической» и «потенциальной» энергии. Полезно перенести эти сведения в эконофизическое представление о движении во времени «коэффициентов конкуренции» и «коэффициентов вытеснения».

*Экономическая потенциальная энергия*. Потенциальная энергия в физике определяется как часть полной механической энергии системы, находящейся в поле диссипативных (консервативных) сил. Другими словами, потенциальная энергия определяется тем «запасом» кинетической энергии, который может быть извлечён при движении системы. Применительно к экономическим количествам, определяя кинетическую экономическую энергию как энергию экономического потока, потенциальную энергию следует считать энергией запасов. Другими словами, потенциальная экономическая энергия определяется стоимостным выражением экономической пользы, которую возможно извлечь из запасов (нефти, природного газа, трудовых ресурсов, товарных запасов и т.д.) при их преобразовании в экономические потоки.

## **5.5 Сплайн-технологии факторного анализа стоимости потоков**

При исследовании стоимости потоков экспорта важно оценивать воздействие двух ключевых факторов – объёмов экспорта и экспортных цен. Предметом исследования является факторный анализ стоимости потоков экспорта. Известные методы факторного анализа потоков экспорта обращаются к экономическим индексам. Дискретность индексов ограничивает эффективность анализа стоимости потоков при сильных колебаниях экспортных цен и (или) объёмов экспорта, что особенно характерно, например, динамике потоков экспорта нефти. Сплайн-интерполяционное моделирование стоимости потоков экспорта сохраняет реальную информацию обо всех значениях процесса в узловых точках, а дифференцированием построенные модели преобразуются в модели скорости

потоков. Моделирование без сглаживания эмпирической динамики сохраняет информацию о колебаниях скорости, тогда дифференцированием можно переходить к анализу и оперативному управлению тенденциями стоимости потоков. Необходимая точность в исследовании достигается и обработкой данных в системе компьютерной математики Maple 17, выполняющей расчеты без ошибок округления.

Экспорт энергоресурсов остаётся ключевым фактором роста доходов федерального бюджета России. На стоимость экспорта сильно воздействует волатильность мировых цен на энергоресурсы и объёмов их добычи. Факторный анализ стоимости потоков в условиях цифровизации должен учитывать необходимость адаптивного управления процессами в экономических системах. Известные методы факторного анализа используют дискретные данные о воздействии факторов на стоимость потока экспорта. Повышение эффективности адаптивного управления может быть достигнуто локальными, корректирующими воздействиями на процессы. Такое воздействие должно учитывать и малые изменения в динамике стоимости потоков – изменения в замедлениях или ускорениях роста. Для этого необходим переход от моделей динамики потоков с дискретным временем к непрерывным моделям, описывающим динамику приростов или мгновенной скорости изменений стоимости потоков. Это позволит использовать в анализе количественные индикаторы, оценивающие колебания скорости потоков непрерывно, обнаруживающие переключения регрессии. Непрерывные модели позволяют оценивать и степень воздействия факторов на прирост стоимости потоков внутри малых временных отрезков.

В настоящее время при изучении динамики экономических потоков широкое применение находят дискретные количественные показатели – экономические индексы. В частности, индексы используются для изучения колебаний в динамике стоимости потоков под воздействием двух ключевых факторов – изменений цен и физических объёмов реализации. В то же время, являясь дискретными показателями, индексы недостаточно эффективны при

анализе потоков в периоды сильных колебаний цен и (или) объёмов продаж.

Также недостатком индексов является невозможность локального исследования потоков внутри временных интервалов малой длины. Становится актуальной задачей разработка непрерывных количественных индикаторов, способных наблюдать тенденции стоимости потоков внутри коротких временных интервалов. Особенно интересным является анализ стоимости потоков экспорта, структурно состоящих из двух компонент – физических объёмов экспорта и экспортных цен. Часто объёмы экспорта и экспортные цены обнаруживают тесную обратную взаимосвязь, выступая факторами управления международной торговлей. Например, в работе<sup>9</sup> удалось выявить положительный эффект от роста объёмов экспорта нефти – увеличение налоговой нагрузки крупнейших нефтяных компаний России до 5%. В то же время, падение цен на нефть оказало негативное воздействие – налоговая нагрузка нефтяных компаний под воздействием фактора цены уменьшилась на 19%. В последнее время повышение волатильности на рынке нефти связывают с ростом добычи сланцевой нефти в США. Возможность в короткие сроки останавливать и запускать добычу сланцевой нефти позволяет, по мнению автора, оперативно управлять мировыми ценами на нефть. Известная корреляция между объёмами добычи нефти и мировыми ценами на нефть активно используется и странами-членами ОПЕК для управления ценами на нефть. В условиях жёсткой международной конкуренции становится актуальным учёт воздействия даже малых изменений объёмов добычи и экспорта на динамику мировых цен на нефть. Внутри локальных временных интервалов малые изменения могут проявляться замедлениями или ускорениями роста (или спада). Математически колебания скорости могут быть описаны первыми производными непрерывных моделей экономической динамики. Сохранение высокой точности данных как самого экономического процесса, так и

<sup>9</sup> Филимонова И.В., Эдер Л.В., Ларионов В.Г., Комарова А.В. Рейтинг нефтяных компаний по уровню чувствительности налоговой нагрузки к макроэкономическим и отраслевым факторам // Экономический анализ: теория и практика. - 2018. - Т. 17. № 12 (483). - С. 1430-1443.

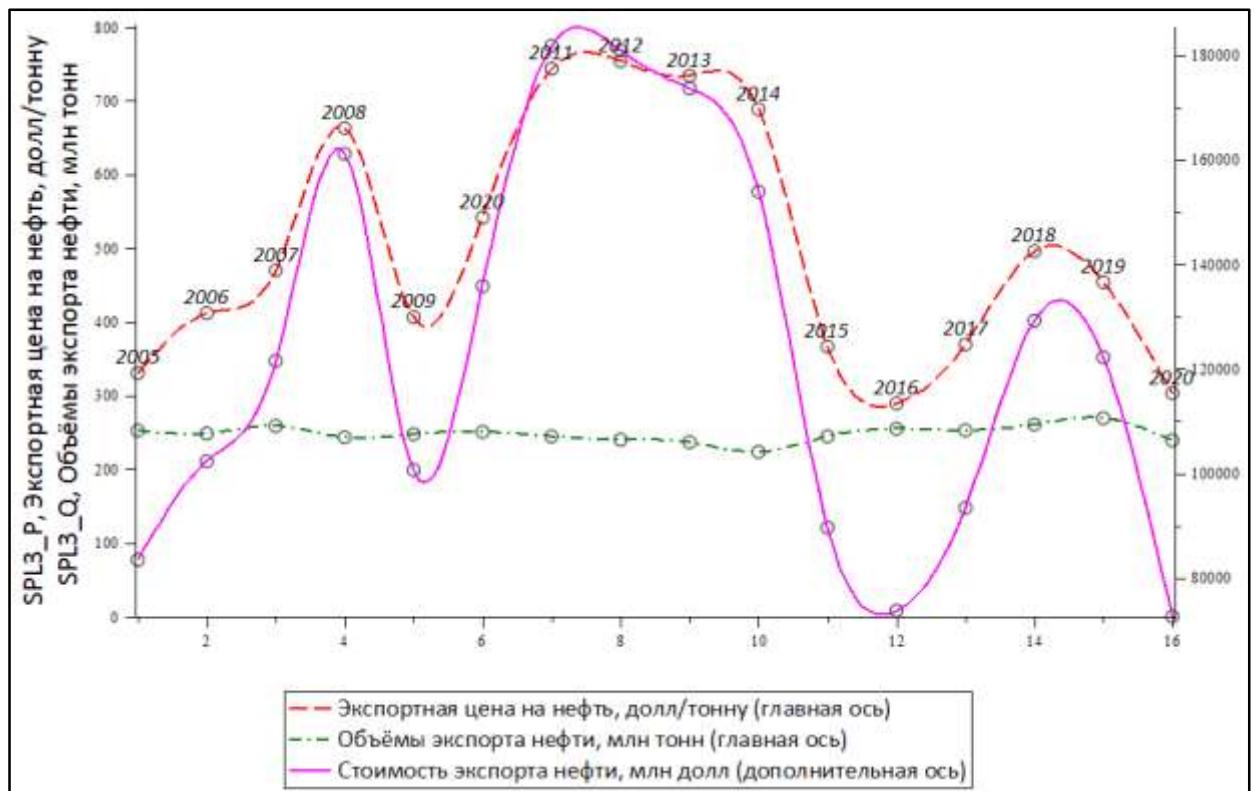
значений его производной достигается сплайн-интерполированием. Применительно к задаче анализа скорости потоков экспорта, новая модель должна быть декомпозируемой на составляющие – динамику скорости колебаний экспортных цен и динамику скорости изменений физических объёмов экспорта. Дифференцируемость сплайн-моделей позволяет привлекать в анализ потоков экономические аналоги физического движения – скорость, ускорение, импульс и др.

Аппроксимация методами классической эконометрики сглаживает динамику экономического движения, вследствие чего утрачивается информация и о реальных колебаниях скорости потоков. В математике, физике, в прикладных исследованиях (например, в геодезии) абсолютно точное сохранение данных достигается интерполированием кубическими сплайнами. Однако, применение сплайнов при моделировании процессов в экономике всё ещё не нашло широкого применения. В то же время, сплайн-интерполирование может стать инструментом анализа «латентной» для методов классической эконометрики корреляции ускорений или замедлений роста.

Факторный анализ стоимости потоков обращается к известному индексному методу. Индивидуальные индексы, исчисленные в форме временных рядов, достаточно эффективны для отражения долгосрочной динамики. Однако, для оперативного управления потоками важно наблюдать реальные тенденции и точно обнаруживать переключения регрессии. Дискретность индексов также ограничивает возможность последовательного сравнения воздействия факторов на скорость роста стоимости потоков. Решением может стать интерполирование динамики потоков кубическими сплайнами, известными высокой эффективностью моделирования сложных нелинейных процессов. Сплайн-моделирование потоков с последующим их преобразованием в модели скорости позволяет разрабатывать и привлекать в анализ экономические аналоги физических характеристик потоков. Апробируем предлагаемый подход при анализе потоков на примере данных

об экспорте сырой нефти (рис. 5.4).

Построенные сплайн-модели позволяют дифференцированием перейти к моделям скорости изменений экспортных цен на нефть, объёмов её добычи и стоимости экспорта нефти. Это позволяет анализировать воздействие факторов в произвольный момент времени, что важно для оперативного управления стоимостью потока. Первые производные сплайн-моделей динамики потоков описывают их мгновенную скорость. Являясь информативными индикаторами тенденций роста или спада, производные позволяют оценивать последовательные изменения в воздействии факторов на исследуемый процесс. Непрерывность и точность сплайн-моделей обеспечивают некритичность метода к вариативности исследуемого интервала времени. Интерполированием дополнительных точек сплайн-кривых снимаются и ограничения классической эконометрики к длине временных рядов, при анализе нелинейных взаимосвязей.



**Рисунок 5.4** - Динамика экспортных цен на нефть, физических объёмов экспортации и стоимости экспортации нефти. Интерполирование кубическими сплайнами

Известно, индексы описывают взаимосвязь между стоимостью

экспорта, экспортными ценами и физическими объёмами экспорта равенством:

$$Ipq = Ip^* Iq. \quad (33)$$

Возможен переход от уравнения (33) к уравнению взаимосвязи между их тенденциями – колебаниями мгновенной скорости. Обращение к моделям скорости должно позволить управлять тенденциями стоимости потока экспорта, аналитическим, количественным и графическим представлением факторов – скорости колебаний экспортных цен и скорости изменений объёмов экспорта. Для преобразования уравнения (33) в уравнение связи между колебаниями их скорости введём обозначения сплайн-моделей:

SPL3\_P - сплайн-модель динамики экспортных цен на нефть, долл/тонну;

SPL3\_Q - сплайн-модель динамики объёмов экспорта нефти, млн тонн/год;

SPL3\_PQ - сплайн-модель стоимости потока экспорта, млн долл/год;

D1\_SPL3\_P - сплайн-модель мгновенной скорости изменений экспортных цен на нефть, долл/тонну;

D1\_SPL3\_Q - сплайн-модель мгновенной скорости изменений объёмов экспорта нефти, млн тонн/год.

D1\_SPL3\_PQ - сплайн-модель мгновенной скорости изменений стоимости потока экспорта, млн долл/год.

Переход от модели стоимости потока экспорта SPL3\_PQ к модели скорости изменений стоимости D1\_SPL3\_PQ выполним по формуле производной произведения:

$$D1\_SPL3\_PQ = D1\_SPL3\_P * SPL3\_Q + SPL3\_P * D1\_SPL3\_Q \quad (34)$$

Мгновенная скорость изменений стоимости потока экспорта в уравнении (34) равна сумме произведения мгновенной скорости изменений экспортных цен на объёмы экспорта и произведения экспортной цены на мгновенную скорость изменения объёмов экспорта. Обращение к производным моделям экономического движения (потока) находит экономические аналоги физического движения. Одной из важных

характеристик движения в физике является импульс (или количество движения), определяемый как произведение массы тела на его скорость. В экономической интерпретации импульсом потока становится прирост стоимости потока или мгновенная скорость изменения его стоимости. Импульс потока экспорта может изменяться не только изменениями объёмов экспорта, но колебаниями экспортной цены. Предложенная аддитивно-мультипликативная модель (34) позволяет количественно оценить воздействие «экономических импульсов» двух факторов, действующих на мгновенную скорость роста стоимости потока экспорта:

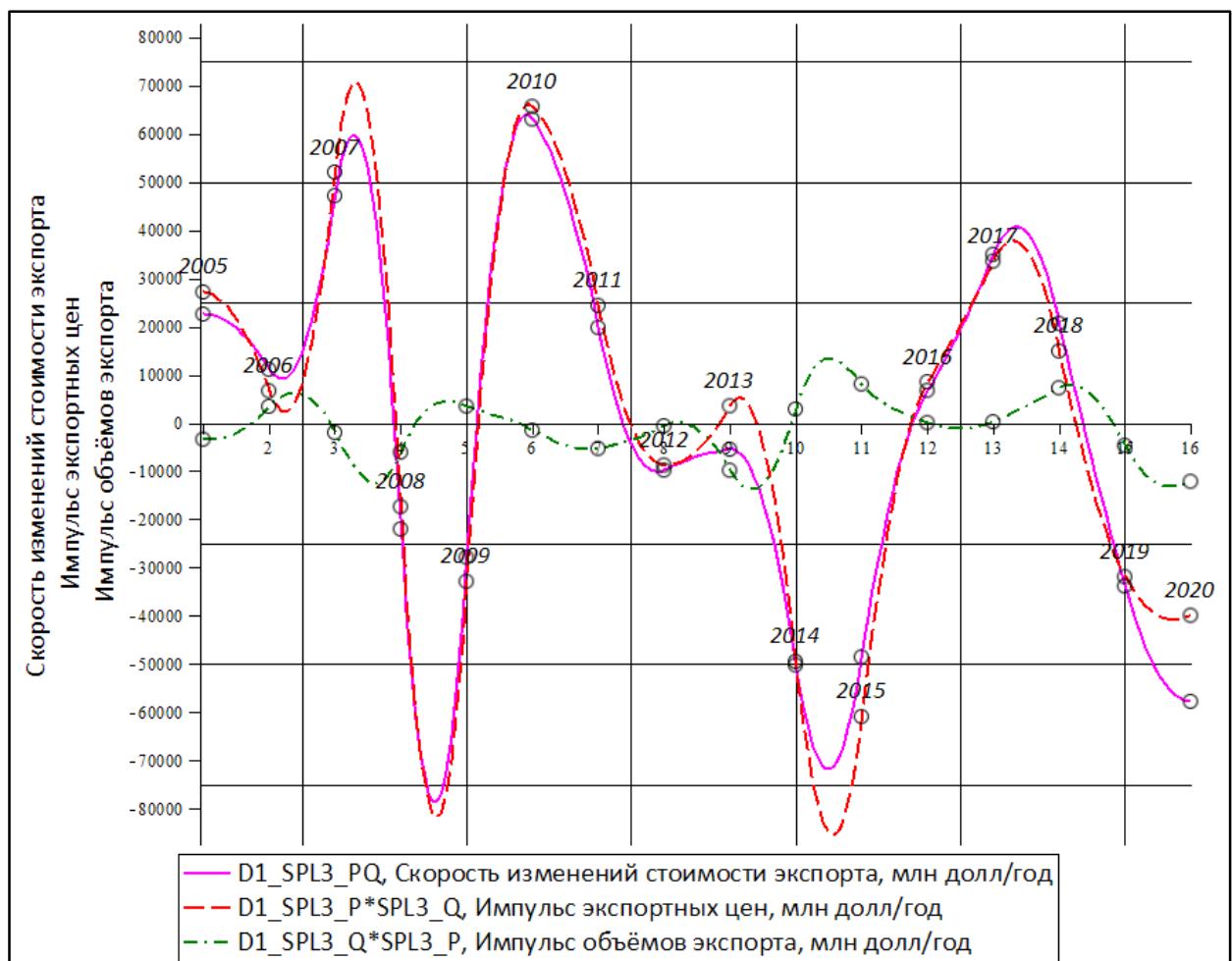
1.  $D1\_SPL3\_P * SPL3\_Q$  – мгновенной скорости изменения экспортных цен на нефть, умноженной на объёмы экспорта;
2.  $D1\_SPL3\_Q * SPL3\_P$  – мгновенной скорости изменения объёмов экспорта, умноженной на экспортную цену.

Мгновенная скорость изменения экспортных цен на нефть, умноженная на объёмы экспорта, может интерпретироваться как «экономический импульс» экспортных цен. Единицей измерения «экономического импульса» экспортной цены станет мгновенная скорость прироста стоимости экспорта – млн долл/год. В каждый момент времени  $t$  импульс экспортной цены определяется мгновенной скоростью роста экспортной цены при заданных объёмах экспорта. «Экономический импульс» физических объёмов экспорта в момент времени  $t$  определяется мгновенной скоростью роста объёмов экспорта, умноженной на экспортную цену в момент времени  $t$  и выражается в тех же единицах измерения – в млн долл/год. Тогда мгновенная скорость стоимости потока экспорта определяется аддитивным воздействием импульсов экспортной цены и объёмов экспорта.

Сплайн-модели (рис. 5.5) дают возможность графически, аналитически и количественно анализировать воздействие на мгновенную скорость стоимости экспорта «экономических импульсов» - импульса экспортной цены и импульса объёмов экспорта. Как следует из уравнения (33), мгновенная скорость роста стоимости экспорта в каждый момент времени  $t$  задаётся

суммой импульса экспортной цены и импульса объёмов экспорта. Например, расчёты в системе Maple точно определяют воздействие факторов на прирост стоимости потока экспорта не только в узловых точках, но в любой момент времени.

Это означает, например, что в середине 2008 года, в узловой точке 4.5 скорость снижения стоимости экспорта нефти была максимальной – стоимость за год могла упасть на 77454.696 млн долларов, в том числе за счёт отрицательного воздействия «экономического импульса» экспортной цены упасть на 81165.611 млн долларов. Положительное воздействие «экономического импульса» объёмов экспорта скорректировало бы падение лишь на 3710.915 млн долларов.



**Рисунок 5.5** - Мгновенная скорость изменений стоимости экспорта (сплошная линия), импульс экспортных цен (пунктир) и импульс объёмов экспорта (штрих-пунктир)

По динамике первых производных можно определять интервалы,

внутри которых аддитивное воздействие факторов приводило к наибольшей скорости роста стоимости экспорта – мы наблюдаем это в узловой точке 6, в 2010 году. В этой узловой точке наблюдаем наиболее сильное воздействие на рост стоимость экспорта нефти импульса экспортной цены. Прирост стоимости экспорта нефти за год в 2010 году мог составить 64372.884 млн долларов, в том числе за счет воздействия «экономического импульса» экспортной цены на 65813.108 млн долларов и за счёт отрицательного воздействия «экономического импульса» объемов экспорта на -1440.224 млн долларов.

Таблица 5.1  
Воздействие факторов на прирост стоимости потока экспорта

t	D1_SPL3_P*SPL3_Q	D1_SPL3_Q*SPL3_P	D1_SPL3_Q*SPL3_PQ
1	27205.251	-3355.030	23850.221
3.28	70581.955	-8638.615	61943.340
4.5	-81165.611	3710.915	-77454.696
6	65813.108	-1440.224	64372.884
10.5	-84740.395	13293.142	-71447.253
13.3	37732.607	2082.449	39815.056
16	-39977.614	-12186.396	-52164.010

Поведение кривых «экономических импульсов» экспортных цен и потоков экспорта «следует известному закону спроса и предложения, когда экспортные цены растут при снижении объемов экспорта» [299]. При этом построенные сплайн-модели скорости позволяют наблюдать конъюнктурные изменения в действии закона «спроса-предложения» на рынке нефти. Например, в 2019-2020 гг. наблюдаем нехарактерное рынку энергоресурсов поведение – стоимость экспорта нефти падает под одновременным отрицательным воздействием импульса экспортной цены и импульса объемов экспорта. Так, в узловой точке 16 снижение стоимости потока экспорта нефти могло составить 52164.010 млн долларов, в том числе за счет отрицательного воздействия «экономического импульса» экспортной цены на 39977.614 млн долларов, а за счет отрицательного воздействия «экономического импульса»

объёмов экспорта на 12186.396 млн долларов. По кривым первых производных экстремумы в динамике стоимости потока экспорта могут определяться и визуально.

Предложенный метод факторного анализа стоимости потоков экспорта оказался эффективным – сплайн-моделированием точно определяется степень воздействия факторов не только в узловых точках, но и в любой произвольный момент времени внутри исследуемого интервала. По кривым скорости роста можно наблюдать изменения конъюнктуры рынка, когда степень воздействия факторов меняется. Точность и наглядность получаемых результатов должна позволить оперативно управлять потоками, адаптируя воздействия в соответствии с меняющейся в текущее время конъюнктурой. В современной экономике все большее внимание исследователей обращает на себя динамика локальных изменений, которая аналитически может быть представлена моделями скорости экономического движения. Лингвистическое понимание сходства экономического движения с физическим должно находить возможность аналитического, графического и количественного исследования потоков. Это позволяет пользоваться в анализе экономической интерпретацией количественных характеристик физического движения – скоростью, ускорением, импульсом и др.

Обращение к сплайн-интерполяции исследуемой динамики снимает ряд ограничений классической эконометрики, связанных с требованиями к длине исследуемых временных рядов. Отказ от сглаживания реального процесса сохраняет информацию о замедлениях и ускорениях развития – ценных источниках знаний о локальных воздействиях факторов. Непрерывность предложенных моделей полезна при необходимости наблюдать развитие не только в узловых точках процесса, но и в любой произвольный момент времени.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Приведём новые, наиболее существенные, основные результаты, полученные в диссертации, имеющие как экономико-математическое, теоретико-методологическое, так и практическое прикладное значение:

- 1 Сформулированы теоретические основы аналитического описания и исследования потоков в современных трансформационных экономических системах. Рассмотрены особенности экономического движения, структурированы проблемы аналитического описания динамических потоков в условиях глобальной нестабильности, рекурсивности, сетевого характера и цикличности современной экономики;
- 2 Обозначены требования к математическому аппарату аналитического представления и определены способы взаимного преобразования динамики запасов и потока. Моделирование динамики экономических показателей предложено выполнять сплайн-функциями, отличающимися подстройкой своей структуры к меняющимся во времени условиям хозяйствования на каждом темпоральном участке. При моделировании динамики состояний (динамики задолженности по кредитам, запасов денежной массы, запасов энергоресурсов и др.), показана эффективность сохранения абсолютной точности данных, что является необходимым условием перехода к изучению реальных изменений в запасах – потоков платежей, эмиссии денег, потоков добычи и экспорта нефти и др.

- 3 Разработаны и предложены методы сплайн-методологии для моделирования потоков и поиска численных, аналитических и графических решений в евклидовом и фазовом пространствах. Показано, интерполирование сплайнами обеспечивает сохранение точности результатов при реализации известного механизма преобразования динамики запасов в потоки. Обращение к новому разделу экономического знания – методологии сплайн-моделирования и исследования динамики потоков дало более точный источник знаний о тенденциях и факторах развития экономических систем.

Методология сплайн-интерполяционного моделирования динамики адаптирована к научно-обоснованному решению задач управления потоками в экономических системах с переменной структурой. В частности, доказана эффективность сплайн-моделирования для управления нерегулярными потоками – изменениями в запасах за временные интервалы произвольной длины;

4 Обозначены требования к инструментальным средствам моделирования и анализа динамики потоков. Абсолютная точность сплайн-моделирования, анализа и визуализации реализованы моделированием и анализом динамики потоков в системе компьютерной математики *MAPLE 17*. Система при исследовании потоков стала эталоном инструментария, позволившей автоматически и экономно выполнять расчёты в рациональных числах без ошибок округления, строить аналитические модели и преобразовывать их без сглаживаний реальной динамики, визуализировать результаты в евклидовом и фазовом пространствах.

5 Оценена эффективность методов дифференциального исчисления при изучении экономических тенденций, выявлении «латентных» корреляций в динамике потоков, исследовании динамической конкуренции, фазовом анализе сезонности и цикличности, при обращении к физическим эквивалентам экономических потоков. Выявлено, что экономические потоки, как первые производные запасов, находят раньше, более рельефно и точно особые точки, «точки возврата», точки начал и причин изменения запаса как динамического показателя, через них операцией интегрирования определяется сам уровень запаса. Моделирование кубическими сплайнами позволило работать с динамикой запасов и потоков в моделях с непрерывным временем, широко используя аналитический потенциал производных – аналогов мгновенной скорости и ускорения изменений в запасах.

6 Разработан и применён метод сплайн-параметрического моделирования и анализа взаимосвязей между потоками. На примере потоков в экономике России показана возможность существования «скрытых» или «латентных»

взаимосвязей, не проявляющихся в динамике экономических показателей внутри коротких временных интервалов. Сплайн-анализ позволил выявить «латентные» корреляции «тенденций», сравнивая колебания скорости развития процессов. Анализ первых производных моделей экономической динамики становится эффективным и для выявления точек переключения регрессии. В исследовании выявлены и исследованы «латентные» корреляции между потоками экспорта энергоресурсов и динамикой курса рубля, между потоками экспорта нефти в различные группы стран и др.

7 Оценена эффективность сплайн-методологии при анализе динамической конкуренции потоков в экономических системах. В диссертации предложен и детально исследован математический аппарат построения динамического «коэффициента конкуренции», детализирующего изменение роли каждого экономического потока в рыночном противостоянии. «Коэффициент конкуренции» наглядно и количественно показывает относительность вклада с течением времени того или иного производителя или экспортёра в совокупный, динамично меняющийся результат на рынке. «Коэффициент конкуренции» в динамике определяет амплитуду и скорость взаимного вытеснения потоков.

8 Адаптирован метод фазового анализа к моделированию и исследованию цикличности потоков в экономике. Фазовое пространство агрегировано для погружения в него модельного континуума экономических потоков. Фазовый анализ открывает возможности многомерного исследования цикличности и периодичности динамических потоков в экономике. Адаптация фазового анализа к динамике экономических потоков позволила построить модели цикличности экспорта нефти, ВВП России, доказанных запасов нефти США, выявить циклы роста в динамике запасов денежной массы, среднедушевых доходов населения России, задолженности по ипотечным жилищным кредитам и др., точнее определять амплитуду, периоды и фазы циклов.

9 Термины «импульс», «сила», «потенциальная энергия» и

«кинетическая энергия» потоков дополнили категориальный аппарат экономической теории экономическими аналогами физического движения. Разработанные аналитические модели «экономического импульса» применены к факторного анализу стоимости потоков. В исследовании получили развитие методы экономической физики, обнаруживающие в динамике экономических потоков аналогии с физическим движением. Сплайн-моделирование потоков позволило интерпретировать производные как скорость и ускорение экономического движения по аналогии с физическим, и пользоваться его количественными характеристиками. Физические характеристики движения – скорость, ускорение, импульс, масса, сила и др. – находят по аналитическому описанию своё местоположение при исследовании экономических конъюнктур, позволяя рассчитывать количественные характеристики потоков в экономике.

В диссертации детализирована математическая взаимосвязь запасов и потоков, способы их взаимного аналитического преобразования. Концептуально разработан континуум новых структурно-вариативных математических моделей – полиформных – экономической динамики, в котором моделируется поведение экономических потоков как первых производных запасов и апробируется замена ими экономических показателей;

Методический инструментарий стратегического характера поддержки принятия решений включает в свой состав принципиальную замену математической оболочки в модельном континууме. Это последовательно-переменная структура полиформных моделей на базе сплайнов; точное совпадение эмпирического материала и модели во всех узловых точках; наилучшая и оптимальная (через минимум кривизны по теореме Холлидея) сшивка фрагментов сплайна в единый ансамбль, определяющая высокую точность и релевантность моделей;

В работе адаптировано «погружение» полиформных моделей в фазовое пространство с выявлением новых свойств сигнала. Детально отслежены возможности ещё одного математического конструкта в экономической

динамике – аппарата фазового анализа в фазовых пространствах. Показана репрезентативность исследования рядов динамики в фазовом пространстве с поиском цикличности потоков, в том числе и циклов роста. В фазовом пространстве точно хроноскопируются модели динамических потоков, измерены метрические, темпоральные, и топологические характеристики циклов.

Идея динамической конкуренции экономических потоков на рынке демонстрирует поиск непрерывных решений, отражающих в динамике взаимное вытеснение потоков в экономических системах. Динамическая конкуренция экономических потоков впервые получила математические эквиваленты с аналитическим описанием, графическими образами и числовыми характеристиками;

Теоретическая значимость исследования заключается в развитии научной методологии, позволяющей заменять экономические показатели доминантных процессов экономики на экономические потоки, исследовать корреляционные и конкурентные взаимодействия потоков с «погружением» в математические конструкты, евклидово и фазовое пространства, с их цифровизацией и моделированием. Динамика потоков в экономике оказывается более информативной, чем динамика состояний или запасов.

Разработан континуум концептуально новых структурно-переменных математических моделей динамики потоков экспортного бизнеса, колебаний курса национальной валюты, изменений запасов денежной массы, задолженности по жилищным кредитам и др. – полиформных, которыми моделируется поведение экономических потоков как первых производных запасов и апробируется замена ими экономических показателей.

Стратегический характер поддержки принятия решений реализуется разработкой принципиально новой математической оболочки в модельном континууме – последовательно-переменной структуры полиформных моделей на базе сплайнов. Точное совпадение эмпирического материала и модели во всех узловых точках, наилучшая и оптимальная (через минимум

кривизны по теореме Холлидея) «сшивка» фрагментов сплайна в единый ансамбль, определили высокую точность и релевантность моделей.

Программный инструментарий исследования базируется на универсальной системе компьютерной математики, экономно выполняющей математические и логические операции – аналитически, графически и численно.

Результаты, полученные лично автором, развивают методологию моделирования и анализа потоков в сложных экономических системах. Методы сплайн-методологии могут служить платформой для совершенствования технологии адаптивного управления развитием динамических систем. В разработанной методологии на примере экономических потоков удачную интерпретацию находят эконофизические идеи.

Практическую значимость исследования имеют методические разработки автора по математическому моделированию и анализу, совершенствованию информационного инструментария принятия управлеченческих решений, релевантных практике, при работе с экономическими потоками. Особо выделим развитие методологии сплайн-моделирования для работы в современной сетевой, стохастичной и турбулентной цифровой экономике. Математические полиформные модели стали универсальным инструментом для исследования экономических потоков. Методы новой методологии могут повысить научную обоснованность разрабатываемых программ развития и технологий управления процессами на макро- и микроуровне. Континуум построенных моделей формирует научно-исследовательскую платформу для экспертов и лиц, принимающих решения по оперативному управлению режимами функционирования экономических систем.

Развитие методологии моделирования потоков сплайнами должно повысить эффективность автоматизированного адаптивного управления процессами в экономических системах.

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

- 1.** Айвазян С.А. Прикладная статистика. Том 2. Основы эконометрики. – М.: Издательское объединение ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 432 с.
- 2.** Айвазян С.А., Енюков И.О., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Исследование зависимостей: Справочное издание / Под редакцией С.А. Айвазяна. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487 с.
- 3.** Айвазян С.А., Енюков И.О., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное издание. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
- 4.** Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика. Основы эконометрики. Том 1. Теория вероятностей и прикладная статистика. – М.: Издательское объединение ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 656 с.
- 5.** Аладьев В.З., Бойко В.К., Ровба Е.А. Программирование и разработка приложений в MAPLE: монография. – Гродно: ГрГУ; Таллинн: Международная академия Ноосфера, Балтийское отделение, 2007. – 458 с.
- 6.** Аладьев В.З., Шишаков М.Л. Автоматизированное рабочее место математика. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. – 752 с.
- 7.** Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и её приложения. – М.: Издательство «Мир», 1972. – 318 с.
- 8.** Аллен Р. Математическая экономия. – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 668 с.
- 9.** Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: Монография. - Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2000. - 352 с.
- 10.** Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. “MATLAB 7”. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – С. 784-818
- 11.** Апанасенко В.В., Винтизенко И.Г. Статистические характеристики сигнала, аппроксимированного кубическим сплайном / В сборнике

«Применение вычислительной техники и экономико-математических методов для решения проблем территориального управления». – Томск: Издательство Томского университета, 1977. – С. 128-133

- 12.** Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. Издание 2-е, переработанное и дополненное. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1965. – 408 с.
- 13.** Ашманов С. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984. – 296 с.
- 14.** Безбородова А. Кредитный импульс и восстановление экономики: опыт Республика Беларусь // БАНКАУСКІ ВЕСНІК : Информационно-аналитический и научно-практический журнал Национального банка Республики Беларусь. - 2018. - n 4. - С. 10-19
- 15.** Бергер П., Лукман Т. Социальное конструирование реальности. Трактат по социологии знания. - М.: "Медиум", 1995. - 323 с.
- 16.** Бергман А.К. Экономико-математическое моделирование произвольных систем. – М.: Издательство МАДИ, 1987. – 198 с.
- 17.** Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 368 с.
- 18.** Бессонов В.А. Введение в анализ российской макроэкономической динамики переходного периода. – М.: Издательство ЦЭМИ РАН, 2003. – 151 с.
- 19.** Бирюков В.В. Время как система координат развития экономики. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2002. – 237 с.
- 20.** Боташева Ф.Б. Алгоритм прогнозирования экономики через прогнозирование «наклонов» и «моментов» аппроксимирующего сплайна // Сборник материалов Международной научно-технической конференции «Математические методы и информационные технологии в экономике, социологии и образовании». – Пенза: Издательство Пензенского

технологического института, Приволжского Дома знаний, 2001. Часть 1. – С. 107-113

- 21.** Боташева Ф.Б. Анализ и прогнозирование экономической деятельности сплайн-функциями // Научные труды V-го Всероссийского симпозиума «Математическое моделирование и компьютерные технологии». – Кисловодск: Издательский центр Кисловодского института экономики и права, 2002. Том 5. – С. 49-52
- 22.** Боташева Ф.Б. Детерминированные прогнозы с гибкой подстройкой под временной класс экономического процесса // Тезисы докладов Всероссийской конференции «Роль и место государственного регулирования в прогнозировании развития российской экономики». – Чебоксары: Издательство Чувашского государственного университета, 2002. – С. 79-83
- 23.** Боташева Ф.Б. Кусочно-полиномиальные модели анализа и прогнозирования экономических процессов. Диссертация на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Кисловодск: Кисловодский институт экономики и права, 2002. – 140 с.
- 24.** Боташева Ф.Б. Кусочно-полиномиальные модели анализа и прогнозирования экономических процессов. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Кисловодск: Кисловодский институт экономики и права, 2002. – 24 с.
- 25.** Боташева Ф.Б. Макроэкономическая динамика в фазовом пространстве. – М.: Илекса, 2009. – 268 с.
- 26.** Боташева Ф.Б. Модели архетипов макроэкономической динамики в фазовом пространстве. Диссертация на соискание учёной степени доктора экономических наук по специальности 08.00.13 - математические и инструментальные методы экономики. – Черкесск: Северо-Кавказская гуманитарно-технологическая академ, 2013. – 448 с.

- 27.** Боташева Ф.Б. Модели архетипов макроэкономической динамики в фазовом пространстве. Автореферат диссертации на соискание учёной степени доктора экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Кисловодск: Кисловодский институт экономики и права, 2013. – 48 с.
- 28.** Боташева Ф.Б. Фазовые образы макроэкономических конъюнктур. – Ставрополь: «АГРУС», 2014. – 448 с.
- 29.** Боташева Ф.Б., Винтизенко И.Г. «Новая эконометрика» с её «тонкими» методами исследования экономических конъюнктур // European Social Science Journal. – 2014. – № 10. – Том 1 (49). – С. 31-39
- 30.** Боташева Ф.Б., Винтизенко И.Г. Гибкие способы представления и прогнозирования динамики экономического поведения в условиях глобализации // Тезисы докладов региональной научно-практической конференции «Проблемы социально-экономического развития региона в условиях глобализации». – Ставрополь: Издательство Ставропольского государственного университета, 2001. – С. 60-63
- 31.** Боташева Ф.Б., Узденова Ф.М. Основные проблемы прогнозирования экономического поведения // Научные труды V-го Всероссийского симпозиума «Математическое моделирование и компьютерные технологии». – Кисловодск: Издательский центр Кисловодского института экономики и права, 2002. Том 5. – С. 37-41
- 32.** Боташева Ф.Б., Узденова Ф.М. Особенности анализа и прогнозирования рыночного хозяйства России // Сборник материалов Международной научно-практической конференции «Формирование рыночного хозяйства: теория и практика». – Оренбург: Издательство Оренбургского государственного университета, 2002. – С. 58-64
- 33.** Бруснева И.М. Мониторинг, анализ и прогнозирование регионального продовольственного рынка. Диссертация на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические

и инструментальные методы экономики. – Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, 2005. – 163 с.

**34.** Бруснева И.М. Мониторинг, анализ и прогнозирование регионального продовольственного рынка. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Ставрополь: Ставропольский государственный университет, 2005. – 28 с.

**35.** Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. – 292 с.

**36.** Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Издательство «Мир», 1965. – 456 с.

**37.** Бурлачков В.В. Экономическая наука и эконофизика. Экономический портал [institutionis.com/general/266-2008-06-18-13-45-41.html](http://institutionis.com/general/266-2008-06-18-13-45-41.html)

**38.** Бутов С.И. Системы компьютерной математики как инструмент экономических исследований // Современные научные технологии. Региональное приложение. – 2008. – № 1. – С. 14-17

**39.** Бутов С.И. Экономические циклические закономерности диады «эксплуатация-профилактика» автотранспортной динамики. Диссертация на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, 2009. – 170 с.

**40.** Бутов С.И. Экономические циклические закономерности диады «эксплуатация-профилактика» автотранспортной динамики. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Ставрополь: Ставропольский государственный университет, 2009. – 24 с.

- 41.** Бюллетень о текущих тенденциях российской экономики. Февраль 2019. [электронный ресурс]: – Режим доступа: <http://ac.gov.ru/files/publication/a/20967.pdf>
- 42.** Вайнберг С. Мечты об окончательной теории: Физика в поисках самых фундаментальных законов природы. Dreams of a Final Theory / Перевод с англ. Издание 2-ое. – М.: Еditorial УРСС, 2008. – 256 с.
- 43.** Васильев В.И., Красильщиков В.В., Плаксий С.И., Тягунова Т.Н. Статистический анализ многомерных объектов произвольной природы. Введение в статистику качеств. – М.: Издат. «Икар», 2004. – 382 с.
- 44.** Вербик М. Путеводитель по современной эконометрике. – М.: Научная книга, 2008. – 616 с.
- 45.** Винн Р., Холден К. Введение в прикладной эконометрический анализ. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 294 с.
- 46.** Винтизенко И.Г. Детерминированное прогнозирование в экономических системах / Труды III-ей Международной конференции «Новые технологии в управлении, бизнесе и праве». – Невинномысск: Издательство Института управления, бизнеса и права (г. Ростов-на-Дону, Невинномысский филиал), 2003. – С. 163-167
- 47.** Винтизенко И.Г. Сплайн-аппроксимация при обработке сигналов зондирования в режиме on-line // Тезисы докладов III-го Всесоюзного симпозиума по лазерному зондированию атмосферы. – Томск: Издательство Института оптики атмосферы СО АН СССР, 1974. – С. 266-269
- 48.** Винтизенко И.Г., Ильясов Р.Х. Новая эконометрика. Парадигма // Труды Всероссийской научно-практической конференции «Проблемы и перспективы экономического развития регионов», посвящённой 45-летию образования Института экономики и финансов. – Грозный. ЧГУ, 2017. – С. 64-72
- 49.** Винтизенко И.Г., Касторнова Т.А. Модели прогнозов и их использование для привлечения инвестиций / Тезисы докладов региональной

научно-практической конференции «Проблемы социально-экономического развития региона в условиях глобализации». – Ставрополь: Издательство Ставропольского государственного университета, 2001. – С. 64-66

- 50.** Винтизенко И.Г., Касторнова Т.А., Шадуев М.Г. Период упреждения как показатель прогнозируемости // Вестник Ставропольского института имени В.Д. Чурсина. Выпуск 2. – Ставрополь: Издательство Ставропольского института имени В.Д. Чурсина, 2001. – С. 123-133
- 51.** Винтизенко И.Г., Колесников И.М., Шадуев М.Г. Прогнозирование в моделях экономических систем. – Кисловодск: Издательский центр Кисловодского института экономики и права, 2001. – 100 с.
- 52.** Винтизенко И.Г., Перепелица В.А. Новая эконометрика. – Запоріжжя: Издательство Запорізького національного Університету, 2013. – 316 с.
- 53.** Винтизенко И.Г., Редькина Н.В. Проблемы сравнительных оценок методов неоэкономического прогнозирования – 1 // Межрегиональная группа учёных – институт проблем новой экономики. – 2004. – № 2. – С. 76-81
- 54.** Винтизенко И.Г., Редькина Н.В. Проблемы сравнительных оценок методов неоэкономического прогнозирования – 2 // Научные труды Межрегиональной научно-практической конференции-семинара «Неоэкономика и стратегия развития российских регионов». – Киров: Издательство Вятской государственной сельскохозяйственной академии, Вятского социально-экономического института, 2004. – С. 93-98
- 55.** Винтизенко И.Г., Редькина Н.В. Сплайн-технологии моделирования, анализа, визуализации и прогнозирования в экономике // Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Воронеж: Издательство Воронежского государственного университета, 2004. Часть 1. – С. 26-31
- 56.** Винтизенко И.Г., Тимошенко П.Н. Новое в прогностике как науке // Научные труды V-го Всероссийского симпозиума «Математическое моделирование и компьютерные технологии». – Кисловодск: Издательский

центр Кисловодского института экономики и права. Том 3.  
«Информационные технологии», 2002. – С. 39-40

- 57.** Винтизенко И.Г., Чадранцев А.В. «Прогнозируемость» экономических процессов // Научные труды Международной научно-практической конференции «Экономическое прогнозирование: модели и методы». – Воронеж: Издательство Воронежского государственного университета, 2005. – С. 13-17
- 58.** Винтизенко И.Г., Черкасов А.А. Типажи переменных современной экономики, отягощённых рисками // Вестник Адыгейского государственного университета. – Серия 5: Экономика. – 2010. – № 3. – С. 156-162
- 59.** Винтизенко И.Г., Яковенко В.С. Структура математического курса для специалиста-прикладника // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2006. – Том 13. – Выпуск 4. – С. 621
- 60.** Винтизенко И.Г., Яковенко В.С. Циклы экономической конъюнктуры // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2008. – Том 15. – Выпуск 1. – С. 129-130
- 61.** Винтизенко И.Г., Яковенко В.С. Экономическая цикломатика. – М.: Финансы и статистика; – Ставрополь: «АГРУС», 2008. – 428 с.
- 62.** Гипотеза о периодической системе потоков и запасов в экономике – I [Электронный ресурс] - Режим доступа: [http://kapital-rus.ru/articles/article/gipoteza\\_o\\_periodicheskoy\\_siteme\\_potokov\\_i\\_zapasov\\_v\\_ekonomike\\_i/](http://kapital-rus.ru/articles/article/gipoteza_o_periodicheskoy_siteme_potokov_i_zapasov_v_ekonomike_i/)
- 63.** Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели / Учебное пособие. – М.: Компьютер, ЮНИТИ, 1995. – 136
- 64.** Гранберг А.Г. Динамические модели народного хозяйства. – М.: Экономика, 1985. – 274 с.
- 65.** Гранберг А.Г. Моделирование социалистической экономики. – М.: Экономика, 1988. – 487 с.

- 66.** Губанов С. С. Научная модель кризисных циклов // Экономист. – 2000. – № 2. – С. 96-98
- 67.** Губанов С.С. Кризисная динамика: параметры и причины // Экономист. – 2009. – № 3. – С. 66-71
- 68.** Губанов С.С. Цикличность – форма кризисности // Экономист. – 1999. – № 1. – С. 63-75
- 69.** Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / Перевод с английского Е.В. Левнера и М.А. Фрумкина, под редакцией А.А. Фридмана. – М.: Издательство «Мир», 1982. – 416 с.
- 70.** Давыдов А.Б. Информационные технологии анализа и прогнозирования рыночной конъюнктуры в региональной системе предпринимательства. Диссертация на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальностям 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики и 08.00.05 – экономика и управление народным хозяйством: предпринимательство. – Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный унив., 2006. – 167 с.
- 71.** Давыдов А.Б. Информационные технологии анализа и прогнозирования рыночной конъюнктуры в региональной системе предпринимательства. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальностям 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики и 08.00.05 – экономика и управление народным хозяйством: предпринимательство. – Ставрополь: Ставропольский государственный универс., 2006. – 24 с.
- 72.** Джонстон Дж. Эконометрические методы. – М.: Статистика, 1980. – 444 с.
- 73.** Дмитриев В.К. Экономические очерки. Монография.-М.: ГУ-ВШЭ, 2000. - 423 с.
- 74.** Доу Ш. Математика в экономической теории: исторический и методологический анализ // Вопросы экономики. – 2006. – № 7. – С. 53-72

- 75.** Доугерти К. Введение в эконометрику. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 402
- 76.** Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 512 с.
- 77.** Дьяконов В.П. MAPLE 6: учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. – 608 с.
- 78.** Дьяконов В.П. MAPLE 9/10 в математике, физике и образовании. – М.: Издательство «Солон-Пресс», 2004. – 688 с.
- 79.** Егоренков Н., Казакова Е. Фазовая модель товарно-денежного хозяйства // Вопросы экономики. – 2005. – № 8. – С. 41-47.
- 80.** Емельянов А.С. Эконометрия и прогнозирование. – М.: Экономика, 1985. – 207 с.
- 81.** Жак С.В. Математические модели менеджмента и маркетинга. – Ростов-на-Дону: ЛаПО, 1997. – 316 с.
- 82.** Замков О.О. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе. Курс лекций. – М.: ГУ ВШЭ, 2002. – 122 с.
- 83.** Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике / Учебник. 2-ое издание. – М.: МГУ имени М.В. Ломоносова, Издательство «Дело и Сервис», 1999. – 368 с.
- 84.** Замулин О. Концепция реальных экономических циклов и её роль в эволюции макроэкономической теории // Вопросы экономики. – 2005. – № 1. – С. 144-153
- 85.** Занг В.-Б. (Вэй-Бин Занг) Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. – М.: Издательство «Мир», 1999. – 335 с.
- 86.** Иванов Ю.Н., Токарев В.В., Уздемир А.П. Математическое описание элементов экономики. – М.: Физматгиз, 1994. – 416 с.
- 87.** Ильясов Р.Х. «Латентные» корреляции потоков в экономике: сплайн-анализ // Известия Санкт-Петербургского государственного экономического университета. – 2021. - № 1 (127). – С. 35-41

- 88.** Ильясов Р.Х. Анализ динамической конкуренции на примере стран-производителей нефти // Вестник Чеченского государственного университета. – 2019. – Т. 34. – № 2. – С. 65-69
- 89.** Ильясов Р.Х. Использование производных в сплайн-анализе экономических взаимосвязей на примере экспортных цен на нефть и природный газ // Сборник статей I Ежегодной итоговой конференции профессорско-преподавательского состава Чеченского государственного университета. – Грозный: Издательство Чеченского государственного университета, 2012. – с. 23 - 26
- 90.** Ильясов Р.Х. Конъюнктуры газового рынка в фазовом пространстве. – Ставрополь: Издательство «АГРУС», 2014. – 144 с.
- 91.** Ильясов Р.Х. Модели скорости в экономических исследованиях // Проблемы и перспективы экономического развития регионов: сборник статей Всероссийской научно-практической конференции, посвящённой 45-летию образования Института экономики и финансов. 2017. С. 143-145
- 92.** Ильясов Р.Х. Моделирование экономических зависимостей сплайнами // Математические и инструментальные методы экономики: теория и практика: сборник материалов международного научного е-симпозиума. Под редакцией Н.Н. Карабутова. 2014. С. 10-19
- 93.** Ильясов Р.Х. О многоаспектной роли производных в анализе и моделировании экономических потоков // Современные научно-ёмкие технологии. Региональное приложение. – 2019. – № 4 (60). – С. 36-42
- 94.** Ильясов Р.Х. Особенности моделирования экономических потоков сплайнами // Развитие региональной экономики в условиях цифровизации: сборник материалов Международной научно-практической конференции, посвященной 80-летию ФГБОУ ВО «Чеченский государственный университет». 2018. С. 171-181
- 95.** Ильясов Р.Х. Параметрическое представление взаимозависимости динамики цен производителей природного газа и объёмов его добычи с помощью сплайн-функций // Вестник Чеченского государственного университета. Экономика. – 2008. – Выпуск 2. – С. 15-19
- 96.** Ильясов Р.Х. Потоки в цифровой экономике: аналитическое моделирование сплайнами // В сборнике: Актуальные вопросы современной науки: теория,

технология, методология и практика. Материалы Международной научно-практической онлайн-конференции, приуроченной к 60-ти летию член-корреспондента Академии наук ЧР, доктора технических наук, профессора Сайд-Альви Юсуповича Муртазаева. Грозный, 2021. С. 241-247.

**97.** Ильясов Р.Х. Потоки в цифровой экономике: моделирование и анализ малых колебаний // В сборнике: Теория и практика экономики и предпринимательства. труды XVIII Всероссийской с международным участием научно-практической конференции. Симферополь, 2021. С. 37-40.

**98.** Ильясов Р.Х. Сезонность в динамике производства природного и попутного газа в России: сплайн-анализ // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – 2014. – № 102. – С. 519-529.

**99.** Ильясов Р.Х. Сплайн-анализ «тонкой» структуры взаимозависимости экспортных цен на природный газ и нефть // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. – 2008. – № 6(68). – С. 348-352.

**100.** Ильясов Р.Х. Сплайн-анализ взаимосвязи динамики экспортных цен на нефть и курса доллара по отношению к рублю // Вестник Чеченского государственного университета. 2016. № 4 (24). С. 106-110

**101.** Ильясов Р.Х. Сплайн-анализ динамики доли природного газа в экспорте РФ // II Ежегодная итоговая конференция профессорско-преподавательского состава Чеченского государственного университета 2013. С. 251-254

**102.** Ильясов Р.Х. Сплайн-анализ динамики объёмов добычи и экспорта природного газа // Социально-экономическое развитие России в XXI веке: сб. ст. VII-ой Всероссийской научно-практической конференции. – 2008. – С. 33-40

**103.** Ильясов Р.Х. Сплайн-анализ корреляции потоков // Экономический анализ: теория и практика. – 2020. - № 1(496). – С. 173–187

**104.** Ильясов Р.Х. Сплайн-моделирование динамики показателей медико-лабораторных исследований // Сборник статей V Ежегодной всероссийской научно-практической конференции молодых учёных, аспирантов и студентов «Наука и молодёжь». – Грозный: Издательство Чеченского государственного университета, 2011. – С. 12-17

- 105.** Ильясов Р.Х. Сплайн-моделирование и анализ взаимосвязей в экономике при возможном наличии точек переключения регрессии // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. – 2018. – Т. 11. – № 4. – С. 165-175. DOI: 10.18721/JE.11412
- 106.** Ильясов Р.Х. Сплайн-моделирование и анализ взаимосвязей между процессами с переменной структурой // Сборник трудов VII Международной научно-практической конференции «Многополярная глобализация и Россия». 2018. С
- 107.** Ильясов Р.Х. Сплайн-моделирование и анализ скорости потоков экспорта // В сборнике: Индустрия 5.0, цифровая экономика и интеллектуальные экосистемы (ЭКОПРОМ-2021). Сборник трудов IV Всероссийской (Национальной) научно-практической конференции и XIX сетевой конференции с международным участием. Санкт-Петербург, 2021. С. 658-663.
- 108.** Ильясов Р.Х. Сплайн-моделирование и анализ тенденций рождаемости в Чеченской Республике и в среднем по России // Сборник статей VI Ежегодной всероссийской научно-практической конференции молодых учёных, аспирантов и студентов «Наука и молодёжь». – Грозный: Издательство Чеченского государственного университета, 2012. – с. 20-23
- 109.** Ильясов Р.Х. Сплайн-моделирование и анализ экономических тенденций в Maple / Р.Х. Ильясов // Вестник Чеченского государственного университета. 2018. № 2 (30). С. 53-57
- 110.** Ильясов Р.Х. Сплайн-моделирование и сплайн-анализ взаимозависимости объёмов экспорта природного газа от экспортных цен на него // Краевые задачи и математическое моделирование: сб. ст. IX-ой Всероссийской научной конференции. – 2008. – С. 10-12
- 111.** Ильясов Р.Х. Сплайн-моделирование и хроноскопия экономических циклов на фазовой плоскости // Вестник Чеченского государственного университета. – 2009. – Выпуск 1. – С. 34-37
- 112.** Ильясов Р.Х. Сплайн-технологии моделирования, анализа и прогнозирования динамики экономических процессов при наличии сезонности // Актуальные

вопросы современной науки: сб. науч. тр. – 2008. – Вып. 3: Актуальные вопросы экономики. – С. 379-390

**113.** Ильясов Р.Х. Сравнение полиномиальной и сплайновой аппроксимации при анализе «событийных составляющих» динамики экспортных цен на природный газ // Экономическое прогнозирование: модели и методы: материалы IV-ой Международной научно-практической конференции, в 2 ч.: ч. 2 / Решение прогнозных задач отдельных секторов экономики. – 2008. – С. 202-211

**114.** Ильясов Р.Х. Темпоральные особенности взаимосвязей в экономике // Конкурентоспособность в глобальном мире: экономика, наука, технологии. – 2017. – № 12. – Ч. 7. – С. 832-837.

**115.** Ильясов Р.Х. Фазовый анализ цикличности в динамике экспортных цен на нефть // Гуманитарные и социально-экономические науки. – 2017. – № 1 (92). – С. 131-136.

**116.** Ильясов Р.Х. Фазовый сплайн-анализ как метод выявления цикличности в экономике // Современные научноёмкие технологии. Региональное приложение. – 2009. – №1. – С. 32-36.

**117.** Ильясов Р.Х., Боташева Ф.Б. Фазовый анализ цикличности доли природного газа в структуре экспорта Российской Федерации // Политехнический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – 2013. – № 88. – С. 816-825.

**118.** Ильясов Р.Х., Идирзаева Р.В. Анализ корреляций в колебаниях скорости // Наука и молодёжь: сборник статей Всероссийской научно-практической конференции студентов, молодых учёных и аспирантов. 2017. С. 204-207

**119.** Ильясов Р.Х., Ильясов Т.Р. Потоки в цифровой экономике: новые подходы к моделированию и анализу // В сборнике: Цифровая экономика, умные инновации и технологии. Сборник трудов Национальной (Всероссийской) научно-практической конференции с зарубежным участием. Санкт-Петербург, 2021. С. 77-80.

**120.** Ильясов Р.Х., Ильясов Т.Р., Хайпаева Л.К., Юсупов А.М. Анализ тенденций курса валюты с использованием корреляционной функции // Вектор экономики. 2020. № 7 (49). С. 11.

- 121.** Ильясов Р.Х., Кондратьева Т.Н. Сплайн-анализ темпоральных особенностей взаимосвязи экспортных цен на нефть и среднедушевых доходов населения России // Сборник трудов конференции профессорско-преподавательского состава, посвящённой 80-летию Чеченского государственного университета. 2018. С. 225-231
- 122.** Ильясов Р.Х., Крюков С.В. Анализ корреляций в колебаниях скорости экономического развития // Современные научно-практические технологии. Региональное приложение. – 2017. – № 4. – С. 68-78.
- 123.** Ильясов Р.Х., Куразова Д.А. Анализ динамики индикаторов российского фондового рынка // Известия Санкт-Петербургского государственного экономического университета. – 2016. – № 4 (100). – С. 64-69.
- 124.** Ильясов Р.Х., Куразова Д.А. Интеграция отечественного фондового рынка в мировую финансовую систему // Кластерные инициативы в формировании прогрессивной структуры национальной экономики: сборник научных трудов 2-й Международной научно-практической конференции: в 2-х томах. 2016. С. 121-124
- 125.** Ильясов Р.Х., Куразова Д.А. Основы регулирования деятельности на рынке ценных бумаг России // Управление. Бизнес. Власть. 2016. № 4 (13). С. 111-118
- 126.** Ильясов Р.Х., Куразова Д.А. Прогнозирование конъюнктуры финансового рынка и оценка его влияния на развитие промышленности // Финансы и кредит. – 2017. – Т. 23. – № 43. – С. 2575-2591. <https://doi.org/10.24891/fc.23.43.2575>
- 127.** Ильясов Р.Х., Куразова Д.А. Прогнозирование конъюнктуры финансового рынка и оценка его влияния на развитие промышленности // Финансы и кредит. – 2017. – Т. 23, № 43. – С. 2575 – 2591
- 128.** Ильясов Р.Х., Куразова Д.А. Рынок ценных бумаг России и его исследование методом фундаментального анализа // Материалы IX Международной молодёжной научной конференции «Молодёжь и XXI век – 2019». – Курск, 2019. – С. 200-204
- 129.** Ильясов Р.Х., Цамалигова А.И., Джамуханов М.А. Анализ корреляции между курсом доллара и экспортными ценами на нефть // В сборнике: Социально-экономические и финансовые аспекты развития Российской Федерации и её регионов в современных условиях. материалы I всероссийской научно-практической конференции. Грозный, 2020. С. 242-247.

- 130.** Ильясов Р.Х. Экономические потоки в «новой эконометрике»: некоторые особенности анализа взаимосвязей // В сборнике: Статистика - язык цифровой цивилизации. Сборник докладов II Открытого российского статистического конгресса. 2018. С. 127-135.
- 131.** Ильясов Р.Х., Садыгов Э. Нерегулярные потоки в цифровой экономике: интерполяция сплайнами // В сборнике: Социально-экономические и финансовые аспекты развития Российской Федерации и её регионов в современных условиях. Материалы II всероссийской научно-практической конференции. - Грозный, - 2021. С. 104-111.
- 132.** Ильясов Р.Х., Хайпаева Л.К., Цамалигова А.И. Об эффективности сплайн-аппроксимации при поиске локальных корреляций // В сборнике: Миллионников-2020. Материалы III Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных с международным участием, посвящённой 100-летию ФГБОУ ВО «ГГНТУ им. акад. М.Д. Миллионникова». Грозный, 2020. С. 64-72.
- 133.** Ильясов Р.Х. Экономическая цикломатика конъюнктуры газового рынка России. Диссертация на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 математические и инструментальные методы экономики. Грозный: Чеченский государственный университет, 2010. 158 с.
- 134.** Ильясов Р.Х. Экономическая цикломатика конъюнктуры газового рынка России. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 математические и инструментальные методы экономики. Ставрополь: Ставропольский государственный университет, 2010. 28 с.
- 135.** Ильясов Р.Х., Винтизенко И.Г. Динамика доли России в мировой добыче первичных энергоресурсов: сплайн-анализ // Экономика и управление: анализ тенденций и перспектив развития. 2014. №17. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/dinamika-doli-rossii-v-mirovoy-dobyche-pervichnyh-energoresursov-splayn-analiz>

- 136.** Ильясов Р.Х. Тенденции стоимости потоков экспорта: сплайн-анализ // Экономический анализ: теория и практика. – 2022. – Т. 21, № 3. – С. 573 – 587. <https://doi.org/10.24891/ea.21.3.573>
- 137.** Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975. – 608 с.
- 138.** Кадомцев Б.Б. Сложные системы – операционные подходы // Успехи физических наук. – 1990. – 160(7). – С. 163-164
- 139.** Кант И. Метафизические начала естествознания / Кант И.; Под общ.ред. В.Ф. Асмуса и др. - М.: Мысль, 1999. – 1712 с.
- 140.** Канторович Л.В. Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. – М.: Издательство АН СССР, 1959. – 347 с.
- 141.** Канторович Л.В., Горстко А.Б. Оптимальное решение в экономике. – М.: Наука, 1972. – 234 с.
- 142.** Канторович Л.В., Макаров В.Л. Оптимальные модели перспективного планирования / Применение математики в экономических исследованиях. – М.: Мысль, 1965. – 412 с.
- 143.** Кардаш В.А. Информационно-технологические основания моделирования обобщённых социально-экономических процессов. // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2008. – Том 15. – Выпуск 3. – С. 400-410
- 144.** Кардаш В.А. Компромиссный анализ рыночной экономики. – Ростов-на-Дону: Издательство Северо-Кавказского научного центра Высшей школы, 2002. – 140 с.
- 145.** Кардаш В.А. Конфликты и компромиссы в рыночной экономике. – М.: «Наука», 2006. – 248 с. (Серия «Экономическая наука современной России»)
- 146.** Кардаш В.А. Основы системных исследований и математического моделирования. – Кисловодск: Издательский центр Кисловодского института экономики и права, 1998. – 274 с.

- 147.** Кардаш В.А. Процессная модель компромиссного ценообразования на рынке благ. – Кисловодск: 2009 (частное сообщение)
- 148.** Кардаш В.А. Процессный анализ системной динамики // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2008. – Том 15. – Выпуск 5. – С. 807-818
- 149.** Кардаш В.А. Процессный анализ системной динамики товарных рынков / Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Том 16. – Выпуск 2. – С. 226-238
- 150.** Кардаш В.А. Региональный компромиссно-равновесный рынок труда: социоэкономический анализ. – Кисловодск: Издательский центр Кисловодского института экономики и права, 2008. – 133 с.
- 151.** Картина экономики. Январь 2018 года. [электронный ресурс]: – Режим доступа: <http://economy.gov.ru/minec/about/structure/depMacro/201815011>
- 152.** Касторнова Т.А. Прогнозирование в условиях рынка // Тезисы докладов IV-го Международного конгресса «Мир на Северном Кавказе через языки, образование, культуру» / В сборнике «Интегративная экономика Северного Кавказа». – Пятигорск: Издательство Пятигорского государственного лингвистического университета, 2001. – С. 62-64
- 153.** Касторнова Т.А. Прогнозирование экономических процессов при частой смене экзогенных условий. Диссертация на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Ставрополь: Ставропольский государственный университет, 2002. – 143 с.
- 154.** Касторнова Т.А. Прогнозирование экономических процессов при частой смене экзогенных условий. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Ставрополь: Ставропольский государственный университет, 2002. – 32 с.

- 155.** Касторнова Т.А. Прогнозирование. Исторический очерк // Материалы VII-ой научно-практ. конференции. – Ставрополь: Издательство Ставропольского института им. В.Д. Чурсина, 2001. Том 2. – С. 203-205
- 156.** Касторнова Т.А. Прогностика как наука о предвидении // Материалы VII-ой научно-практической конференции. – Ставрополь: Изд-во Ставропольского института им. В.Д. Чурсина, 2001. Том 2. – С. 202-203
- 157.** Касторнова Т.А. Сплайн-аппроксимация в прогнозировании экономических процессов // Сборник материалов Международной научно-технической конференции «Математические методы и информационные технологии в экономике, социологии и образовании». Часть 1. – Пенза: Издательство Пензенского технологического института и Поволжского Дома знаний, 2001. – С. 32-34
- 158.** Кейнс Д. Общая теория занятости, процента и денег. – М.: Издательство иностранной литературы, 1948. Том 3. – СПб.: Петроком, 1993. – 308 с. (Серия «Шедевры мировой экономической мысли»)
- 159.** Киплинг Редьярд Джозеф. Песнь англичан. Немного о себе. («Баллада о Западе и Востоке») – М.: Вита-Нова, 2012. – 368 с.
- 160.** Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решение задач механики: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2012. – 516 с.
- 161.** Клас А., Гергели К., Колек Ю., Шуйн И. Введение в эконометрическое моделирование. – М.: Статистика, 1978. – 151 с.
- 162.** Колемаев В.А. Математическая экономика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 288 с.
- 163.** Кондратьев Н.Д. Большие циклы конъюнктуры // Вопросы конъюнктуры. – 1925. – Том 1. – Выпуск 1. – С. 28-79
- 164.** Кондратьев Н.Д. Мировое хозяйство и его конъюнктуры во время и после войны. – Вологда: Областное отделение государственного издательства, 1922. – 317 с.

- 165.** Кондратьев Н.Д. Проблемы экономической динамики / Ответственный редактор Л.И. Абалкин. – М.: Экономика, 1989. – 528 с.
- 166.** Конторов Д.С., Михайлов Н.В., Саврасов Ю.С. Основы физической экономики (Физические аналогии и модели в экономике). – М.: Радио и связь, 1999. – 184 с.
- 167.** Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1973. – 832 с.
- 168.** Кулова З.К. Полиформные модели российской макроэкономической динамики. Диссертация на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Черкесск: Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, 2010.– 186 с
- 169.** Кулова З.К. Полиформные модели российской макроэкономической динамики. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Кисловодск: Кисловодский институт экономики и права, 2010. - 24 с.
- 170.** Курдюмов С.П., Малинецкий Р.Р., Потапов А.Б. Нестационарные структуры, динамический хаос, клеточные автоматы / В книге «Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур». – М.: Наука, 1996. – С. 95-164
- 171.** Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. Т. I. М.: вш, 1981.- 687 с.
- 172.** Ларуш Л. Вы на самом деле хотели бы всё знать об экономике? / Пер. с англ. – М.: Шиллеровский институт, 1992. – 540 с.
- 173.** Ларуш, Линдон Х. Физическая экономика как платоновская эпистемологическая основа всех отраслей человеческого знания. Москва: Научная книга, 1997. – 125 с.

- 174.** Лебег А.Л. Интегрирование и отыскание примитивных функций. – М.: ГТТИ, 1934. – 192 с.
- 175.** Левицкий Е.М., Меньшиков С.М., Чижов Ю.А. Моделирование американской экономики. – Новосибирск: Наука, 1977. – 254 с.
- 176.** Лобанова Е.Д. Прогнозирование с учётом цикличности экономического роста // Экономические науки. – 1991. – №1. – С. 12-19
- 177.** Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь. – М.: Наука, 1987. – 510 с.
- 178.** Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. Учебное руководство. – М.: Наука, 1990. – 272 с.
- 179.** Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика: Начальный курс. 1-е издание – М.: Дело, 1997. – 248 с.; 6-е издание, переработанное и дополненное – М.: Дело, 2004. – 576 с.
- 180.** Маленво Э. Статистические методы эконометрии. – М.: Статистика, 1975. Выпуск 1. – 288 с.; – М.: Статистика, 1976. Выпуск 2. – 312 с.
- 181.** Малинецкий Г.Г. Прогноз и моделирование кризисов и мировой динамики/Редакторы А.А. Акаев, А.В. Коротаев. – М.: ЛКИ/URSS, 2012
- 182.** Манзон Б.М. Maple V Power Edition. – М.: Информационно-издательский дом «Филинъ», 1998. – 240 с.
- 183.** Математические методы анализа экономики. – М.: Издательство МГУ, 1983. – 152 с.
- 184.** Матросов А.В. MAPLE 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 528 с.
- 185.** Мольер Жан Батист. Мещанин во дворянстве. Мнимый больной (сборник). – М.: ООО Издательство ЭКСМО, 2015. – 230 с.
- 186.** Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастическое и хаотическое колебания. – М.: Наука, 1987. – 422 с.
- 187.** «Новая эконометрика» : монография / И.Г. Винтизенко (Северо-Кавказский федеральный университет), Р.Х. Ильясов (Чеченский

государственный университет). – Ставрополь : АГРУС Ставропольского гос. аграрного ун-та, 2018. – 480 с.

**188.** Новое индустриальное общество : [пер. с англ.] / Джон Гэлбрейт. - Москва : АСТ ; Санкт-Петербург : Транзиткнига, 2004 (Тип. изд-ва Самар. Дом печати). – 602 с.

**189.** Норт Д. Институциональные изменения: рамки анализа // Вопросы экономики. – 1997. – № 3. – С. 7.

**190.** Обзор финансовой стабильности [электронный ресурс]: – Режим доступа: [https://www.cbr.ru/collection/collection/file/19790/ofs\\_19-01.pdf](https://www.cbr.ru/collection/collection/file/19790/ofs_19-01.pdf)

**191.** Огородникова Т.В. Индивидуальное и коллективное волновое поведение микросубъектов экономики: методологический аспект. Автореферат диссертации на соискание учёной степени доктора экономических наук по специальности 08.00.01 – экономическая теория. – Иркутск: Байкальский государственный университет экономики и права, 2007. – 40 с.

**192.** Основные направления единой государственной денежно-кредитной политики на 2018 год и период 2019 и 2020 годов [электронный ресурс]: – Режим доступа: [http://www.cbr.ru/publ/ondkp/on\\_2018%282019-2020%29.pdf](http://www.cbr.ru/publ/ondkp/on_2018%282019-2020%29.pdf)

**193.** Панченков А.Н. Эконофизика. Том 1 и 2. – М.: ИНФРА-М, 2003

**194.** Перепелица В.А., Попова Е.В. Математические модели и методы оценки рисков экономических, социальных и аграрных процессов. – Ростов-на-Дону: Издательство Ростовского государственного университета, 2002. – 202 с.

**195.** Перепелица В.А., Попова Е.В. Фрактальный анализ поведения природных временных рядов // Современные аспекты экономики. – 2002. - № 9 (22). – С. 185-200

**196.** Песаран М., Слейтер Л. Динамическая регрессия: теория и алгоритмы. – М.: Финансы и статистика, 1984. – 370 с.

- 197.** Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории хаоса в инвестициях и экономике. – М.: Интернет-трейдинг, 2004. – 304 с.
- 198.** Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала: Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка / Перевод с английского. – М.: Издательство «Мир», 2000. – 333 с.
- 199.** Полетаев А.В., Савельева И.М. Циклы Кондратьева и развитие капитализма (опыт междисциплинарного исследования). – М.: Наука, 1993. – 249 с.
- 200.** Поппер К. Р. Открытое общество и его враги. Том 1. Чары Платона. The Open Society and its Enemies. Volume 1. The Spell of Plato // Перевод с английского под общей редакцией В.Н. Садовского. – М.: Феникс, Международный фонд «Культурная инициатива» Soros Foundation (USA), 1992. – 448 с.
- 201.** Практикум по эконометрике: Учебное пособие для экономических вузов. И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Н.М. Гордеенко, И.В. Бабаева, Т.В. Костеева, Б.А. Михайлов / Под редакцией члена-корреспондента РАН И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 192 с.
- 202.** Пректер Р., Фрост А.Дж. Волновой принцип Эллиотта: Ключ к пониманию рынка. 3-е издание. – М.: Издательство «Альпина Бизнес Букс», 2007. – 268 с.
- 203.** Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. – М.: Прогресс, 1986. – 278 с.; – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 312 с.
- 204.** Прохоров Г.В., Леденёв М.А., Колбеков В.В. Пакет символьных вычислений MAPLE V [Электронный ресурс]. – 198 с. – Режим доступа: [www.isuct.ru](http://www.isuct.ru)

- 205.** Пуарье Д. Эконометрия случайных изменений (с применением сплайн-функций) / Под редакцией Г.Г. Пирогова. Перевод с английского В.В. Минахина. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 184 с.
- 206.** Райкрофт Ч. «Критический словарь психоанализа». Пер. с англ. Л. В. Топоровой, С. В. Воронина, И. Н. Гвоздева под редакцией кандидата философских наук С. М. Черкасова. – СПб.; Восточно-Европейский Институт Психоанализа, 1995
- 207.** Редькина Н.В. Моделирование и анализ экономических процессов билинейными сплайнами // Материалы Международной научной конференции «Татищевские чтения: актуальные проблемы науки и практики (АПНП-2004)». – Тольятти: Издательство Волжского университета имени В.Н. Татищева, 2004. – С. 67-70
- 208.** Редькина Н.В. Региональная внешняя торговля. Структурный CASE-анализ // Научные труды IV-ой Международной конференции «Новые технологии в управлении, бизнесе и праве – НТ+УБП'2004». – Невинномысск: Издательство Института управления, бизнеса и права (г. Ростов-на-Дону, Невинномысский филиал), 2004. – С. 216-218
- 209.** Редькина Н.В. Структурный CASE-анализ процессов региональной внешней торговли (на материалах Ставропольского края). Диссертация на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальностям 08.00.05 – экономика и управление народным хозяйством: региональная экономика и 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Ставрополь: Ставропольский государственный университет, 2004. – 183 с.
- 210.** Редькина Н.В. Структурный CASE-анализ процессов региональной внешней торговли (на материалах Ставропольского края). Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальностям 08.00.05 – экономика и управление народным хозяйством: региональная экономика и 08.00.13 – математические и инструментальные

методы экономики. – Ставрополь: Северо-Кавказский государственный технический университет, 2004. – 24 с.

**211.** Редькина Н.В. Цикличность в экономических процессах. Аппарат её обнаружения и визуализации – 2 / Сборник статей II-ой Всероссийской научно-практической конференции «Потенциал развития России XXI века». – Пенза: Издательство Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г. Белинского и Приволжского Дома знаний, 2005. – С. 17-20

**212.** Редькина Н.В. Цикличность в экономических процессах. Аппарат её обнаружения и визуализации – 1 / Научные труды VI-го Всероссийского симпозиума «Математическое моделирование и компьютерные технологии». – Кисловодск: Издательский центр Кисловодского института экономики и права. Том 3. «Информационные технологии», 2004. – С. 11-13

**213.** Редькина Н.В. Экономические циклы – новые подходы к обнаружению, анализу, прогнозированию // В сборнике «Циклы». Материалы V-ой Международной конференции по циклам. Том 1. – Ставрополь: Издательство Северо-Кавказского государственного технического университета, 2004. – С. 87-90

**214.** Романовский М.Ю., Романовский Ю.М. Введение в эконофизику: статистические и динамические модели. Издание 2-ое, исправленное и дополненное. – М.: ИКИ, 2007. – 340 с.

**215.** Россия и страны мира [электронный ресурс]: – Режим доступа: [http://www.gks.ru/bgd/regl/b18\\_39/Main.htm](http://www.gks.ru/bgd/regl/b18_39/Main.htm)

**216.** Рубль отвязался от цен на нефть: как России удалось добиться восстановления экономического роста [электронный ресурс]: – Режим доступа: <https://ru.rt.com/a3mb>

**217.** Рыженков А.В. Модели циклического роста. – Новосибирск: Издательство Института экономики и организации промышленного производства СО РАН, 2003. – 240 с.

- 218.** Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности // Странные атTRACTоры. – М.: Издательство «Мир», 1981. – С. 117-151
- 219.** Самуэльсон П.Э., Нордхаус В.Д. Экономика. – М.: Издательство Вильямс, 18-е издание, 2006. – 1358 с.
- 220.** Сергеева Л.Н. Моделирование поведения экономических систем методами нелинейной динамики (теории хаоса). – Запорожье: Издательство Запорожского государственного университета, 2002. – 227 с.
- 221.** Словари и энциклопедии на Академике [электронный ресурс]: – Режим доступа: <https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/227307>
- 222.** Слуцкий Е.Е. Избранные труды: Теория вероятностей. Математическая статистика. – М.: – Л.: Издательство АН СССР, 1950. – 596 с.; – М.: – Л.: Издательство АН СССР, 1960. – 612 с.
- 223.** Слуцкий Е.Е. Сложение случайных причин как источник циклических процессов // Вопросы конъюнктуры. – Том III. – Выпуск 1. – М.: Финиздат НКФ, 1927. – С. 34-64
- 224.** Современная математика для инженеров / Под редакцией Э.Ф. Беккенбаха. – М.: Издательство иностранной литературы, 1958. – 500
- 225.** Современная рыночная экономика. Энциклопедический словарь / В.И. Кушлин. – М.: Издательство РАГС, 2004. – 744 с.
- 226.** Современный философский словарь / Под общей редакцией д.ф.н., профессора В.Е. Кемерова. – 2-ое издание, исправленное и дополненное. – Лондон: – Франкфурт-на-Майне: – Париж: – Люксембург: – Москва: – Минск: ПАНПРИНТ, 1998. – 1064 с.
- 227.** Сплайн-функции в экономико-статистических исследованиях / Ответственный редактор Б.Б. Розин. Сборник статей. – Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, ИЭОПП СО АН СССР, 1987. – 206 с. Spline Functions in Economic and Statistical Studies / Editor B.B. Rosin. – Novosibirsk: Nauka, Siberian Department, 1987. – 206 p.

- 228.** Справочник по математике для экономистов (учебное пособие). – М.: 2007. – 464 с.
- 229.** Статистика внешнего сектора [электронный ресурс]: – Режим доступа: <https://www.cbr.ru/statistics/?PrtId=svs>
- 230.** Талеб Н.Н. Чёрный лебедь. Под знаком непредсказуемости / Перевод с английского В. Сонькина, А. Бердичевского, М. Костионовой, О. Попова под редакцией М. Тюнькиной. – М.: Издательство «Колибри», 2009. – 528 с.
- 231.** Тереск А.А., Коган И.Ш. Краткая предыстория использования методологии физики в экономике [Электронный ресурс] - Режим доступа: [http://physicalsystems.org/index\\_07.10.1](http://physicalsystems.org/index_07.10.1).
- 232.** Тимошенко П.Н. Балансовое прогнозирование в моделях экономических систем / Материалы VI региональной научно-технической конференции «Вузовская наука – Северо-Кавказскому региону. Экономические науки. Часть 3». – Ставрополь: Издательство Северо-Кавказского государственного технического университета, 2002. – С. 67
- 233.** Тимошенко П.Н. Балансовые методы многофакторного сплайн-прогнозирования экономических процессов. Диссертация на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, 2003. – 158 с.
- 234.** Тимошенко П.Н. Балансовые методы многофакторного сплайн-прогнозирования экономических процессов. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный экономический университет «РИНХ», 2003. – 28 с.
- 235.** Тимошенко П.Н. Модели прогнозики / Научные труды V-го всероссийского симпозиума «Математическое моделирование и компьютерные

технологии». – Кисловодск: Издательский центр Кисловодского института экономики и права. Том 3. «Информационные технологии», 2002. – С. 37-38

**236.** Тимошенко П.Н. Сплайн-прогнозирование в экономике / Материалы VI-ой региональной научно-технической конференции «Вузовская наука – Северо-Кавказскому региону. Экономические науки. Часть 3». – Ставрополь: Издательство Северо-Кавказского государственного технического университета, 2002. – С. 68

**237.** Тимошенко П.Н., Яковенко В.С. Непрерывные сплайн-технологии анализа и прогнозирования экономических систем / Сборник научных трудов Международной научно-практической конференции «Иновационные технологии научных исследований социально-экономических процессов». Часть 2. – Пенза: Издательство Пензенского технологического института, Филиала Всероссийского заочного финансово-экономического института и Приволжского Дома знаний, 2003. – С. 67-72

**238.** Тимошенко П.Н., Яковенко В.С. Сплайн-анализ и сплайн-прогнозирование в современной экономике / Сборник научных трудов V-ой Международной научно-практической конференции «Экономика, экология и общество России в 21-ом столетии». – СПб: Издательство Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, Международной высшей школы управления, 2003. – С. 110-

**239.** Тимошенко П.Н., Яковенко В.С. Экономические циклы – новые подходы к обнаружению, анализу, прогнозированию / Научные материалы Пятой Международной конференции «Циклы» (Том 1). – Ставрополь: Издательство Северо-Кавказского государственного технического университета, 2003. – С. 87-90

**240.** Тинберген Я., Босс Х. Математические модели экономического роста. – М.: Издательство «Экономика», 1967. – 480 с.

**241.** Тинтнер Г. Введение в эконометрию. – М.: Статистика, 1965. – 238 с.

- 242.** Устюжанина Е.В. 10 заповедей экономического мышления. Заповедь 7. Усреднение рождает химеры // Новое время. – 2002. – № 50. – С. 20-21
- 243.** Федосеев В.В. Экономико-математические методы и модели в маркетинге. – М.: Финстатинформ, 1996. – 320 с.
- 244.** Федотова Г.В., Ильясов Р.Х., Церенова Б.И. Оценка индикаторов прогноза социально-экономического развития России на 2018-2020 гг. // Финансовая аналитика: проблемы и решения. – 2018. – Т. 11. – № 4 (346). – С. 368-386. (1.1/0.3 п.л.)
- 245.** Феноменология восприятия / Морис Мерло-Понти; Пер. с фр. под ред. И. С. Вдовиной, С. Л. Фокина. - СПб. : Ювента : Наука, 1999. – 605 с.
- 246.** Физическая экономика: теория, методология, системообразующие начала [Текст] : монография / Д.Е. Давыдянц. – М. : МИРАКЛЬ, 2016. – 72 с.
- 247.** Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А. М. Прохоров. - М. : Сов. энцикл., 1983. - 928 с.
- 248.** Финансовая математика. Математическое моделирование финансовых операций (вузовский учебник). – М.:, 2004
- 249.** Фон Берталанфи Л. Общая теория систем – критический обзор // Исследование по общей теории систем / Перевод с английского. – М.: Издательство «Прогресс», 1969. – 519 с.
- 250.** Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика / Под редакцией А.Н. Колмогорова. – М.: Издательство «Мир», 1966. – 272 с.
- 251.** Форрестер Дж. Мировая динамика. Перевод с английского А.Н. Ворошука, С.А. Пегова. Под редакцией Д.М. Гвишиани, Н.Н. Моисеева. С предисловием Д.М. Гвишиани и послесловием Н.Н. Моисеева. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 168 с.
- 252.** Фриш Р. Сбережение и планирование оборота. Sparing og cirkulasjonsregulering. – Stockholm: 1930. – 288 с.
- 253.** Фриш Р. Эконометрика в современном мире. Econometrics in the World Today. – Stockholm: 1970. – 416 с.

- 254.** Фрост А.Дж., Пректер Р. Волновой принцип Эллиотта. Ключ к пониманию рынка. – М.: Издательство «Альпина Бизнес Букс», 2001. – 280 с.
- 255.** Хемминг Р.В. Численные методы (для научных работников и инженеров). 2-е издание. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1972. – 400 с.
- 256.** Чадранцев А.В. Определение «прогнозируемости» экономических процессов. Диссертация на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, 2005. – 163 с.
- 257.** Чадранцев А.В. Определение «прогнозируемости» экономических процессов. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Ставрополь: Ставропольский государственный университет, 2005. – 28 с.
- 258.** Черных Н.В., Пакшин П.В. Алгоритмы численного решения стохастических дифференциальных систем с переключаемой диффузией. – Управление большими системами: сборник трудов. – 2012. – № 36. – С. 106-143
- 259.** Шадуев М.Г. Алгоритм «скользящего прогноза» в обработке временных рядов. // Приложение к журналу «Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Общественные науки». – 2000. – №3. – С. 44-49
- 260.** Шадуев М.Г. Использование периода упреждения для выбора релевантной модели экономического процесса // Приложение к журналу «Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Общественные науки». – 2000. – №2. – С. 56-61
- 261.** Шадуев М.Г. Период упреждения как критерий прогнозируемости экономических процессов. Диссертация на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические

и инструментальные методы экономики. – Кисловодск: Кисловодский институт экономики и права, 2001. – 148 с.

**262.** Шадуев М.Г. Период упреждения как критерий прогнозируемости экономических процессов. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Кисловодск: Кисловодский институт экономики и права, 2001. – 24 с.

**263.** Шадуев М.Г. Потребление и инвестиции. // Приложение к журналу «Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Общественные науки». – 1999. – №4. – С. 65-71

**264.** Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 248 с.

**265.** Шиханович Ю.А. Введение в современную математику. Начальные понятия. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1965. – 376 с.

**266.** Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная хаотическая динамика», 2001. – 528 с.

**267.** Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. Системы и модели. – М.: Радио и связь, 1982. – 152 с.

**268.** Шумпетер Дж.А. Бизнес-циклы: теоретический, исторический и статистический анализ капиталистического процесса. В 2-х томах. Business Cycles: a Theoretical, Historical and Statistical Analysis of the Capitalist Processes. – Wien: 1939. – 268 с.

**269.** Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. – М.: Издательство «Мир», 1998. – 288 с.

**270.** Эконометрика: Учебник для студентов вузов. И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Н.М. Гордеенко, И.В. Бабаева, Т.В. Костеева, Б.А. Михайлов / Под

редакцией члена-корреспондента РАН И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 344 с.

**271.** Эконофизика и эволюционная экономика. Научная сессия Отделения физических наук РАН 02.11. 2010 г. // Успехи физических наук. – 2011. – Том 181. – С. 753-786

**272.** Эконофизика. Современная физика в поисках экономической теории / Под редакцией В.В. Харитонова и А.А. Ежова. – М.: Издательство МИФИ, 2007. – 624 с.

**273.** Экспорт Российской Федерации сырой нефти [Электронный ресурс] - Режим доступа: <http://www.cbr.ru/statistics/?PrtId=svs>

**274.** Эллиott Р.Н. Закон природы: Загадка мироздания [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://knigogid.ru/books/1869279-zakon-prirody-sekret-vselennoy/toread>

**275.** Энциклопедия по экономике [Электронный ресурс] - Режим доступа: <https://economy-ru.info/info/195218/>

**276.** Яглом И.М. Математические структуры и математическое моделирование. – М.: Советское Радио, 1980. – 145 с.

**277.** Яковенко В.С. Прогнозирование в моделях экономических систем / Научные труды III-ей Международной конференции «Новые технологии в управлении, бизнесе и праве – НТ+УБП'2003». – Невинномысск: Издательство Института управления, бизнеса и права (г. Ростов-на-Дону, Невинномысский филиал), 2003. – С. 216-218

**278.** Яковенко В.С. Реальные сплайн-анализ и сплайн-прогнозирование маркетинговой деятельности в регионе / Научные труды III-ей Международной конференции «Новые технологии в управлении, бизнесе и праве – НТ+УБП'2003». – Невинномысск: Издательство Института управления, бизнеса и права (г. Ростов-на-Дону, Невинномысский филиал), 2003. – С. 218-223

- 279.** Яковенко В.С. Сплайн-технологии моделирования, анализа и прогнозирования в региональном маркетинге. Диссертация на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, 2003. – 154 с.
- 280.** Яковенко В.С. Сплайн-технологии моделирования, анализа и прогнозирования в региональном маркетинге. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный экономический университет «РИНХ», 2003. – 32 с.
- 281.** Яковенко В.С. Экономическая цикломатика: теория, методология, практика. Диссертация на соискание учёной степени доктора экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, 2008. – 409 с.
- 282.** Яковенко В.С. Экономическая цикломатика: теория, методология, практика. Автореферат диссертации на соискание учёной степени доктора экономических наук по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики. – Ставрополь: Ставропольский государственный университет, 2008. – 56 с.
- 283.** Яковенко В.С., Винтизенко И.Г. Парадигма «новой эконометрики»/ Экономика и предпринимательство. – 2017. – Т. 11. – № 9(3). – С. 115-120. Journal of Economy and Entrepreneurship. – 2017. – Vol. 11. – № 9-3. – P. 115-120
- 284.** Arnheim R. Art and Visual Perception, Искусство и визуальное восприятие / Сокращённый перевод с английского В.Н. Самохина. Общая редакция и вступительная статья В.П. Шестакова. – М.: Прогресс, 1974. – 260 с.

- 285.** Benkard, C. L. «A Dynamic Analysis of the Market for Wide-Bodied Commercial Aircraft». – Review of Economic Studies, – 2004. – v. 71, – p. 581–611.
- 286.** Bierbooms, R. (2012). Performance analysis of production lines : discrete and continuous flow models Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven. 171 c.
- 287.** Boehm B.W. A Spiral Model of Software Development and Enhancement // IEEE Computer. – 1988. – Volume 21. – № 5. – p. 61-72
- 288.** BP Energy Outlook [электронный ресурс]: – Режим доступа: <https://www.bp.com/en/global/corporate/energy-economics/energy-outlook.html>
- 289.** Elliott R.N. Nature's Law: The Secret of Universe. – New York: Plenum Press, 1946. – 312 p.
- 290.** Elliott R.N. The Wave Principle – New York: Plenum Press, 1938. – 264 p.
- 291.** Feder J. Fractals. – New York: Plenum Press, 1988. – 283 p.
- 292.** Fedotova G.V., Gontar A.A., Ilyasov R.H., Ksenda V.M. The strategy of provision of tax security of the state in the conditions of information economy // Studies in Systems, Decision and Control. – 2019. – T. 182. – C. 217-228
- 293.** Feng, P., Qian, J. Forecasting the yield curve using a dynamic natural cubic spline model. Economics Letters, 2018, vol. 168, pp. 73-76], [Pütz, P., Kneib, T. A penalized spline estimator for fixed effects panel data models. Advances in Statistical Analysis, 2018, vol. 102 (2), pp. 145-166
- 294.** Frisch R. Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics. — L.: Allen&Unwin, 1933
- 295.** Frisch R.A.K. Maxima and Minima. Theory and Economic Applications. – Chicago: 1966
- 296.** Gowrisankaran G., Town R. «Dynamic Equilibrium in the Hospital Industry».– Journal of Economics and Management Strategy, – 1997. – V. 6. – p. 45–74.
- 297.** Haken H. Synergetics. – Berlin: Springer, 1997. – 212 p.

- 298.** Hamilton, James D, 1989. "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle," *Econometrica*, Econometric Society, vol. 57(2), pages 357-384, March.
- 299.** Ilyasov R. Kh. Flow Correlations Within Time Intervals Of Variable Length: Spline Analysis // The European Proceedings of Social and Behavioural Sciences EpSBS Conference: SCTCMG 2021 – Social and Cultural Transformations in the Context of Modern Globalism. – 2021. <https://doi.org/10.15405/epsbs.2021.11.275>
- 300.** Ilyasov R. Kh. Residential loan debt dynamics: Phase analysis of cyclicity // AIP Conference Proceedings. – 2021. <https://doi.org/10.1063/5.0075699>
- 301.** Ilyasov R.H. About The Method Of Analysis Of Economic Correlations By Differentiation Of Spline Models // Modern Applied Science. 2014. T. 8. № 5. C. 197-203
- 302.** Ilyasov R.H., Yakovenko V.S. (2021) Spline-analysis of Flow Correlation in Economic Systems. In: Bogoviz A.V. (eds) The Challenge of Sustainability in Agricultural Systems. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 206. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-72110-7\\_66](https://doi.org/10.1007/978-3-030-72110-7_66)
- 303.** Ilyasov R.K. (2022) Flows in the Digital Economy: New Approaches to Modeling, Analysis and Management. In: Trifonov P.V., Charaeva M.V. (eds) Strategies and Trends in Organizational and Project Management. DITEM 2021. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 380. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-94245-8\\_62](https://doi.org/10.1007/978-3-030-94245-8_62)
- 304.** Il'yasov R.Kh., Kurazova D.A. Forecasting the situation in the financial market and evaluating its impact on the industry development // Дайджест-финансы. 2018. Т. 23. № 1 (245). С. 68-80
- 305.** Ilyasov R.Kh., Yakovenko V.S., Malyutina T.D., Tkachenko D.D., Magomadov E.M. Methods of "new econometrics" in study of interrelations with variable structure // The European Proceedings of Social & Behavioural Sciences EpSBS Conference: SCTCGM 2018 - Social and Cultural Transformations in the Context of Modern Globalism. – 2019. – С. 497-504

- 306.** R. Ilyasov, Kh. Yusupova. Analysis of the uneven development of the labour market for example, the North Caucasus federal district // Economy Modernization: New Challenges and Innovative Practice 4th International Conference, Conference Proceedings. Scope Academic House ; Science editor R. Berton. 2016. C. 141-146
- 307.** R. Ilyasov. The uneven regional development: analysis of spatio-temporal models // 3rd International Conference «Science and practice: a new level of integration in the modern world» March 5, 2017, Sheffield, UK. p. 47-50
- 308.** Jeffrey Parker. Economics 314. Coursebook, 2010
- 309.** Kuan, C and White, H., (1994). Artificial neural network: econometric perspective, Econometric Reviews, Vol.13, Pp. 1-91 and Pp.139-143.
- 310.** LeBaron, B., & Yamamoto, R. (2007). Long-memory in an order-driven market. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 383(1 SPEC. ISS.), 85-89. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.04.090>
- 311.** Lillo, F., Mike, S., Farmer, J.D.: Theory for long memory in supply and demand. Phys. Rev. E 7106(6 pt 2), 287–297 (2005)
- 312.** Mandelbrot B.B. New methods in statistical economics // Journal of Political Economy. – 1963. – Volume 71. – P. 421-440
- 313.** Mandelbrot B.B. Statistical Methodology for Non-periodic Cycles: from the Covariance to the R\S analysis // Annals of Economic and Social Measurements. – 1972. – № 1. – P. 259-290
- 314.** Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. – New York: W.H. Freeman, 1982. – 456 p.
- 315.** Mandelbrot B.B. The Variation of Certain Speculative Prices / In P.H. Cootner, editor. “The Random Character of Stock Market Prices”. – Cambridge: M.I.T. Press, 1964. – 510 p.
- 316.** Mantegna R., Stanby H. An introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000

- 317.** Mao X., Yuan C., Yin G. Numerical method for stationary distribution of stochastic differential equations with Markovian switching // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2005. – №174. – P. 1-27
- 318.** Murdal G. Monetary Equilibrium. Денежное равновесие, 1939
- 319.** Pakes, A., Ostrovsky, M., & Berry, S. (2007). Simple estimators for the parameters of discrete dynamic games (with entry/exit examples). Rand Journal of Economics, 38(2), 373–399.
- 320.** Pakes, A., P. McGuire «Computing Markov-Perfect Nash Equilibria: Numerical Implications of a Dynamic Differentiated Product Model. Rand Journal of Economics» – 1994, – v. 25, – p. 555–589.
- 321.** Pesendorfer, M., Schmidt-Dengler P. «Identification and Estimation of Dynamic Games». 2003: - Working Paper 9726, NBER
- 322.** Poirier Dale J. The Econometrics of Structural Change. With Special Emphasis on Spline Functions. – Amsterdam: – New York: – Oxford: North-Holland Publishing Company, 1976. – 183 p.
- 323.** Publisher, T. Momentum meets value investing in a small European market. Portuguese Economic Journal, 2018, vol. 17 (1), pp. 59
- 324.** Qualitative analysis and econometric estimation of continuous time dynamic models : G. Gandolfo, with G. Martinengo and P.C. Padoan, (North-Holland, Amsterdam, 1981) pp. i-xiv, 1-253
- 325.** R. Ilyasov, Kh. Yusupova. Analysis of the uneven development of the labour market for example, the North Caucasus federal district // Economy Modernization: New Challenges and Innovative Practice 4th International Conference, Conference Proceedings. Scope Academic House ; Science editor R. Berton. 2016. C. 141-146
- 326.** R. Ilyasov. The uneven regional development: analysis of spatio-temporal models // 3rd International Conference «Science and practice: a new level of integration in the modern world» March 5, 2017, Sheffield, UK. p. 47-50

- 327.** Samuelson P.A. Economics: An Introductory Analysis. Экономика: Вводный анализ, 1948
- 328.** Schoenberg I.J., Whitney A. Sur la positivite des determinants de translations de functions de frequence de Polya avec une application au probleme d'interpolation par les functions “spline” // Comptes Rendus. – 1949. – Volume 228. – P. 1996-1998
- 329.** Tong, Howell Non-linear time series: A dynamical system approach Oxford; Clarendon press, 1990 XVI, 564 c.
- 330.** YIN G.G., ZHU C. Stochastic modeling and applied probability. Hybrid switching diffusions. Properties and applications. – Springer Science + Business Media, LLC, 2010. – 395 p.
- 331.** Zhang, Y., Ma, F., Zhu, B. Intraday momentum and stock return predictability: Evidence from China. Economic Modelling, 2019, vol. 76, pp. 319-329