Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук» (ФИЦ ИУ РАН)

Принято Ученым советом
ФИЦ ИУ РАН, протокол № 5
от «27» 06 2022 г.

УТВЕРЖДАЮ
Директор ФИЦ ИУ РАН
_____________ И.А.Соколов
« » _____ 2022 г.

ПРОГРАММА
ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ В АСПИРАНТУРУ
по группе научных специальностей 1.1
«Математика и механика»

Москва 2022

I.МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Предел числовой последовательности. Критерий Коши. Существование предела у монотонно возрастающая ограниченной сверху последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании сходящейся подпоследовательности у ограниченной последовательности.

2.Числовые ряды. Критерий Коши. Признаки сходимости (признаки сравнения, признак Даламбера, признак Лейбница, признак Дирихле).

3. Предел и непрерывность функции. Свойства непрерывных функций на отрезке (теоремы Вейерштрасса об ограниченности и достижимости верхней и нижней грани. Теорема Коши о промежуточных значениях). Равномерная непрерывность.

4. Дифференцируемые функции одной и нескольких переменных. Производные и дифференциал. Формула Тейлора для функций (одной и нескольких переменных). Ряды Тейлора. Теорема о неявных функциях (без доказательства).

5. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора. Достаточные условия монотонности дифференцируемой функции. Выпуклые функции. Достаточные условия выпуклости функции, дважды дифференцируемой на интервале. Асимптоты.

6.Экстремумы функций одной и нескольких переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума для дифференцируемых функций.

7. Интеграл Римана. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функции по Риману. Теорема о среднем. Формула Ньютона–Лейбница для первообразной. Формула интегрирования по частям. Несобственные интегралы. Признаки сходимости несобственных интегралов. Признак Дирихле.

8. Понятие кратного интеграла по Риману. Сведение кратного интеграла к повторному. Замена переменных в кратных интегралах.

9. Понятие гладкой кривой, гладкой поверхности, их параметрическое задание. Определение длины кривой, площади куска поверхности. Криволинейные интегралы первого и второго рода. Поверхностные интегралы первого и второго рода.

10. Формула Грина на плоскости. Формула Гаусса–Остроградского. Формула Стокса. Дифференциальные операции. Градиент, дивергенция, ротор (вихрь). Криволинейные интегралы, не зависящие от пути интегрирования. Потенциальные векторные поля. Полный дифференциал, необходимые условия, достаточные условия.

11. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости последовательности непрерывных функций. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функциональных радов.

12. Интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Теоремы о непрерывности и дифференцируемости интегралов, зависящих от параметра.

13. Ряды Фурье по тригонометрической системе. Сходимость радов Фурье для кусочно-гладких функций. Порядок убывания коэффициентов Фурье для n раз непрерывно-дифференцируемой функции. Равномерная сходимость рада Фурье для непрерывно-дифференцируемой функции. Равномерное приближение непрерывных функций на отрезке тригонометрическими полиномами и многочленами.

14. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Понятие гильбертова пространства и абстрактных рядов Фурье по полной ортонормированной системе. Теорема о сходимости в среднем рядов Фурье по тригонометрической системе для функции интегрируемой с квадратом на отрезке.

15. Преобразования Фурье. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

II. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. Понятие линейного пространства. Размерность линейного пространства. Базис, координаты вектора, формулы преобразования координат при переходе от одного базиса к другому.

2. Матрицы и действия над ними. Детерминант квадратной матрицы. Ранг матрицы. Эквивалентность его двух определений в терминах линейной независимости строк (или столбцов) матрицы и в терминах неравенства нулю миноров.

3. Системы линейных алгебраических уравнений. Решение однородной системы. Решение неоднородной системы линейных уравнений. Критерий совместности Кронекера–Капелли.

4. Линейные преобразования в n-мерном пространстве. Матрица линейного преобразования. Изменение матрицы линейного преобразования при замене базиса.

5. Область значений линейного преобразования и его матрица. Произведение линейных преобразований.

6. Собственные векторы и собственные числа линейного преобразования. Характеристический многочлен. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Матрица линейного преобразования в базисе из собственных векторов. Жорданов базис линейного преобразования и жорданова нормальная форма (без доказательства).

7. Скалярное произведение и евклидовы пространства. Координатное представление скалярного произведения. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации.

8. Понятие самосопряженного линейного преобразования. Свойства его собственных значений и собственных векторов. Матрица самосопряженного преобразования.

9. Ортогональные преобразования. Матрица ортогонального преобразования. Ортогональные матрицы. Переход от одного ортогонального базиса к другому.

10. Билинейные и квадратичные формы. Их матрицы и формулы перехода от одного базиса к другому. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом выделения полных квадратов. Приведение к каноническому виду в ортонормированном базисе. Закон инерции для квадратичных форм. Понятие положительно определенной квадратичной формы. Критерий Сильвестра (без доказательства).

11. Разложения невырожденной матрицы в виде произведения ортогональной и верхней треугольной, сингулярное разложение матрицы.

III. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Элементарные методы интегрирования уравнений первого порядка (уравнения с разделяющими переменными, однородные уравнения, линейные уравнения, уравнение Бернулли, уравнения в полных дифференциалах).

2. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения 1-го-порядка и для системы n уравнений 1-го порядка n неизвестными в нормальной форме (без доказательства).

3. Линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение однородного уравнения. Решение неоднородного уравнения со специальной правой частью в виде квазиполинома. Уравнение Эйлера.

4. Решение однородной системы первого порядка с постоянными коэффициентами (случай простых корней).

5. Линейные уравнений n-го порядка с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений однородного уравнения и ее существование. Определитель Вронского. Формула Лиувилля. Возможность понижения порядка однородного уравнения. Решение однородного уравнения. Решение неоднородного уравнения. Метод вариаций произвольных постоянных.

6. Автономные системы. Положение равновесия. Фазовая плоскость и фазовые траектории. Классификация положений равновесия на плоскости. Понятие устойчивости положения равновесия по Ляпунову и асимптотической устойчивости. Теорема об устойчивости по линейному приближению.

7. Первые интегралы автономной системы. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка. Общий вид решения. Задача Коши. Понятие характеристики.

8. Элементы вариационного исчисления. Простейшая задача вариационного исчисления. Вариационная задача при наличии ограничений, изопериметрическая задача.

IV. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Функции одной комплексной переменной. Дифференцируемые функции комплексной переменной. Условия Коши – Римана. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексной переменной.

2. Равенство нулю интеграла от дифференцируемой функции по замкнутому контуру, стягивающемуся в точку. Интегральная форма Коши.

3. Понятие функции регулярной в точке, и в области. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Круг сходимости степенного ряда. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Эквивалентность дифференцируемости и регулярности функции в области. Регулярность равномерно сходящегося ряда и регулярных функций.

4. Разложение в ряд Тейлора функции, дифференцируемой в окрестности точки. Ряд Лорана. Теорема Лиувилля. Принцип максимума модуля регулярной функции.

5. Изолированные особые точки однозначного характера. Классификация устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка. Характеризация особой точки функции в терминах коэффициентов ряда Лорана.

6. Понятие вычета в изолированной особой точке однозначного характера. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов.

7. Разложение мероморных функций на элементарные дроби. Бесконечные произведения. Примеры разложения некоторых целых функций в бесконечные произведения.

8. Теорема единственности регулярной функции, принимающей заданные значения на последовательности точек, предел, которой содержится в области регулярности. Аналитическое продолжение. Понятие полной аналитической функции. Основные многозначные элементарные функции. Понятие о римановой поверхности.

9. Конформные отображения, осуществляемые регулярными функциями. Понятие однолистного отображении. Дробно-линейные отображения и их свойства. Отображения, осуществляемые с помощью некоторых элементарных функций. Общая теорема Римана о существовании конформных отображений (без доказательства). Принцип соответствия границ при конформном отображении.

V. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных 2-го порядка. Приведение к каноническому виду в точке. Классификация уравнений. Эллиптические, гиперболические и параболические уравнения.

2. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка на плоскости. Понятие характеристики. Приведение к каноническому виду в области. Задачи Коши. Теорема Коши – Ковалевской (без доказательства).

3. Понятие корректной краевой задачи для уравнений в частных производных. Примеры некоторых задач (задачи Коши для уравнения Лапласа). Постановка классических задач математической физики и их физический смысл (задача Коши и смешанная задача для уравнения колебания струны, для уравнения теплопроводности, задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа).

4. Интегральные уравнения Фредгольма. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Теорема Фредгольма для интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывным ядром (без доказательства). Обобщение на случай полярных ядер. Метод последовательных приближений и ряд Неймана.

5. Задача Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера в случае уравнения колебания струны. Существованию и единственность решения. Область зависимости решения от начальных данных.

6. Смешанные задачи для гиперболических уравнений. Метод Фурье (метод разделения переменных). Единственность решения.

7. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Теорема существования и единственности. Формула Пуассона. Фундаментальное решение и его смысл.

8. Смешанная задача для уравнения теплопроводности. Метод Фурье (метод разделения переменных). Единственность решения, принцип максимума.

9. Уравнения Лапласа и Пуассона. Гармонические функции и их свойства. Формулы Грина. Теорема о среднем для гармонических функций. Принцип максимума и минимума для гармонических функций.

10. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Фундаментальное решение. Понятие функции Грина дли задачи Дирихле. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге методом Фурье.

11. Задача Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона. Необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. Математический анализ.
1. КУДРЯВЦЕВ Л.Д., Курс математического анализа, т.1 и т.2. М.: Высшая школа, 1981.
2. НИКОЛЬСКИЙ С.М., Курс математического анализа, т.1 и т.2. М.: Наука, 1990.
3. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. Курс дифференциального анализа, т.1, т.2 и т.3. М.: Физматлит, 2008.
4. СМИРНОВ В.И., Курс высшей математики, т.1 и т.2. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2008.

II. Линейная алгебра.

1. БЕКЛЕМИШЕВ Д.В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Физматлит, 2008.
2. ГЕЛЬФАНД И.М., Лекции по линейной алгебре. М.: Добросвет, 2009.
3. КУРОШ Л.Г., Курс высшей алгебры. М.: Высшая школа, 1979.

III. Обыкновение дифференциальные уравнения.

1. ФЕДОРЮК М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
2. СТЕПАНОВ В.В., Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.
3. ПЕТРОВСКИЙ И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
4. ПОНТРЯГИН Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.
5. СМИРНОВ В.И. Курс высшей математики, т.2. М.: Наука, 1965.

IV. Теория Функций комплексного переменного.

1. СИДОРОВ Ю.В., ФЕДОРЮК М.В. ШАБУНИН М.И., Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.
2. ЛАВРЕНТЬЕВ М.А., ШАБАТ Б.В., Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 1958.
3. ПРИВАЛОВ И.И., Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Юрайт, 2016.
4. МАРКУШЕВИЧ А.И. Теория аналитических функций. М.: Наука, 1967, т.1; 1968, т.2.

V. Уравнения математической физики.

1. ТИХОНОВ В.Н., САМАРСКИЙ А.А., Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
2. ПЕТРОВСКИЙ И.Г., Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматлит, 2009.
3. ВЛАДИМИРОВ В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
4. СМИРНОВ В.И., Курс высшей математики. М.: Наука, 1965 т.2; 1981, т.4.